

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ “СЖАТЫХ” ГАЗОВ НОУБЛА-АБЕЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

© 2023 г. А. А. Злотник^{1,2,*}, Т. А. Ломоносов^{1,2,**}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 12.05.2023 г.

После доработки 16.08.2023 г.

Принято к публикации 21.09.2023 г.

Рассматривается так называемая модель из четырех уравнений динамики гетерогенных сжимаемых бинарных смесей при уравнении состояния “сжатого” газа Нюбля-Абея. Используется ее квазигомогенная форма, возникающая после исключения объемных концентраций из искоемых функций и основанная на квадратном уравнении для общего давления компонент. Приводятся новые свойства этого уравнения и простая формула для квадрата скорости звука, предлагается альтернативный вывод формулы, связывающей ее с квадратом скорости звука Вуда, и формулируется уравнение баланса давления. Впервые дается регуляризация квазигазодинамического типа гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), строится реализующая ее явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству разностная схема без лимитеров в 1D случае и приводятся численные результаты.

Ключевые слова: газовая динамика, гетерогенная бинарная газовая смесь, модель с четырьмя уравнениями, “сжатый” газ Нюбля-Абея, квазигазодинамическая регуляризация, явная по времени и симметричная по пространству схема

DOI: 10.31857/S2686954323600313, EDN: DEJANK

Существует иерархия моделей, описывающих динамику гетерогенных сжимаемых бинарных смесей, см. [1, 2] и ссылки в них. Уравнения баланса массы компонент, полного импульса и полной энергии смеси в простейшей из них односкоростной и однотемпературной модели из четырех уравнений имеют вид

$$\partial_t(\alpha_k r_k) + \operatorname{div}(\alpha_k r_k \mathbf{u}) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(0.5\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon) + \operatorname{div}((0.5\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon + p)\mathbf{u}) = \\ = \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь основные искоемые функции — плотность $r_k > 0$ и объемная доля $0 < \alpha_k < 1$ для k -й компо-

ненты смеси, $k = 1, 2$, общие скорость $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и абсолютная температура $\theta > 0$ смеси. Они зависят от $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ и $t \geq 0$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Операторы $\operatorname{div} = \nabla \cdot$ и $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ берутся по x , $\partial_t = \partial/\partial t$ и $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Символы $\otimes$ и $\cdot$ обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, дивергенция тензора берется по его первому индексу, и ниже $\langle \cdot \rangle$ — операция суммирования по индексу $k = 1, 2$. Дополнительные соотношения таковы

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k \rangle = 1, \quad \rho = \langle \alpha_k r_k \rangle, \quad \rho\varepsilon = \langle \alpha_k r_k \varepsilon_k(r_k, \theta) \rangle, \\ p = p_1(r_1, \theta) = p_2(r_2, \theta) > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где участвуют плотность ρ и удельная внутренняя энергия ε смеси, а также общее давление компонент смеси p , давление $p_k(r_k, \theta)$ и удельная внутренняя энергия $\varepsilon_k = \varepsilon_k(r_k, \theta)$ k -й компоненты, $k = 1, 2$. Дополнительно к уравнениям (1)–(3), первое и последнее алгебраические уравнения в (4) позволяют найти все искоемые функции.

¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik@hse.ru

**E-mail: tlomonosov@hse.ru

Берется уравнение состояния “сжатого” газа Ноубла-Абея (СГНА) [3] в виде

$$\begin{aligned} p_k(r_k, \theta) &= \frac{R_k r_k \theta}{1 - b_k r_k} - p_{*k}, \\ \varepsilon_k(r_k, \theta) &= c_{vk} \theta + \frac{p_{*k}(1 - b_k r_k)}{r_k} + \varepsilon_{0k}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $0 < r_k < b_k^{-1}$. Также $R_k > 0$, $b_k \geq 0$, $c_{vk} > 0$, $p_{*k} \geq 0$ и ε_{0k} – заданные физические постоянные, $k=1, 2$. Напомним, что $R_k = (\gamma_k - 1)c_{vk}$, где $\gamma_k > 1$ – показатель адиабаты k -й компонент, и положим $c_{pk} = \gamma_k c_{vk}$. При $b_k = 0$ охватывается более простое уравнение “сжатого” газа (СГ).

Слагаемые, связанные с фазовым переходом, опущены, но добавлен тепловой поток Фурье $-\mathbf{q}^F = \kappa \nabla \theta$ с $\kappa \geq 0$ (следуя [4]). Напомним, что $\mathbf{f}$ и Q отвечают заданным внешней силе и источнику тепла.

В [4, 5] для уравнений состояния СГ и СГНА было предложено перейти к другой форме модели из четырех уравнений, включающей только альтернативные плотности компонент $\rho_k = \alpha_k r_k$ и $\mathbf{u}$ и ε как искомые функции, но не α_k и r_k , $k=1, 2$, и с этой целью были даны нетривиальные выражения $p = p(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$ и $\theta = \theta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$. Поэтому эту форму можно назвать *квазигомогенной*, и она оказывается предпочтительнее для построения некоторых новых численных методов компьютерного моделирования течений, в частности, см. [4–7].

В данном сообщении приводятся новые свойства квадратного уравнения для p и простая формула для квадрата скорости звука c_s^2 , предлагается новый вывод формулы, связывающей его с квадратом скорости звука Вуда и формулируется уравнение баланса давления. Впервые выполняется регуляризация квазигазодинамического (КГД) типа [8, 9] гетерогенной модели (в квазигомогенной форме), для ее реализации строятся явная двухслойная по времени и симметричная трехточечная по пространству схема без лимитеров в 1D случае и приводятся численные результаты. Для упрощенной квазигидродинамической (КГидД) регуляризации дается уравнение баланса энтропии смеси с неотрицательным ее производством.

1. Напомним переход к квазигомогенной форме и выведем некоторые существенные вспомогательные формулы. Из уравнений состояния (5) последовательно получим

$$(\alpha_k - b_k \rho_k)(p_k + p_{*k}) = R_k \rho_k \theta, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{0k}) &= c_{vk} \rho_k \theta + (\alpha_k - b_k \rho_k) p_{*k} = \\ &= c_{vk} \rho_k \theta + \frac{R_k \rho_k p_{*k}}{p_k + p_{*k}} \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $\hat{\alpha}_k := \alpha_k(1 - b_k r_k) = \alpha_k - b_k \rho_k$ и $\rho b = \langle b_k \alpha_k r_k \rangle = \langle b_k \rho_k \rangle$, тогда $0 < \hat{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq 1$ и $\langle \hat{\alpha}_k \rangle = 1 - b\rho$. Так как $\langle \alpha_k \rangle = 1$ и $p_k = p$, получим далее

$$p = \frac{R\rho\theta - \langle \hat{\alpha}_k p_{*k} \rangle}{1 - b\rho}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon - \varepsilon_0) &= \langle \rho_k(\varepsilon_k - \varepsilon_{0k}) \rangle = c_v \rho \theta + \langle \hat{\alpha}_k p_{*k} \rangle, \\ \rho(\varepsilon - \varepsilon_0) + (1 - b\rho)p &= \gamma c_v \rho \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\rho\varepsilon = \langle \rho_k \varepsilon_k \rangle$ и появляются соответствующие функции-коэффициенты такие, что

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon_0 &= \langle \rho_k \varepsilon_{0k} \rangle, \quad \rho R = \langle R_k \rho_k \rangle, \\ \rho c_v &= \langle c_{vk} \rho_k \rangle, \quad \gamma = (R/c_v) + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Из равенств (6), (7) и $\langle \alpha_k \rangle = 1$ выводим также формулы

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{R_k \rho_k}{p + p_{*k}} \right\rangle \theta &= 1 - b\rho, \\ \rho(\varepsilon - \varepsilon_0) &= \left(c_v \rho + \left\langle \frac{R_k \rho_k p_{*k}}{p + p_{*k}} \right\rangle \right) \theta. \end{aligned}$$

Умножив вторую формулу на $\langle R_k \rho_k / (p + p_{*k}) \rangle$, используя первую и разделив результат на $c_v \rho(1 - b\rho)$, выводим следующее рациональное уравнение для $p = p(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$:

$$\left\langle \frac{\sigma^{(k)}}{p + p_{*k}} \left(\frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)}{1 - b\rho} - p_{*k} \right) \right\rangle = 1, \quad (11)$$

$$\rho = \langle \rho_k \rangle, \quad \rho b = \langle b_k \rho_k \rangle,$$

$$\sigma^{(k)} = \sigma^{(k)}(\rho_1, \rho_2) := \frac{R_k \rho_k}{c_v \rho} > 0, \quad \langle \sigma^{(k)} \rangle = \gamma - 1. \quad (12)$$

Из этого уравнения следует квадратное уравнение

$$p^2 - \beta p - c = 0, \quad (13)$$

$$\beta := \left\langle \sigma^{(k)} \left(\frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)}{1 - b\rho} - p_{*k} \right) \right\rangle, \quad (14)$$

$$c := (\sigma^{(1)} p_{*2} + \sigma^{(2)} p_{*1}) \frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)}{1 - b\rho} - \gamma p_{*1} p_{*2}.$$

Пусть $d := \beta^2 + 4c$ – дискриминант уравнения (13). При $p_{*1} p_{*2} \neq 0$ свойство $d > 0$ и правильный выбор физического корня не очевидны и требуют анализа.

Заметим, что уравнения (11) и (13) не полностью эквивалентны. В частности, в случае $p_{*1} = p_{*2} = p_*$ единственный корень первого уравнения есть $p = (\gamma - 1)\rho(\varepsilon - \varepsilon_0)/(1 - b\rho) - \gamma p_*$, тогда

как второе имеет дополнительный паразитический корень $p = -p_*$.

Утверждение 1. Пусть $\Delta_* := p_{*2} - p_{*1}$. Верны формулы $\beta = p_+ + p_-$, $c = -p_+p_- \geq 0$

$$p_+ = \frac{R\rho\theta - \langle \hat{\alpha}_k p_{*k} \rangle}{1 - b\rho} > 0,$$

$$p_- = -\frac{1}{1 - b\rho} \left(\hat{\alpha}_1 p_{*2} + \hat{\alpha}_2 p_{*1} + \frac{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2}{c_V \rho \theta} \Delta_*^2 \right) \leq 0.$$

Как следствие, $d > 0$, $\sqrt{d} = p_+ - p_-$, и эти $p_{\pm}$ — стандартные корни $p_{\pm} = (\beta \pm \sqrt{d})/2$.

В силу этого утверждения p_+ — физический корень, а p_- — паразитический. Но формула и для p_- нужна для вывода ряда дополнительных свойств, см. утверждение 3 ниже.

Теперь можно перейти к квазигомогенной форме модели из четырех уравнений, состоящей из уравнений баланса массы компонент в виде

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (15)$$

и полного импульса и полной энергии смеси (2), (3). Основными искомыми функциями становятся альтернативные плотности $\rho_k > 0$, скорость $\mathbf{u}$ и удельная внутренняя энергия ε смеси. Уравнения состояния (5) не используются, и теперь p и θ задаются как

$$p = p_+(\rho_1, \rho_2, \varepsilon) = (\beta + \sqrt{d})/2 > 0,$$

$$\theta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon) = (\rho(\varepsilon - \varepsilon_0) + (1 - b\rho)p)/(\gamma c_V \rho), \quad (16)$$

см. формулу (9); напомним, что здесь $d = \beta^2 + 4c$ (или см. альтернативную формулу в [5]), $c = \beta(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$ и $c = c(\rho_1, \rho_2, \varepsilon)$, введенными в (14), см. также (10) и (12). Подчеркнем, что эта новая система не содержит α_k и r_k , хотя в соответствии с формулами (6), $p_k = p_+$ и $r_k = \rho_k/\alpha_k$ их можно вычислить апостериори. В простейшем случае идеальных газов, т.е. при $p_{*k} = b_k = 0$, $k = 1, 2$, имеем $p_+ = R\rho\theta = R_1\rho_1\theta + R_2\rho_2\theta$ и $\alpha_k = R_k\rho_k/(R\rho)$, $k = 1, 2$, и гетерогенная модель становится эквивалентной гомогенной модели смеси с разными давлениями компонент $p_1 = R_1\rho_1\theta$ и $p_2 = R_2\rho_2\theta$, занимающих общий объем, что и объясняет успех последней в [10] и связанных с ней работах.

Стандартным образом можно последовательно вывести уравнения баланса полной массы, кинетической и внутренней энергий компонент

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$0.5 \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + 0.5 \operatorname{div}(\rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}, \quad (17)$$

$$\partial_t (\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{u}) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) + Q. \quad (18)$$

Утверждение 2. Верны следующие формула для квадрата скорости звука и уравнение баланса для p_+

$$c_s^2 := \partial_p p_+ + \frac{p_+}{\rho^2} \partial_\varepsilon p_+ = \frac{\gamma(p_+ + p_{*1})(p_+ + p_{*2})}{(1 - b\rho)\rho\sqrt{d}} > 0, \quad (19)$$

$$\partial_t p_+ + \mathbf{u} \cdot \nabla p_+ + \rho c_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{(1 - b\rho)c_s^2}{c_p \theta} (\operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) + Q), \quad (20)$$

где производные ∂_p и ∂_ε берутся при постоянных ε_0 , $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ в (14) как в [1, 4] и $c_p = \gamma c_V$.

Доказательство выполняется дифференцированием уравнения (13) и с использованием утверждения 1, уравнения (18) и следующего уравнения

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \frac{\langle a_k \rho_k \rangle}{\langle c_k \rho_k \rangle} =$$

$$= \frac{1}{\langle c_k \rho_k \rangle^2} [\langle c_k \rho_k \rangle \langle a_k (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_k \rangle -$$

$$- \langle a_k \rho_k \rangle \langle c_k (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_k \rangle] = 0$$

для произвольных постоянных a_k и c_k , $k = 1, 2$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$), при условии $\langle c_k \rho_k \rangle \neq 0$, поскольку $(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \rho_k = -\rho_k \operatorname{div} \mathbf{u}$ в силу уравнения баланса массы компонент (15).

Сопоставим два определения квадрата скорости звука в смесях.

Утверждение 3. Верна следующая формула

$$\frac{1}{\rho c_s^2} = \frac{1}{\rho c_{sW}^2} + \frac{c_{p1} \alpha_1 r_1 c_{p2} \alpha_2 r_2}{c_p \rho \theta} (\zeta_1 - \zeta_2)^2, \quad (21)$$

где c_{sW}^2 — квадрат хорошо известной скорости звука в смесях по Вуду и

$$\frac{1}{\rho c_{sW}^2} = \left\langle \frac{\alpha_k}{r_k c_{sk}^2} \right\rangle,$$

$$c_{sk}^2 = \frac{\gamma_k (p_k + p_{*k})}{r_k (1 - b_k r_k)} = \frac{(\gamma_k - 1) c_{pk} \theta}{(1 - b_k r_k)^2},$$

$$\zeta_k := \left(1 - \frac{1}{c_{pk}} \partial_\theta \varepsilon_k(\theta, p_k) \right) \frac{\theta}{p_k} = \frac{1}{c_{pk} \hat{r}_k}$$

с $\hat{r}_k := r_k/(1 - b_k r_k)$ и $k = 1, 2$.

Эта формула следует из утверждения 6 в [1], но, важно, что имеется другое замкнутое в себе и прямое доказательство, основанное лишь на данных выше рассуждениях и двух утверждениях. Оно состоит в последовательных преобразованиях правой части $\mathcal{F}$ в (21):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{\hat{\alpha}_2 \gamma_2 (\gamma_1 - 1) c_{p1} \hat{r}_1 + \hat{\alpha}_1 \gamma_1 (\gamma_2 - 1) c_{p2} \hat{r}_2}{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) c_{p1} c_{p2} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \theta} - \frac{\langle \hat{\alpha}_k \rangle^2}{\rho c_p \theta} = \frac{\hat{\alpha}_2 R_1 \hat{r}_1 + \hat{\alpha}_1 R_2 \hat{r}_2}{R_1 R_2 \hat{r}_1 \hat{r}_2 \theta} - \frac{\langle \hat{\alpha}_k \rangle^2}{\gamma c_v \rho \theta} = \\
&= \frac{\gamma \langle \hat{\alpha}_k \rangle p + \hat{\alpha}_1 p_{*2} + \hat{\alpha}_2 p_{*1} - \langle \hat{\alpha}_k \rangle^2 (p + p_{*1})(p + p_{*2}) / (c_v \rho \theta)}{\gamma (p + p_{*1})(p + p_{*2})} = \\
&= \frac{\langle \hat{\alpha}_k \rangle p + \hat{\alpha}_1 p_{*2} + \hat{\alpha}_2 p_{*1} + \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \Delta_*^2 / (c_v \rho \theta)}{\gamma (p + p_{*1})(p + p_{*2})} = \frac{(1 - bp)(p - p_-)}{\gamma (p + p_{*1})(p + p_{*2})} = \frac{1}{\rho c_s^2} \cdot [0, 1]
\end{aligned}$$

Детали преобразований опускаем.

Из утверждения 3 следует, что $c_s^2 \leq c_{sW}^2$. Отметим простое неравенство $c_{sk}^2 \leq \langle (\rho_k / \rho) c_{sk}^2 \rangle$ для произвольных $c_{sk}^2 > 0$, $k = 1, 2$, где равенство достигается только в случае $r_1 c_{s1}^2 = r_2 c_{s2}^2$.

2. Применим к квазигомогенной модели формальную процедуру регуляризации, данную в [11] для однокомпонентного газа и где было показано, что она легко приводит к КГД регуляризации из [9]. Эта процедура была недавно применена в [10] к системе уравнений типа Эйлера динамики односкоростной и однотемпературной гомогенной газовой смеси. В уравнениях баланса (15), (2) и (3) заменим соответственно $\rho_k \mathbf{u} \rightarrow \rho_k \mathbf{u} + \tau \partial_t (\rho_k \mathbf{u})$ и

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f} \rightarrow \\
&\rightarrow \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \tau \partial_t (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) + \\
&+ \nabla(p + \tau \partial_t p) - (\rho + \tau \partial_t \rho) \mathbf{f}, \\
&(E + p) \mathbf{u} \rightarrow (E + p) \mathbf{u} + \tau \partial_t ((E + p) \mathbf{u}), \\
&\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \rightarrow (\rho \mathbf{u} + \tau \partial_t (\rho \mathbf{u})) \cdot \mathbf{f},
\end{aligned}$$

где $E = 0.5 \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho \varepsilon$ — полная энергия смеси и $\tau > 0$ — параметр регуляризации, который может зависеть от всех искомым функций. Также добавим слагаемые $\operatorname{div} \Pi^{NS}$ и $\operatorname{div}(\Pi^{NS} \mathbf{u})$ в правые части уравнений (2) и (3) с тензором вязкости типа Навье—Стокса

$$\begin{aligned}
\Pi^{NS} &= \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbb{I}, \\
\nabla \mathbf{u} &:= \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n,
\end{aligned}$$

с коэффициентами вязкости $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ (возможно, искусственными) и единичным тензором n -го порядка $\mathbb{I}$.

В совокупности все эти замены ведут от исходной системы типа Эйлера—Фурье (15), (2) и (3) к ее следующей КГД регуляризации

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k (\mathbf{u} - \mathbf{w}_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \\
&= \operatorname{div} \Pi + (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \mathbf{f},
\end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t E + \operatorname{div}((E + p)(\mathbf{u} - \mathbf{w})) = \\
&= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^\tau + \Pi \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{f} + Q
\end{aligned} \quad (24)$$

с теми же неизвестными функциями. Эта система содержит регуляризующие скорости

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_k &:= \tau \rho_k^{-1} \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{w}}, \quad k = 1, 2, \\
\hat{\mathbf{w}} &= \tau ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho^{-1} \nabla p - \mathbf{f}),
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &:= \left\langle \frac{\rho_k}{\rho} \mathbf{w}_k \right\rangle = \frac{\tau}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \nabla p - \rho \mathbf{f}) = \\
&= \frac{\tau}{\rho} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{w}},
\end{aligned} \quad (26)$$

слагаемое $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$ и регуляризующие вязкое напряжение и поток тепла

$$\begin{aligned}
\Pi^\tau &:= \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau \left(\mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{(1 - bp) c_s^2}{c_p \theta} Q \right), \\
-\mathbf{q}^\tau &:= \tau (\mathbf{u} \cdot (\rho \nabla \varepsilon - \rho^{-1} p \nabla \rho) - Q) \mathbf{u},
\end{aligned}$$

где можно переписать $\rho \nabla \varepsilon - \rho^{-1} p \nabla \rho = \nabla(\rho \varepsilon) - \rho^{-1}(\rho \varepsilon + p) \nabla \rho$. Вывод повторяет рассуждения из Приложения А в [10] и отличается лишь использованием более общего уравнения баланса давления (20) (при $\kappa = 0$) и общего слагаемого $\rho^{-1} p$ в выражении для $-\mathbf{q}^\tau$.

Регуляризованная КГД-система уравнений влечет дополнительные уравнения баланса массы, кинетической и внутренней энергий смеси

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho (\mathbf{u} - \mathbf{w})) = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
&0.5 \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + 0.5 \operatorname{div}(\rho |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} - \mathbf{w})) + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \\
&= (\operatorname{div} \Pi) \cdot \mathbf{u} + (\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \mathbf{f} \cdot \mathbf{u},
\end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
&\partial_t (\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon (\mathbf{u} - \mathbf{w})) + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \\
&= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^\tau + p \mathbf{w}) + \Pi : \nabla \mathbf{u} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} + Q,
\end{aligned} \quad (29)$$

которые выводятся аналогично соответствующим исходным уравнениям (17), (18).

Также остановимся на упрощенной регуляризованной КГидД системе уравнений

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}) \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \\ &= \operatorname{div}(\Pi^{NS} + \hat{\Pi}^\tau) + \rho \mathbf{f}, \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p)(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}})) &= \\ &= \operatorname{div}(-\mathbf{q}^F + (\Pi^{NS} + \hat{\Pi}^\tau)\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}) \cdot \mathbf{f} + Q,\end{aligned}$$

с упрощенной регуляризующей скоростью $\hat{\mathbf{w}}$ вместо $\mathbf{w}$ во всех слагаемых, вязким напряжением $\hat{\Pi}^\tau := \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}}$ вместо Π^τ и без регуляризующих слагаемых $\tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$ и $-\mathbf{q}^\tau$. Верны и уравнения баланса типа (27)–(29) с теми же перечисленными упрощениями.

Для k -й компоненты удельная энтропия $s_k(r_k, \varepsilon_k)$ определяется термодинамическими уравнениями $\partial_{r_k} s_k = -p_k/(r_k^2 \theta)$ и $\partial_{\varepsilon_k} s_k = 1/\theta$, $k = 1, 2$; явное выражение для s_k опускаем. Удельная энтропия смеси s такова, что $\rho s = \langle \rho_k s_k \rangle$.

Утверждение 4. Пусть $Q \geq 0$. Для регуляризованной КГидД системы уравнений верно уравнение баланса энтропии смеси с ее неотрицательным производством

$$\begin{aligned}\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\left(\rho s(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{w}}) + \frac{1}{\theta} \mathbf{q}^F\right) &= \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T|_F^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu\right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{\theta} |\nabla \theta|^2 + \frac{\rho}{\tau} |\hat{\mathbf{w}}|^2 + Q \right\} \geq 0,\end{aligned}$$

где конкретные СГНА-уравнения состояния неважны и $|\cdot|_F$ – норма Фробениуса.

3. Обратимся к 1D случаю и введем равномерные основную $\bar{\omega}_h = \{x_i = -X + ih; 0 \leq i \leq N\}$ и вспомогательную $\omega_h^* = \{x_{i+1/2} = -X + (i + 0.5)h; 0 \leq i \leq N - 1\}$ сетки на $\bar{\Omega} = [-X, X]$, с шагом $h = 2X/N$, а также неравномерную сетку $\bar{\omega}^h = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{\bar{m}} = t_{fin}\}$ по времени с шагами $h_m = t_{m+1} - t_m$. Пусть $\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \{-X, X\}$ и $\bar{\omega}^h = \bar{\omega}^h \setminus \{t_{fin}\}$.

Пусть $H(\omega)$ – пространство функций, заданных на сетке ω . Для $v \in H(\bar{\omega}_h)$, $w \in H(\omega_h^*)$ и $y \in H(\bar{\omega}^\tau)$, введем разностные операторы

$$\begin{aligned}[v]_{i+1/2} &= (v_i + v_{i+1})/2, \quad \delta v_{i+1/2} = (v_{i+1} - v_i)/h, \\ v_{\pm, i+1/2} &= v_{i+(1 \pm 1)/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[w]_i^* &= (w_{i-1/2} + w_{i+1/2})/2, \quad \delta^* w_i = (w_{i+1/2} - w_{i-1/2})/h, \\ \delta_i y^m &= (y^{m+1} - y^m)/h_m,\end{aligned}$$

где $v_i = v(x_i)$, $w_{i+1/2} = w(x_{i+1/2})$ и $y^m = y(t_m)$. Пусть далее $\hat{y}^m = y^{m+1}$.

Пусть для краткости $\mathbf{f} = 0$. Дискретизируем на $\omega_h \times \bar{\omega}^h$ регуляризованные КГД-уравнения баланса (22)–(24) в 1D случае следующей явной двух-слойной по времени и трехточечной симметричной по пространству схемой

$$\delta_t \rho_k + \delta^*([\rho_k]([u] - w_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (30)$$

$$\delta_t(\rho u) + \delta^*([\rho]([u] - w)[u] + [p]) = \delta^* \Pi, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}\delta_t(0.5 \rho u^2 + \rho \varepsilon) + \delta^*\{0.5 \rho u_{+} u_{+} + \\ + [\rho \varepsilon] + [p])([u] - w) - 0.25 h^2 (\delta p) \delta u\} = \\ = \delta^*(-q + \Pi[u]) + [Q]^*.\end{aligned} \quad (32)$$

Основные искомые функции $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, u и ε (фактически $\rho \varepsilon$) вместе с функциями p и θ определены на основной сетке $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}^h$. Здесь p и θ определяются формулами (16), см. также выражения (12) и (14) для их коэффициентов; напомним, что $d = b^2 + 4c$.

Возьмем следующие дискретизации регуляризующих скоростей (25), (26) в виде

$$\begin{aligned}w_k &= \frac{[\tau]}{[\rho_k]} [u] \delta(\rho_k u) + \hat{w}, \quad k = 1, 2, \\ \hat{w} &= \frac{[\tau]}{[\rho]} ([\rho] [u] \delta u + \delta p), \\ w &= \left\langle \frac{[\rho_k]}{[\rho]} w_k \right\rangle = \frac{[\tau]}{[\rho]} [u] \delta(\rho u) + \hat{w},\end{aligned}$$

а также дискретизации вязкого напряжения и теплового потока в виде

$$\begin{aligned}\Pi &= v \delta u + [u][\rho] \hat{w} + \\ &+ [\tau] \left([u] \delta p + [\rho c_s^2] \delta u - \frac{(1 - [b\rho])[c_s^2]}{[c_p][\theta]} Q \right), \\ -q &= \kappa \delta \theta + [\tau] \{ (\delta(\rho \varepsilon) - \\ &- [\rho]^{-1} ([\rho \varepsilon] + [p]) \delta p) [u]^2 - Q[u] \}.\end{aligned}$$

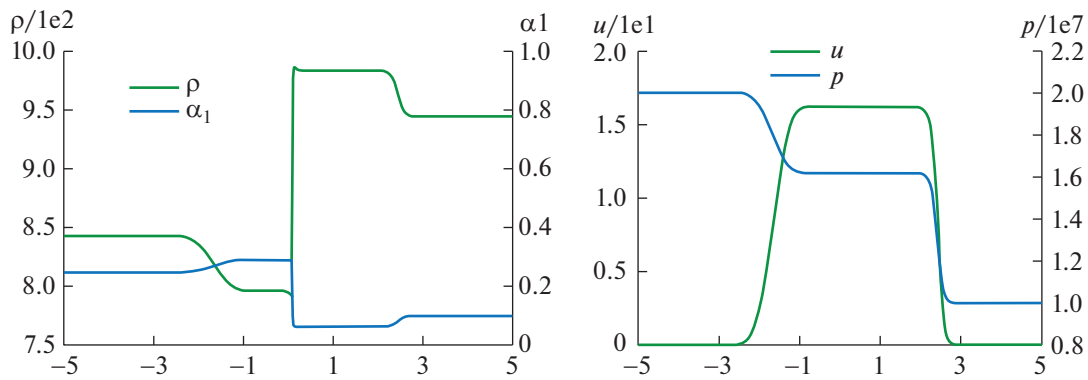


Рис. 1. Результаты расчета течения воды в воздух на основе КГД регуляризации.

Напомним, что c_s^2 задается второй формулой (19). Функции w_k , $\hat{w}$, w , Π , $v = (4/3)\mu + \lambda$, q , κ и Q определены на сетке $\bar{\omega}_h^* \times \bar{\omega}^h$, а функция τ определена на $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}^h$. Возьмем регуляризующий параметр $\tau = ah/(c_s + i_\tau|u|)$, зависящий от h , и искусственные коэффициенты $\nu = a_s[\tau][p]$ и $\kappa = a_{pr}[\tau][c_p][p]$, формально как в случае однокомпонентного газа [9], где $a > 0$ — параметр, $a_s \geq 0$ и $a_{pr}^{-1} > 0$ — числа Шмидта и Прандтля для смеси, используемые как настраиваемые численные параметры, и $i_\tau = 0$ или 1. Ниже $i_\tau = 0$.

Начальные значения ρ_1 , ρ_2 , u , $p\epsilon$ (или эквивалентные им) при $t = 0$ задаются на $\bar{\omega}_h$. Можно найти $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ из уравнения (30), $\hat{\rho}\hat{u}$ и затем $\hat{u}$ из уравнения (31), $0.5\hat{\rho}\hat{u}^2 + \hat{p}\epsilon$ и затем $\hat{p}\epsilon$ из уравнения (32), все на $\bar{\omega}_h$. В вычислениях ниже берем также граничные значения $\phi_0 = \phi_1$ и $\phi_N = \phi_{N-1}$ для $\phi = \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{u}$ и $\hat{p}\epsilon$.

Построенная пространственная дискретизация заметно проще энтропийно корректной в случае гомогенной смеси идеальных газов в [10] (она базируется на [12]). Но дискретизация уравнения баланса (24) в [10] основана на регуляризованной КГД многоскоростной и многотемпературной модели, пока не разработанной для гетерогенных смесей. Также здесь используются только стандартные усреднения ρ_1 , ρ_2 , ϵ .

В уравнении (32) нестандартные слагаемые с $u \cdot u_+$ (близкое к среднему геометрическому для u^2) и $-0.25h^2(\delta p)\delta u$ позволяют обеспечить более естественную форму важного дискретного уравнения баланса внутренней энергии смеси как в [12].

Утверждение 5. Верны следующие дискретные аналоги уравнений баланса массы, кинетической и внутренней энергий смеси (27)–(29):

$$\begin{aligned} \delta_t \rho + \delta^* j &= 0, \quad j := [\rho]([u] - w), \\ 0.5\delta_t(\rho u^2) - 0.5h\hat{\rho}(\delta_t u)^2 + \\ &+ 0.5\delta^*(ju \cdot u_+) + (\delta^*[p])u = (\delta^*\Pi)u, \\ \delta_t(\rho\epsilon) + 0.5h\hat{\rho}(\delta_t u)^2 + \delta^*(j[\epsilon]) &= \\ = -\delta^*q + [\Pi\delta u]^* - p\delta^*([u] - w) + [w\delta p]^* + [Q]^* \end{aligned}$$

на $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}^h$.

Применяется автоматический выбор шага по времени $h_m = \beta_0 h / \max_i(c_{si}^m + |u_i^m|)$, $0 \leq m \leq \bar{m} - 1$ (при $m = \bar{m} - 1$ равенство становится неравенством) с параметром $\beta_0 > 0$ типа Куранта. Отметим, что условия L^2 -диссипативности построенной схемы в случае однокомпонентного идеального газа следуют из результатов [13].

4. По построенной схеме было выполнено большое количество успешных тестовых расчетов. Здесь приведем результаты только двух из них, для краткости опустив единицы измерения величин. Во-первых, возьмем задачу об ударной трубе с течением воды в воздух, см. тест 4.4 в [14]. Рассматривается смесь идеального газа и воды как СГ, с постоянными идеального газа $(\gamma_1, R_1, p_{*1}) = (1.4, 288, 0)$ и постоянными СГ $(\gamma_2, c_{p2}, p_{*2}) = (2.8, 4186, 8.5 \times 10^8)$; здесь $b_k = \epsilon_{0k} = 0$, $k = 1, 2$. Начальные данные таковы: $(\alpha_1, u, p, \theta) = (0.25, 0.2 \times 10^7, 308.15)$ при $-5 \leq x < 0$ и $(0.1, 0, 10^7, 308.15)$ при $0 < x \leq 5$. Взяты численные параметры $(N, a_s, a_{pr}, a, \beta_0) = (2501, 1, 1, 4, 0.1)$. Функции ρ , α_1 и u , p при $t_{fin} = 0.006$ в качестве результатов показаны на рис. 1. Кроме того, массовая концентрация ρ_1/ρ кусочно-постоянна и равна примерно 0.6682 и 0.1193 слева и справа от разрыва. В данном тесте возможен и выбор $a_s = 0$, что лишь немного ухудшает качество вычисления ρ, α_1 . Результаты для упрощенной схемы, отвечающей

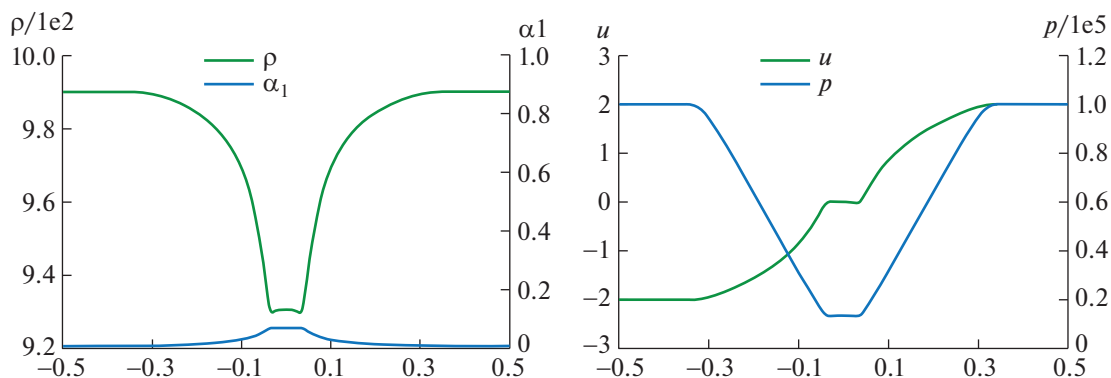


Рис. 2. Результаты расчета течения с кавитацией на основе КГидД регуляризации.

описанной выше КГидД регуляризации, существенно хуже, хотя числа Маха малы (меньше 0.065); в целом сфера ее успешной применимости заметно уже.

Во-вторых, промоделируем начальную стадию течения с кавитацией в трубе, см. тест 8.2.1 в [7]. Берутся две фазы воды, а именно, 1% водяного пара и 99% жидкой воды, и для них применяются соответственно уравнения состояния СГ и СГНА с параметрами $(\gamma_1, p_{*1}, \epsilon_{01}, c_{V1}, b_1) = (1.467, 0, 2077616, 955, 0)$ и $(\gamma_2, p_{*2}, \epsilon_{02}, c_{V2}, b_2) = (1.187, 7.028 \times 10^8, -1177788, 3610, 6.61 \times 10^{-4})$. Начальные данные имеют вид $(\alpha_1, u, p, \theta) = (0.01, 2\operatorname{sgn}x, 10^5, 353)$ при $|x| \leq 0.5$. Выбраны численные параметры $(N, a_S, a_{Pr}, a, \beta_0) = (1001, 1, 1, 0.8, 0.2)$. В данной задаче числа Маха снова малы (меньше 0.07), и применение не только КГД, но и КГидД регуляризации было успешным. Результаты при $t_{fin} = 0.003$ продемонстрированы на рис. 2. На нем функции ρ, α_1, p являются четными, а u — нечетной. Кроме того, массовая концентрация ρ_1/ρ приближенно постоянна и равна 0.6416×10^{-5} . В обоих тестах результаты хорошо согласуются с приведенными в указанных работах.

Более подробно результаты для смесей “сжатых” газов даны в [15]. Хорошо известно, что данная модель смесей довольно легко расширяется на важный случай с фазовыми переходами [4–7]; его вычислительный анализ на основе построенных регуляризаций должен стать предметом последующих статей.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 22-11-00126 (А.А. Злотник, разделы 1 и 2) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению с Минобрнауки РФ, проект 075-15-2022-283 (оба автора, разделы 3 и 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flåtten T., Morin A., Munkejord S.T. // SIAM J. Appl. Math. 2010. V. 70. P. 2861–2882.
2. Zhang C., Menshov I., Wang L., Shen Z. // J. Comput. Phys. 2022. V. 466, article 111356.
3. Le Métayer O., Saurel R. // Phys. Fluids. 2016. V. 28. P. 046102.
4. Le Martelot S., Saurel R., Nkonga B. // Int. J. Multiphase Flow. 2014. V. 66. P. 62–78.
5. Saurel R., Boivin P., Le Métayer O. // Comput. Fluids. 2016. V. 128. P. 53–64.
6. Chiapolino A., Boivin P., Saurel R. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2017. V. 83. P. 583–605.
7. Pelanti M. // Int. J. Multiphase Flow. 2022. V. 153, article 104097.
8. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
9. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
10. Zlotnik A., Lomonosov T. // Entropy. 2023. V. 25, article 158.
11. Злотник А.А. // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.
12. Злотник А.А. // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 7. С. 1304–1316.
13. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 375–380.
14. Li Q., Fu S. // Comput. Math. Appl. 2011. V. 61. P. 3639–3652.
15. Zlotnik A., Lomonosov T. // Chaos. 2023. V. 33, article 113128.

REGULARIZED EQUATIONS FOR DYNAMICS OF THE HETEROGENEOUS BINARY MIXTURES OF THE NOBLE-ABEL STIFFENED-GASES AND THEIR APPLICATION

A. A. Zlotnik^{a,b} and T. A. Lomonosov^{a,b}

^a*Higher School of Economics University, Moscow, Russia*

^b*Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We consider the so-called four-equation model for dynamics of the heterogeneous compressible binary mixtures with the Noble-Abel stiffened-gas equations of state. We exploit its quasi-homogeneous form arising after excluding the volume concentrations from the sought functions and based on a quadratic equation for the common pressure of the components. We present new properties of this equation and a simple formula for the squared speed of sound, suggest an alternative derivation for a formula relating it to the squared Wood speed of sound and state the pressure balance equation. For the first time, we give quasi-gasdynamic-type regularization of the heterogeneous model (in the quasi-homogeneous form), construct explicit two-level in time and symmetric three point in space finite-difference scheme without limiters to implement it in the 1D case and present numerical results.

Keywords: gas dynamics, heterogeneous binary gas mixture, four-equation model, Noble-Abel stiffened-gas, quasi-gasdynamic regularization, explicit in time and symmetric in space scheme