ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 515, с. 34–39

МАТЕМАТИКА

О СТРУКТУРЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ЛАПЛАСА ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

© 2024 г. Йо. С. Квон[1,*], А. Д. Медных[2,3,], И. А. Медных[2,3,***]**

Представлено академиком В.Г. Романовым
Получено 21.04.2023 г.
После доработки 19.01.2024 г.
Принято к публикации 24.01.2024 г.

В данной работе изучается характеристический полином матрицы Лапласа для циркулянтных графов. Показано, что он представляется в виде конечного произведения алгебраических функций, вычисленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева. Важным следствием полученного результата является свойство периодичности характеристических полиномов, вычисленных в предписанных целых числах. Также доказано, что с точностью до явно указанных линейных множителей характеристические полиномы циркулянтных графов всегда являются полными квадратами.

Ключевые слова: циркулянтный граф, матрица Лапласа, собственные значения, корневое остовное дерево

DOI: 10.31857/S2686954324010059, **EDN:** ZTWHOM

В предыдущих работах авторов [1, 2, 3] были получены структурные теоремы, описывающие свойства числа остовных деревьев, корневых остовных лесов и индекса Кирхгофа для семейства циркулянтных графов. Все эти величины являются спектральными инвариантами, т.е. зависят от собственных значений характеристического полинома матрицы Лапласа. Структура самого полинома оставалась неизвестной. В недавних работах [4, 5] было обнаружено, что характеристической полином для ряда известных семейств графов, таких как тета-граф, гантельный граф и граф пропеллера, эффективно выражается через полиномы Чебышева. Эти результаты дали ключ к пониманию структуры характеристического полинома для циркулянтных графов, которая и описывается в данном сообщении.

Более точно в теоремах 1 и 2 характеристический полином представляется в виде конечного произведения алгебраических функций, вычисленных в корнях линейной комбинации полиномов Чебышева. Это позволяет установить периодичность таких полиномов в предписанных целых точках, что представляет интерес с точки зрения дискретной топологической динамики [6]. Теоремы 3 и 4 устанавливают, что с точностью до явно указанных линейных множителей характеристические полиномы циркулянтных графов всегда являются полными квадратами. Это дает возможность получить новое доказательство теорем о числе корневых остовных лесов в циркулянтном графе (следствия 1 и 2).

1. ВВЕДЕНИЕ

Под *графом* G будем понимать конечный, связный граф, допускающий кратные ребра, но не имеющий петель. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и ребер графа G соответственно. Матрица $A = A(G) = \left(a_{u,v}\right)_{u,v\in V(G)}$, где $a_{u,v}$ — число ребер между u и v, называется *матрицей смежности* графа G. Обозначим через $d(v)$ степень вершины $v \in V(G)$ и рассмотрим диагональную матрицу $D = D(G)$ с элементами $d_{v,v} = d(v)$. Матрица $L = L(G) = D(G) - A(G)$ называется *матрицей Лапласа,* или *лапласианом* графа G. *Характеристическим полиномом Лапласа* графа G называется полином $\chi_G(\lambda) = \det\left(L(G) - \lambda I\right)$, где I — единичная матрица, имеющая порядок, совпадающий с числом вершин графа G.

[1] *Йоннамский университет, Кёнсан, Республика Корея*
[2] *Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия*
[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[*] *E-mail: ysookwon@ynu.ac.kr*
[**] *E-mail: smedn@mail.ru*
[***] *E-mail: ilyamednykh@mail.ru*

Граф G на n вершинах называется *циркулянтным*, если существует последовательность целых чисел $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k \le \frac{n}{2}$, такая, что вершина с номером j смежна с вершинами $j \pm s_1, j \pm s_2, \ldots, j \pm s_k$, где номера вершин берутся по модулю n. Если $s_k < n/2$, то все вершины графа имеют четную валентность $2k$. В случае, когда n четно и $s_k = n/2$, все вершины графа имеют нечетную валентность $2k-1$. Циркулянтный граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ связен, если $\gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k, n) = 1$. Это условие всегда предполагаем выполненным.

С каждым циркулянтным графом $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ мы свяжем *ассоциированный полином Лорана*. Он имеет вид $P(z) = 2k - \sum_{\ell=1}^{k}\left(z^{s_\ell} + z^{-s_\ell}\right)$.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ С ЧЕТНОЙ ВАЛЕНТНОСТЬЮ

В текущем разделе приведены явные формулы, выражающие характеристический полином матрицы Лапласа для циркулянтных графов с четной валентностью $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n/2$. Данные формулы представляются в виде конечного произведения s_k членов. Каждый из сомножителей выражается через линейную функцию от полинома Чебышева порядка n и вычисляется в корнях заданного полинома степени s_k.

Собственные значения циркулянтного графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ с четной валентностью вычисляются с помощью ассоциированного полинома Лорана $\lambda_j = P\left(\varepsilon_n^j\right) = 2k - \sum_{\ell=1}^{k}\left(\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell}\right), j = 0, 1, \ldots, n-1$, где $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $G_n = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — *циркулянтный граф четной валентности. Тогда характеристический полином* $\chi_n(\lambda)$ *матрицы Лапласа графа* G_n *с точностью до знака вычисляется по формуле*

$$\prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(w_\ell) - 2\right),$$

где $T_n(w)$ — полином Чебышева первого рода степени n, а величины $w_\ell, \ell = 1, 2, \ldots, s_k$ — корни полинома $Q_\lambda(w) = \lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(w)$.

Наметим схему *доказательства*. Прежде всего заметим, что алгебраическая функция $\prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(w_\ell) - 2\right)$ является целочисленным полиномом. Это следует из теоремы Виета, примененной к корням полинома $Q(w)$. Далее напомним базовые свойства результантов двух полиномов. Пусть $f(x) = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_l)$ и $g(y) = b_0(y - y_1)\ldots(y - y_m)$, где $a_0 b_0 \ne 0$. Имеют место следующие соотношения (см. [7], т. 1.3.1):

$$\operatorname{Res}(f, g) = a_0^m \prod_{j=1}^{l} g(x_j) = b_0^l \prod_{i=1}^{m} f(y_i)$$

и

$$\operatorname{Res}(f, g) = (-1)^{\deg f \deg g} \operatorname{Res}(g, f).$$

Положим $f(w) = 2T_n(w) - 2$ и $g(w) = Q_\lambda(w)$. Тогда $a_0 = 2^n$ и $b_0 = 2^{s_k}$. Полагая $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, запишем характеристический полином с точностью до знака

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(\lambda - \lambda_j\right) = \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - 2k + \sum_{\ell=1}^{k}\left(\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell}\right) =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^{k}\cos\left(\frac{2\pi j s_\ell}{n}\right) =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1} Q_\lambda\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right) =$$

$$= 2^{-ns_k} Res\left(Q_\lambda(w), 2T_n(w) - 2\right) =$$

$$(-1)^{ns_k} 2^{-ns_k} \operatorname{Res}\left(2T_n(w) - 2, Q_\lambda(w)\right) =$$

$$= (-1)^{ns_k} \prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(w_\ell) - 2\right).$$

Фактически, $\chi_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}\left(\lambda - \lambda_j\right) = (-1)^{n(s_k - 1)} \prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(w_\ell) - 2\right)$.

Пример 1 (циклический граф $C_n = C_n(1)$). *Изложенная теория приводит к необходимости нахождения корней уравнения* $\lambda - 2 + 2T_1(w) = 0$ *или* $\lambda - 2 + 2w = 0$. *Таким корнем является* $w = \frac{2 - \lambda}{2}$. *Подставляя полученное значение в фор-*

мулу для характеристического полинома, получим $\chi_n(\lambda) = 2T_n\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - 2.$

Используя представление полинома Чебышева в тригонометрической форме $T_n(w) = \cos(n\arccos(w))$, можно показать, что последовательности $\chi_n(1), \chi_n(2), \chi_n(3)$ и $\chi_n(4)$ являются периодическими с периодами 6,4,3 и 2 соответственно.

Пример 2 (циркулянтный граф $C_n(1,2)$). *Как и ранее, ищем корни соответствующего уравнения* $\lambda - 2 + 2T_1(w) + 2T_2(w) = \lambda + 4w^2 + 2w - 6.$ *Это величины* $w_1 = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{25 - 4\lambda}\right)$ *и* $w_2 = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{25 - 4\lambda}\right)$. *Соответственно,* $\chi_n(\lambda)$ *имеет вид* $(2T_n(w_1) - 2)(2T_n(w_2) - 2)$.

Заметим, что последовательности $\chi_n(4), \chi_n(5)$ и $\chi_n(6)$ – периодичны с периодами 6,5 и 12 соответственно.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ С НЕЧЕТНОЙ ВАЛЕНТНОСТЬЮ

В случае циркулянтных графов $C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ с нечетной валентностью вершин, равной $2k+1$, удобно ввести следующий ассоциированный полином Лорана $P(z) = 2k + 1 - \sum_{\ell=1}^{k}\left(z^{s_\ell} + z^{-s_\ell}\right)$. Тогда спектр матрицы Лапласа имеет вид $\lambda_j = P\left(\varepsilon_{2n}^j\right) - (-1)^j$, $j = 0,1,\ldots,2n-1$, где $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{2i}{2n}}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $G_n = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ *– циркулянтный граф нечетной валентности. Тогда характеристический полином* $\chi_n(\lambda)$ *матрицы Лапласа графа* G_n *вычисляется по формуле*

$$\prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(u_\ell) - 2\right)\left(2T_n(v_\ell) + 2\right),$$

где $T_n(w)$ – полином Чебышева первого рода степени n, а величины $u_\ell, v_\ell, \ell = 1,2,\ldots,s_k$ – все корни полиномов $Q_\lambda(u) = \lambda - 2k + 2\sum_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(u)$ и $R_\lambda(v) = \lambda - 2k - 2 + 2\sum_{\ell=1}^{k} T_{s_\ell}(v)$.

Приведем схему *доказательства*. Оно по-прежнему основано на свойствах результантов. Полагая $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, имеем

$$\prod_{j=0}^{2n-1}\left(\lambda - \lambda_j\right) =$$

$$= \prod_{j=0}^{2n-1}\left(\lambda - 2k - 1 + (-1)^j + \sum_{\ell=1}^{k}\left(\varepsilon_{2n}^{js_\ell} + \varepsilon_{2n}^{-js_\ell}\right)\right) =$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(\lambda - 2k + \sum_{\ell=1}^{k}\left(\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell}\right)\right) \times$$

$$\times \frac{\prod_{j=0}^{2n-1}\left(\lambda - 2k - 2 + \sum_{\ell=1}^{k}\left(\varepsilon_{2n}^{js_\ell} + \varepsilon_{2n}^{-js_\ell}\right)\right)}{\prod_{j=0}^{n-1}\left(\lambda - 2k - 2 + \sum_{\ell=1}^{k}\left(\varepsilon_n^{js_\ell} + \varepsilon_n^{-js_\ell}\right)\right)} =$$

$$2^{-2ns_k}\operatorname{Res}\left(Q_\lambda(u), T_n(u) - 1\right) \times$$

$$\times \frac{\operatorname{Res}\left(R_\lambda(v), T_{2n}(v) - 1\right)}{\operatorname{Res}\left(R_\lambda(u), T_n(v) - 1\right)} =$$

$$2^{-2ns_k}\operatorname{Res}\left(T_n(u) - 1, Q_\lambda(u)\right)$$

$$\times \frac{\operatorname{Res}\left(T_{2n}(v) - 1, R_\lambda(v)\right)}{\operatorname{Res}\left(T_n(v) - 1, R_\lambda(v)\right)} =$$

$$\prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(u_\ell) - 2\right)\frac{T_{2n}(v_\ell) - 1}{T_n(v_\ell) - 1} =$$

$$= \prod_{\ell=1}^{s_k}\left(2T_n(u_\ell) - 2\right)\left(2T_n(v_\ell) + 2\right).$$

В конце мы используем следующее тождество между полиномами Чебышева $T_{2n}(w) - 1 = 2\left(T_n(w) + 1\right)\left(T_n(w) - 1\right)$.

Пример 3 (циркулянтный граф $C_{2n} = C_{2n}(1,n)$. Лестница Мёбиуса). *Решаем два уравнения* $\lambda - 2 + 2T_1(u) = \lambda - 2 + 2u = 0$ *и* $\lambda - 4 + 2T_1(v) = \lambda - 4 + 2v = 0$. *Их решения – это* $u = \frac{2-\lambda}{2}$ *и* $v = \frac{4-\lambda}{2}$. *Отсюда*

$$\chi_n(\lambda) = \left(2T_n\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - 2\right) \times$$

$$\times \left(2T_n\left(\frac{4-\lambda}{2}\right) + 2\right).$$

Заметим, что последовательности $\chi_n(2), \chi_n(3)$ и $\chi_n(4)$ периодичны с периодами 4, 3 и 2 соответственно.

Пример 4 (циркулянтный граф $C_{2n}(1,2,n)$)

Имеем следующие полиномы: $Q_\lambda(u) = \lambda - 4 + 2T_1(u) + 2T_2(u) = \lambda + 4u^2 + 2u - 6$ *и* $R_\lambda(v) = \lambda - 6 + 2T_1(v) + 2T_2(v) = \lambda + 4v^2 + 2v - 8$. *Их корни — это* $u_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{25-4\lambda})$ *и* $v_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{33-4\lambda})$. *Отсюда характеристический полином* $\chi_n(\lambda)$ *имеет вид* $(2T_n(u_1)-2)(2T_n(u_2)-2)(2T_n(v_1)+2)(2T_n(v_2)+2)$.

Можно показать, что последовательность $\chi_n(6)$ — периодична с периодом 12.

4. ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО КВАДРАТА ИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Нижеизложенные теоремы описывают целочисленное разложение характеристического полинома циркулянтного графа на малое число линейных множителей и квадрат подходящего целочисленного полинома.

Теорема 3. *Рассмотрим циркулянтный граф* $G_n = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ *четной валентности. Положим* p *равным числу нечетных элементов последовательности* $s_1, s_2, \ldots, s_k$. *Тогда существует последовательность целочисленных полиномов* $a_n(\lambda)$, *такая, что характеристический полином матрицы Лапласа графа* G_n *задается формулами:* $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p)a_n(\lambda)^2$ *при четном* n *и* $(-\lambda)a_n(\lambda)^2$ *при нечетном* n.

Доказательство основано на следующих рассуждениях. Прежде всего заметим, что число p нечетных элементов последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_k$ может быть вычислено по формуле $p = \sum_{l=1}^{k} \frac{1-(-1)^{s_l}}{2}$.

Собственные значения матрицы Лапласа графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ задаются как $\lambda_j = P(\varepsilon_n^j), j = 0,1,\ldots,n-1$, где $P(z) = 2k - \sum_{l=1}^{k}\left(z^{s_l} + z^{-s_l}\right)$, а $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Имеем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_j > 0$ для $j = 1,2,\ldots, n-1$. Заметим, что $\lambda_{n-j} = \lambda_j$. Пусть n — нечетно. Тогда

$$\chi_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = -\lambda \prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = -\lambda \prod_{j=1}^{(n-1)/2}(\lambda - \lambda_j) \times \prod_{j=(n+1)/2}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = -\lambda \prod_{j=1}^{(n-1)/2}(\lambda - \lambda_j)^2.$$

Пусть теперь n — четно. Имеем $\lambda_{\frac{n}{2}} = 2k - \sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}\right) = 2\sum_{i=1}^{k}\left(1-(-1)^{s_i}\right) = 4p$. Отсюда

$$\chi_n(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = \lambda \prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = \lambda \prod_{j=1}^{n/2-1}(\lambda - \lambda_j) \times \left(\lambda - \lambda_{\frac{n}{2}}\right) \times \prod_{j=n/2+1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) = \lambda(\lambda - 4p)\prod_{j=1}^{n/2-1}(\lambda - \lambda_j)^2.$$

Заметим, что каждое алгебраическое число λ_j входит в обозначенные выше произведения вместе со всеми сопряженными по Галуа элементами. Следовательно, соответствующие произведения — целочисленные полиномы. Полагая $a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{(n-1)/2}(\lambda - \lambda_j)$ при нечетном n и $a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n/2-1}(\lambda - \lambda_j)$ при четном n, мы завершим доказательство.

Следующая теорема описывает структуру характеристического полинома матрицы Лапласа циркулянтного графа с нечетной валентностью вершин.

Теорема 4. *Рассмотрим циркулянтный граф* $G_n = C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ *с нечетной валентностью вершин. Положим число* p *равным числу нечетных элементов последовательности* $s_1, s_2, \ldots, s_k$. *Тогда существует последовательность целочисленных полиномов* $a_n(\lambda)$, *такая, что характеристический полином матрицы Лапласа графа* G_n *задается следующими формулами:* $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p)a_n(\lambda)^2$

при четном n и $\chi_n(\lambda) = \lambda(\lambda - 4p - 2)a_n(\lambda)^2$ при нечетном n.

Приведем схему *доказательства*. Ненулевые собственные значения графа $C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ задаются формулой $\lambda_j = P\left(\varepsilon_{2n}^j\right) - (-1)^j$, $j = 1, 2, \ldots, 2n-1$, где $P(z) = 2k + 1 - \sum_{l=1}^{k}\left(z^{s_l} + z^{-s_l}\right)$ и $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{\pi i}{n}}$. Заметим, что $\lambda_{2n-j} = \lambda_j$ и $\lambda_n = P(-1) - (-1)^n$. Отсюда $\lambda_n = 2k + 1 - (-1)^n - 2\sum_{l=1}^{k}(-1)^{s_l} = 1 - (-1)^n + 4\sum_{l=1}^{k}\frac{1-(-1)^{s_l}}{2} = 1 - (-1)^n + 4p.$

То есть $\lambda_n = 4p$ при четном n и $\lambda_n = 4p + 2$ при нечетном n. В итоге получим

$$\chi_n(\lambda) = (-1)^{2n}\prod_{j=0}^{2n-1}(\lambda - \lambda_j) = \lambda\prod_{j=1}^{2n-1}(\lambda - \lambda_j) = \lambda\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j) \times (\lambda - \lambda_n) \times \prod_{j=n+1}^{2n-1}(\lambda - \lambda_j) = \lambda(\lambda - \lambda_n)\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j)^2.$$

Как и в доказательстве теоремы 3, каждое алгебраическое число λ_j входит в вышеобозначенные произведения со всеми своими сопряженными по Галуа элементами. Следовательно, эти произведения – целочисленные полиномы. Полагая $a_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - \lambda_j)$, мы можем завершить доказательство.

В работах [2, 8, 9, 10] было отмечено, что величина $\chi_n(-1) = \det(I_n + L(G))$ является важным комбинаторным инвариантом и отвечает за подсчет числа корневых остовных лесов графов. Следующие результаты являются следствиями вышеприведенных теорем.

Следствие 1. *Обозначим через $f(n)$ число корневых остовных лесов в графе $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$. Тогда существует целочисленная последовательность $\alpha(n)$, такая, что $f(n) = (4p+1)\alpha(n)^2$, если n – четно, и $f(n) = \alpha(n)^2$, если n – нечетно.*

Следствие 2. *Обозначим через $f(n)$ число корневых остовных лесов в графе $C_{2n}(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$ с нечетной валентностью вершин. Тогда существует целочисленная последовательность $\alpha(n)$, такая, что $f(n) = (4p+1)\alpha(n)^2$, если n – четно, и $f(n) = (4p+3)\alpha(n)^2$, если n – нечетно.*

Эти результаты получены ранее в теоремах 5.1 и 5.2 из работы [2].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Первый автор поддерживается Национальным исследовательским фондом Кореи (NRF), финансируемым Министерством образования (проект 2018R1D1A1B05048450). Второй и третий соавторы работают в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева (проект FWNF-2022-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Медных А.Д., Медных И.А.* Об асимптотике и арифметических свойствах функции сложности циркулянтных графов // ДАН. 2018. Т. 479. Вып. 4. С. 363–367.
2. *Grunwald L.A., Mednykh I.A.* The number of rooted forests in circulant graphs // Ars Math. Contemp. 2022. Vol. 22. No. 4. #P4.10. doi: 10.26493/1855-3974.2029.01d
3. *Медных А.Д., Медных И.А.* Индекс Кирхгофа для циркулянтных графов и его асимптотика // ДАН. 2020. Т. 494. Вып. 1. С. 43–47.
4. *Liu Xg., Zhou Sm.* Spectral characterizations of propeller graphs // Electron. J. Linear Algebra. 2014. Vol. 27. P. 19–38. doi: 10.13001/1081-3810.1603
5. *Liu Xg., Lu P.* Laplacian spectral characterization of dumbbell graphs and theta graphs // Discrete Math. Algorithms Appl. 2016. Vol. 8. No. 2. 1650028. DOI: 10.1142/S1793830916500282
6. *Neumaerker N.* The arithmetic structure of discrete dynamical systems on the torus // PhD Thesis. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2012.
7. *Прасолов В.В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 335 с.
8. *Chebotarev P., Shamis E.* Matrix forest theorem // arXiv:math/0602575. 2006.
9. *Knill O.* Cauchy-Binet for pseudo-determinants // Linear Algebra Appl. 2014. Vol. 459. P. 522–547. doi:10.1016/j.laa.2014.07.013
10. *Kelmans A.K., Chelnokov V.M.* A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees // J. Comb. Theory Ser. B. 1974. Vol. 16. P. 197–214. doi: 10.1016/ 0095-8956(74)90065-3

ON THE STRUCTURE OF LAPLACIAN CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF CIRCULANT GRAPHS

Y. S. Kwon[a], A. D. Mednykh[b, c], I. A. Mednykh[b, c]

[a] *Yeungnam University, Gyeongsan, South Korea*
[b] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation*
[c] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. G. Romanov

The present work deals with the characteristic polynomial of Laplacian matrix for circulant graphs. We show that it can be decomposed into a finite product of algebraic function evaluated at the roots of a linear combination of Chebyshev polynomials. As an important consequence of this result we get the periodicity of characteristic polynomials evaluated at the prescribed integer values. Moreover, we can show that the characteristic polynomials of circulant graphs are always perfect squares up to explicitly given linear factors.

Keywords: circulant graph, Laplacian matrix, eigenvalues, rooted spanning tree