

УДК 519.62

НАБЛЮДАТЕЛЬ, ДВИЖУЩИЙСЯ ПО КОНУСУ В $\mathbb{R}^3$ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ СО СТОРОНЫ ОБЪЕКТА

© 2023 г. Академик РАН В. И. Бердышев^{1,*}

Поступило 06.06.2023 г.

После доработки 23.06.2023 г.

Принято к публикации 07.08.2023 г.

В работе приведены две модели движения телесного наблюдателя по конической поверхности в $\mathbb{R}^3$, когда наблюдаемый движущийся объект обладает набором скоростных поражающих мини-объектов.

Ключевые слова: навигация, автономный аппарат, противодействие, траектория, наблюдатель

DOI: 10.31857/S2686954323700261, **EDN:** CMCVBS

1. ВВЕДЕНИЕ

В пространстве $\mathbb{R}^3$ задана гладкая спрямляемая кривая $\mathcal{T}$. По $\mathcal{T}$ с постоянной по величине скоростью v_t движется объект t с мини-объектами m на борту, способными после запуска двигаться с большой постоянной по величине скоростью v_m . Мишенью для мини-объектов является наблюдатель. Слежение за объектом t осуществляется с телесного вертикального конуса S высоты h с вершиной s и круговым основанием радиуса a с центром A , расположенным в горизонтальной плоскости Q , которая изображает поверхность Земли. Ось s, A конуса ортогональна плоскости Q . Наблюдатель является шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса ε , $0 < \varepsilon < a$, с локатором f в центре. Скорость v_f наблюдателя ограничена $0 < |v_f| < K \ll |v_m|$, где K – константа. Попадание мини-объекта в шар $V_\varepsilon(f)$ влечет гибель наблюдателя. Наблюдатель может двигаться по меридианам $L = L(b)$ (образующим) конуса и параллелям $C = C(b) = \partial S \cap Q_b$, где $b \in \partial S$, Q_b – плоскость, параллельная Q и содержащая точку b , а ∂S – граница конуса.

Объект t , обнаружив наблюдателя, запускает в его сторону мини-объект. Наблюдатель, двигаясь от вершины s конуса по меридиану или параллели, следит за объектом, и за счет выбора траектории $\mathcal{T}_f$ и скорости движения v_f должен за время движения мини-объекта к конусу уйти из его по-

ля видимости. Следует отметить, что преимущество отдается траектории $\mathcal{T}_f$, содержащей высокие участки. Положение конуса S выбирается так, чтобы с него была видна большая часть траектории объекта, которую будем обозначать через $\mathcal{T} = \widehat{t_0, t^0}$.

2. ПЕРВАЯ МОДЕЛЬ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть $\tilde{S}$ – граница ε -расширения конуса S . Движение наблюдателя $V_\varepsilon(f)$ по меридиану (или параллели) осуществляется так, что $f \in \tilde{S}$ и точка $q(f) \stackrel{\text{def}}{=} V_\varepsilon(f) \cap S$ (она в пересечении единственная) движется по указанным линиям.

Пусть (см. рис. 1) $t \in \mathcal{T}$, T – проекция точки t на плоскость Q , прямая s, t пересекает Q , $B = s, t \cap Q$, α – угол между отрезками $[B, s]$ и $[B, A]$, $R(t)$ – плоскость, содержащая точки s, A, t ; нам понадобятся точки $c = T + \lambda(A - T)$, где $\lambda > 0$, $\|c - A\| = a$, $\tilde{c} = 2A - c$ и угол β между отрезками $[s, B]$, $[s, c]$. Имеем $\alpha + \beta + \xi = 90^\circ$, где ξ – угол между осью $[s, A]$ и меридианом конуса S . Пусть X – двугранный угол минимального раствора, содержащий конус S , с ребром s, t , γ – раствор этого двугранного угла. Угол X своими гранями пересекается с границей ∂S по двум меридианам $L(D) = [s, D]$, $L(D') = [s, D']$. Отрезок $[D, D']$ разделяет точки B и A , а углы $\angle BDs$, $\angle BD's$ прямые. Возможны случаи:

- а) $\|t - T\| > h$, б) $\|t - T\| \leq h$.

¹Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

*E-mail: bvi@imm.uran.ru

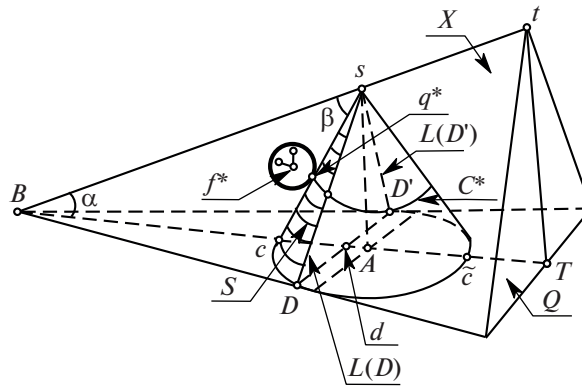


Рис. 1. На рисунке изображены конус S с высотой $[s, A]$ и меридианами $L(D)$, $L(D')$, ограничивающими невидимую из точки t часть границы ∂S ; отрезок $[B, t]$ принадлежит ребру двугранного угла X , опорного для S ; шар $V_\epsilon(f^*)$ радиуса ϵ с центром f^* , касающийся конуса в точке q^* .

Меридианы $L(D)$, $L(D')$ разграничивают поверхность ∂S на видимую с позиции t и невидимую (теневую) части.

Случай а) Теневой участок пространства над плоскостью Q , обозначаемый через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(t)$ есть “тетраэдр” с плоскими треугольными гранями $\overline{BDD'}$, $\overline{BDs}$, $\overline{BD's}$ и конической гранью $\widehat{sDD'} \subset \partial S$. Пусть число ϵ настолько мало, что существует $V_\epsilon(f) \subset \mathcal{M}$. Для построения траектории движения наблюдателя от вершины s “вниз” важно знать, на каком расстоянии от s наблюдатель $V_\epsilon(f)$ имеет возможность укрыться внутри множества $\mathcal{M}$. Это множество симметрично относительно плоскости $R(t)$.

Искомая точка $f = f^*$ является ближайшей к s , она равноудалена от граней $\overline{BDs}$, $\overline{BD's}$, $\widehat{sDD'}$ на расстояние ϵ . При этом

$$q^* \stackrel{\text{def}}{=} (V_\epsilon(f^*) \cap \partial S) \in L(c).$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть $\rho(t, Q) > h$. Шар $V_\epsilon(f^*) \subset \mathcal{M}$, ближайший к вершине s , единственный, он удовлетворяет условию

$$\|s - q^*\| = \epsilon \left(\frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \beta} + \operatorname{tg} \beta \right),$$

при этом угол γ определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \gamma &= \frac{1}{a} \sin \alpha \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{\sin \alpha} \right)^2 - (h^2 + a^2)} = \\ &= \frac{1}{a} \sin \alpha \cdot \sqrt{(B - A)^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Любой шар $V_\epsilon(f)$, касающийся конуса S и удовлетворяющий неравенству

$$\|s - q^*\| \leq \|s - q(f)\| \leq \sqrt{h^2 + a^2},$$

где

$$q(f) = (V_\epsilon(f) \cap S) \in L(q(f)),$$

может переместиться внутрь множества $\mathcal{M}$ с меридиана $L(q(f))$ на меридиан $L(c)$ так, что в каждый момент перемещения τ выполняется условие $q(f_\tau) \in C(q(f))$.

Случай б) При $\rho(t, Q) \leq h$ множество $\mathcal{M}$ невидимых из t (теневых) точек является усеченной пирамидой

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(t) = \{B + \lambda S : \lambda > 0\} \setminus \operatorname{conv}\{B \cup S\},$$

коническая часть границы которой расположена между меридианами $L(D)$, $L(D')$, а боковая часть состоит из трех неограниченных трапеций, две из которых имеют прямолинейные границы: $B + \lambda[s, D]$, $B + \lambda[s, D']$ ($\lambda \geq 1$), третья имеет вид $B + \lambda(\widehat{D, D'})$ ($\lambda \geq 1$), где $\widehat{D, D'}$ — дуга окружности в основании конуса S , содержащая точку c , $\operatorname{conv}\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$. Шар $V_\epsilon(f^*)$, ближайший к вершине s , касается боковых граней множества $\mathcal{M}$ и меридиана $L(c)$ с точкой касания $V_\epsilon(f^*) \cap L(c) = q^*$. Далее $\mu = \beta + 2\xi$, где ξ — угол между осью и меридианом конуса S .

Лемма 2. Пусть $\rho(t, Q) \leq h$. Шар $V_\epsilon(f^*) \subset \mathcal{M}$, ближайший к вершине s , единственный. Для него выполняется равенство

$$\begin{aligned} \|s - f^*\|^2 &= \epsilon^2 \left[\left(\frac{1}{\sin \mu} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{\sin \gamma \cdot \sin \mu} \right)^2 - 2 \left(\frac{\cos \mu}{\sin \gamma \cdot \sin^2 \mu} \right) \right]. \end{aligned}$$

Любой шар $V_\varepsilon(f)$, касающийся конуса S и удовлетворяющий неравенству $\|s - f^*\| \leq \|s - f\|$, может переместиться внутрь множества $\mathcal{M}$ с меридиана $L(q(f))$ на меридиан $L(c)$ так, что в каждый момент времени τ выполняется условие $q(f_\tau) \in C(q(f))$.

3. ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ

Конус S выбран так, что расстояние $\|s - t_0\|$ настолько велико, что за время $\tau < \|s - t_0\|/v_m$ наблюдатель успевает из точки s перейти внутрь множества $\mathcal{M}(t_0)$. Процесс наблюдения за движущимся объектом осуществляется по шагам.

Шаг № 0. Участники t, m, f начинают движение одновременно: объект t , определив положение наблюдателя f , и мини-объект m_0 — с позиции t_0 ; наблюдатель f , определив направление вектора v_{t_0} и вычислив расстояния $\|s - f^*\|, \|s - q^*\|$ — “вниз” по одному из меридианов $L = L(D)$, или $L = L(D')$ из положения, при котором $q(f) = s$. Выбор меридиана определяется по положению вектора скорости v_{t_0} объекта: нужный меридиан принадлежит тому полупространству, образованному плоскостью $R(t_0)$, в котором содержится вектор v_{t_0} . Если $v_{t_0} \in R(t_0)$, то можно брать любой из указанных меридианов.

Мини-объект нацелен на наблюдателя, двигающегося по видимой из точки t_0 части поверхности ∂S , которая заключена между $L(D)$ и $L(D')$ и содержит точку $\tilde{c}$. При исчезновении наблюдателя из этой части ∂S мини-объект прекращает преследование. Начиная движение “вниз” из точки s , наблюдатель включает локатор. При движении наблюдателя $V_\varepsilon(f)$ точка касания $q(f) = V_\varepsilon \cap \partial S$ скользит по L от s до параллели $C^* = C(q(f^*))$ (см. леммы 1, 2). Если время, назначенное наблюдателю, истекает, он переходит с L на меридиан $L(c)$, скрываясь от мини-объекта. Последний сходит с дистанции. При наличии времени наблюдатель движется по видимой из точки t_0 части ∂S , отслеживая объект и по мере приближения мини-объекта возвращается на меридиан L , чтобы пойти в обратный путь: в нужный момент скрыться в $\mathcal{M}$ от мини-объекта и далее двигаться к точке s .

Покажем, что двигаясь на прямом пути (даже по L), наблюдатель видит точку t_0 и ее окрестность. В самом деле, с любой позиции $g \in L$ точка t_0 видна, а если $g = q(f)$, то отрезок $[f, g]$ ортогонален грани двугранного угла X и $\|f - g\| = \varepsilon$. Поэтому существует и плоскость, содержащая точку f и строго отделяющая конус от точки t_0 . Из таких выберем максимально удаленную от точки t_0 плос-

кость Q_q , она будет опорной к конусу S . Расстояние $\rho(t_0, Q_q)$ будет увеличиваться при росте $\rho(t_0, S)$. Наблюдателю f видна вся окрестность, поэтому он может отследить движение объекта и на дуге $\widehat{t_0, p_0}$, длина которой не менее, чем $\rho(t_0, Q_q)$. Обозначим $\rho(t_0, Q_L) = \max_{q \in L} \rho(t_0, Q_q)$. Для дуги $\widehat{t_0, p_0}$ движения под наблюдением имеем $|\widehat{t_0, p_0}| \geq \rho(t_0, Q_L)$. Отметим, что кругозор наблюдателя увеличится, если он будет двигаться по близкому к L меридиану, сдвинутому по видимой из t_0 части границы ∂S в сторону точки t_0 .

Наблюдателю целесообразно пройти прямой путь от s до $\mathcal{M}$ с возможно минимальной скоростью за отведенное ему время, тем самым увеличивая длину дуги $\widehat{t_0, p_0}$. Обратный путь до точки s он проходит на максимальной скорости K с выключенным локатором. На вершине s наблюдатель демаскирует себя, определяя положение двигающегося объекта $t_i \in \mathcal{T}$, и приступает к выполнению шага № 1. За счет выбора скорости наблюдателя очевидно выполняются неравенства $|\widehat{t_0, p_0}| > |\widehat{p_0, t_1}|, |\widehat{t_1, p_1}| > |\widehat{p_1, t_2}|$ и т.д. Если с увеличением количества шагов расстояние $\|s - t_i\|$ уменьшается, то уменьшается и участок прямого пути, с которого наблюдатель следит за движением объекта по траектории $\mathcal{T}_i$. Наблюдатель решает, с какого номера $i = n$ выгоднее прекратить наблюдение и возобновить его, когда величина $|s - t_i|$ станет достаточно большой.

Справедлива

Теорема 1. Предложенный способ движения наблюдателя по конусу S позволяет построить на траектории $\mathcal{T}$ сетку узлов

$$t_0, p_0, t_1, p_1, t_2, p_2 \dots t_{n-1}, p_{n-1}, t_n; \quad t'_n, t''_n; \\ t_{n+1}, p_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}; \quad t'_{n+k}, t''_{n+k}, \dots,$$

при этом для каждого i дугу $\widehat{t_i, p_i}$ объект t преодолевает под наблюдением, а дуги $\widehat{p_i, t_{i+1}}, \widehat{t'_i, t''_i}$ — вне зоны наблюдения, и выполняется неравенство

$$|\widehat{t_i, p_i}| > |\widehat{p_i, t_{i+1}}|.$$

4. ВТОРАЯ МОДЕЛЬ

В первой модели предполагалось, что наблюдатель $V_\varepsilon(f)$ не может быть поврежден мини-объектом, если он содержится в теневом множестве $\mathcal{M}$. Во второй модели предполагается, что наблюдатель $V_\varepsilon(f)$ ($f \in \tilde{S}$) с выключенным локатором, касающийся конуса S и плоскости Q , недоступен для мини-объекта, а локатор способен сформировать

объект проходит вне наблюдения. Пусть $f_{t_1}^b \in C^b$ — позиция наблюдателя в момент, когда случилось равенство $R(f^b) \cap \mathcal{T} = t_1$. В этот момент объект t_1 обнаруживает наблюдателя и посылает в его сторону мини-объект m_1 . Сформирована позиция

$$\{f_{t_1}^b, t_1, m_1 \in t_1\}.$$

На шаге № 1 наблюдатель, отслеживая объект, со скоростью движения v_f , $|v_f| < K$, движется “вверх” по меридиану Z_{t_1} так, что центр f шара $V_\varepsilon(f)$ преодолевает расстояние от $f_{t_1}^b$ до некоторой точки $\tilde{f}_1 \in Z_{t_1}$ и затем обратно по Z_{t_1} от точки $\tilde{f}_1$ до $f_{t_1}^b$, также отслеживая объект t . После этого он выключает локатор. За потраченное наблюдателем время объект приходит в некоторую точку $p_1 \in \widehat{t_1, t^0}$. Точка $\tilde{f}_1$ выбирается в виде

$$\tilde{f}_1 = f_{t_1}^b + \lambda(f_{t_1} - f_{t_1}^b), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

так, что выполняется неравенство

$$\frac{2\|f_{t_1}^b - \tilde{f}_1\|}{|v_f|} < \frac{\|f_{t_1}^b - t_1\|}{|v_m|}, \quad (1)$$

где f_{t_1} — точка из $\tilde{S}$ такая, что $\|s - f_{t_1}\| = \varepsilon$ и меридиан Z_{t_1} является касательным к шару $V_\varepsilon(f_{t_1})$ в точке s . При малом λ условие (1) выполняется, поскольку $f_{t_1}^b - \tilde{f}_1 = -\lambda(f_{t_1} - f_{t_1}^b)$. На пути от $f_{t_1}^b$ до $\tilde{f}_1$ наблюдатель следит за объектом, поэтому он заинтересован в том, чтобы скорость v_f была меньше, а значит путь объекта был бы возможно больше. Но при малой $|v_f|$ наблюдатель подвержен опасности со стороны мини-объекта m_1 . В связи с этим представляет интерес задача

$$\min_{|v_f|} \max \left\{ \lambda : \frac{\|f_{t_1}^b - \tilde{f}_1\|}{\|f_{t_1}^b - t_1\|} \leq \frac{|v_f|}{|v_m|}, 0 < \lambda \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

В момент возвращения наблюдателя в точку $f_{t_1}^b$ образуется позиция $\{f_{t_1}^b, p_1, m_1 \in V_\delta(f_{t_1}^b) \setminus V_{t_1}^b\}$. Далее наблюдатель, включив локатор с плоской диаграммой направленности, определяемой плоскостью $R(f^b)$, на максимальной скорости K движется по окружности C^b , догоняя движущийся по $\mathcal{T}$ объект. Пусть в момент “захвата” плоскостью $R(f^b)$ объект находился в позиции t_2 , а наблюдатель — в позиции $f_{t_2}^b$. В итоге наблюдатель демаскирован, а объект направляет в сторону наблюдателя $f_{t_2}^b$ очередной мини-объект m_2 . Сформирована позиция

$$\{f_{t_2}^b, t_2, m_2 \in t_2\}.$$

Следующий шаг 2 выполняется по аналогии с шагом 1 и т.д.

Процесс формирования позиций приостанавливается с точки t_n , когда, по мнению наблюдателя, величина $\|\tilde{f}_n - f_{t_n}^b\|$ становится малой и целесообразно решать задачу (2) для номера $n + 1$.

Начиная с точки $t_n \stackrel{\text{def}}{=} t_n'$ он отключает локатор и возобновляет слежение за объектом, когда точка $t \in \mathcal{T}$, $t \stackrel{\text{def}}{=} t_n''$, отстоит достаточно далеко от конуса S , точнее, когда

$$\frac{\|s - f_t^b\|}{K} \leq \frac{\|t - f_t^b\|}{|v_m|}.$$

Обозначим $V = (1/a)(\rho(A, \mathcal{T}) \cdot K)$. Справедлива

Теорема 2. Предложенный способ движения наблюдателя по конусу S позволяет построить на траектории $\mathcal{T}$ сетку узлов

$$\begin{aligned} t_0, p_0, t_1, p_1, t_2, p_2, \dots, t_{n-1}, p_{n-1}, t_n; \quad t_n', t_n''; \\ t_{n+1}, p_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}; \quad t_{n+k}', t_{n+k}'', \dots, \end{aligned}$$

при этом для каждого i дугу $\widehat{t_i, p_i}$ объект t преодолевает под наблюдением, а дуги $\widehat{p_i, t_{i+1}}$, $\widehat{t_n', t_n''}$ — вне зоны наблюдения, и выполняется неравенство

$$|\widehat{p_i, t_{i+1}}| \leq |\widehat{t_i, p_i}| \frac{v_t}{V - v_t}.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность В.Б. Костоусову за обсуждение тематики исследования.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердышев В.И. Оптимальная траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта с поражающим устройством // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. С. 73–76.
2. Лю В. Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58.

AN OBSERVER MOVING ALONG A CONE IN $\mathbb{R}^3$ UNDER CONDITIONS OF OPPOSITION FROM THE OBJECT

Academician of the RAS V. I. Berdyshev^a

^a*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
Yekaterinburg, Russian Federation*

The paper presents two models of motion of a corporeal observer along a conical surface in $\mathbb{R}^3$, when the observed moving object has a set of high-speed hitting mini-objects.

Keywords: navigation, autonomous vehicle, opposition, trajectory, observer