ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 82–88

МАТЕМАТИКА

УДК 517.926

ЦИФРОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН А. В. Ильин[1,2,3,*], А. С. Фурсов[1,2,**]

Поступило 08.07.2023 г.
После доработки 27.10.2023 г.
Принято к публикации 05.11.2023 г.

Предлагается подход к построению цифрового регулятора, стабилизирующего непрерывную переключаемую линейную систему с соизмеримыми запаздываниями в управлении. Подход к стабилизации последовательно включает в себя построение переключаемой непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели, представляемой в виде переключаемой системы с режимами различных порядков, построение дискретного динамического регулятора на основе квадратичного условия устойчивости замкнутой переключаемой дискретной системы.

Ключевые слова: дискретные системы, переключаемые системы, цифровой регулятор, стабилизация дискретных систем

DOI: 10.31857/S268695432360163X, **EDN:** ZBIMPA

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена одной из актуальных задач для управляемых переключаемых линейных систем, а именно задаче стабилизации нулевого положения равновесия таких систем. При этом особенный интерес представляет случай, когда переключающий сигнал, определяющий активный режим системы в каждый момент времени, является не наблюдаемым, т.е. не доступным для измерения. В этом случае, фактически, речь идет об управлении системой в условиях неопределенности, обусловленной непредсказуемым скачкообразным изменением ее математической модели в процессе функционирования. И, таким образом, указанную задачу управления можно отнести к классу задач об универсальных стабилизаторах. Традиционно для решения задач построения универсальных стабилизаторов используются методы теории робастного управления, теории адаптивного управления, теории абсолютной устойчивости, теории систем с переменной структурой [1–4]. В работах [5, 6] для стабилизации переключаемых линейных систем было предложено использовать методы теории одновременной стабилизации [7], позволяющие находить универсальные регуляторы, стабилизирующие каждый режим переключаемой системы в отдельности и, таким образом, обеспечивающие необходимое условие стабилизации этой системы.

Однако, несмотря на достаточно активное развитие методов анализа и синтеза переключаемых систем управления, в настоящее время проблемам управления переключаемыми системами с запаздыванием посвящено сравнительно немного публикаций. Основной набор методов, используемых для решения задач стабилизации переключаемых линейных систем с запаздыванием, в наиболее полном объеме приведен едва ли не в единственном источнике — в монографии [8]. А именно, в ней рассмотрен подход к стабилизации по фазовому вектору линейных стационарных переключаемых систем с постоянным или зависящим от времени запаздыванием в фазовых координатах с использованием аналогового пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора. Настоящая работа посвящена проблеме стабилизации переключаемых линейных систем с запаздыванием в управлении с использованием другого типа регулятора — цифрового стабилизатора, работающего по измеряемой выходной переменной.

[1]Электротехнический университет, Ханчжоу, Китай
[2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
[3]Федеральный исследовательский центр информатики и управления РАН, Москва, Россия
*E-mail: iline@cs.msu.ru
**E-mail: fursov@cs.msu.ru

В статье [9] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаковое для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для ее решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага – переход от исходной непрерывной системы к ее точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы. Одним из важных предположений, при котором решалась указанная задача, являлось условие синхронности моментов переключений стабилизируемой системы с моментами времени работы дискретного регулятора.

В настоящей работе предлагается обобщить приведенную задачу стабилизации на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении.

Итак, рассматривается непрерывная переключаемая линейная система со скалярным входом и скалярным выходом с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t-\theta_\sigma), \\ y(t) = c_\sigma x(t), \end{cases} \quad \sigma \in S_{0,\gamma}, \quad t \ge 0, \quad (1)$$

где $\sigma: R_+ \to I = \{1,\ldots,m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал); $S_{0,\gamma}$ – множество переключающих сигналов σ, точки разрыва которых принадлежат множеству $\{l\gamma\}$, где γ – некоторое положительное число, а $l = 0,1,2,\ldots$; $x \in R^n$ – вектор состояния, $y \in R$ – измеряемый скалярный выход, $u \in R$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения A: $I \to \{A_1,\ldots,A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b \circ \sigma$, $c_\sigma = c \circ \sigma$ и $\theta_\sigma = \theta \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений b: $I \to \{b_1,\ldots,b_m\}$, c: $I \to \{c_1,\ldots,c_m\}$, θ: $I \to \{\theta_1,\ldots,\theta_m\}$. Здесь $\theta_i > 0$ – величины постоянных запаздываний, причем θ_i/γ и θ_i/θ_j – рациональные числа для любых $i,j \in I$. Далее считаем, что переключающий сигнал $\sigma(t)$ не доступен для измерения в процессе функционирования системы (1).

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i, A_i, b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t-\theta_i), \\ y(t) = c_i x(t). \end{cases}$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \le 0$), начальном условии $x(0) = x_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{0,\gamma}$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)} x + b_{\sigma(t)} u(t-\theta_{\sigma(t)}), \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ

Построение цифрового алгоритма управления для переключаемой линейной системы (1) предполагает построение соответствующей непрерывно-дискретной системы, включающей цифровой регулятор. Такая система описывается с помощью дифференциально-разностных уравнений. Приведем в явном виде эти уравнения.

Цифровой регулятор для непрерывной системы представляется в виде последовательного соединения трех звеньев: идеального квантователя (модель аналого-цифрового преобразователя), преобразующего аналоговый сигнал $y(t)$ в дискретную (решетчатую) функцию $y[lT] = y(lT)$ ($T > 0$, $l = 0,1,\ldots$); дискретного регулятора (алгоритм работы для цифрового вычислительного устройства)

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0 \end{cases} \quad (3)$$

и формирующего элемента (модель цифро-аналогового преобразователя)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{T}\right]} u[jT] S(t-jT), \qquad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,T), \\ 0, & t \notin [0,T). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь T – период квантования по времени t (считаем, что $T < \gamma$), $[\cdot]$ – целая часть действительного числа, $Q \in R^{r\times r}$, $q \in R^{r\times 1}$, $H \in R^{1\times r}$, $h \in R$ (r – порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ – дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [10].

Замыкая систему (1) регулятором (3)–(4), получаем замкнутую непрерывно-дискретную (дифференциально-разностную) систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t-\theta_\sigma), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_\sigma x(lT), \\ \sigma(t) \in S_{0,\gamma}, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \end{cases} \quad (5)$$

где управляющая функция u описывается следующим образом

$$u(t-\theta_\sigma) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\left[\frac{t-\theta_\sigma}{T}\right]} (Hv[lT] + hc_\sigma x(lT))S(t-\theta_\sigma - mT), \\ \text{если} \quad t \ge \theta_\sigma, \\ 0, \quad \text{если} \quad 0 \le t < \theta_\sigma. \end{cases} \tag{6}$$

Система (5) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы $\left(l = \left[\frac{t}{T}\right]\right)$, т.е.

$$lT \le t < (l+1)T, \quad l = 1,2,\ldots .$$

По аналогии с уравнением состояния системы (1) решением уравнения состояния системы (5) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \le 0$), начальных условиях $x(0) = x_0$, $v[0] = v_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_{0,\gamma}$ будем считать решение линейной нестационарной дифференциально-разностной системы с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}u(t-\theta_{\sigma(t)}), \\ v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_{\sigma(t)}x(lT), \\ lT \le t < (l+1)T, \quad l = 1,2,\ldots . \end{cases}$$

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (5) будем называть $S_{0,\gamma}$-*устойчивой*, а регулятор (3)–(4) *стабилизирующим*, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ \upsilon[lT] \end{matrix} \right\| \to 0, \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad l = \left[\frac{t}{T}\right]. \tag{7}$$

Здесь под нормой вектора понимается евклидова норма. Теперь приведем точную постановку задачи стабилизации.

Задача. Для переключаемой линейной системы (1) с заданным $\gamma > 0$ построить цифровой регулятор вида (3)–(4), обеспечивающий $S_{0,\gamma}$-устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы (5).

Задачу построения цифрового стабилизатора для непрерывно-дискретной системы (5) сведем к задаче построения дискретного стабилизатора для соответствующей дискретной модели. При этом необходимо обеспечить выполнение условий согласованности, гарантирующих эквивалентность свойства устойчивости замкнутой непрерывно-дискретной системы (5) и ее дискретной модели, замкнутой тем же регулятором.

3. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

Для решения сформулированной задачи стабилизации перейдем от непрерывно-дискретной системы (5) к ее дискретной модели. Для этого воспользуемся методом точной дискретизации [10, с. 81; 11, с. 40], в соответствии с которым вначале строится дискретная модель для исходной системы (1), а затем она замыкается дискретным регулятором (3).

Выберем константы $l_0 \in N$ и $T > 0$ так, чтобы, во-первых, выполнялось равенство $\gamma = l_0T$ и, во-вторых, нашлись бы константы $l_i \in N$ $(i \in I)$, для которых $\theta_i = l_iT$ (заметим, что это всегда можно сделать в силу соизмеримости запаздываний).

Заметим теперь, что если $\sigma(t) \in S_{0,\gamma}$, то на решения системы (5) влияют значения переключающего сигнала только в моменты $t = lT$ $(l = 0,1, \ldots)$. Поэтому будем в дальнейшем для дискретной модели переключаемой системы (5) в качестве переключающих сигналов рассматривать соответствующие решетчатые функции $\sigma[lT]$ $(T > 0$, $l = 0,1,\ldots)$, а множество таких функций обозначать через $[S]_{0,\gamma}$. Обозначим через $x[lT]$ решетчатую вектор-функцию для вектора состояния $x(t)$ системы (1).

Итак, пусть в момент времени $t = lT$ вектор состояния системы (1) равен $x[lT]$ и $\sigma[lT] = i$. Тогда, используя формулу Коши для решений линейной стационарной неоднородной системы, имеем

$$x[(l+1)T] = e^{A_iT}x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A_i((l+1)T-\xi)}b_iu(\xi-\theta_i)d\xi.$$

Поскольку на входе непрерывной системы (1) действует фиксатор нулевого порядка, то $u(t-\theta_i) \equiv u[(l-l_i)T]$ для всех $t \in [lT,(l+1)T)$. Следовательно,

$$x[(l+1)T] = e^{A_iT}x[lT] + \int_{lT}^{(l+1)T} e^{A_i((l+1)T-\xi)}d\xi b_iu[(l-l_i)T].$$

Выполнив под интегралом замену переменной $\mu = \xi - lT$, получим

$$x[(l+1)T] = e^{A_iT}x[lT] + \int_0^T e^{A_i(T-\mu)}d\mu b_iu[(l-l_i)T].$$

Введем обозначения

$$\hat{A}_i = e^{A_iT}, \quad \hat{b}_i = \int_0^T e^{A_i(T-\mu)}d\mu b_i,$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}[lT] &= u[(l-1)T], \\ x_{n+2}[lT] &= u[(l-2)T], \\ &\ldots \\ x_{n+l_i}[lT] &= u[(l-l_i)T]. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}[(l+1)T] &= u[lT],\\
x_{n+2}[(l+1)T] &= x_{n+1}[lT],\\
x_{n+3}[(l+1)T] &= x_{n+2}[lT],\\
&\dots\\
x_{n+l_i}[(l+1)T] &= x_{n+l_i-1}[lT].
\end{aligned} \tag{9}
$$

Используя введенные обозначения и учитывая, что $\sigma \in S_{0,\gamma}$, получим дискретную модель i-го режима системы (1) в следующем виде

$$
\begin{cases}
x^{(i)}[(l+1)T] = \overline{A}_i x^{(i)}[lT] + \overline{b}_i u[lT]\\
y[lT] = \overline{c}_i x^{(i)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}.
\end{cases} \tag{10}
$$

где

$$
x^{(i)}[lT] = (x_1[lT],\dots,x_n[lT],x_{n+1}[lT],\dots,x_{n+l_i}[lT])^{\top}
$$

– расширенный вектор состояния дискретной модели i-го режима системы (1),

$$
\overline{A}_i = \begin{pmatrix} \hat{A}_i & O_{n\times(l_i-1)} & \hat{b}_i\\ O_{1\times n} & O_{1\times(l_i-1)} & 0\\ O_{(l_i-1)\times n} & E_{(l_i-1)\times(l_i-1)} & O_{(l_i-1)\times 1}\end{pmatrix}, \quad \overline{b}_i = \begin{pmatrix} O_{n\times 1}\\ 1\\ O_{(l_i-1)\times 1}\end{pmatrix},
$$

$$
\overline{c}_i = (c_i O_{1\times l_i}) \in R^{1\times(n+l_i)}.
$$

– блочные матрица и векторы. Здесь O, E – нулевая и единичная матрицы соответствующих размерностей.

Таким образом, получаем дискретную модель системы (1) в виде переключаемой дискретной системы вида

$$
\begin{cases}
x^{(\sigma)}[(l+1)T] = \overline{A}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + \overline{b}_\sigma u[lT]\\
y[lT] = \overline{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}, \quad l = 0,1,2,\dots,
\end{cases} \tag{11}
$$

Теперь заметим, что режимы (10) построенной переключаемой дискретной системы (11) уже не содержат запаздываний, однако имеют различные динамические порядки, поскольку $x^{(i)} \in R^{n+l_i}$ для каждого $i \in I$. В связи с этим, для того чтобы определить решение уравнения состояния полученной переключаемой системы, необходимо решить вопрос о согласовании начальных условий для уравнений состояния различных режимов при переключениях между ними.

Итак, пусть в момент времени $\tilde{l}T$ режим j переключаемой системы (11) сменяется режимом i, причем $\theta_j \neq \theta_i$. Тогда, учитывая (8) и (9), зададим начальное значение для вектора состояния $x^{(i)}$ i-го режима в момент $\tilde{l}T$ следующим образом

$$
\begin{aligned}
&x^{(i)}[\tilde{l}T] =\\
&= (x_1[\tilde{l}T],\dots,x_n[\tilde{l}T],u[(\tilde{l}-1)T],\dots,u[(\tilde{l}-l_i)T])^{\top},
\end{aligned} \tag{12}
$$

где $x_1[\tilde{l}T],\dots,x_n[\tilde{l}T]$ – конечные значения первых n компонент вектора состояния x^j j-го режима на предыдущем промежутке времени.

Решением уравнения состояния переключаемой системы (11) при заданном управлении u, переключающем сигнале $\sigma \in [S]_{0,\gamma}$ и начальном условии $x^{(\sigma[0])}[0] \in R^{n+l_\sigma}$ будем называть дискретную вектор-функцию $\tilde{x}[lT] \in R^{n+p}$ ($p = \arg\max_i l_i$), совпадающую на каждом промежутке активности i-го режима ($i \in I$) с вектор-функцией $\tilde{x}^{(i)}[lT] \in R^{n+p}$. При этом вектор-функция

$$
\tilde{x}^{(i)}[lT](x_1[lT],\dots,
x_n[lT],x_{n+1}[lT],x_{n+l_i}[lT],\underbrace{0,\dots,0}_{p-l_i})^{\top} \in R^{n+p}
$$

порождается решением уравнения состояния i-го режима (10) на соответствующем промежутке активности $[\tilde{l}T;\hat{l}T]$ этого режима с начальными условиями (12).

При введенном выше согласовании начальных условий в моменты переключений системы (11), выполняется свойство точной дискретизации [10, с. 81]

$$
x(t)|_{t=lT} = \overline{x}[lT] = (x_1[lT],\dots,x_n[lT])^{\top},\quad l = 0,1,\dots,
$$

где $x(t)$ – решение уравнения состояния непрерывной системы (1) при фиксированном управлении u и заданных $\sigma \in S_{0,\gamma}$, $x(0) \in R^n$, а $\overline{x}[lT]$ – вектор, образованный первыми n компонентами вектора $\tilde{x}[lT]$ решения соответствующей дискретной системы (11) при согласованных начальных условиях

$$
\begin{pmatrix} x_1^{(\sigma[0])}[0]\\ \vdots\\ x_n^{(\sigma[0])}[0]\\ x_{n+1}^{(\sigma[0])}[0]\\ \dots\\ x_{n+l_{\sigma(0)}}^{(\sigma[0])}[0]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}. \tag{13}
$$

Замыкая систему (11) регулятором (3), получим дискретную модель замкнутой непрерывно-дискретной системы (5)

$$
\begin{cases}
x^{(\sigma)}[(l+1)T] = (\overline{A}_\sigma + \overline{b}_\sigma h \overline{c}_\sigma)x^{(\sigma)}[lT] + \overline{b}_\sigma H v[lT],\\
v[(l+1)T] = q\overline{c}_\sigma x^{(\sigma)}[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}.
\end{cases} \tag{14}
$$

Решением системы (14) считаем вектор $(\tilde{x}[lT]v[lT])^{\top}$. Замкнутую дискретную переключаемую систему (14) будем называть $[S]_{0,\gamma}$-устойчивой, если для любых начальных условий $x^{\sigma[0]}[0]$, $v[0]$, и $\sigma \in [S]_{0,\gamma}$ для соответствующего решения выполнено:

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{x}[lT] \\ \upsilon[lT] \end{matrix} \right\| \to 0, \quad \text{при} \quad l \to +\infty. \tag{15}$$

На основании результатов работы [9] сформулируем теорему о согласованности свойства устойчивости систем (5) и (14).

Теорема 1. *Непрерывно-дискретная система* (5) $S_{0,\gamma}$*-устойчива тогда и только тогда, когда* $[S]_{0,\gamma}$*-устойчива переключаемая дискретная система* (14).

Таким образом, поставленная в п. 2 задача стабилизации, в соответствии с теоремой 1, может быть сведена к задаче стабилизации по выходу дискретной системы (11) дискретным регулятором (3).

4. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Прежде чем перейти к проблеме построения стабилизирующей обратной связи для системы (11), рассмотрим вопрос о проверке устойчивости замкнутой системы (14). Одно из известных [9, 12—15] достаточных условий устойчивости переключаемой линейной системы при произвольных переключениях основано на проверке факта существования общей функции Ляпунова для конечного набора режимов этой системы. А именно, справедлива следующая теорема [9].

Теорема 2. *Пусть существует положительно определенная матрица* P, *удовлетворяющая системе линейных матричных неравенств*

$$\Gamma_i P \Gamma_i^\top - P \prec 0 \quad i = 1,\ldots,m.$$

Тогда дискретная переключаемая линейная система

$$\begin{gathered} \xi[(l+1)T] = \Gamma_\sigma \xi[lT], \\ \xi \in R^n, \quad \Gamma_i \in R^{n\times n}, \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma} \end{gathered} \tag{16}$$

$[S]_{0,\gamma}$*-устойчива*.

Для того чтобы применить сформулированное достаточное условие для проверки $[S]_{0,\gamma}$-устойчивости замкнутой системы (14), применим к ней метод расширения динамического порядка [7, 16, 17] для приведения всех ее режимов к единой размерности. В соответствии с данным методом сопоставим системе (14) переключаемую линейную $(n+p)$-мерную систему вида

$$\begin{cases} \tilde{x}[(l+1)T] = (\tilde{A}_\sigma + \tilde{b}_\sigma h \tilde{c}_\sigma) x^{(\sigma)}[lT] + \tilde{b}_\sigma H v[lT], \\ v[(l+1)T] = q\tilde{c}_\sigma \tilde{x}[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} \bar{A}_i & O_{(n+l_i)\times(p-l_i)} \\ O_{(p-l_i)\times(n+l_i)} & A_i^* \end{pmatrix} \in R^{(n+p)\times(n+p)},$$

$$\tilde{b}_i = \begin{pmatrix} \bar{b}_i \\ O_{(p-l_i)\times 1} \end{pmatrix} \in R^{(n+p)\times 1}, \quad \tilde{c}_i = (\bar{c}_i O_{1\times(p-l_i)}) \in R^{1\times(n+p)}$$

— блочные матрица и векторы. Здесь A_i^* — произвольные устойчивые матрицы порядка $p - l_i$, O — нулевая матрица соответствующей размерности. Система (17) является динамическим расширением системы (14). Заметим, что динамическое расширение определяется неоднозначно и зависит от выбора устойчивых матриц A_i^*.

Опираясь на результаты работы [16], сформулируем следующую теорему о связи устойчивости систем (14) и (17).

Теорема 3. *Пусть некоторое динамическое расширение* (17) *дискретной переключаемой системы* (14) $[S]_{0,\gamma}$*-устойчиво, тогда система* (14) *также* $[S]_{0,\gamma}$*-устойчива*.

Таким образом, проверка $[S]_{0,\gamma}$-устойчивости дискретной системы (14) может быть сведена к проверке $[S]_{0,\gamma}$-устойчивости некоторого ее динамического расширения (17) с использованием сформулированного выше достаточного условия (теорема 2).

5. ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОИСКА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕГУЛЯТОРА

Теорема 1 позволяет свести задачу построения цифрового стабилизатора (3), (4) для непрерывной переключаемой системы (1) к задаче построения дискретного регулятора (3), стабилизирующего дискретную переключаемую систему (11). Решение этой задачи существенно усложняет предположение о ненаблюдаемости переключающего сигнала в процессе функционирования рассматриваемой переключаемой системы. В связи с этим для решения указанной задачи, по аналогии с работой [9], воспользуемся методами теории одновременной стабилизации [7]. Поскольку регулятор, стабилизирующий переключаемую систему, должен стабилизировать каждый режим этой системы в отдельности, то синтез соответствующего дискретного регулятора, фактически, можно свести к задаче об одновременной стабилизации конечного семейства дискретных объектов (10) ($i \in I$) единым регулятором вида (3).

Для решения задачи об одновременной стабилизации по выходу конечного семейства дискретных объектов (10), в соответствии с методами, изложенными в монографии [7]:

1) необходимо перейти к описанию этих объектов через передаточные функции

$$W_i(z) = \overline{c}_i(zI - \overline{A}_i)^{-1}\overline{b}_i = \frac{\beta_i(z)}{\alpha_i(z)} = \\ = \frac{b^{(i)}_{n+l_i-1}z^{n+l_i-1} + \ldots + b^{(i)}_1 z + b^{(i)}_0}{z^{n+l_i} + a^{(i)}_{n+l_i-1}z^{n+l_i-1} + \ldots + a^{(i)}_1 z + a^{(i)}_0}; \quad (18)$$

2) с помощью вычислительных процедур на основе алгоритма SIVIA [7, 18] построить для семейства дискретных объектов (18) множество $\mathcal{R}$ одновременно стабилизирующих регуляторов в виде передаточных функций порядка r

$$R(z) = \frac{p(z)}{g(z)} = \frac{p_r z^r + p_{r-1}z^{r-1} + \ldots + p_1 z + p_0}{z^r + g_{r-1}z^{r-1} + \ldots g_1 z + g_0}. \quad (19)$$

Далее, пусть множество одновременно стабилизирующих регуляторов $\mathcal{R}$ не пусто и $R(z) \in \mathcal{R}$. В соответствии с методами теории реализации [19], перейдем от описания регулятора в виде передаточной функции (19) к его описанию в пространстве состояний, т.е. к виду (3). Тогда, в силу того, что рассматриваемый регулятор одновременно стабилизирующий, то он обеспечивает для всех $i = 1,\ldots,m$ асимптотическую устойчивость замкнутых систем

$$\begin{cases} x^{(i)}[(l+1)T] = (\overline{A}_i + \overline{b}_i h\overline{c}_i)x^{(i)}[lT] + \overline{b}_i Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = q\overline{c}_i x^{(i)}[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in [S]_{0,\gamma}. \end{cases} \quad (20)$$

Однако одновременно стабилизирующий регулятор гарантирует лишь необходимое условие устойчивости замкнутой переключаемой системы (устойчивость каждого режима в отдельности, но не гарантирует устойчивость переключаемой системы), поэтому необходимо обеспечить дополнительную проверку стабилизирующих свойств регуляторов из множества $\mathcal{R}$.

Известно [7], что множеству регуляторов $\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие объединение $\mathcal{P}$ конечного набора параллелотопов в пространстве R^{2r+1} коэффициентов их передаточных функций (19). Учитывая это, приведем один из возможных вариантов реализации численного алгоритма выбора на множестве $\mathcal{R}$ стабилизирующего регулятора для переключаемой системы (11).

Шаг 1. На множестве $\mathcal{P}$ в пространстве R^{2r+1} построим равномерную сетку.

Шаг 2. Для каждого j-го узла сетки, соответствующего некоторому одновременно стабилизирующему регулятору, выпишем соответствующую замкнутую систему вида (11), для которой построим произвольное динамическое расширение вида (17).

Шаг 3. Выполним проверку системы (17) на $[S]_{0,\gamma}$-устойчивость, используя теорему 2 п. 4. Если хотя бы для одного узла сетки проверка дала положительный результат, то на этом работа алгоритма закончена, поскольку, в силу теорем 1 и 3, найденный регулятор будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы (5).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что изложенный в п. 5 настоящей работы алгоритм поиска стабилизатора на множестве одновременно стабилизирующих регуляторов с использованием квадратичного условия устойчивости (теорема 2 п. 4.) не является единственно возможным. Например, для проверки устойчивости замкнутых переключаемых дискретных систем можно также использовать критерий, основанный на понятии обобщенного спектрального радиуса конечного набора квадратных матриц [9, 15], или критерий, основанный на понятии сверхустойчивости дискретных систем [20]. Однако нахождение точного значения обобщенного спектрального радиуса для дискретной переключаемой системы является весьма сложной вычислительной задачей, а свойство сверхустойчивости, к сожалению, присуще весьма узкому множеству переключаемых систем. В связи с этим, по мнению авторов, наиболее оптимальным с вычислительной точки зрения следует признать использование именно квадратичного условия для проверки устойчивости переключаемых дискретных систем.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
2. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. М., 1989.
3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М., 2004.
4. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
5. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.
6. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1109–1120.

7. *Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.
8. *Mahmoud M.S.* Switched time-delay systems. Stability and control. Springer Scienceлќ, Media, LCC 2010.
9. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1132–1141.
10. *Поляков К.Ю.* Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. СПбГМТУ, 2002.
11. *Chen T., Francis B.* Optimal sample-data control systems. Springer-Verlag. Berlin. 1994.
12. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. / Сборник статей "Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН". Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23–81.
13. *Liberzon D., Morse A.S.* Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems. 1999. V. 19. № 5. P. 59–70.
14. *Шпилевая О.А., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
15. *Sun Z., Ge S.S.* Stability theory of switched dynamical systems. Springer-Verlag London Limited, 2011.
16. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Некоторые подходы к стабилизации переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1693–1700.
17. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1555–1563.
18. *Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.* Прикладной интервальный анализ. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 468 с.
19. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С.* Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.
20. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Цифровая сверхстабилизация переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1516–1527.

DIGITAL STABILIZATION OF A SWITCHABLE LINEAR SYSTEM WITH COMMENSURATE DELAYS

Corresponding member of RAS A. V. Ilin[a,b,c] and A. S. Fursov[a,b]

[a] *Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, RPC*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

[c] *Federal Research Center for Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

An approach to the construction of a digital controller that stabilizes a non-continuous switchable linear system with commensurate delays in control is proposed. The approach to stabilization sequentially includes the construction of a switchable continuously discrete closed system with a digital controller, the transition to its discrete model, represented as a switchable system with modes of various orders and the construction of a discrete dynamic controller based on the quadratic stability condition of a closed switchable discrete system.

Keywords: discrete systems, switchable systems, digital controller, stabilization of discrete systems