ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 39–43

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АСИМПТОТИКАХ БАРЕНБЛАТТА–ЗЕЛЬДОВИЧА

© 2023 г. В. А. Костин[1,*], Д. В. Костин[1,2,**], А. В. Костин[1,***]

Представлено академиком РАН В.П. Масловым
Поступило 11.07.2023 г.
После доработки 05.09.2023 г.
Принято к публикации 18.10.2023 г.

Понятие “промежуточной асимптотики” для решения эволюционного уравнения с начальными данными и связанного с ними решения без начальных условий введено Г.Н. Баренблаттом и Я.Б. Зельдовичем в связи с расширением понятия “строгого детерминизма” в статистической физике и квантовой механике. Здесь, по утверждению В.П. Маслова, для аксиоматизации математической теории надо еще знать, каким условиям должны удовлетворять начальные решения задачи. В работе показывается, что корректная разрешимость задачи без начальных условий для дробно-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве является необходимым, но не достаточным условием “промежуточной асимптотики”. Приводятся примеры “промежуточной асимптотики”.

Ключевые слова: промежуточные асимптотики, корректные задачи, задача Коши, уравнения без начальных условий, сильно непрерывные полугруппы, дробные степени операторов

DOI: 10.31857/S2686954323600763, **EDN:** CYZJAQ

Г.Н. Баренблатт и Я.Б. Зельдович, обращая внимание на важность задач без начальных условий, описывающих периодические и переходные процессы так давно, что начальные данные практически не оказывают влияние на поведение решения в момент наблюдения, заключают, что это связано с расширением понятия и “строгого детерминизма”, обязанного успехам статической физики и квантовой механики в [1], для уравнений квантовой механики.

В.П. Маслов, обсуждая постановку задачи Коши для уравнений квантовой механики в [5] стр. 85, говорит, что для того чтобы аксиоматизировать математическую теорию квантовой механики, надо еще знать, каким условиям должны удовлетворять начальные данные решения задачи.

Таким образом, ставится постановка вопроса о свойствах явления, которые не зависят от деталей в начальных условиях. Но такая независимость возможна лишь по истечении достаточного времени.

То есть, в таком случае, можно говорить об асимптотике решений по времени, стремящемся к бесконечности. Поэтому в [1] такие асимптотики называют промежуточными, а соответствующие задачи без начальных условий “вырожденными”.

Однако для того, чтобы решение вырожденной задачи являлось промежуточной асимптотикой, необходимо, чтобы оно было устойчивым относительно возмущений, т.е. такая задача должна быть корректной в некотором классе функций.

Установлению этого факта для некоторых уравнений в банаховом пространстве посвящена данная заметка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$ и A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$, плотной в E.

Обозначим через $C_\mu(E, R)$ банахово пространство вектор-функций $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = R$, со значениями в E с нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{t \in R} \|e^{-\mu t} f(t)\|, \quad \mu \geq 0. \tag{1}$$

[1]*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2]*Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия*
**E-mail: vlkostin@mail.ru*
***E-mail: dvk605@mail.ru*
****E-mail: leshakostin@mail.ru*

Напомним, что сильно непрерывная полугруппа линейных операторов $U(s)$, $s \geq 0$ (C_0-полугруппа) удовлетворяет условиям

1. $U(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$
2. $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$
3. $\lim_{s\to 0}\|U(s)\varphi - \varphi\| = 0$.

Для C_0-полугруппы соотношением

$$\left.\frac{dU(s)}{ds}\right|_{s=0}\varphi = A\varphi$$

определяется производящий оператор A с областью определения $D(A)$, плотный в E.

Применяя дробную производную Маршо порядка $\alpha \in (0,1)$

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty s^{-(1+\alpha)}[u(t-s) - u(s)]ds, \qquad (2)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t) + f(t), \quad f \in C_\mu(E,R). \qquad (3)$$

Решением уравнения (3) будем называть вектор-функцию

$$u \in C_\mu(E,R), \qquad (4)$$

для которой $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in R$, определены производные Маршо (2) и выполнено равенство (3).

Определение 1. Будем говорить, что задача (3)–(4) без начальных условий поставлена корректно, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для нее выполняется оценка корректности

$$\|u\|_{C_\mu} \leq M\|f\|_{C_\mu},$$

с константой $M \geq 0$, не зависящей от f.

Определение 2. Функцию $u_+(t)$ будем называть решением задачи Коши с условием

$$u(0) = u_0 \in D(A), \qquad (5)$$

если она удовлетворяет уравнению (3) и условию (5).

Определение 3. Решение $u(t)$ задачи (3)–(4) будем называть промежуточной асимптотикой решения $u_+(t)$ задачи (3)–(5), если выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t) - u_+(t)\|_{C_\mu} = 0. \qquad (6)$$

Определение 4. Решение задачи (3)–(4) будем называть "условно-промежуточной" асимптотикой решения $u_+(t)$ задачи (3)–(5), если выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t) - u_+(t)\|_E \leq M\|u_0\|, \qquad (7)$$

где константы $M > 0$ не зависят от u_0.

Теорема 1. Если оператор A является производящим оператором C_0-полугруппы $U(s,A)$ с оценкой

$$\|U(s,A)\varphi\|_E \leq Me^{-\omega s}\|\varphi\|_E, \quad \omega \geq 0, \qquad (8)$$

то для любой функции $f \in C_\mu(E,R)$ уравнение имеет единственное решение $u \in C_\mu(R,E)$ и для него выполняется оценка

$$\|U(s,A)u\|_\mu \leq \frac{Me^{-(\omega+\mu^\alpha)s}}{\omega+\mu^\alpha}\cdot\|u\|_\mu. \qquad (9)$$

При этом, если в условии (5) $u_0 = 0$, то решение $u(t)$ является "промежуточной асимптотикой" при любом $\omega \geq 0$. В случае произвольного $u_0 \in D(A)$ $u(t)$ является "промежуточной асимптотикой" только при $\omega > 0$, а при $\omega = 0$ имеет место "условно-промежуточная асимптотика".

2. ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ. КОРРЕКТНОСТЬ

Вводя полугруппы правых сдвигов $U\left(s,-\frac{d}{dt}\right)(u(t)) = u(t-s)$ в представлении производной Маршо (2), получаем связь дробной производной $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ с дробной степенью $\left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha$, имеющей, согласно формуле Балакришнана [3], стр. 358, представление

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{U\left(s,-\frac{d}{dt}\right)u(t) - u(s)}{s^{1+\alpha}}ds = \left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha. \qquad (10)$$

Полагая $B_\alpha = \left(-\frac{d}{dt}\right)^\alpha$, и используя (10), запишем уравнение (3) в операторной форме

$$Au(t) - B_\alpha u(t) = -f(t). \qquad (11)$$

Согласно [3], стр. 358 оператор $-B_\alpha$ является производящим оператором C_0-полугруппы

$$U(s,-B_\alpha)u(t) = \int_0^\infty h_{\alpha,s}(\xi)U\left(\xi,-\frac{d}{dt}\right)u(t)d\xi, \qquad (12)$$

где $h_{\alpha,\xi}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\xi - sp^\alpha}$ – функция Иосиды, обладающая свойствами: $h_{\alpha,s}(\xi) > 0$ и

$$\int_0^\infty e^{-a\xi} h_{\alpha,s}(\xi)d\xi = e^{-a^\alpha s}, \tag{13}$$

$$\int_0^\infty e^{-a\xi} h_{\alpha,\xi}(s)d\xi = E_{\alpha,\alpha}(-as^\alpha), \tag{14}$$

где $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha(n+1))}$ – функция Миттаг–Леффлера.

Кроме того, из (13) и легко проверяемого неравенства

$$\|u(t-s)\|_{C_\mu} = \left\| U\left(s, -\frac{d}{dt}\right)u(t)\right\|_{C_\mu} \le e^{-\mu s}\|u\|_{C_\mu} \tag{15}$$

следует оценка

$$\|U(s,-B_\alpha)u\|_{C_\mu} \le e^{-\mu^\alpha s}\|u\|_{C_\mu}. \tag{16}$$

Оценки (10) и (16) позволяют применить результат Да Прато–Грисвальда [9] об обращении операторной суммы, в соответствии с которым решение уравнения (3) представимо в виде

$$u(t) = -\int_0^\infty U(s, B_\alpha)U(s, A)fds. \tag{17}$$

Отсюда следует оценка корректности

$$\begin{gathered}\|u\|_{C_\mu} \le \int_0^\infty \|U(s,B_\alpha)\| \cdot \|U(s,A)\|ds \cdot \|f\|_{C_\mu} \le \\ \le M\int_0^\infty e^{-(\omega+\mu^\alpha)s}ds \cdot \|f\|_{C_\mu} = \frac{M\|f\|_{C_\mu}}{\omega+\mu^\alpha}.\end{gathered} \tag{18}$$

3. ЗАДАЧА КОШИ

В случае $u_0 = 0$ решение задачи (3)–(5) находится аналогично решению (17) с заменой полугруппы $U\left(s,-\frac{d}{dt}\right)u(t) = u(t-s)$ на полугруппу

$$U_+\left(s,-\frac{d}{dt}\right)u(t) = \begin{cases} u(t-s), & \text{если } t \ge s \\ 0, & \text{если } t < s, \end{cases} \tag{19}$$

которая при $t \ge s$ совпадает с полугруппой $U\left(s,-\frac{d}{dt}\right)$.

В таком случае решение задачи (3)–(5) имеет вид

$$\begin{gathered} u_+(t) = -\int_0^\infty U_+(s,B_\alpha)U(s,A)fds = \\ = -\int_0^t U(s,B_\alpha)U(s,A)fds. \end{gathered} \tag{20}$$

В случае $f = 0$, $u_0 \in D(A)$, применяя преобразование Лапласа к (3), с учетом (5), получаем изображение решения

$$\tilde{u}_+(p) = (p^\alpha - A)^{-1}u_0 = \int_0^\infty e^{-p^\alpha \xi}U(\xi, A)u_0 d\xi. \tag{21}$$

Здесь мы воспользовались представлением резольвенты производящего оператора через C_0-полугруппу.

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем решение

$$\begin{gathered} u_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\int_0^\infty e^{-p^\alpha\xi}U(\xi,A)u_0 d\xi dp = \\ = \int_0^\infty h_{\alpha,\xi}(t)U(\xi,A)u_0 d\xi. \end{gathered} \tag{22}$$

Из (22) следует оценка

$$\begin{gathered} \|u_+(t)\|_E \le \int_0^\infty h_{\alpha,\xi}(t)\|U\xi, A)\|d\xi \cdot \|u_0\|_E \le \\ \le M\int_0^\infty h_{\alpha,xi}(t)e^{-\omega\xi}d\xi \cdot \|u_0\|_E = M \cdot E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha)\|u_0\|_E. \end{gathered} \tag{23}$$

Из (20) и (22) следует, что решение задачи (3)–(5) имеет вид

$$u_+(t) = \int_0^\infty h_{\alpha,\xi}(t)U(\xi,A)u_0 d\xi - \int_0^t U(s,B_\alpha)U(s,A)fds. \tag{24}$$

Из (5), (20) и (24) получаем

$$\begin{gathered} \|u(t) - u_+(t)\|_E \le ME_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) \cdot \|u_0\| + \\ + \int_t^\infty \|U(s,B_\alpha)\|U(s,A)\|fds \le \\ \le ME_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) \cdot \|u_0\| + \frac{e^{-(\omega+\mu^\alpha)t}}{\omega+\mu^\alpha} \cdot \|f\|_{C_\mu}. \end{gathered} \tag{25}$$

Учитывая, что при $\omega > 0$ $\lim_{t\to\infty} E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) = 0$ из (25) следует “промежуточная асимптотика” $u(t) \sim u_+(t)$, при $t \to \infty$.

Если $\omega = 0$, то $\lim_{t\to\infty}\|u(t) - u_+(t)\| \le M \cdot \|u_0\|$. То есть имеет место “условно-промежуточная асимптотика”.

3. О ТОЧНОСТИ ПОЛУЧЕННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пусть E – банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на R функций $f(x) \in C_{[-\infty,\infty]}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in R}|f(x)|$ и $f(t, x) = e^{-\mu t}f(x)$, $t \in R$, $\mu \ge 0$.

Оператор A зададим дифференциальным выражением $\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения

$$D(A) = \left\{ \varphi \in C_{[-\infty,\infty]}, \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \in C_{[-\infty,\infty]} \right\}.$$

Определенный таким образом оператор A является производящим оператором C_0-полугруппы

$$U(s,A)\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4s}} \varphi(\xi) d\xi \tag{26}$$

с оценкой

$$\|U(s,A)\varphi\|_C \leq \|\varphi\|_C. \tag{27}$$

Оценка (27) является точной, так как (27) переходит в равенство при $\varphi(x) \equiv 1$ (см. [3], стр. 325). При этом для $\varphi(x) = \cos\omega x \in C_{[-\infty,\infty]}$ справедливо равенство

$$U(s,A)\cos\omega x = e^{-\omega^2 s}\cos\omega x. \tag{28}$$

В соответствии с (12), (15) и (29) задача без начальных условий для уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + e^{-\mu t}\cos\omega x \tag{29}$$

имеет решение

$$u(t,x) = \\ = -\int_0^\infty U(s,B_\alpha)U(s,A)e^{-\mu t}\cos\omega x ds = -\frac{\cos\omega x}{\omega^2 + \mu^2}. \tag{30}$$

При этом для уравнения (29) с начальным условием $u_0(x) = \cos\omega x$, в соответствии с (24), имеет вид

$$u_+(x,t) = E_{\alpha,\alpha}(-\omega^2 t^\alpha)\cos\omega x - \\ -\int_0^t e^{-(\omega^2+\mu^\alpha)s} ds \cdot \cos\omega x = \\ = \left[E_{\alpha,\alpha}(-\omega^2 t^\alpha) - \frac{e^{-(\omega^2+\mu^\alpha)t}}{\omega^2 + \mu^\alpha} \right] \cos\omega x. \tag{31}$$

Из (30) и (31) получаем точное представление для разности решений

$$u_+(x,t) - u(x,t) = \\ = \left[E_{\alpha,\alpha}(-\omega^2 t^\alpha) + \frac{e^{-(\omega^2+\mu^\alpha)t}}{\omega^2 + \mu^\alpha} \right] \cdot \cos\omega x. \tag{32}$$

Из (32) следует, что при $\omega > 0$ имеет место “промежуточная асимптотика”, так как при каждом $x \in R$

$$\lim_{t\to\infty}[u_+(x,t) - u(x,t)] = 0. \tag{33}$$

В то время как при $\omega = 0$

$$\lim_{t\to\infty}[u_+(x,t) - u(x,t)] = 1. \tag{34}$$

Следовательно, имеет место “условно-промежуточная асимптотика”.

Замечание. Если в условиях теоремы 1 $x \in R^n$,

$$f(x,t) = e^{-\mu t}\prod_{i=1}^n \cos\omega_i x_i,$$

$$A\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i^2} = \Delta\varphi(x), \quad E = C_{[-\infty,\infty]}, \tag{35}$$

то, аналогично (27), можно показать, что разность между решением $u(x,t)$ задачи с начальным условием $u_0(x) = \prod_{i=1}^n \cos\omega_i x_i$ имеет вид

$$u_+(x,t) - u(x,t) = \\ = \left[E_{\alpha,\alpha}\left(-\sum_{i=1}^n \omega_i t^\alpha\right) + \frac{e^{-\sum_{i=1}^n(\omega_i^2+\mu^\alpha)t}}{\sum_{i=1}^m(\omega_i^2 + \mu^\alpha)} \right] \cdot \prod_{i=1}^n \cos\omega_i x_i. \tag{36}$$

Отметим, что в этом случае “промежуточная асимптотика” имеет место, когда неравенство $\omega_i > 0$ выполнено хотя бы для одного $i = 1,\ldots,n$.

Заключение. Теорема 1 показывает, что корректная разрешимость задачи без начальных условий является лишь необходимым условием для того, чтобы ее решение являлось “промежуточной асимптотикой”, но не является достаточным для задач с ненулевыми начальными условиями. Однако гарантирует “условно-промежуточную асимптотику”, т.е. показывает “меру близости” решений $u(t)$ и $u_+(t)$ при $t \to \infty$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке гранта РНФ 22-71-10008.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И.* Промежуточные асимптотики математической физики // Г.И. Баренблатт, Я.Б. Зельдович. Успехи мат. наук. 1971. Т. XXVI. Вып. 2(158). С. 115–129.
2. *Зельдович Я.Б.* Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Я.Б. Зельдович, Д.Д. Соколов. Успехи физ. наук. 1985. Т. 146. Вып. 3. С. 493–505.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ: Учебник / К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова. М.: Мир, 1967. 624 с.

4. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. М.: Наука, 1967. 464 с.
5. *Маслов В.П.* Асимптотические методы и теория возмущений/ В.П. Маслов. М.: "Наука", гл. ред. физ. мат. лит., 1988. 312 с.
6. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г., А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.
7. *Учайкин В.В.* Методы дробных производных // В.В. Учайкин. Ульяновск, Изд. Логос, 2002. 512 с.
8. *Федоров В.Е., Туров М.М.* Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана–Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. №. 5. С. 1143–1162.
9. Da Prato Giuseppe / Giuseppe Da Prato, Pierre Grisvard. Paris: Gauthier-Villars. 1975. Journal de mathematiques pures et appliquees. serie 9, tome 54, fasc. 3. pp. 305–387.

ON INTERMEDIATE ASYMPTOTICS BARENBLATT–ZELDOVICH

V. A. Kostin[a], D. V. Kostin[a,b], and A. V. Kostin[a]

[a]*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

[b]*Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia*

Presented by Academician of the RAS V. P. Maslov

The concept of "intermediate asymptotics" for solving an evolution equation with initial values data and the associated solution without initial conditions was introduced by G.N. Barenblatt and Y.B. Zeldovich in connection with the expansion of the concept of "strict determinism" in statistical physics and quantum mechanics. Here, according to V.P. Maslov, to axiomatize a mathematical theory, one must also know what conditions the initial solutions of the problem must satisfy. The paper shows that the correct solvability of the problem without initial conditions for fractional differential equations in a Banach space is necessary but not sufficient condition of "intermediate asymptotics". Examples of "intermediate asymptotics" are given.

Keywords: intermediate asymptotics, well-posed problems, Cauchy problem, equations without initial conditions, strongly continuous semigroups, fractional powers of operators