*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 515, с. 28–33*

**МАТЕМАТИКА**

*УДК 517.926*

# ОБ ОДНОМ ПАРАДОКСАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЯ СДВИГА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

 **С. Д. Глызин[1, *], А. Ю. Колесов[1, **]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым
Поступило 06.07.2023 г.
После доработки 19.01.2024 г.
Принято к публикации 20.01.2024 г.

Рассматривается бесконечномерный тор $\mathbb{T}^\infty = \ell_p / 2\pi\mathbb{Z}^\infty$, где $\ell_p$, $p \geq 1$ – соответствующее пространство последовательностей, $\mathbb{Z}^\infty$ – естественная целочисленная решетка в $\ell_p$. Исследуется классический в теории динамических систем вопрос о поведении траекторий отображения сдвига на указанном торе. Точнее говоря, предлагаются некоторые достаточные условия, гарантирующие пустоту $\omega$-предельного и $\alpha$-предельного множеств любой траектории отображения сдвига на $\mathbb{T}^\infty$.

*Ключевые слова*: целочисленная решетка, бесконечномерный тор, отображение сдвига, турбулентное поведение траекторий

**DOI:** 10.31857/S2686954324010041, **EDN:** ZTWIWM

## 1. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

История развития современной теории динамических систем и основные ее достижения подробно описаны в целом ряде обзоров и монографий (см., например, [1, 2]). Одним из аспектов данной теории является вопрос о поведении траекторий стандартного отображения сдвига на торе $\mathbb{T}^m, m \geq 2$. В настоящей работе этот вопрос изучается для бесконечномерного тора $\mathbb{T}^\infty$. Как оказывается, переход от $\mathbb{T}^m$ к $\mathbb{T}^\infty$ может привести к новому и весьма парадоксальному эффекту – так называемому турбулентному поведению траекторий. Упомянутый эффект заключается в том, что как $\omega$-предельное, так и $\alpha$-предельное множества любой траектории оператора сдвига на $\mathbb{T}^\infty$ являются пустыми. Отметим, что под *траекториями с турбулентным поведением* мы, как и в монографии [3], будем понимать *ограниченные в заданном фазовом пространстве траектории с пустым $\omega$-предельным множеством*. Мотивируется такое определение тем, что в книге [3] была предложена феноменологическая модель турбулентного поведения траекторий, в которой их $\omega$-предельное множество пусто. В нашем случае ситуация близка к описанной в данной работе и, в частности, выполнено главное условие турбулентности, касающееся пустоты $\omega$-предельного множества.

В отличие от общепринятого определения бесконечномерного тора (см. [4, 5]) нами в работе [6] дано новое определение $\mathbb{T}^\infty$ как факторизации произвольного бесконечномерного банахова пространства $E$ по некоторой абстрактной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\infty$. В настоящей статье мы продолжаем изучение свойств нашего тора. Точнее говоря, ниже будем интересоваться отображением сдвига на одном конкретном бесконечномерном торе. Выбор этого тора обусловлен прежде всего тем, что, как и в конечномерном случае, его элементы допускают естественные координатные представления.

Сначала дадим определение интересующего нас тора $\mathbb{T}^\infty$. С этой целью обратимся к банаховому пространству $\ell_p$, $p \geq 1$, состоящему из векторов

$$\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots),$$
$$\varphi_{(k)} \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1, \tag{1}$$
$$\|\varphi\| \stackrel{def}{=} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{(k)}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

[1]*Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
[*]*E-mail: glyzin.s@gmail.com*
[**]*E-mail: andkolesov@mail.ru*

Далее фиксируем в этом пространстве естественную целочисленную решетку

$$\mathbb{Z}^\infty = \{l = \mathrm{colon}(l_{(1)}, l_{(2)}, \ldots, l_{(k)}, \ldots) \in \ell_p : l_{(k)} \in \mathbb{Z}, k \geq 1\} \qquad (2)$$

и заметим, что в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} | l_{(k)} |^p$ (см. (1)) любой вектор $l \in \mathbb{Z}^\infty$ имеет лишь конечное число ненулевых координат.

Перейдем теперь к определению тора $\mathbb{T}^\infty$. В связи с этим с помощью целочисленной решетки (2) введем в пространстве $\ell_p$ отношение эквивалентности по следующему правилу. Будем говорить, что два вектора $x, y \in \ell_p$ эквивалентны, если имеет место равенство $x - y = 2\pi l$ при некотором $l \in \mathbb{Z}^\infty$. Что же касается тора $\mathbb{T}^\infty$, то таковым назовем множество всех классов эквивалентности, порожденных данным отношением.

Иными словами, справедливы равенства $\mathbb{T}^\infty = \ell_p / 2\pi\mathbb{Z}^\infty = \mathrm{pr}(\ell_p)$, где отображение $\mathrm{pr} : \ell_p \to \mathbb{T}^\infty$ — так называемая естественная проекция. Эта проекция действует по правилу

$$\mathrm{pr} : \varphi \mapsto \{\varphi\}, \qquad (3)$$

где $\varphi$ — произвольный элемент из $\ell_p$, а $\{\varphi\}$ — класс эквивалентности из $\mathbb{T}^\infty$, содержащий $\varphi$. Следует также отметить, что $\mathbb{T}^\infty$ представляет собой абелеву группу относительно операции сложения, определяющейся по правилу:

$$\{\varphi_1\} + \{\varphi_2\} = \{\varphi_1 + \varphi_2\} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_p. \qquad (4)$$

В дальнейшем для краткости одной и той же буквой $\varphi$ будем обозначать как вектор из $\ell_p$, так и соответствующий ему класс $\{\varphi\} \in \mathbb{T}^\infty$. Это не вызовет недоразумений, поскольку из контекста всегда будет ясно, о каком именно объекте идет речь.

Метрику на торе $\mathbb{T}^\infty$ зададим равенством

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \inf_{l \in \mathbb{Z}^\infty} \left\| \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_1) - \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l \right\| \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty, \qquad (5)$$

где, напомним, $\|\cdot\|$ — норма в $\ell_p$, а $\mathrm{pr}^{-1}(\varphi_1), \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_2) \in \ell_p$ — произвольные прообразы точек $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$. Так как упомянутые прообразы определяются с точностью до аддитивных добавок вида $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}^\infty$, то метрика (5) не зависит от их конкретного выбора. Отметим также, что в силу формулы (5) отображение (3) является локальной изометрией, т.е.

$$\rho(\mathrm{pr}(\varphi_1), \mathrm{pr}(\varphi_2)) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_p, \quad \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq \varepsilon_0, \qquad (6)$$

где $\varepsilon_0 = const \in (0, \pi)$. В свою очередь, из соотношения (6) автоматически вытекает полнота пространства $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$.

В последующем нам понадобится понятие фундаментального множества тора $\mathbb{T}^\infty$. Таковым будем называть множество $\mathcal{U} \subset \ell_p$, для которого $\mathrm{pr}(\mathcal{U}) = \mathbb{T}^\infty$ и отображение $\mathrm{pr} : \mathcal{U} \to \mathbb{T}^\infty$ взаимно однозначно. Подчеркнем, что такое множество может быть выбрано разными способами. Мы же будем считать, что всюду ниже

$$\mathcal{U} = \{\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots) \in \ell_p : -\pi < \varphi_{(k)} \leq \pi, k \geq 1\}. \qquad (7)$$

Перейдем теперь к описанию интересующего нас отображения сдвига. Таковым назовем преобразование вида

$$G_\Delta : \varphi \mapsto \varphi + \Delta, \qquad (8)$$

где $\varphi$ — произвольная точка тора $\mathbb{T}^\infty$, $\Delta$ — фиксированный элемент из $\mathbb{T}^\infty$, а операция сложения определена по правилу (4). Подчеркнем, что в силу вытекающего из (4) соотношения

$$n\{\varphi\} = \{n\varphi\} \quad \forall \varphi \in \ell_p, \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (9)$$

элемент $n\Delta \in \mathbb{T}^\infty$ корректно определен при всех $n \in \mathbb{Z}$. Тем самым для любой траектории $\varphi_n = G_\Delta^n(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^\infty$, $n \in \mathbb{Z}$ отображения (8) справедливо равенство

$$\varphi_n = \varphi_0 + n\Delta, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (10)$$

Для формулировки результатов о турбулентном поведении траекторий (10) нам потребуется так называемый вектор сдвига

$$\gamma = \mathrm{colon}(\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \ldots, \gamma_{(s)}, \ldots) \in \mathcal{U}, \quad \gamma = \mathrm{pr}^{-1}(\Delta), \qquad (11)$$

где $\mathcal{U}$ — фундаментальное множество (7).

**Теорема 1.** *Предположим, что компоненты* $\gamma_{(s)}$ *вектора* (11) *удовлетворяют условиям*

$$\gamma_{(s)} \neq 0 \ \forall s \geq 1, \quad R_* \overset{\text{def}}{=} \sup_{k \geq 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} < \infty, \tag{12}$$

*где* $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > \ldots$ *— все занумерованные в порядке убывания попарно различные значения, принимаемые последовательностью* $|\gamma_{(s)}|, s \geq 1$. *Тогда траектории (10) отображения (8) демонстрируют турбулентное поведение.*

Следующий результат относится к частному случаю

$$\left|\gamma_{(s)}\right| = f(\psi)\,|_{\psi = s}, s \geq 1, \tag{13}$$

где $f(\psi)$ – некоторая непрерывная по $\psi \in [1, +\infty)$, положительная и строго убывающая функция. Предполагаем также, что

$$\lim_{\psi \to +\infty} f(\psi) = 0, \quad \int_1^{+\infty} f^p(\psi) d\psi < \infty. \tag{14}$$

Кроме того, в дальнейшем нам потребуется обратная к $f(\psi)$ функция $g(\psi)$, определенная на полуинтервале $\psi \in (0, f(1)]$ и обладающая свойством $g(\psi) \to +\infty$ при $\psi \to +0$.

**Теорема 2.** *В случае* (13), (14) *турбулентное поведение траекторий отображения* (8) *имеет место при выполнении хотя бы одного из следующих двух условий:*

1) найдутся такие постоянные $0 < z_1 < z_2 < \pi / 2$, что

$$\varliminf_{n \to +\infty} (g(z_1 / n) - g(z_2 / n)) > 1; \tag{15}$$

2) существует такая постоянная $z \in (0, \pi)$, что

$$\varliminf_{n \to +\infty} n \left( \int_{\psi_n}^{+\infty} f^p(\psi) d\psi \right)^{1/p} > 0, \tag{16}$$

где $\psi_n = g(z / n) + 1$.

Интересно отметить, что условия (12), (15), (16) выполняются при $\gamma_{(s)} = 1 / s^{\delta}$, где $\delta = const > 1 / p$, $s \geq 1$, и $\gamma_{(s)} = q^s$, где $q = const \in (0,1)$, $s \geq 1$. Если же $\gamma_{(s)} = \exp(-s^2)$, $s \geq 1$, то все эти условия нарушаются.

## 2. О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМ

Прежде чем приступить непосредственно к обоснованию Теоремы 1, установим некоторое специальное представление для метрики (5). В связи с этим для любых двух элементов $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$ положим

$$\begin{gathered} \theta_k = \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_k) \in \mathcal{U}, \quad \theta_k = \\ = \mathrm{colon}(\theta_{(1)}^k, \theta_{(2)}^k, \ldots, \theta_{(s)}^k, \ldots), \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{17}$$

Как оказывается, имеет место равенство

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \left( \sum_{s=1}^{\infty} \min_{l_{(s)} \in \mathbb{Z}} \left| \theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)} \right|^p \right)^{1/p}. \tag{18}$$

Кроме того, в случае

$$\left| \theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 \right| < \pi \tag{19}$$

соответствующий минимум из (18) достигается только при $l_{(s)} = 0$.

Действительно, поскольку при каждом $s \geq 1$ имеем $|\theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)}| \to +\infty$ при $|l_{(s)}| \to +\infty$, то фигурирующие в (18) минимумы заведомо достигаются при некоторых $l_{(s)} = l_{(s)}^0 \in \mathbb{Z}$, $s \geq 1$. Далее в случае (19) в силу очевидных неравенств

$$\begin{gathered} \left| \theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)} \right| \geq \\ \geq 2\pi - \left| \theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 \right| \quad \forall l_{(s)} \in \mathbb{Z}, \quad l_{(s)} \neq 0, \quad s \geq 1 \end{gathered}$$

с необходимостью имеем $l_{(s)}^0 = 0$. Что же касается условия (19), то, согласно включениям $\theta_k \in \ell_p$ и вытекающим из них предельным равенствам $\lim\limits_{s \to +\infty} \theta_{(s)}^k = 0$, $k = 1, 2$, оно заведомо выполняется для всех достаточно больших номеров $s$. Тем самым минимизирующий вектор $l_0 = \mathrm{colon}(l_{(1)}^0, l_{(2)}^0, \ldots, l_{(s)}^0, \ldots)$ автоматически принадлежит целочисленной решетке (2).

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что

$$\begin{gathered} \left( \sum_{s=1}^{\infty} \min_{l_{(s)} \in \mathbb{Z}} \left| \theta_{(s)}^1 - \theta_{(s)}^2 + 2\pi l_{(s)} \right|^p \right)^{1/p} = \\ = \left\| \theta_1 - \theta_2 + 2\pi l_0 \right\|. \end{gathered}$$

А отсюда и из (5), (17), в свою очередь, следует, что метрика $\rho(\varphi_1,\varphi_2)$ не превосходит выражения, фигурирующего в правой части соотношения (18). Что же касается противоположного нестрогого неравенства, то оно получается из очевидной оценки

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty}\min_{l_{(s)}\in\mathbb{Z}}\left|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}\right|^p\right)^{1/p}\le$$
$$\le\|\theta_1-\theta_2+2\pi l\|\quad\forall l\in\mathbb{Z}^\infty$$

при переходе к инфимуму по $l\in\mathbb{Z}^\infty$. Таким образом, формула (18) полностью обоснована.

Обратимся теперь к произвольной траектории (10) отображения (8) и обозначим через $A$ и $B$ ее $\omega$-предельное и $\alpha$-предельное множества соответственно. Далее, пусть $A_0$ и $B_0$ — аналогичные множества для случая $\varphi_0=0$ („$0$" — нулевой класс эквивалентности из $\mathbb{T}^\infty$). Тогда, принимая во внимание вытекающее из (5) равенство $\rho(\varphi_1+\varphi_0,\varphi_2+\varphi_0)=\rho(\varphi_1,\varphi_2)$ $\forall\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{T}^\infty$, имеем

$$A=\varphi_0+A_0=\{\varphi_0+a_0:a_0\in A_0\},$$
$$B=\varphi_0+B_0=\{\varphi_0+b_0:b_0\in B_0\}.$$

Тем самым для обоснования Теоремы 1 достаточно убедиться в пустоте множеств $A_0$ и $B_0$. А т.к. очевидным образом $B_0=-A_0=\{-a_0:a_0\in A_0\}$, достаточно показать, что $A_0=\varnothing$.

Согласно формулам (9), (10), интересующая нас проблема сводится к проверке выполнения неравенства

$$\varliminf_{n\to+\infty}\rho(\varphi_n,\alpha)>0\quad\forall\alpha\in\mathbb{T}^\infty,\tag{20}$$

где $\varphi_n=\mathrm{pr}(n\gamma)$, $n\ge1$. В связи с этим без ограничения общности будем считать, что

$$\gamma_{(s)}>0,\quad\gamma_{(s+1)}\le\gamma_{(s)}\quad\forall s\in\mathbb{N},\tag{21}$$

а значит, справедлива формула (см. (12))

$$\sup_{s\ge1}\frac{\gamma_{(s)}}{\gamma_{(s+1)}}=\sup_{k\ge1}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}=R_*<\infty.\tag{22}$$

Подчеркнем, что выполнения соотношений (21) всегда можно добиться путем соответствующей перестановки координат $\varphi_{(k)}$ из (1) и замене некоторых из них на $-\varphi_{(k)}$.

Итак, фиксируем произвольно элемент $\alpha\in\mathbb{T}^\infty$ и положим

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}^{-1}(\varphi_n)&=\theta_n=\mathrm{colon}(\theta^n_{(1)},\theta^n_{(2)},\ldots,\theta^n_{(s)},\ldots)\in\mathcal{U},\\ \mathrm{pr}^{-1}(\alpha)&=\beta=\mathrm{colon}(\beta_{(1)},\beta_{(2)},\ldots,\beta_{(s)},\ldots)\in\mathcal{U}.\end{aligned}\tag{23}$$

Нетрудно увидеть, что для компонент $\theta^n_{(s)}$ из (23) имеют место соотношения

$$\theta^n_{(s)}\in(-\pi,\pi],\quad\theta^n_{(s)}=n\gamma_{(s)}\text{ где }n\gamma_{(s)}\le\pi.\tag{24}$$

Далее фиксируем две постоянные $z_1,z_2$, удовлетворяющие требованиям

$$0<z_1<z_2<\frac{\pi}{2},\quad\frac{z_2}{z_1}>R_*,\tag{25}$$

где $R_*$ — величина из (12), (22), и рассмотрим серию отрезков

$$I_s=\left[\frac{z_1}{\gamma_{(s)}},\frac{z_2}{\gamma_{(s)}}\right],\quad s\ge1.\tag{26}$$

Заметим далее, что в силу соотношений (21), (22), (25) справедливы неравенства

$$\frac{z_1}{\gamma_{(s)}}\le\frac{z_1}{\gamma_{(s+1)}}<\frac{z_2}{\gamma_{(s)}}\le\frac{z_2}{\gamma_{(s+1)}},\quad s\ge1.$$

В свою очередь, из приведенных неравенств вытекает, что отрезки (26) с номерами $s$ и $s+1$ имеют непустое пересечение, а значит,

$$\left[\frac{z_1}{\gamma_{(1)}},+\infty\right)=\bigcup_{s=1}^{\infty}I_s.\tag{27}$$

На завершающей стадии доказательства выберем такое достаточно большое $n_*\in\mathbb{N}$, чтобы при всех $n\ge n_*$ выполнялось условие $n\ge z_1/\gamma_{(1)}$. В этом случае в силу равенства (27) при каждом $n\ge n_*$ существует такой номер $s=s_n$, $s_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, что $n\in I_{s_n}$, или, что то же самое,

$$z_1\le n\gamma_{(s_n)}\le z_2\quad\forall n\ge n_*.\tag{28}$$

Заметим еще, что, поскольку $\beta_{(s_n)}\to0$ при $n\to+\infty$ (см. (23)), то без ограничения общности можно считать выполненными неравенства

$$\left|\beta_{(s_n)}\right|<\frac{\pi}{2},\quad n\ge n_*.\tag{29}$$

Объединяя соотношения (24), (25), (28), (29), приходим к выводу, что при всех $n\ge n_*$

выполняется аналогичное (19) условие $|n\gamma_{(s_n)} - \beta_{(s_n)}| < \pi$. Тем самым в силу (18) имеем $\rho(\varphi_n, \alpha) \ge |n\gamma_{(s_n)} - \beta_{(s_n)}|$, $n \ge n_*$. А отсюда и из (28) требуемое свойство (20) вытекает автоматически. Теорема 1 доказана.

При доказательстве Теоремы 2, как и выше, без ограничения общности будем считать, что $\gamma_{(s)} > 0\, \forall s \ge 1$. Далее обратимся к неравенствам

$$z_1 \le n\gamma_{(s)} \le z_2, \tag{30}$$

где постоянные $z_1, z_2$ заимствованы из условия (15) (которое предполагаем выполненным). Соотношения (13), (14) позволяют переписать эти оценки в эквивалентном виде $g(z_2 / n) \le s \le g(z_1 / n)$. А т.к. $g(z_1 / n) - g(z_2 / n) > 1$ при всех достаточно больших $n$, то неравенства (30) заведомо справедливы на некоторой последовательности номеров $s = s_n$, $s_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. После этого для завершения обоснования теоремы остается повторить соответствующий фрагмент доказательства Теоремы 1.

При выполнении условия (16) ситуация проще. Опираясь на соотношение (18), нетрудно убедиться в том, что фигурирующий в (20) нижний предел оценивается снизу нижним пределом из (16), который является строго положительным. Тем самым утверждение о турбулентном поведении траекторий отображения сдвига сохраняется и в этом случае.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует отметить, что, как правило, в математической литературе под понятием "бесконечномерный тор" подразумевается прямое произведение счетного числа окружностей $\mathbb{T} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ с тихоновской топологией (см., например, [4, 5]). Упомянутое произведение будем обозначать через $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ и называть тихоновским тором. Его элементами являются бесконечномерные векторы вида $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots)$, $\varphi_m \in \mathbb{T}$, $m \ge 1$, а метрика на $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ вводится по следующему правилу.

Сначала для любых двух элементов $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}$ определяем расстояние между ними по аналогичной (5) формуле $d(\varphi_1, \varphi_2) = \min_{l \in \mathbb{Z}} |\theta_1 - \theta_2 + 2\pi l|$, где $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные представители соответствующих классов эквивалентности $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}$. После этого для любых двух элементов

$$\tilde{\varphi}^k = (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_m^k, \ldots), \quad \varphi_m^k \in \mathbb{T},$$
$$k = 1, 2, \quad m \ge 1$$

из $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ полагаем

$$\rho(\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}{1 + d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}. \tag{31}$$

В отличие от нашего тора $\mathbb{T}^\infty$, который представляет собой некомпактное аналитическое банахово многообразие без края (см. [6]), тихоновский тор $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$, снабженный метрикой (31), является компактным метрическим пространством. Таким образом, отображение сдвига на $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ заведомо не может обладать свойством турбулентного поведения траекторий. Однако для него справедлив известный классический результат о минимальности (см. [1, 2]).

Для пояснения сути дела рассмотрим произвольное отображение сдвига на $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$, допускающее в канонических координатах $x_{(s)} \in (-\pi, \pi]$, $s \ge 1$ представление

$$x_{(s)} \mapsto x_{(s)} + \gamma_{(s)} (\mathrm{mod}\, 2\pi), \quad s \ge 1, \tag{32}$$

где $\gamma_{(s)} \in (-\pi, \pi], s \ge 1$. Имеет место следующая

**Теорема 3.** *Отображение* (32) *является минимальным на торе* $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ *тогда и только тогда, когда компоненты* $\{\gamma_{(s)}, s \ge 1\}$ *и величина* $2\pi$ *линейно независимы над полем рациональных чисел.*

Сформулированный результат вытекает из аналогичного конечномерного результата и из факта равномерной по $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2 \in \widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ малости остатков рядов из (31). Для сравнения отметим: остатки рядов из (18) указанной равномерной малостью не обладают. Именно по этой причине при замене $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ на $\mathbb{T}^\infty$ утверждение Теоремы 3 неверно (см. Теоремы 1, 2).

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, https://rscf.ru/en/project/22-11-00209/.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

2. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005.
3. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Многоликий хаос. М.: Физматлит, 2012.
4. *Jessen B.* // Acta Math. 1934. V. 63. P. 249–323.
5. *Kozlov V.V.* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2021. V. 28. № 1. P. 73–83.
6. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* // УМН. 2022. Т. 77. Вып. 3 (465). С. 3–72.


# ON A PARADOXICAL PROPERTY OF THE SHIFTING MAPPING ON AN INFINITE-DIMENSIONAL TORI


**S.D. Glyzin[a], A. Yu. Kolesov[a]**

[a] *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Center of Integrable Systems, Yaroslavl, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov



An infinite-dimensional torus $\mathbb{T}^\infty = \ell_p / 2\pi\mathbb{Z}^\infty$, where $\ell_p$, $p \geq 1$ – space of sequences, $\mathbb{Z}^\infty$ – natural integer lattice in $\ell_p$, is considered. We study the classical question in the theory of dynamical systems about the behavior of trajectories of a shift mapping on the specified torus. More precisely, some sufficient conditions are proposed that guarantee the emptiness of the $\omega$-limit and $\alpha$-limit sets of any of the shift mapping onto $\mathbb{T}^\infty$.



*Keywords:* integer lattice, infinite-dimensional torus, shift mapping, turbulent behavior of trajectories