ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 511, с. 95–110

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ВЕКА

УДК 372.851

РАБОТА МАТЕМАТИКА КАК ПРООБРАЗ ОСВОЕНИЯ МАТЕМАТИКИ УЧАЩИМИСЯ. РОЛЬ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ю. С. Вишняков[1], академик РАН А. Л. Семенов[2,3,4,*], Г. Б. Шабат[5,6,7,]**

Поступило 18.12.2022 г.
После доработки 16.02.2023 г.
Принято к публикации 12.03.2023 г.

В работе рассматривается подход к математическому образованию, адекватный задаче развития математики и ее применений в XXI веке. Данный подход опирается на повышение эффективности образовательного процесса за счет поддержания мотивации учащихся различных категорий. Основой для формирования мотивации служат, с одной стороны, самостоятельное конструирование, изобретение математических объектов, способов действий и моделей действительности, открытие фактов математической реальности. С другой стороны – постоянное решение новых, неожиданных, посильных для учащегося задач. В описанной перспективе работа учащегося сходна с работой математика-исследователя и программиста. Возможности исследовательской деятельности в образовательной математике существенно расширяются за счет компьютерного внутриматематического эксперимента. Частным видом математического эксперимента является отладка компьютерной программы.

Ключевые слова: математическое образование, математический эксперимент, эксперимент в теоретической математике, мотивация учащегося, неожиданные задачи, изобретение и открытие в математике, наглядность в математическом образовании

DOI: 10.31857/S2686954323700200, **EDN:** EEBEYW

1. ВВЕДЕНИЕ

Потребность в массовом качественном математическом образовании, формировании и сохранении интереса к математике растет во всем мире. Но современное массовое образование не отвечает этой потребности. Одной из причин этого является то, что образование, которое ребенок получает в школе, не имеет отношения к тому, что ему интересно сегодня и что понадобится завтра.

При этом уже сегодня сформировано представление о системе математического образования, при котором:

• Предметное содержание соответствует потребностям цифровой экономики и всего цифрового мира.

• Способы деятельности, осваиваемые учеником с самого начала учения, естественны для него, соответствуют природной любознательности и являются при этом способами деятельности профессионального математика и программиста.

• Образовательный процесс является доступным и мотивирующим для большинства учащихся. В нем легко выстраиваются индивидуальные траектории, соответствующие персональным целям.

• Основные образовательные результаты за пределами математики (метапредметные, личностные и т.п.) также являются ключевыми в современном и будущем мире.

Настоящая статья, описывая общую перспективу рассматриваемого подхода, особо останавливается на роли математического эксперимента в работе исследователя и ученика; эксперимент

[1] *Институт системного программирования им. В.П. Иванникова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[4] *Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Россия*
[5] *Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия*
[6] *Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия*
[7] *Независимый московский университет, Москва, Россия*
**E-mail: alsemno@ya.ru*
***E-mail: george.shabat@gmail.com*

является необходимым, и, пожалуй, центральным элементом этого подхода.

2. ПРОБЛЕМЫ МАССОВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Система математического образования разных уровней была сформирована в России еще в начале XX в., стала массовой в нашей стране в конце 1930-х гг. и была восстановлена после Великой Отечественной войны. Эта система исходила из потребности подготовки сильных учеников массовой школы (“верхней четверти класса”) для продолжения образования в инженерных вузах. Результаты остальных оценивались “путем вычитания”. Отдельные школьники с выделяющимися результатами имели возможность получить индивидуальную помощь хорошего учителя, пойти в кружок при вузе, в том числе – в заочный, перейти в специализированную математическую школу, затем – поступить на математический факультет университета.

Сегодня мы сталкиваемся с парадоксом: роль математики в жизни общества растет, цивилизация становится цифровой, а интерес к школьной математике в обществе падает. Непрямым, но очевидным доказательством этого является сохраняющийся в течение десятилетий дефицит студентов (по крайней мере, мотивированных, способных) на ИТ-специальностях многих вузов.

Существенная причина этого, как мы считаем, состоит в том, что буквальное содержание школьной математики не нужно в современном мире – все это “может сделать компьютер”. То, что именно это содержание мы проверяем на ЕГЭ, лишь усугубляет ситуацию, но ЕГЭ – не главное. Математика оказывается архаичным и оторванным от жизни школьным предметом.

Ключевым лозунгом идущей трансформации является очень простое и очевидное для многих из нас высказывание Пола Халомша: **The only way to learn mathematics is to do mathematics – “Единственный способ изучать математику – это ее создавать”** [1, с. 7].

Мы считаем, что у нас есть возможность остановить и обратить процесс падения интереса школьников к математике. Мы можем сделать математику действительно главным школьным предметом так, что его содержание будет нужно в цифровом мире, а результаты образования будут выходить далеко за пределы только математики. Это обусловлено, в частности, достижением целей, которые и так постоянно провозглашаются для математического образования, но при этом не реализовываются в массовой школе: развитие логического мышления (“Логика”), моделирование реального мира (“Моделирование”), осознание красоты математических объектов и построений (“Эстетика”).

Наряду с этим целями, которые становятся реально достижимыми, мы подчеркиваем важность еще одной, тоже не новой, цели. Эта важнейшая цель – формирование умения решать совершенно новые, не виданные, неожиданные задачи, готовность и интерес к такому решению (“Новизна”). А.Г. Асмолов для этого качества личности предложил термин “преадаптивность” [2, 3]. Мы разъясним это подробнее, но начнем с того, что такое качество является очевидным качеством профессионального математика, необходимым в его профессиональной деятельности. Соответственно, оно вырабатывается (или должно вырабатываться) в подготовке математиков-профессионалов. Самое замечательное – это качество становится все более необходимым для современного человека на любом рабочем месте и просто в повседневной жизни.

Принципиальным является то, что, приближая математическую деятельность школьника к деятельности профессионального математика, перечисленные цели могут стать реальными целями ***массового*** математического образования. Конечно, это не означает, что масса школьников будет открывать действительно новые математические результаты, но массовый школьник получит опыт открытия новых для себя результатов и сможет использовать этот опыт в дальнейшей жизни.

Говоря о результатах “за пределами математики”, мы имеем в виду общее, ясное в математическом сообществе понимание того, что А.Я. Хинчин называл “воспитательным эффектом уроков математики” [4], В.В. Фирсов – “учить математикой” [5–7], а в сегодняшних официальных текстах называется метапредметными и личностными результатами.

Наиболее существенными, на наш взгляд, являются возможность и необходимость переключения целей массовой школьной математики (реальных, а не провозглашаемых) с ***заучивания*** “близко к тексту” алгоритмов, жестко формализованных эвристических (часто – мнемонических) правил, формулировок теорем, определений и доказательств к совершенно иной системе изучения математики. Эта *иная* система предполагает:

• Самостоятельное изобретение и открытие, вместо заучивания. Эксперимент, пробы и ошибки, “отладка” (в более широком смысле, чем отладка программы), в том числе – с использованием компьютера. Поиск и исследование подходящей визуализации как основы для наблюдений и интуиции.

• Использование ошибки как источника совета от учителя и движения вперед ученика, а не как бесспорного основания для наказания отметкой.

• Постоянное решение новых для учащегося (и во многих случаях – для учителя) нестандартных задач вместо отработки безошибочности и скорости в решении стандартных задач.

• Совместный поиск решения учителем и учеником, в том числе – решения, неизвестного и учителю; учитель как мастер математического поиска, открытия, эксперимента, использования ошибки.

• Решение задач, похожих на уже решенные, отнюдь не запрещается, если оно содействует лучшему пониманию, помогает в решении новых творческих задач, и одновременно содействует мотивации: "вот что я умею делать быстро и безошибочно". Однако такое решение не может быть основано на принуждении или быть основным элементом при оценивании результатов учащегося.

• Для вычислений, в том числе – арифметических и алгебраических, решения уравнений и т.п., сегодня входящих в программы по математике, разрешается использование цифровых технологий: калькулятора, систем компьютерной алгебры – так, как это происходит за стенами школы.

Можно выразить сомнение в принципиальной реализуемости описанной системы, в том числе – достижимости цели "Новизна" для большинства учащихся. Однако у нас есть серьезные аргументы в пользу такой достижимости. Эта система основана на продуктивных традициях, интеллектуально намного более мощных, чем сформированная в целях "индустриализации" ("промышленной революции") система советской школы и школы ряда других стран. Это ставшая устойчивой практика математического образования в ряде российских школ последних десятилетий. К этой традиции и практике относятся:

• Традиции занимательных задач (начиная с античности, задачника Алкуина, продолженные Е.И. Игнатьевым, Я.И. Перельманом и другими [8–12]).

• Международная олимпиада "Кенгуру", охватывающая десятки стран [13], в России в большой степени поддерживалась питерским профессиональным математиком Марком Ивановичем Башмаковым [14], несмотря на отрицательное отношение к ней ряда влиятельных, в том числе – административно, деятелей образования. Эта олимпиада постоянно привлекает десятки процентов всех учащихся начальной школы страны и встречает энтузиазм массы учителей начальной школы. Задания этой олимпиады разнообразны и совершенно не похожи на задачи из учебников начальной школы, при этом большинство учащихся каждого класса успешно решает по несколько задач; даже самые сложные, и повторимся, *неожиданные* задания доступны многим.

• Система кружков и математических классов в разных сообществах, восходящая к российскому университетскому кружковому образованию. Одной из наиболее значимых и устойчивых является система Н.Н. Константинова, истоки которой можно найти в Лузинском кружке в Москве – "Лузитании" [15].

• Параллельно с российской традицией современного математического образования формировались традиции и в других странах, в США эту традицию обычно связывают с именем Роберта Мура, который начал учить студентов младших курсов в UPenn в 1911 г., основываясь на том, что потом назвали Inquiry-Based Learning (IBL) – исследовательским подходом в математике. Любимым принципом Мура была поговорка, приписываемая Конфуцию: "Услышу и забуду, увижу и запомню, сделаю и пойму." В настоящем тексте мы обращаемся к одному из наиболее ярких представителей этой традиции – Полу Халмошу. Подход этот ограничивался высшей школой (посвященный этому подходу журнал [16] называется Journal of Inquiry-Based Learning in Mathematics); контингент студентов – к которым адресовался этот подход, по математическому уровню, видимо, ближе всего к нашим старшеклассникам из массовых математических и ИТ-ориентированных школ.

• Задачи на построение и отладку алгоритмов (программирование), включенные в учебники по предмету "Информатика" (формально "Основы информатики и вычислительной техники", "Информатика и ИКТ"), введенному во всех школах страны в 1985–86 гг., обладают высоким уровнем разнообразия и индивидуальной новизны. Эта линия продолжилась в последующие десятилетия и не вызвала массового отторжения. Обучение алгоритмике и творческому программированию развивается в мире на разных уровнях образования [17–22], в последнее десятилетие оно бурно развивается под несколько странным именем "coding".

• Инновационный курс информатики для начальной школы, интегрированный с математикой или изучаемый отдельно, в различных вариантах [23–25] успешно используется десятками тысяч учащихся в ряде начальных школ РФ на протяжении десятилетий, что убеждает нас в возможности достичь результата в работе с каждым учеником. Курс предусматривает возможность оптимального подбора заданий для каждого учащегося при сочетании эффектов новизны с эффектом "надежности и уверенности".

Распространение традиций подготовки профессиональных математиков в лучших университетах и работы с высокомотивированными детьми в специализированных математических школах и математических кружках на массовое математическое образование продиктовано потребностями цифровой цивилизации и становится возможным благодаря цифровым технологиям современного мира.

Существенными для нашего построения содержания математического образования являются следующие его характеристики:

1. Содержание релевантно для цифрового века:

• в профессиональной и частной жизни человека исчезла необходимость в технических вычислительных навыках — помогает компьютер; и в школе рутинные вычисления и другие стандартные элементы учебной работы тоже разрешается выполнять с помощью компьютера;

• на школьном уровне систематически наглядно представлены общие основания современной математики и информатики, существенно расширяющие традиционную арифметику с ее четырьмя действиями;

• содержание курса математики интегрировано с курсом информатики и является основой для понимания того, “как работают” цифровые технологии и искусственный интеллект.

2. Математический эксперимент и открытие — существенная часть учебной деятельности. Время для них высвобождается в результате снижения объема тренажа ручных вычислений.

3. Обеспечивается высокий уровень новизны, “нестандартности” заданий, индивидуально подбираемых для каждого ученика на оптимальном для него уровне сложности.

Одним из основных (может быть, и самым важным) из проектируемых и уже реально достигаемых эффектов является рост интереса к математике среди детей.

Компьютер явно упомянут в характеристике 1; при этом он необходим в большей части экспериментов школьников (характеристика 2) и обеспечивает реальность и эффективность персонализации массового образования (характеристика 3): количество разнообразных заданий, которые можно хранить в цифровой среде, принципиально больше, чем в бумажном задачнике; индивидуальные цели, степени и пути их достижения в цифровой среде выстраиваются естественно и комфортно для ученика и учителя.

Суммируем результат изменений для массового школьника:

• **приобретения:** развитие математических и общеинтеллектуальных способностей; интерес к математике и к учению; умение применять цифровые технологии при решении широкого класса задач; освоение элементов современной математики; опыт самостоятельного открытия и доказательства математических, в частности (небольшого числа) геометрических утверждений;

• **потери:** умение без компьютера производить бегло и надежно арифметические и алгебраические вычисления, которое было полезно 50 лет назад; знание близко к тексту некоторых формулировок и доказательств геометрических теорем в объеме, близком к сформированному 100 лет назад.

Именно применение цифровых технологий, в частности, компьютерный эксперимент, позволяет сделать серьезное математическое образование массовым.

В завершение этого раздела вспомним, что символом математического образования в нашей стране стала написанная в 1895 г. картина “Устный счет. В народной школе С.А. Рачинского” художника Н.П. Богданова-Бельского (1868–1945) [26]. Обратим внимание, что в этой картине учащимся не “задают” перемножить в уме “на скорость” два пятизначных числа или решить задачу про землекопов. Наоборот: каждому ученику предлагают попробовать решить неожиданную задачку, явно не похожую на то, что он видел раньше, при этом с индивидуальной скоростью, при индивидуальном обсуждении с учителем (вынужденно — не в цифровой среде).

3. ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПЕРСПЕКТИВА

Последние десятилетия XIX века и первые десятилетия века XX стали периодом **метаматематического** осмысления и моделирования математической деятельности человека. Работы Фреге, Кантора, Гильберта, Геделя, Тьюринга, Тарского предложили математическое описание того, что такое язык математики, что такое математическое доказательство, математическое определение и математическое вычисление. Сформировавшиеся представления оказали безусловное влияние и на математическое образование. Естественная установка математиков на реализацию такого влияния в практике системы массового образования привела к ряду масштабных драм (New Math, “Колмогоровская реформа”). Среди причин неудач в этих реализациях были: отдаление от мира ребенка, а не приближение к нему, игнорирование традиции, слабость работы с сегодняшними и будущими учителями. Для нас важно, что вместо деятельности с реальными, “осязаемыми” (в том или ином смысле) объектами, детям предлагали работу с абстрактными определениями, которая, к сожалению, часто вырождалась просто в их заучивание. Сегодня к этим причинам добавляется отсутствие связи с цифровой реальностью. Однако анализ этих причин — не тема данной работы. Возможные проблемы с реализацией нашего подхода и способы решения этих проблем обсуждаются в специальном ее разделе.

Сто лет спустя после появления *мета*математики — последние десятилетия XX века и первые десятилетия XXI стали периодом, когда указанное математическое осмысление распространилось за пределы математики: возникли математические модели человеческого языка, мышления и деятельности в различных сферах жизни уже за пределами математики. Что не менее существенно — эти модели были реализованы в виде компьютеров (“железа”) и микропроцессоров (“чипов”), а также программного обеспечения (“кодов”), отдельные спроектированные целостные элементы и комплексы которого на несколько порядков превосходили по объему любые математические или литературные произведения, созданные человеком до этого. То же можно сказать и о процессорах, чипах — computer hardware в сравнении с механическими устройствами. Это программное обеспечение и “железо” сегодня управляют физическими процессами, происходящими в окружающей нас реальности: транспорте, энергетике, производстве, медицине, торговле, социальных процессах и т.п.

XXI век ознаменовался ускоряющимися изменениями в наших представлениях о человеческой личности, в частности, о том, что значит, что человек — в том числе ученик в школе — что-то знает и умеет. Как заметил когда-то Платон и вслед за ним Лев Выготский, появление письменности привело к расширению личности человека: память человека расширилась за счет письма (от Гомера и Сократа, которые помнили свои произведения в клетках головного мозга — к Толстому и Канту, которые помнили их на бумаге), вычислительные способности — за счет вычислений на счетах или бумаге [27, 28]. Сегодня человек запоминает то, что ему нужно (например, телефоны друзей) в кусочке своей расширенной личности — мобильнике, тот же мобильник мгновенно соединяет человека с памятью всего человечества в интернете.

Наряду с моделями рационального в психике человека, возникли и модели интуитивного: например, распознавания образов на основе машинного обучения.

4. ЭКСПЕРИМЕНТ В МАТЕМАТИКЕ. ОТ ВООБРАЖАЕМОГО ЭКСПЕРИМЕНТА К РЕАЛЬНОМУ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕР

В своей статье “О преподавании математики” [29], написанной на основании выступления на дискуссии о преподавании математики в Palais de Découverte в Париже 7 марта 1997 г., Владимир Игоревич Арнольд говорит: “Математика — часть физики. Физика — экспериментальная, естественная наука, часть естествознания. Математика — это та часть физики, в которой эксперименты дешевы”. Намеренная парадоксальность этого заявления великого математика подчеркивает для нас роль математического эксперимента.

Другой крупный математик прошлого столетия Пол Халмош (мы уже его цитировали) говорил: “Математика — это не дедуктивная наука, как это представляется в распространенном клише. Когда вы пытаетесь доказать теорему, вы не просто выписывает гипотезы, а затем начинаете рассуждать. То, что вы делаете, — это пробы и ошибки, эксперименты, догадки. Вы хотите выяснить, каковы факты, и то, что вы делаете, похоже на работу экспериментатора или лаборанта... Радость внезапного открытия доселе неизвестной истины... сопровождается вспышкой просветления, почти невероятным улучшением видения, экстазом и эйфорией освобождения и разрядки” [30].

В предшествующие столетия этот эксперимент мог идти в мозгу математика или на бумаге. История одного из важнейших направлений в математике началась, когда Евклид доказал бесконечность множества простых чисел, поставив мысленный эксперимент, состоявший в предположении о конечности их множества и ведущий к выводу о том, что найдутся и еще простые числа за пределами этого конечного множества. Карл Фридрих Гаусс поступил в колледж (Карлово училище — Collegium Carolinum) в Брауншвейге в 15 лет и заинтересовался вопросом о том, сколь много простых чисел содержится в начальных отрезках натурального ряда и на основе экспериментов, теперь уже — на бумаге, предположил, что $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих числа x, асимптотически оценивается как $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x}$. Правда, как и другие свои результаты студенческих времен, он долгое время это наблюдение не обнародовал. Доказательство указанного факта было получено лишь через 100 лет после его экспериментального открытия Гауссом. Более точные гипотезы о поведении этой функции эквивалентны одной из основных проблем современной математики — Гипотезе Римана, подтверждаемой многочисленными мысленными экспериментами в получаемых из нее следствиях. В наши дни Юрий Матиясевич пытается вести экспериментальное исследование поведения рядов, связанных с дзета-функцией Римана, уже с помощью современных компьютеров [31]. Самые большие простые числа сегодня находятся в рамках массового компьютерного эксперимента, см. ниже.

Понятие мысленного эксперимента (Gedankenexperiment) ввел в обиход научного исследования Альберт Эйнштейн. Вот примерная цитата:

“Я сидел на стуле в своем патентном бюро в Берне. Внезапно меня осенила мысль: если бы человек падал свободно, он не чувствовал бы своего веса. Я был ошеломлен: простой мысленный эксперимент произвел на меня глубокое впечатление. Это привело меня к теории гравитации” [32, 33].

Сегодня в расширенной личности исследователя и ученика как исследователя, мысленный эксперимент легко переселяется на экран компьютера. Это соображение является ключевым для нас.

Реализованные вне мозга модели психической деятельности стали возвращаться в математику, помогая математикам ставить эксперименты, наблюдать математическую реальность, производить численные и символьные вычисления, осуществлять перебор вариантов. Один из знаменитых первых примеров – это решение Аппелем и Хакеном проблемы четырех красок, доведенное до формата, вызывающего доверие у математиков, в работе Жоржа Гонтье [34].

Наблюдая формирующуюся вычислительную практику, такие новые явления, как прецедент Аппеля и Хакена и ряд других, Майкл Атья еще в 1984 г. опубликовал замечательную статью “Математика и компьютерная революция” [35], напечатанную по-русски через 32 года в Известиях АН [36]. (Мы не считаем, что эти 32 года понадобились российскому математическому сообществу для осознания важности темы.) Сегодня эта статья звучит более чем современно. Мы еще будем к ней постоянно возвращаться в дальнейшем изложении.

Описывая перспективу, связанную с ситуацией “эксперимент и компьютер в математике” М. Атья пишет: *“В математике, как и в естественных науках, открытие состоит из нескольких этапов, и формальное доказательство – всего лишь последний его этап. А самый первый этап заключается в выявлении существенных фактов, их упорядочении в осмысленные структуры и извлечении какого-то правдоподобного закона или формулы. Далее наступает очередь проверки этой предлагаемой формулы на соответствие новым экспериментальным фактам, и только затем рассматривается вопрос о доказательстве”* [35, с. 10].

Конечно, то, что здесь названо “правдоподобным законом или формулой”, может оказаться соотношением отрезков или чисел в задаче, или элементом стратегии в игре и т.п.

Существенно, что сфера экспериментирования принципиально расширяется за счет компьютера. М. Атья пишет: *“На каждом из ранних этапов компьютеры могут играть некоторую роль, в частности когда рассматриваются большие или сложные системы. Например, интересные вопросы теории чисел могут касаться очень больших простых чисел, и некоторые глубочайшие гипотезы, изучаемые в настоящее время, были основаны на обширных компьютерных вычислениях. Подобным же образом задачи теории дифференциальных уравнений, которые включают эволюцию в течение очень долгого времени некоторых систем (например, потока жидкости), находились под очень сильным влиянием экспериментальных фактов, обнаруженных на компьютерах.*

...компьютер оказывается практически очень полезным математикам на всех этапах их работы, но, возможно, в первую очередь – на этапе исследования или эксперимента. Великие математики прошлого, такие как Эйлер или Гаусс, проводили большое количество утомительных расчетов вручную, с тем чтобы обеспечить себя первичным материалом, “сырьем”, по которому они могли бы угадать некий общий закон или выявить какой-то замечательный пример. По мере того, как математические исследования становятся все более глубокими, а мы становимся все более амбициозными, первичный материал делается, соответственно, все более беспорядочным и сложным. Компьютер может помочь нам проанализировать этот материал и указать путь к дальнейшему прогрессу и пониманию” [35, с. 10].

Дальнейшее развитие событий подтверждает наблюдения и предсказания Атьи. Более того, в случае гипотезы четырех красок и в ряде других случаев оказывается возможным построить “исчерпывающий” математический эксперимент, “закрывающий” важную проблему. Примером из теории чисел является, в частности, тернарная проблема Гольдбаха о возможности представления любого нечетного числа, начиная с 7, в виде суммы трех простых. Иван Матвеевич Виноградов в 1937 г. доказал эту возможность для всех достаточно больших нечетных чисел. Но окончательное решение проблемы – для всех нечетных чисел – было получено лишь в 2013 г. Харальдом Хельфготтом с использованием современных компьютеров [37].

В чисто математической, прикладной, технологической, социальной и образовательной перспективе представляет интерес прецедент “народного” поиска простых чисел Мерсенна – самых больших известных простых, т.е. простых чисел вида $M_p = 2^p - 1$, где p – простое. До 1914 г. было найдено 12 чисел Мерсенна. Самое большое из них содержало 39 цифр. Дальнейшее продвижение дожидалось появления компьютеров: в 1952–2018 гг. нашли следующие 39 чисел. Начиная с 1996 г. их находят “простые люди”, ведущие эксперимент на многих тысячах компьютеров в рамках проекта Great Internet Mersenne Prime Search [38]. Самое большое найдено программистом Патриком Ларошем на обычном (в его случае – из местной церкви) персональном компьютере для p = 82.589.933; в этом числе: 24.862.048

десятичных цифр [39]. Эксперимент здесь состоит в тестировании простоты: если он заканчивается успешно, мы получаем доказательство простоты или непростоты [40].

Многие математики относятся с предубеждением к доказательствам, в которых использовался компьютер. Они радуются, когда вслед за компьютерным доказательством появляется “настоящее”, “ручное”, “бумажное” доказательство, которое может проверить человек. Иногда (но нечасто) так и получается. Характерно высказывание, которое МакХейл приписывает Халмошу: “Компьютеры важны, но не в математике” [41]. Конечно, это было сказано (если было) более 20 лет назад, однако сказано математиком, который полностью разделяет общий подход настоящей статьи, см. цитату выше.

Возможна и другая точка зрения – что доказательство, построенное и/или проверенное с помощью компьютера, заслуживает большего доверия. Владимир Воеводский пришел к программе применения компьютера для создания математики именно с этого конца. Обнаружив и исправив ошибки в своих доказательствах важных для других математиков результатов, Воеводский решил, что автоматизация доказательства в некоторых случаях – единственный способ гарантировать правильность сложных доказательств [42]. Более того, он начал поддержанное рядом других математиков построение математики на новых (т.н. унивалентных) основаниях, в какой-то степени пересматривающее, в какой-то – использующее идеи основания математики начала XX в. [43]. В связи с этим стоит упомянуть одно из сложнейших и бесспорно важных достижений математики XX в. – классификацию конечных простых групп. Здесь компьютер уже рассматривается как инструмент повышения надежности и доступности доказательств, например, для доказательства теоремы Фейта – Томсона на Coq в работе Жоржа Гонтье [44].

Заметим, что интересный эффект возник и в области компьютерного моделирования интуитивной деятельности человека. Специалисты по машинному обучению недавно попробовали отнестись к массивам данных математических экспериментов и к массивам математических доказательств и иных текстов, как к “сырому” материалу для машинного обучения. Утверждается, что при этом машина находит значимые для человека закономерности, предлагает корректные тексты решения задач и т.д. [45, 46].

Компьютерное выявление совпадения вычисленных с большой точностью значений двух поразному заданных числовых констант наводит на гипотезу, что это совпадение не случайно, а равны точные значения констант [46]. В качестве завершающего примера укажем на экспериментальное открытие в 1995 г. формулы Бейли–Борвейна–Плуффа для вычисления цифры двоичного разложения π по ее номеру [47].

5. НАГЛЯДНОСТЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

Вот еще одна цитата из работы М. Атьи: *“Одним из преимуществ нынешних компьютеров, которое математики только-только начинают оценивать по достоинству, является их способность отображать информацию графически (и даже в цвете). Для многих сложных математических задач, включающих геометрические свойства, это дает новый, чрезвычайно эффективный инструмент изучения явлений”* [35, с. 10].

Последнее соображение Атьи можно отнести, в частности, к языку, на котором мы формулируем математические утверждения. Величайшим примером построения математической теории в истории человечества стала древнегреческая геометрия, отраженная в “Началах” Евклида. Эта теория являлась сочетанием точных рассуждений с наглядными представлениями. Как мы теперь понимаем, наглядность играла существенную роль, позволявшую использовать и не доказывать некоторые не формулируемые явно “очевидные” посылки в доказательствах. Декартова алгебраизация геометрии – “аналитическая геометрия” – в определенном смысле завершила вопрос о том, что такое истинное геометрическое утверждение. В дальнейшем, однако, выяснилось, что все не так просто. И до сих пор школьные построения геометрии в стиле Евклида страдают пробелами.

Возвращаясь к языку формулирования математических утверждений, мы видим сегодня следующую возможность. Математическое утверждение формулируется в виде “картинки”, например, в форме разбиения части плоскости на многоугольники [48]. Многоугольники картинки соответствуют некоторому разбиению математической плоскости, каждый из них задается системой неравенств. Картинка фиксирует огромное количество утверждений об абстрактных объектах: те или иные многоугольники не пересекаются, граничат друг с другом и т.п. Каждое из этих утверждений может быть проверено компьютером. Утверждение о том, что математическая реальность именно такова, как это видно на картинке, получает точное компьютерное доказательство. Компьютерное доказательство может получить и утверждение, выраженное картинкой. Наконец, утверждение о том, что компьютерные построения соответствуют математической реальности, также доказывается, возможно, но не обязательно, с некоторой помощью компьютера. Картинка становится не менее точным отображением абстрактного математического утверждения, чем формула или текст.

Более простым примером является обоснованное компьютерным вычислением предъявление изображения конечного числа конечных графов и утверждения о том, что этими графами исчерпываются все возможности реализации некоторых условий (ср. [49]).

Относительно возможностей формулировок математических теорем на естественном языке см. [50].

6. ОТЛАДКА КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Обратим внимание на то, что огромный массив математической деятельности идет в сфере ИТ. Как правило, проектировщики в этой области имеют дело с математическими объектами и математическими методами работы с этими объектами. При этом им часто приходится сталкиваться с математически новыми, неожиданными ситуациями. Как только ситуация становится повторяющейся, изобретается соответствующий программный инструмент, который заменяет повторяющиеся, рутинные действия человека.

В той же сфере ИТ сформировался особый вид компьютерного математического эксперимента — отладка. В процессе отладки построенный математический объект экспериментально сравнивается с некоторым условием, требованием. Выявленное несоответствие приводит к изменению объекта и построенного ранее формальному или интуитивному “доказательству” “правильности” работы объекта. Иногда это ведет и к изменению формального требования.

Кратко затронув проблемную область “компьютер в математических доказательствах”, мы намеренно не упомянули очевидное: компьютер используется в реализации математических алгоритмов при численном моделировании объектов и процессов, в бухгалтерских расчетах, написании текстов, обработке изображений и т.д. Перечень огромен, человек использует цифровые технологии практически в любой сфере своей деятельности.

7. РОЛЬ В ОБРАЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИЗОБРЕТЕНИЯ И ОТКРЫТИЯ ЧЕРЕЗ ЭКСПЕРИМЕНТ

Итак, как сформулировал Джонатан Борвайн [51, 52]: “...мощность современных компьютеров в сочетании с современным математическим программным обеспечением и мощными математическими методами меняет наш подход к математической деятельности”.

Мы уверены, что еще более существенным является закономерное изменение наших представлений о математической деятельности всех людей, изучающих математику — начиная с самых первых этапов такого изучения в начальной школе, а может быть, и раньше.

В данном разделе мы постараемся объяснить, каким образом перспектива профессиональной деятельности современного математика помогает решить упомянутые проблемы математического образования, сосредоточимся на одном — ключевом в данной перспективе аспекте — роли эксперимента. Повторим вслед за Халмошом и Атьей, что математический эксперимент является ключевым элементом математической деятельности.

Принято считать, что *рассказ* детям о математических экспериментах и изобретениях бывает полезен: он их воодушевляет, мотивирует. Мы считаем, что этот рассказ будет их мотивировать еще больше, если они *сами* изобретение совершат! Возможно, но не обязательно они при этом повторят путь какого-то великого математика древности. Возможно и весьма вероятно решение какой-то новой задачи или системы задач приведет ученика к глобальным (для него) открытиям и изобретениям, из которых складывается понимание “больших идей”. Оптимальна ситуация, когда задача исходно осмыслена и интересна ученику и этот интерес возрастает в ходе поиска им пути решения, постановки и проведения эксперимента, неожиданных открытий.

Приведем несколько примеров, относящихся, в основном, к начальной школе:

• Еще до школы дети знают (возможно, нетвердо) имена чисел до 9 и их запись цифрами. Задача, которую учитель ставит перед учениками, состоит в том, чтобы изобрести способ записывать бóльшие числа и называть большие́ числа (количества). Процесс, в котором ученикам может помогать учитель, приводит к изобретению ими десятичной системы счисления. Эксперимент здесь состоит в рассмотрении различных совокупностей одинаковых предметов, их группировке и попытке изобрести способ записи ответа на вопрос: “Сколько здесь предметов?” — их пересчете. Понадобятся много одинаковых объектов, например спичек или фасолин, и какой-то способ их телесной группировки, например обвязывание резинкой или складывание в отдельную емкость. В процессе работы для называния групп предметов, конечно, понадобятся соответствующие слова, эти слова сообщает (или напоминает) учитель, не делая секрета из того, что дети сейчас изобретают то, что человечество изобрело тысячи лет назад: “десяток”, “сотня”... Эта группировка затем переносится на группировку нарисованных на бумаге объектов (например, маленьких бусин) — здесь обвязывание заменяется обведением линией. Объекты на листе могут размещаться ровно по строкам или хаотически. Результат группировки отражается в таблице, где есть столбцы для “единиц”, “десятков”, “сотен”... Видно, насколько запись количества занимает меньше места, чем сама страница с нарисованными бусинами. Теперь можно стереть имена столбцов таблицы и предложить детям узнать, какое число записано, выложив на столе нужное количество спичек — единиц, связанных десятков и сотен. Можно обсудить, как быть, если в таблице добавлены столбцы и в них записаны цифры, но имена столбцов не заданы. Так происходит открытие/изобретение позиционной системы счисления.

• Ученики создают таблицы сложения и умножения, пересчитывая площади (количество единичных квадратов) в полосках и прямоугольниках. Эксперимент состоит в рисовании различных прямоугольников по клеткам или на сетке, подсчете количества единичных квадратов в них и записи результата в правильную клетку таблицы. Важные эффекты возникают во взаимодействии двух учеников, у которых получились разные произведения для одной и той же пары чисел, как и у тех, у кого для двух разных пар получились одинаковые произведения.

• Опыт с площадью прямоугольника приводит к важным идеям имен (обозначений). Символ × имеет фиксированное значение “умножения”, а Д и Ш в имени Д × Ш могут иметь разные значения длины и ширины прямоугольника. Начинается постепенное изобретение соответствия между именем и значением. Возникают имена, значение которых мы стараемся фиксировать, всегда считать одним и тем же, как например, символы сложения и умножения, и имена, значение которых может меняться, например: “длина” и “ширина”. Изобретается общая формула для площади суммы двух прямоугольников с одинаковой шириной — это важнейшее математическое открытие человечества — Алгебра, и прекрасно, если это открытие ученик сделает самостоятельно.

• Ученики изобретают алгоритмы для сложения и умножения с подробной (иногда графической) записью на бумаге; изобретается и используется способ записи двузначных чисел в одной клетке, разделенной диагональю из верхнего правого угла в нижний левый: над диагональю пишутся десятки, под диагональю единицы. Открывается, изобретается запись алгоритма умножения по способу индусов, принесенному в Европу Леона́рдо Пиза́нским (Фибоначчи): двузначные произведения однозначных чисел пишутся в клеточках с диагональю, изобретается способ организации записи умножения однозначного числа на целое число десятков и т.п. [53].

• Ученики изобретают способ нахождения площади произвольного многоугольника с вершинами в целых точках, открывают свойство аддитивности площади.

• Ученики изобретают способы организации исчерпывающего перебора для нахождения объекта, удовлетворяющего условию, например, поиск нужного среди объектов на странице, или поиск одного из решений уравнения.

• Ученики изобретают общие формулы для решения линейных и квадратных уравнений, работающие при любых значениях входящих в них имен (коэффициентов).

• Ученики изобретают выигрышные стратегии в играх с камешками, открывают общее понятие стратегии и дают его определение. Открывают способ индуктивного доказательства правильности программы и стратегии.

• Ученики изобретают рациональные числа, экспериментируя с площадями.

• Ученики изобретают алгоритм нахождения общей меры отрезков (алгоритм Евклида), нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, обнаруживают геометрическую ситуацию, где алгоритм работает бесконечно — с уменьшающимися подобными фигурами, тем самым открывают иррациональные числа и, возможно, их разложение в цепные дроби.

• Ученики изобретают способ разложения числа на простые множители, открывают основную теорему арифметики.

• И так далее.

Чтобы показать диапазон, в котором может разворачиваться школьный математический эксперимент, приведем один пример чисто математической задачи, поиск решения которой перебором может быть запрограммирован самими учениками. Морделл [54–57] в 1953 г. предложил найти решения уравнения:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3 \text{ в целых числах, кроме:}$$
$$1^3 + 1^3 + 1^3 = 3,\ 4^3 + 4^3 - 5^3 = 3.$$

Следующим по величине является набор чисел, дающий равенство:

$$569\,936\,821\,221\,962\,380\,720^3 -$$
$$- 569\,936\,821\,113\,563\,493\,509^3 -$$
$$- 472\,715\,493\,453\,327\,032^3 = 3.$$

Выше мы уже упоминали о поисках больших простых чисел, такой поиск также доступен уже школьнику.

В традиционной школе этап изобретения отсутствует, но значительное время отводится на то, чтобы учащийся выучил алгоритм, иногда даже в некоторой его словесной формулировке, и потом натренировался на быстрое и безошибочное его применение. Времени учеников и учителя на изобретение чего-то нужно больше (иногда, намного больше), чем на то, чтобы учитель что-то произнес у доски, а ученики записали в тетрадь. Однако:

• Записать – не значит понять.

• Многократно механически применить выученное – не значит понять; такое применение может действовать против понимания.

• Понятое можно передать компьютеру, который будет это делать вместо человека. Эту общую ситуацию мы уже упоминали выше как модель деятельности профессионала в области программирования и вообще в сфере ИТ.

8. ТЕЛЕСНОСТЬ И НАГЛЯДНОСТЬ В ШКОЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Математиком, явно осознавшим огромную мощь компьютера как устройства для математического эксперимента и открытия в руках ребенка, стал Симор Паперт [58, 59]. Важнейшим детским впечатлением для него, в докомпьютерной реальности, стало активное телесное знакомство с зубчатыми передачами, дифференциалом в старой автомастерской. Паперту принадлежит идея визуализации и овеществления числового математического мира в цифровой век [60]. Взяв версию Лиспа, спроектированную его друзьями как среды учения для детей, он предложил присоединить к компьютеру робот – черепашку на полу, а потом и на экране [61]. Числовые сущности – заданное расстояние перемещения, заданный угол поворота – представлялись (материализовались) как действия перемещения и поворота черепашки.

Математическое образование, по Паперту, начинается с программирования [62]. Поясним, почему программирование в школе может быть важнейшим элементом развития математического мышления:

• Задачи создания программ с ожидаемым результатом могут быть более разнообразными и осмысленными, чем в большинстве случаев решение уравнения или текстовой задачи (“приводящей к квадратному уравнению”).

• Работа программы и ее результат могут получать наглядное, осмысленное представление в форме изображения, действия в реальном мире, текста, мелодии, анимации. Числовые результаты также могут быть графически, наглядно представлены.

• Процесс создания (изобретения) алгоритма, передачи его компьютеру, выполнение компьютером этого алгоритма при различных исходных данных, возможность для ученика самостоятельно обнаружить и устранить вычислительные ошибки – все это создает позитивный эмоциональный контекст, как и отладка программы, приводящая к желаемому, а иногда – к новому, неожиданному и интересному результату.

• Построение и доказательство правильности работы программы образуют область, параллельную с геометрическим построением и доказательством. В этой области появляются (изобретаются) важные общие понятия и конструкции: инварианты, индукция, разбиение задачи на подзадачи, разбор случаев и пр. Формируемые при этом стратегии рассуждения и действия переносятся и за пределы программирования и математики.

• Отладка, в том числе, пошаговое выполнение является богатой экспериментальной средой, способствующей повышению естественной мотивации. В XXI веке отладка, коррекция своих действий в результате получения обратной связи, самокритичность становятся намного более актуальными качествами личности, чем заучивание и детерминированное выполнения данного приказа или заданного алгоритма.

Среда Лого, используемая в течение десятилетий в математическом образовании детей в десятках стран мира, сегодня дополняется Скретчем, разработанным в том же конструкционистском круге и в той же конструкционистской философии Паперта, что и Лого [63]. Программируемые устройства ЛЕГО (Симор Паперт – ЛЕГО-профессор Массачусетского технологического института) дополнились электронным конструктором Ардуино [64].

Еще одним мощным “микромиром” развития математического мышления является “Робот в лабиринте”. Средой существования Робота в классическом варианте является прямоугольник на клетчатой бумаге, ограниченный стеной, внутри которого также имеются стены. Априори, размер прямоугольника и расположение стен неизвестны. Робот выполняет команды сдвига на одну клетку в одном из четырех направлений, кроме того, он определяет, что уперся в стену. Задача состоит в написании программы, которая обеспечит перемещение Робота, например, из левого верхнего угла в правый нижний поля. Из одной общей постановки возникает большой спектр конкретизаций. Например, можно рассматривать ограничения на расположение стен. Скажем, внутри прямоугольника могут иметься ровно две стены и обе они идут с севера на юг и т.п. Клетки лабиринта могут быть заранее покрашены и Робот может определять их закрашенность и может их перекрашивать и т.п. Нетривиальность задачи состоит в том, чтобы заранее спланировать ходы Робота, достигающего нужный результат в указанном классе лабиринтов [65].

Эффективной реализации функции развития математического мышления может способствовать снижение “чисто языковой” сложности (лексики и синтаксиса) системы программирования за счет:

• выделения минимального ядра алгоритмических конструкций (в формате операторов структурного программирования или блок-схем), фиксации этого ядра еще в начальных классах;

• использования родного языка или пиктограмм, см., например, ПервоЛого – язык программирования без слов и поначалу даже чисел [66] и ПиктоМир [67];

• блочного структурного редактора, позволяющего собирать программы с произвольными функциями и снижающего возможности для синтаксических ошибок (аналогично спел-чекеру при редактировании текстов).

Укажем на еще один базовый пример эффективного использования цифровой технологии для формирования математического представления:

• Ученик движется по прямой в классе (например, вдоль доски). В конце его пути установлен датчик (ультразвуковой, инфракрасный) измеряющий расстояние до тела ученика.

• На экране для всего класса показывается график движения: положения (координаты на прямой), к нему может быть добавлен график скорости, ускорения, пройденного пути.

• У ученика в руках может иметься планшет, на котором тоже отображаются графики.

Исследовательский модуль на базе описанной экспериментальной среды уже более 40 лет является чрезвычайно эффективным способом для понимания учащимся графика движения и других соседствующих понятий физики и математики. Задание учащемуся может состоять в том, чтобы максимально соответствовать заданному графику, или, завершив движение и не видя в ходе движения экрана, нарисовать график и т.п.

Среда, которая в последние десятилетия существенно повлияла на изучение геометрии во многих школах по всему миру, в том числе в России, – это *динамическая геометрия*. В ней возможны точные построения, использующие прямые и окружности, равенство отрезков, параллельность и т.п. Эти построения отображаются на экране. Конечно, точность построения на экране ограничена, но компьютер может использовать внутренние символические представления, используя вычисления с радикалами, а на экране “правильно округлять”, “понимая”, что хотел построить ученик. На экране можно указать (курсором, т.е. – рукой) точку на отрезке или окружности и дать ей имя. В распространенных школьных реализациях динамической геометрии, таких, как ГеоГебра, [68] Живая математика (российская версия Geometer’s Sketchpad) [69, 70], Математический конструктор 1С [71], и уже в самой ранней, наряду с Geometer’s Sketchpad – Геометрии Кабри [72] реализована ключевая идея динамической геометрии: ученик меняет конфигурацию на экране (“берет” точку и двигает ее), компьютер изменяет чертеж, следя за сохранением нужных соотношений (например, вписанный треугольник остается вписанным, хотя радиус окружности, углы и пр. меняются). Ученик видит, что какие-то свойства при этом сохраняются, может сформулировать гипотезу о том, что эти свойства будут верны всегда и пытаться свою гипотезу доказать.

Заметим, что во многих из перечисленных выше примерах ввода данных для эксперимента мы имеем дело с целой серией экспериментов, параметризованной числовым параметром (вектором). Возможны, в частности, следующие способы задания, формирования данных для эксперимента:

• Генерация числового параметра (в том числе – вектора чисел) как отражение положения или движения руки, перемещающей мышь, пальца по тактильному экрану, предмета или тела ученика по отношению к ультразвуковому (или иному дистанционному, например, инфракрасному, радио) датчику, головы в виртуальных очках. В дальнейшем возможно более сложное реагирование на положение рук, тела, направление взгляда, электро-активности мозга, реакция на скорость движения и т.п. Принципиальным, в большинстве случаев, является использование обратной связи: учащийся видит результат движения в виде движения объекта (курсора, точки, ползунка), изменения ситуации, например, трансформации геометрической фигуры, изменения “положения и точки зрения наблюдателя” и, собственно, результата эксперимента: в виде числовых параметров, как правило, отражаемых в новой конфигурации, анимации и пр.

• Автоматическая генерация случайного числового параметра как аналога пространственного ввода, с визуализацией, аналогичной предыдущему случаю.

• Выбор учеником комбинаторного, дискретного объекта, например, начального состояния в игре Жизнь (или в ином клеточном автомате), хода в игре с дискретным множеством состояний: игра в камешки, карточная игра.

• Случайный выбор компьютером комбинаторного объекта.

• Организация учеником перебора в подходящей (в том числе – визуализированной) среде.

9. КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РЕАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Отдельная тема – это использование компьютера для обработки данных реального физического эксперимента. Мы начали с такого использования предыдущий раздел. Дальнейшие примеры очевидны: практически все эксперименты школьной физики становятся намного более эффективными, “рабочими”, если использовать оцифровку тех величин, с которыми данный эксперимент работает. Есть и новые возможности, например, оцифровка положения и скорости точки в видеозаписи. В любом случае визуализация данных помогает высказать гипотезу о математической закономерности, связывающей физические величины.

Соседняя тема – компьютерное моделирование реального процесса, получение и проверка предсказания. Модель при этом может быть построена учащимся, например, в виде системы уравнений, совсем не обязательно “школьных”. Компьютер может найти явное решение системы или осуществить ее “обсчет” при каких-то исходных данных. Программа этого обсчета может быть написана учеником.

Говоря о переносе математической деятельности в школьный контекст, как и в других случаях, мы должны “масштабировать” ситуацию. И на школьном, и на университетском уровне мы можем указать целый ряд ключевых моментов, когда эксперимент важен и *для понимания,* и для нахождения нетривиального доказательства. Ряд примеров можно найти в статьях Г.Б. Шабата [73, 74]. Важно при этом, что понимание не обязательно сопровождается строгим определением и таким же доказательством. Очевидный и важный пример этому – понятия математического анализа и теории вероятности в школе. Нечего и говорить о трудности и не очевидной полезности формализации этих понятий в школе. Можно “на глазок” строить производные и первообразные, определять площадь под кривой, экспериментировать с бросанием кубика и т.д.

10. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ В РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Естественным препятствием для любого изменения в школе является учительская инерция. Такая инерция, свойственная человеку вообще, в случае работника школы всегда была частью профессионализма: задача школы – транслировать знания, накопленные человечеством вчера, для того чтобы выпускник смог их использовать завтра. Однако сегодня задача образования должна быть иной: готовить человека к не предсказуемому завтра, к тому, чтобы самому добывать нужные знания и учиться их применять. Если система образования не перестроится, она будет становиться все менее и менее нужной, а люди, в том числе – дети, будут переходить на образование вне школы. Прогноз И. Иллича – **Deschooling** Society [75] станет из предостережения и конструктивной метафоры очевидностью и необходимостью.

Перестройка же начинается с изменения роли учителя: от авторитета, который знает ответы на все вопросы, к мастеру учения, который эти ответы действительно не знает, но ищет вместе с детьми и при этом учит их учиться, эти ответы искать. Такое изменение роли учителя очевидным образом дает и (неполное, конечно) решение проблемы работы учителя с постоянно обновляемым содержанием образования: он совсем не обязан знать все заранее.

Наиболее естественно пытаться менять установку массового учителя, начав работу с преподавателей педагогических вузов. И их позиция должна быть: “учение в течение всей жизни”, в том числе – овладение все время обновляющимися цифровыми технологиями своей области знания. В нашем случае речь идет о математике, но и владение микрофоном и видеокамерой, поиск в интернете – должны быть очевидными атрибутами профессора.

Еще одной значимой группой являются преподаватели инженерных, экономических и подобных вузов. Мы слышим от них справедливое утверждение о том, что существенная доля поступающих к ним студентов не знают “формулу для синуса суммы” и другое, что знали они сами, когда поступали в институт. Предлагаемые изменения вряд ли улучшат дело. Абитуриенты будут еще хуже, чем сегодня, решать уравнения и неравенства. Однако простейшие формулы выпускники смогут доказывать самостоятельно, понимать их смысл, помнить эксперимент, в котором они сами “до этой формулы дошли”. И это все – будут делать успешнее, чем сегодняшние студенты, при этом, они будут спрашивать вузовских преподавателей, зачем от них требуют брать по частям уже двадцатый интеграл, хотя они поняли идею, а компьютер все эти интегралы прекрасно берет без человека.

Естественно возникает вопрос о целях и содержании вузовского математического образования для разных направлений подготовки и роли цифровых технологий в этой подготовке. Этот вопрос требует серьезного профессионального обсуждения.

Следующим препятствием являются родители. В наибольшей степени приверженцами старой школы оказываются родители наиболее успешные и наиболее влиятельные, хотя и немногочисленные: роль школы в получении ими хорошего образования могла быть позитивной и значительной. Позиция “учащегося учителя” может вызвать отторжение у родителей; школе придется ее отстаивать как “педагогический прием”.

Определенную роль в формировании позиции родителей может играть диалог, который с ними ведет школа, а также – демонстрация школой и учеником его успешности и заинтересованности в учении. Этому может содействовать реализация концепции результативного образования, где целью родителей оказывается не “отличник по всем предметам”, “золотой медалист”, а молодой человек, достигающий реальных целей, выстроенных им самим вместе с родителями и школой [76]. К этим целям может относиться и результат итоговой аттестации, и возможность продолжения образования, совместное прогнозирование этого результата и возможности, исходя из хода учения ребенка. Но и сохранение физического и психического здоровья, интерес к жизни, гармоничные отношения в семье – цели, которая школа также должна иметь в виду.

Предлагаемый подход к вовлечению учителей и родителей в предлагаемый процесс основывается на добровольном для всех использовании цифровых технологий в учебной работе. На экзамене есть возможность использовать или не использовать компьютер при выполнении заданий. Точно также, независимо от компьютеров, можно в геометрической задаче использовать или не использовать чертеж, решать алгебраическую задачу тем или иным способом, использовать ограниченный перебор или логическое рассуждение и т.д.

Обратим внимание на проблему государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ или иной. По нашему мнению, основным негативным элементом существующей системы ЕГЭ является очень высокая степень предсказуемости получаемых выпускником на экзамене заданий. Это сужает подготовку к экзамену (а массовая школа ориентируется на нее) по сравнению с содержанием учебников, приводит к “натаскиванию”, репетиторству “на скорость”. Как может заметить читатель, одной из основных особенностей предлагаемых изменений является рост разнообразия решаемых задач, их неожиданности для ученика, в том числе – и на экзамене.

Использование цифровых технологий не запрещается федеральными стандартами и учебными программами. Оно просто “не предполагается по умолчанию”, поэтому отсутствует на экзамене. В результате – учителя в массе запрещают использование цифровых технологий, исходят из следующих факторов: раньше, в частности, когда они сами учились, ученики цифровые технологии не использовали, на экзаменах использование технологий не предполагается, как и в заданиях из учебников.

Существенными факторами в реализации предлагаемого подхода могут быть следующие:

• постепенность и предсказуемость, заранее планирование изменений, на первых этапах затраты времени на эксперимент будут небольшими, доля нестандартных задач будет расти постепенно, компьютер, как инструмент учебной работы будет разрешен только в отдельных заданиях, а на экзаменах – только, например, на пересдачах и т.д.;

• добровольность изменений;

• более явное выделение возможности изменений в федеральных нормах: ФГОС и пр., включение туда требования, чтобы использование, как и не использование цифровых технологий в отдельных видах деятельности и темах явно указывалось в основной образовательной программе школы и учебном планировании на школьном сайте.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За рамками настоящей статьи находится экспериментирование с использованием современных технологий работы с большими данными – “интуитивного искусственного интеллекта”, мы также не рассматривали применения в школе технологий искусственного интеллекта для проверки доказательств, применения технологий виртуальной и дополненной реальности. Мы старались ограничиться наиболее естественными, важными и надежными применениями цифровых технологий, но это не значит, что мы не считаем перспективными указанные, или какие-то еще направления, которые появятся в будущем. С другой стороны, мы не рассматривали и того, что называется компьютерными тренажерами, например, арифметическими. Они могут быть вполне эффективными, однако, в очень многих случаях мы считаем, как видно из предшествующего текста, их использование соответствует цели “отработки навыков” – мы предлагаем относиться к таким целям с большой осторожностью и исходить, прежде всего, из интересов ученика.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 19-29-14234 мк (Ю.С. Вишняков, Г.Б. Шабат) и Междисциплинарной научно-образовательной школой Московского университета “Мозг, когнитивные системы, искусственный интеллект” (А.Л. Семенов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book // Springer New York, NY, 1982. 373 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6
2. *Guseltseva M., Asmolov A.* Education As a Space of Opportunities: From Human Capital To Human Potential // In Psychology of Subculture: Phenomenology and Contemporary Tendencies of Development, T. Martsinkovskaya, and V.R. Orestova (Eds.), European Proceedings of Social and Behavioural Sciences,

Future Academy. 2019. V. 64. P. 40–45. https://doi.org/10.15405/epsbs.2019.07.6

3. *Asmolov A.G.* Race for the Future // Russian Social Science Review. 2018. 59:6. P. 484–492. https://doi.org/10.1080/10611428.2018.1547054
4. *Хинчин А.Я.* О воспитательном эффекте уроков математики // Математика, ее преподавание, приложения и история, Математическое просвещение, сер. 2, вып. 6. М.: Физматгиз, 1961. С. 7–28. http://mi.mathnet.ru/mp676
5. *Фирсов В.В.* Методика обучения математике как научная дисциплина // В кн.: "Учим математикой", М.: Просвещение, 2012. С. 160–172. https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p160/
6. *Firsov V., Semenov A.* School Mathematics in Russia // "National Presentations: Russia", 10-th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004.
7. *Семенов А. Л.* ""Две культуры"сегодня". Математика и литература. Занятия литературой в гуманитарных и математических классах. Сочинения, игры, путешествия. М.: Московский институт открытого образования, Институт новых технологий, 2013. 245 с.
8. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. Книга 1 // СПб.: Новое время, 1914. 275 с.
9. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. Книга 2 // СПб.: Новое время, 1909. 282 с.
10. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. Книга 3 // СПб.: Новое время, 1915. 322 с.
11. *Перельман Я.И.* Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков // Петроград : тип. т-ва А.С. Суворина, 1916. 158 с.
12. *Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К.* Старинные занимательные задачи // 2-е изд., испр. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. 160 с. ISBN 5-02-013759-6.
13. Кенгуру. Математика для всех. Конкурсы для школьников // URL: https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
14. *Башмаков М.И.* Математика в кармане "Кенгуру". Международные олимпиады школьников. М.: Дрофа, 2010. 297 с. https://www.mathedu.ru/text/bashmakov_matematika_v_karmane_kenguru_2010/p0/
15. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1(77). С. 413–446.
16. Journal of Inquiry-Based Learning in Mathematics // https://jiblm.org/
17. *Паперт С.* Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи // Пер. с англ. Под ред. А.В. Беляевой, В.В. Леонаса. М.: Педагогика, 1989. 224 с: ISBN 5-7155-0004-4 Оригинал: Papert S. Mindstorms. Children, Computers, and Powerful Ideas. New York, NY, USA: Basic Books Inc. Publishers 1980. 252 p.
18. *Ершов А.П., Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Основы информатики и вычислительной техники: пробный учебник для средних учебных заведений // Под ред. А.П. Ершова. М.: Просвещение. 1988. 207 с.
19. *Кушниренко А.Г., Лебедев Г.В., Сворень Р.А.* Основы информатики и вычислительной техники. Учебное пособие для 10–11-х классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение. 1990. 224 с.
20. *Кушниренко А.Г., Леонов А.Г., Зайдельман Я.Н., Тарасова В.В.* Информатика. 7–9 классы. М.: Дрофа. 2017.
21. *Звонкин А.К., Ландо С.К., Семенов А.Л., Вялый Н.М.* Информатика. Алгоритмика. 6–7 классы. М.: Просвещение, 2006–2008.
22. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 5–6 классы. Учебно-методический комплект для обещеобразовательных организаций. М., Просвещение, 2019.
23. *Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е., Рудченко Т.А. и др.* Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачники) для обещеобразовательных организаций // М., МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.
24. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика. 3–4 классы. В 3 частях. Учебно-методический комплект для обещеобразовательных организаций. М., Просвещение, 2019. Серия "Школа России".
25. *Рудченко Т.А., Семенов А.Л.* Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект для обещеобразовательных организаций. М., Просвещение, 2020–2022. Серия "Перспектива".
26. Устный счет. В народной школе С.А. Рачинского. Страница Википедии // https://ru.wikipedia.org/?curid=1489692&oldid=119766377
27. *Выготский Л.С.* Инструментальный метод в психологии // Собр. соч. В 6 т. Т. 1, 1982. http://elib.gnpbu.ru/text/vygotsky_ss-v-6tt_t1_1982/go,108;fs,1/
28. *Vygotsky L.S.* Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press, 1978.
29. *Арнольд В.И.* О преподавании математики // Успехи математических наук, 1998, т. 53, вып. 1(319). С. 229–234. https://doi.org/10.4213/rm5
30. *Halmos P.R.* I Want to be a Mathematician. An Automathography // Springer New York, NY, 1985. 421 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1084-9
31. *Матиясевич Ю.В.* Асимптотическая структура собственных чисел и собственных векторов некоторых треугольных ганкелевых матриц // Чебышевский сб., 21:1, 2020. С. 259–272.
32. *Einstein A.* Autobiographical Notes // In Schilpp P.A. (ed.). Albert Einstein-Philosopher Scientist (2nd ed.). New York: Tudor Publishing, 1951. P. 2–95.
33. Einstein's thought experiments. Wikipedia page // https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Einstein%27s_thought_experiments&oldid=1120538785
34. *Gonthier G.* Formal Proof—The FourColor Theorem // Notices of the AMS, v. 55, No 11, 2008. P. 1382–1393. https://www.cs.cornell.edu/courses/JavaAndDS/files/Gonthier4ColorCoq.pdf

35. *Atiyah M.* Mathematics and the Computer Revolution // In Collected works. V. 1: Early papers, General papers, Oxford Science Publ., Clarendon Press, Oxford, 1988. P. 327–347.
36. *Атья М.* Математика и компьютерная революция // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 5–16. https://doi.org/10.4213/im8512
37. *Helfgott H.A.* Major arcs for Goldbach's problem // https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.2897
38. Great Internet Mersenne Prime Search. GIMPSFinding World Record Primes Since 1996 // https://www.mersenne.org/
39. List of Known Mersenne Prime Numbers // https://www.mersenne.org/primes/
40. *Вавилов Н.А.* Компьютер как новая реальность математики: III. Числа Мерсенна и суммы делителей // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 4. С. 5–58. https://doi.org/10.32603/2071-2340-2020-4-5-58
41. *MacHale D.* Comic Sections: the Book of Mathematical Jokes, Humour, Wit, and Wisdom // Dublin: Boole Press, 1993. 154 p.
42. *Voevodsky V.* Foundations of Mathematics – their Past, Present and Future // The 2014 Paul Bernays Lectures, September 9–10, 2014, ETH Zurich.
43. *Voevodsky V., Ahrens B., Grayson D. et al.* UniMath – a Computer-checked Library of Univalent Mathematics // https://github.com/UniMath/UniMath, available at \url{http://unimath.org
44. Feit–Thompson theorem has been totally checked in Coq // 20 September 2012 – Mathematical Components. https://web.archive.org/web/20161119094854/http:/www.msr-inria.fr/news/feit-thomson-proved-in-coq/
45. *Анохин К.В., Новоселов К.С., Смирнов С.К., Ефимов А.Р.* Искусственный интеллект для науки и наука для искусственного интеллекта // Вопросы философии. 2022. № 3. С. 93–105. https://doi.org/10.21146/0042-8744-2022-3-93-105
46. *Raayoni G., Gottlieb S., Manor Y. et al.* Generating Conjectures on Fundamental Constants with the Ramanujan Machine // *Nature*. 2021. 590. P. 67–73. https://doi.org/10.1038/s41586-021-03229-4
47. *Bailey D.H., Borwein P.B., Plouffe S.* On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants // Mathematics of Computation. 1997. 66 (218). P. 903–913. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-97-00856-9
48. *Рухович Ф.Д.* Внешние биллиарды // Математическое образование. 2014. Вып. 1 (69). С. 42–57. https://www.mathnet.ru/rus/mo25
49. *Adrianov N.M., Shabat G.B.* Calculating Complete Lists of Belyi Pairs // Mathematics. 2022. https://doi.org/10. 258. 10.3390/math10020258
50. *Shabat G.B., Kreydlin G.E.* Mathematical Theorems in Natural Languages // Advances in Mathematics Research. 2020. V. 28. P. 181–194.
51. *Borwein P.* Computational Excursions in Analysis and Number Theory // Ch. 12, The Easier Waring Problem. CMS books in Mathematics 10, Springer-Verlag, New York, 2002. 220 P. ISBN 978-0-387-95444-8.
52. *Вавилов Н.А.* Компьютер как новая реальность математики: V Легкая проблема Варинга // Компьютерные инструменты в образовании. 2022. № 3.
53. Leonardo Pisano's Book of Calculation // In eng., publ. by L.E. Sigler. New York, Springer-Verlag, 2003.
54. *Mordell L.J.* On Sums of Three Cubes // J. Lond. Math. Soc. 1942. 17. P. 139–144.
55. *Mordell L.J.* On Ryley's solution of $x^3 + y^3 + z^3 = n$ // J. London Math. Soc. 1942. 17. P. 194–196.
56. *Mordell L.J.* On the integer solutions of the equation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x\,y\,z = n$ // J. Lond. Math. Soc. 1953. 28. P. 500–510.
57. *Mordell L.J.* On an In1nity of Integer Solutions of $ax^3 + ay^3 + bz^3 = bc^3$ // J. Lond. Math. Soc. 1955. 30. P. 111–113.
58. *Stager G.* Seymour Papert (1928–2016) // Nature. 2016. 537. 308. https://doi.org/10.1038/537308a
59. *Семенов А.Л.* Симор Паперт и мы. Конструкционизм – образовательная философия XXI века // Вопросы образования. 2017. № 1. С. 269–294. ISSN 1814-9545.
60. *Papert S.* Teaching Children to be Mathematicians vs. Teaching about Mathematics // Massachusetts Institute of Technology A.I. Laboratory, Artificial Intelligence Memo № 249, Logo Memo № 4. https://archive.org/details/papert-teaching-children-mathematics/mode/2up
61. *Resnik M., Ocko S., Papert S.* LEO, LOGO, and Design // Childern's Envirenments Quarterly. 1988. V. 5. № 4. P. 14–18. https://dailypapert.com/lego-logo-and-design/
62. *Harel I., Papert S.* Software Design as a Learning Environment // Interactive Learning Environments. 1990. 1:1. P. 1–32. https://doi.org/10.1080/1049482900010102
63. Scratch. Create stories, games, and animations. Share with other around the word. Available at: https://scrat·sh.mit.edu/ (accesed November 3, 2019).
64. Arduino. Empower Scientisis and Artists of the Future // Available at: https://www.arduino.cc/education
65. *Бетелин В.Б., Кушниренко А.Г., Семенов А.Л., Сопрунов С.Ф.* О цифровой грамотности и средах ее формирования // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 102–109. https://doi.org/10.14357/199222642004014
66. *Сопрунов С.Ф., Ушакова А.С., Яковлева Е.И.* ПервоЛого 4.0. Справочное пособие. М.: ИНТ. 2012. 144 с.
67. Стартовая страница проекта "ПиктоМир" на сайте ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН. https://www.niisi.ru/piktomir/ (актуально на 3.11.2019).
68. Geogebra for Teaching and Learning Math. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).
69. Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория // URL: https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0 (дата обращения 08.12.2022).
70. The Geometer's Sketchpad. Resource Center // URL: https://www.dynamicgeometry.com/ (дата обращения 08.12.2022).

71. Математический конструктор. Лучшая российская программа динамической математики // URL: https://obr.1c.ru/mathkit/ (дата обращения 1 декабря 2022 г.).

72. Cabri Geometry. CabriLog. Making Math Success Simple // URL: http://www.cabri.net/ (дата обращения 08.12.2022).

73. *Шабат Г.Б.* О компьютерном эксперименте в преподавании математики // Монитор. 1995. 6. С. 122–125.

74. *Шабат Г.Б.* "Живая Математика" и математический эксперимент // "Вопросы образования". 2005. Вып. 4. С. 156–165.

75. *Illich I.* Deschooling Society // Harper & Row, 1971. 116 p.

76. *Константинов Н.Н., Семенов А.Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. XXII. Вып. 1 (77). С. 413–446. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446

THE WORK OF A MATHEMATICIAN AS A PROIMAGE OF THE MASTERING OF MATHEMATICS BY STUDENTS. THE ROLE OF THE EXPERIMENT

Yu. S. Vishnyakov[a], **Academician of the RAS A. L. Semenov**[b,c,d], **and G. B. Shabat**[e,f,g]

[a] *Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russian Federation*

[b] *Lomonosov Moscow University, Moscow, Russian Federation*

[c] *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS, Moscow, Russian Federation*

[d] *Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan, Russian Federation*

[e] *Russian State University for the Humanities, Moscow, Russian Federation*

[f] *Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russian Federation*

[g] *Independent Moscow University, Moscow, Russian Federation*

The paper considers an approach to mathematical education adequate to the task of developing mathematics and its applications in the XXI century. This approach is based on improving the efficiency of the educational process by maintaining the motivation of students of various categories. The basis for the formation of motivation is, on the one hand, independent design, invention of mathematical objects, methods of action and models of the world around us, the discovery of facts of mathematical reality. On the other hand, it is solving of new, unexpected, feasible tasks for the student. In the described perspective, the student's work is similar to the work of a mathematician-researcher and programmer. The possibilities of research activity in educational mathematics are significantly expanded due to computer-based intra-mathematic experiment. A special kind of mathematical experiment is debugging a computer program.

Keywords: mathematical education, mathematical experiment, experiment in theoretical mathematics, student motivation, unexpected tasks, invention and discovery in mathematics, visibility in mathematical education