

Математика имеет задачей не обучение
исчислению, но обучение приемам
человеческой мысли при исчислении...

Лев Толстой

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

© 2023 г. А. А. Муранов^{1,*}, С. А. Поликарпов^{2,**}, Т. А. Рудченко^{3,***}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 21.01.2023 г.

После доработки 16.02.2023 г.

Принято к публикации 10.03.2023 г.

Рассматриваются вопросы содержания и методики преподавания курса математики в начальном общем образовании в условиях цифровизации. Показана необходимость существенной доработки содержания курса математики начального общего образования в направлении использования цифровых средств как объекта изучения, так и инструмента, который может существенно улучшить содержательное наполнение и эффективность усвоения курса для действительной подготовки детей к будущей жизни и работе.

Ключевые слова: математическая грамотность, начальное общее образование, цифровые технологии, цифровые средства, цифровая трансформация образования, персональные образовательные траектории, подготовка к будущей жизни

DOI: 10.31857/S2686954323700182, **EDN:** TCNZUO

1. ВВЕДЕНИЕ

Курс математики начальной школы имеет очень долгую историю [1]. Мы можем найти учебники, изданные в России в XVIII веке [2–5]. В начале XX века начальный курс математики сводился к изучению арифметики [6, 7]. Данные учебники воплощали идеи Я.А. Коменского, указывающего на то, что в систему подготовки учеников элементарной (начальной) школы должны входить умение считать и умение измерять [8]. Среди текстовых задач значительная до-

ля обращалась к торговым и коммерческим, иногда — производственным реалиям.

Курс обучения в начальной школе в значительной степени имел прикладной, инструментальный характер. Учащиеся традиционно осваивали инструменты, необходимые для проведения вычислений и измерений. К инструментам измерений относились линейки, часы, весы, термометр, а к инструментам вычислений — алгоритмы (правила) выполнения арифметических действий с многозначными числами и счеты. Изучение этих инструментов было частью познания мира чисел, но, прежде всего, было освоением умений, необходимых для будущей жизни и работы. Уметь проводить вычисления на бумаге было необходимо как для решения математических задач и задач по другим предметам в школе, так и при решении различных практических задач на протяжении всей жизни. В начале прошлого века большая часть учеников заканчивала свое обучение после начальной школы — поэтому и ставилась задача: дать на этом этапе всем ученикам именно практические знания, необходимые для повседневной жизни. Дальше часть учеников уходила в повсе-

¹ Российский фонд развития информационных технологий, Москва, Россия

² Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

³ Институт кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: muranov2000@gmail.com

**E-mail: polik@mi-ras.ru

***E-mail: rudchenko1@yandex.ru

дневную жизнь, а часть продолжала обучение в гимназии и др.

В начальной школе долгое время изучали ровно те же инструменты, которые в своей жизни использовало большинство взрослых людей. Это верно как для курса математики, так и для других курсов, прежде всего, курса письма. Начальное обучение строилось на простом и доступном детям материале. Ушинский отмечал, что главная задача — “приучить ученика к отчетливости и основательности в понимании” [9]. Ключевую роль играл прикладной характер обучения. Осваивали инструменты для того, чтобы далее применять их при последующем обучении и на работе. При этом инструменты, которые использовались во взрослом мире, которые были доступны, когда автор писал учебник арифметики (примерно то же, что и за 50 лет до этого) и которым учили в учительском институте, были теми же, которые ученик изучал в первом классе и которые он будет использовать в своей жизни и в профессии, требовавшей математики: приказчика, бухгалтера, управляющего. Люди использовали для вычислений ручку и бумагу, и иногда — счеты. И лишь очень немногие — инженеры, изобретатели, ученые — использовали логарифмическую линейку, которая изучалась в старших классах. Впрочем, до этих классов доходило значительно меньше 10% населения. Постоянство прикладных задач и их отражения в содержании позволяло долгие годы использовать одни и те же программы и учебники в начальной школе.

Сегодня жизнь людей существенно изменилась. Цифровые инструменты для выполнения вычислений и проведения измерений сейчас доступны всем и часто даже более доступны, чем бумага и ручка. Практически у каждого в кармане есть смартфон, содержащий разные инструменты для вычислений и измерений и, прежде всего, калькулятор и рулетку. При этом содержание курса математики начальной школы никак не изменилось и не планируется его менять в ближайшее время. Педагогический эксперимент известных ученых и официальное заявление о пользе калькулятора в начальном образовании [10] не привели к реальным изменениям в школе.

Еще в 1959 г. классики российской педагогической психологии писали: “К началу школьного возраста у ребенка возникает потребность к осуществлению общественно значимой, общественно оцениваемой деятельности; такой деятельностью для него становится учение в школе. Не просто учение, а именно учение *в школе*. ...поступление в школу не только обогащает ребенка, но вместе с тем делает условия его дальнейшего развития гораздо более односторонними... Даже счетом, где связь умственных операций с практическим со- считыванием и измерением особенно тесна и

очевидна, ребенок овладевает в школе без опоры на свои собственные внешние практические действия с предметами; реальные предметы, конечно, при этом участвуют, но главным образом в качестве *наглядных* пособий — того, на что ученики смотрят, слушая учителя. ...сама задача формирования у учащихся требуемых новых действий и операций, как составляющая особую сторону обучения, ныне существующей методикой специально не выделяется, и методика не занимается вопросом о том, как их нужно активно формировать. В результате процесс формирования новых действий и операций в значительной мере остается вне поля зрения учителя, происходит стихийно и поэтому требует большего числа всякого рода упражнений и примеров, не всегда к тому же увенчиваясь успехом” [11].

Складывается парадоксальная ситуация — современные инструменты вычислений, используемые повсеместно взрослыми и детьми в повседневной жизни, не изучаются и не используются в начальной школе. При этом на изучение инструментов, нужных человеку 250, 150 и 50 лет назад, но не нужных в жизни сейчас, тратится огромный объем времени. Это касается не только курса математики в начальной школе, но и уроков русского языка, на которых современные инструменты цифрового письма (клавишная и виртуальная клавиатура, микрофон и распознавание речи) просто игнорируются.

Достаточно очевидно, что изменения в мире, привнесенные всеобщей цифровизацией, нельзя не учитывать. Современная цивилизация формирует новые цели и задачи математического образования и дает совершенно новые возможности для их достижения. Меняются и цели начального математического образования [12, 13]. Становится более приоритетной и более достижимой и всегда значимая задача: школьный курс не только должен готовить ребенка к решению практических задач, но и давать ему ориентацию в мире, объяснение того, с чем он сталкивается: от сезонных изменений в природе до взаимодействия с искусственным интеллектом.

По нашему мнению, сохранение традиций и следование им заключается не в сохранении конкретного содержания учебников, а в сохранении ключевого требования — *учебник должен соответствовать времени*. Как и 150 лет назад, начальная школа должна обеспечивать выпускника средствами, необходимыми ему в жизни и в дальнейшем обучении. Курс начальной школы не может не учитывать того, что основной объем вычислений, письма и чтения на данный момент осуществляется в цифровой среде с помощью цифровых инструментов и сервисов. Начальная школа должна готовить ребенка если не к будущей, так хотя бы к настоящей жизни, а не к жизни его

прадедушек и прабабушек. Однако из этого не следует, что в начальной школе не стоит знакомить учащихся с различными традиционными способами вычисления при помощи ручки и бумаги.

А.Л. Семеновым формулируется концепция расширенной личности как одного из принципов построения системы образования, соответствующей реальности XXI века [14–17]. В определении концепции расширенной личности авторы основываются на идеях Иосифа Фейгенберга [18], Энди Кларка [19], Мишеля Серра [20], Л.С. Выготского [21], А.Г. Асмолова [22]. Выготский указывает на то, что орудия, используемые в мыслительной деятельности, перестраивают саму мыслительную деятельность: “Вся мыслительная деятельность человека перестраивается благодаря этим орудиям, некоторые умения и действия становятся ненужными, одни передаются орудиям, другие видоизменяются. Вся структура поведения пересоздается, совершенно так же, как техническое орудие пересоздает весь строй трудовых операций” [21].

Можно отметить, что и раньше обучение не сводилось к запоминанию всего того, что накоплено человечеством. Принципиальное расширение личности в смысле Выготского и Семенова произошло с изобретением письменности, появления возможности записать в тетрадь слова педагога и свои мысли, обратиться к книгам в библиотеке. В обращении к ученику звучал не только призыв “Запомни!”, но и “Запиши!”, “Запомни, в какой книге это можно прочитать!”. Но до цифровизации у человека не было возможности всегда носить с собой в кармане или сумочке арифмометр и энциклопедию, в любой момент посоветоваться с огромным количеством людей. Цифровые средства принципиально расширяют возможности человека, дополняя его память, возможности коммуникации, моделирования и анализа.

А.Л. Семенов отмечает, что в образовании мы начинаем взаимодействовать с расширенной личностью, что должно повлечь за собой изменения в процедурах обучения и оценивания. Возникают новые возможности для самосовершенствования и самообразования. Сегодняшние проблемы школы во многом могут быть решены, если мы перестанем запрещать ученику быть расширенной личностью, а будем исходить из того, что это сегодняшняя данность цивилизации. Он отмечает также, что сегодня и взрослый, и маленький человек способны в мире что-то делать, что-то знают о нем, обращаясь, кроме собственного организма, к цифровым ресурсам (источникам, инструментам, средам и сервисам). В процессе образования мы должны адресоваться к такому

расширенному человеку, к его расширенному сознанию [17].

Мы считаем, что немедленные “революционные” преобразования в школе обычно не приводят к планируемым результатам, оказываются бесполезными и даже вредными. Представляется важным задание реалистичной перспективы и сроков изменений и постепенное движение к ним, с разной скоростью для разных школ и учителей. Государственное регулирование в сфере образования, имея в виду такую “дорожную карту”, не должно мешать продвижению образования по ней. Началом движения должны быть существующие стандарты и программы. В дальнейшем тексте мы адресуемся к ним — в частности, рассматриваем вопрос о том, как начать движение уже сейчас, не вступая в противоречие с действующими нормативными документами. Можно было бы сослаться в нашем рассмотрении на конкретные документы, однако в этом нет особой нужды, поскольку и предыдущие их версии, и, скорее всего, последующие будут продолжать существовать традицию.

Отдельно стоит вопрос о “спускаемых сверху” аттестационных и проверочных работах. Видимо, школе надо согласовывать с учредителями, органами управления образованием соответствующего уровня использование детьми и учителями цифровых технологий при выполнении аттестационных работ, явно указывая на возможность такого использования в своем учебном планировании.

Современная “Примерная основная образовательная программа начального общего образования” выделяет следующие разделы в курсе математики:

- Числа и величины;
- Арифметические действия;
- Текстовые задачи;
- Пространственные отношения и геометрические фигуры;
- Математическая информация.

Далее мы рассмотрим каждый из этих разделов и изменения, которые представляются необходимыми для учета влияния цифровизации.

2. ЧИСЛА И ВЕЛИЧИНЫ

Курс математики начальной школы ограничивается натуральными числами в пределах миллиона. При этом в реальной жизни дети постоянно сталкиваются и с отрицательными числами (температура воздуха зимой), и с дробями (кусоч пирога, длительность ноты и размер в музыке), а также слышат о миллиардах (население Земли) и даже о триллионах (бюджеты). Дети регулярно видят десятичные дроби на цифровых измери-

тельных устройствах. Не ясно также, почему программа останавливается именно на миллионе, тогда как принципиальной разницы в записи чисел в позиционной системе счисления нет, независимо от количества разрядов.

На наш взгляд, в части формирования понятия числа курс математики нуждается в существенных изменениях, опишем их хотя бы в общих чертах.

В формировании числовой интуиции (“чувства числа”) нужно уделить больше внимания практической работе учеников: подсчету объектов и оценке их количества, измерению размеров реальных предметов и геометрическому представлению чисел, манипуляциям с реальными предметами при их подсчете (например, перекладыванию яблок или спичек при пересчете, использованию различного счетного материала, с которым можно работать руками). В данной части курса можно говорить о возвращении к истокам, опоре на практическую деятельность, формировании понимания устройства десятичной системы счисления через реальный пересчет счетных палочек или других объектов, объединение их в десятки, сотни и тысячи. Сегодня в практике школы, в школьных учебниках манипуляция с реальными предметами практически отсутствует. Парадоксально, что именно “счисление” — подсчет, является у Магницкого важнейшим элементом арифметики, именно подсчет — предметов, людей, денег и т.п. — единственное, что сохранило свой смысл и значение сегодня из арифметических навыков, но именно этому в школе практически не учат, тем более не учат способам повышения безошибочности подсчета и т.п.

Мы считаем ошибочным останавливаться в начальной школе только на натуральных числах. Знакомство с обыкновенными и десятичными дробями, отрицательными числами может происходить в начальной школе, как это было в программе начальной школы еще в тридцатые годы прошлого века [23].

Остановимся на понятии измерения. Измерение всегда предполагает наличие инструмента для его проведения и здесь цифровизация добавляет проблем в понимание учащимися сути измерения как сравнения с эталоном. Эта часть курса математики требует существенных изменений, поскольку практически все измерения, изучаемые в начальной школе, в жизни уже проводятся с использованием цифровых устройств. И если длину еще измеряют не только цифровыми устройствами, но и линейкой или рулеткой, то увидеть нецифровые весы сейчас практически невозможно, и это — еще один аргумент к использованию десятичных дробей. Заметим, что при этом использование реальных или экранных,

“виртуальных” чашечных весов может быть полезным в образовательном контексте.

Программой предполагается изучение единиц измерений ряда величин — масса (центнер, тонна), время (секунда, минута, час, сутки, неделя, месяц, год, век), длина (миллиметр, сантиметр, дециметр, метр, километр), площадь (квадратный метр, квадратный сантиметр), объем (литр), скорость (километры в час, метры в минуту, метры в секунду). Изучаются и соотношения между этими единицами. Возможно, что из-за отсутствия отрицательных чисел в программе не фигурируют градусы, хотя и говорится об умении измерять температуру, но только в помещении. Неясно, почему упоминаются миллиметры, но умалчивается о миллилитрах, в современной потребительской практике встречаются и санлитры. Учащиеся постоянно слышат пришедшее во все дома с цифровизацией слово “дюйм” (например, в дюймах обычно указываются размеры экранов мониторов и смартфонов), впрочем, известное детям и до того по сказке Г.Х. Андерсена, но о нем не говорят в школе. В жизни используется гораздо больше разных единиц для измерения величин, соотношения между которыми помнить в век цифровых технологий нет необходимости. При этом именно упражнение в выяснении соотношения величин занимают большую часть учебного времени, отведенного программой на измерения.

В части формирования понятия числа и обучения проведению измерений, курс математики сегодня необходимо изменить как в сторону широкого знакомства с различными инструментами проведения цифровых измерений, так и в сторону осознанной работы с использованием различных физически ощущаемых, в том числе самостоятельно придуманных, эталонов. Именно в начальной школе необходимо “пощупать” все возможные единицы руками: например, попробовать определять массу, используя рычажные весы, или измерить длину стола и длину школьного коридора самостоятельно изготовленной рулеткой. Нужно дать возможность детям придумывать единицы измерения массы, длины, объема и проводить с их использованием измерения. Важным является формирование у учащихся понимания обязательной договоренности об эталонах, используемых при измерениях (“в попугаях”, так “в попугаях”, но главное, чтобы в одних и тех же попугаях!). Необходимо хотя бы коротко познакомить учащихся с историей появления и исчезновения единиц измерения, рассказывать о том, что даже для измерения длины сейчас используется очень много разных единиц (миля, дюйм, световой год и др.), но люди договорились об их соотношении и эти соотношения всегда можно найти в специальных таблицах или программах-помощниках, которые используются

для перевода одних единиц в другие. Надо показать детям, как найти такие программы, научить использовать их в повседневной жизни. Понимание сути измерения как сравнения с эталоном гораздо важнее запоминания точного соотношения конкретных единиц и умения переводить одни единицы в другие письменно в тетради.

На наш взгляд, введение ряда величин в сегодняшнем школьном курсе математики сильно затянато. Так, например, действующей Примерной программой предполагается, что в первом классе учащиеся не знакомы с понятием времени. Часы и минуты появляются во втором классе, секунды — в третьем, а все остальное (дни, недели, месяцы, годы, века) — только в четвертом. При этом само понятие времени знакомо детям задолго до школы и крайне необходимо для формирования умения организовывать свою жизнь и планировать свой день, следовать расписанию уроков, ставить учебные цели на день, неделю, месяц. Пониманию учащимися того, как устроено время, могут помочь различные цифровые средства, предназначенные для планирования, такие как календарь, лента времени, цифровые часы, таймер, секундомер. Раннее знакомство с единицами и способами измерения времени крайне важно и для формирования у учащихся “чувства времени”, ответственности за “потерянное время”, за опоздания, “точности как вежливости королей”. Оно также необходимо для решения текстовых математических задач, спектр которых может быть расширен. Решать же задачи на перевод одних единиц времени в другие можно начать и позднее — как это и предлагается сегодня программой.

Также надо сформировать понимание того, что при использовании цифровых инструментов никто не застрахован от ошибочного ввода не тех данных или измерения не того расстояния. А в показаниях даже исправного измерительного устройства, в особенности цифрового, присутствуют погрешности, связанные с необходимостью округления показаний: реальные измерения всегда дают какой-то интервал для измеряемой величины, а не конкретное точное значение. Все это необходимо обсуждать с детьми по мере знакомства и использования ими измерительных инструментов, но в сегодняшней программе этого нет совсем.

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

В этом разделе традиционно можно выделить две составляющие: содержательную и техническую.

Итог обучения в начальной школе в соответствии с действующей программой должен включать следующие результаты:

— письменное сложение, вычитание многозначных чисел в пределах миллиона; письменное умножение, деление многозначных чисел в пределах 100 000 на однозначное/двузначное число; деление с остатком; умножение/деление на 10, 100, 1000;

— свойства арифметических действий и их применение для вычислений; поиск значения числового выражения, содержащего несколько действий с числами в пределах 100 000; проверка результата вычислений, в том числе, с помощью калькулятора.

Фактически результаты сводятся к технической стороне дела: умению проводить вычисления, причем основное внимание уделяется вычислению в тетради. При этом предлагается проверять результаты вычисления с помощью калькулятора, обучение использованию которого никак в Программе не упоминается. В реальной жизни все происходит в точности наоборот: умение считать устно и на бумаге, а особенно, умение прикинуть порядок и приблизительную величину ответа, “выловить” ошибку, учитывая последние цифры, необходимо для того, чтобы проверить правильность вычислений на калькуляторе и в электронной таблице. Это подтверждается, например, характером повседневных действий современного инженера, конструктора, архитектора, статистика.

Многие школьные учителя отмечают, что дети стали значительно хуже считать, в том числе проводить вычисления с многозначными числами на бумаге. Но и взрослые стали хуже считать на бумаге! Очевидно, это является неизбежным и логичным следствием повсеместного использования калькулятора и других цифровых инструментов для вычислений. Любой устойчивый навык формируется и сохраняется только при его постоянном использовании, а сейчас учащиеся за пределами школы используют для вычислений калькулятор, как и взрослые — вряд ли кому-то придет в голову вычислять что-то на бумаге. Поэтому для формирования устойчивого навыка проведения вычислений с использованием ручки и бумаги необходимо постоянно затрачивать время детей, принуждая их к вычислениям на уроках. Имеем ли мы право так распоряжаться детским временем, вниманием и мотивацией? Или мы примем тезис Л.С. Выготского, на который мы ссылались выше, о том, что использование новых инструментов меняет мышление человека — и большого, и маленького — и это изменение неизбежно?

Повсеместное использование цифровых инструментов для вычислений требует существенной коррекции анализируемого раздела курса. В начальной школе необходимо учить пользоваться калькулятором и динамическими (электронными) таблицами так, как раньше учили пользоваться

ся счетами. Важным становится осознание пределов возможностей цифровых устройств и причин появления ошибок. Одна из основных причин появления ошибок при использовании калькулятора и других цифровых средств сходна с причинами их появления при вычислении на бумаге — невнимательность. Но есть и другие причины, особенно при делении и умножении больших чисел. Необходимо специально показывать, где цифровые устройства могут выдавать не тот результат, который мы хотели получить, объяснять, что оценка правильности решения задачи всегда остается за человеком.

Мы не отрицаем необходимость знакомства учащихся с различными алгоритмами арифметических действий на бумаге, но не считаем необходимым тратить учебное время на отработку навыков их использования в работе с многозначными числами, а также на доведение этих навыков до автоматизма. Изучение, а еще лучше — совместное с ребенком изобретение данных алгоритмов важно, прежде всего, для формирования понимания сути арифметических действий. Можно и нужно пробовать придумывать собственные способы вычислений, особенно на первых этапах. Например, важно дать возможность детям самостоятельно придумать и построить таблицы сложения и умножения. После этого детям будет интересно познакомиться с алгоритмами и записями операций, используемыми при умножении и делении чисел в разных странах, разных традициях. Для умножения можно вместе с учащимися открыть “диагональный”, “косой” способ, с которого все и начиналось в Индии и потом в Европе. Начать можно с записи умножения однозначных чисел, чисел с нулями, что прагматически полезнее других вариантов. Такой способ умножения работает немного медленнее, чем традиционно изучаемый в России, зато более интуитивно понятный, использующий в основном те же действия, что и при устном счете. Таким образом, при использовании этого способа умножения, действия напрямую переходят “из головы на бумагу”.

“Русский крестьянский” способ, использовавшийся в Древнем Египте, по крайней мере с XVII века до н.э. [24], связанный с двоичной системой, также представляет значительный интерес и также может быть “открыт” учащимся самостоятельно. Не вдаваясь в детали, заметим, что помимо использования его графом Л.Н. Толстым для обучения детей, есть и другие причины обратить на него внимание сегодня, в XXI веке: он не требует сразу заучивания таблицы умножения — для начала достаточно уметь умножать и делить на 2. Кроме того, самостоятельное “изобретение” этого способа ребенком содействует формированию у него “чувства числа”, числовой интуиции.

Показательно внимание к “русскому крестьянскому” способу в мировом образовании [25].

Существуют и другие способы умножения, которые могут быть открыты учащимися самостоятельно или найдены в интернете: например, графический восточный способ (его еще называют японским), для использования которого вообще не нужно знать таблицу умножения, а достаточно уметь складывать.

Мы думаем, что учащиеся могут предложить и другие, свои собственные способы для умножения многозначных чисел. Главное — не заучить какой-то один способ умножения до автоматизма, а разобраться с тем, как устроены разные способы и почему они позволяют получить одинаковые (верные) результаты.

Также мы обратили внимание на то, что в учебниках, созданных в соответствии с существующей примерной программой, очень отодвинута знакомство учащихся с действиями умножения и деления — дети начинают с ними знакомиться только в конце 2-го класса. Между тем существует успешный опыт, в том числе и опыт дореволюционной России, в котором действия умножения и деления вводились на самых первых этапах обучения, практически одновременно со сложением и вычитанием, при изучении чисел в пределах первого десятка [26]. Стоит к этому опыту присмотреться.

О делении столбиком скажем очень коротко, что оно эффективно развивает числовые представления, содействует более содержательному запоминанию таблицы умножения. Так же, как и с умножением, стоит познакомить учащихся со способами деления чисел, используемыми в разных странах.

Время, высвобожденное от ненужной длительной тренировки в вычислениях на бумаге, может быть использовано на другие разделы курса, в том числе, на решение задач в новых форматах, устные вычисления.

В действующих стандартах начального образования (ФГОС НОО) среди предметных результатов по учебному предмету “Математика” указывается сформированность вычислительных навыков, умений выполнять устно и письменно арифметические действия с числами, решать текстовые задачи, оценивать полученные результаты по критерию “достоверность/реальность” — для устных и письменных арифметических действий. При этом цифровые средства упоминаются отдельно, без связи с оценкой результата. Представляется важным соблюсти баланс между использованием цифровых, письменных и устных вычислений, сформировать умение использовать именно ту технологию, которая эффективна при решении задачи. То, что этого сегодня не происходит, связано, прежде всего, с инерционностью

системы образования и инерционностью человеческой деятельности в целом. Задача преодоления этой инерции в начальной школе XXI века уже более чем актуальна.

Хотя оценивание полученных результатов по критерию “достоверность/реальность” выделяется в качестве необходимого результата, но этому умению не уделяется должного внимания в действующей программе и учебных материалах. Но именно при использовании цифровых средств вычислений роль оценки результата на достоверность существенно возрастает. Как мы уже говорили, приемам такой оценки необходимо обучать уже в начальной школе. Наличие цифровых инструментов вычисления не снижает важности умения быстро и хорошо считать устно — прикидывать, оценивать достоверность результата и пр., а делает это умение одним из важнейших для начальной школы. Учащимся необходимо понимать, что любые вычисления должны контролироваться человеком, их результаты проверяться на предмет адекватности. Нужно научиться осознанно выбирать оптимальный инструмент для проведения вычислений в каждом конкретном случае. Интересно практиковать соревнования между “головастиками” (считающими устно) и “калькуляторщиками” — кто быстрее посчитает и получит при этом верный ответ.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНОСТИ И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Раздел программы называется “Текстовые задачи”, но мы считаем, что правильнее тут говорить в первую очередь именно о моделировании реальности. Изначально текстовые задачи в школьном курсе математики (арифметики) имели большое прикладное значение. Дети учились решать те задачи, которые в той или иной степени предполагалось им далее решать в повседневной реальной жизни. Поэтому отработка умения решать типовые задачи имела прямой практический смысл. В дореволюционных учебниках для начальной школы можно найти задачи на вычисление прибыли и убытка, задачи из области практической деятельности в сельском и домашнем хозяйстве [26]. Существенный практический смысл имели и задачки первых лет советской России [23]. Фактически, решение текстовых задач во многом являлось курсом “Математика для жизни”.

Отдаление задач школьных учебников от практики происходило постепенно, но повсеместное использование цифровых технологий, в том числе и в быту, сегодня изменило круг решаемых задач и способы их решения коренным образом. Например, использование навигаторов существенно изменило практику решения задач о движении. Электронные платежи привели к

практическому исчезновению из оборота бумажных денег и монет, привычных расчетов наличными и оперированием понятием “сдача”. При этом роль текстовых задач в курсе математики не снизилась, а возросла, поскольку возросла роль умения человека анализировать тексты, находить в них значимые элементы и строить их математические модели. Изменения необходимы в направлении существенного расширения круга решаемых задач, обучения самостоятельному поиску решения разнообразных, в том числе незнакомых задач. Важнее не научить решать круг стандартных задач по готовым алгоритмам (шаблонам), а сформировать умение разбираться в прочитанном тексте и выявлять в нем математическую составляющую, строить математическую модель текста. Это, конечно, более сложная задача, но она может быть решена, в том числе, и за счет времени, которое высвобождается при использовании калькулятора для вычислений в ходе решения задач. Для моделирования могут эффективно использоваться цифровые средства. В частности, целью решения учебной задачи может быть именно построение ее модели в динамической таблице.

Учащимся необходимо научиться осознавать необходимость и испытывать потребность в решении неожиданных задач, непохожих на встречавшиеся ранее, самостоятельно придумывать способы решения разных задач. Именно умение не бояться неизвестных задач, искать и находить способы их решения, пробовать и ошибаться, является важным результатом обучения решению текстовых задач в начальной школе. Тут можно вспомнить слова Льва Толстого, вынесенные в эпиграф “Математика имеет задачей не обучение исчислению, но обучение приемам человеческой мысли при исчислении...” [27].

Еще одним важным умением, которое необходимо формировать уже в начальной школе, является умение самостоятельно формулировать задачи, видеть математическую задачу за стоящей практической и жизненной ситуацией. Например, выяснить, какие математические задачи надо решить вместе с родителями, чтобы успешно прошел день рождения, на который ты пригласил своих друзей.

Необходимость изменения роли анализа текстов и решения текстовых задач в школьном курсе математики назрела давно и без прямой связи с широким распространением цифровых технологий, но их появление обостряет проблему и дает новые инструменты решения.

5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Этот раздел программы для начальной школы предполагает знакомство с различными геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве. При этом программа ограничивает круг геометрических вопросов только узнаванием фигур и их построением на бумаге с помощью чертежных инструментов (линейка, циркуль). Конечно, научиться пользоваться традиционными чертежными инструментами и строить с их помощью изображение геометрических фигур на бумаге полезно. Но необходимо обратить внимание на то, что в практической жизни для этого уже много лет используются цифровые инструменты. Построения с помощью циркуля и линейки у ребенка начальной школы занимают так много времени, что эффективно использовать их в учебном процессе просто не получается — нет возможности решить много разных задач, провести исследование и пр. Использование цифровых экспериментальных сред для геометрических построений здесь открывает широкие возможности. Постоянное обращение к компьютерным моделям становится мощным средством воспитания пространственного воображения не только расширенной личности, но и человека без цифровых инструментов.

В школе, в том числе в начальной, есть успешный опыт использования для построения и анализа свойств геометрических фигур таких экспериментальных сред, как Живая математика (российская локализация Geometer's Sketchpad) [28, 29], Cabri Geometry [30], Математический конструктор 1С [31] и GeoGebra (бесплатная и общедоступная среда) [32]. Использование цифровых экспериментальных сред в сочетании с построением на бумаге и использованием телесных моделей делает изучение раздела “Пространственные отношения и геометрические фигуры” существенно более интересным и познавательным для учащихся, позволяет добиться большего понимания, дает возможность проводить детям самостоятельные исследования и эксперименты.

Если возвращаться к построениям на бумаге, то стоит обратить внимание на опыт работы на клетчатой бумаге. Работать на клетчатой бумаге ребенку гораздо проще, чем на белом листе. Это позволяет начать обсуждение геометрических вопросов с самого начала обучения — оставаясь на уровне работы с небольшими натуральными числами, но решать при этом сложные и интересные геометрические задачи. Такие построения использовались в начальной школе ранее, мы считаем, что их необходимо вернуть в практику работы начальной школы. Заметим, что в такой “геометрии на клетчатой бумаге” реализуется представление арифметики в виде “геометрии

площадей”, что содействует параллельному формированию геометрических и арифметических представлений [33, 34].

6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

В этот важный раздел курса математики для начальной школы входит все то, что относится к нашим представлениям об учащемся как расширенной личности — то, что прямо относится к использованию цифровых технологий: поиск информации в сети Интернет, правила безопасной работы с электронными источниками информации (электронная форма учебника, электронные словари, образовательные сайты, ориентированные на детей младшего школьного возраста). С другой стороны, в этом разделе отражены и вопросы, актуальные в XXI веке, но прямо не связанные с цифровыми средствами: алгоритмы решения учебных и практических задач; работа с утверждениями: конструирование, проверка истинности; составление и проверка логических рассуждений при решении задач.

К этому же разделу относится сбор данных об объекте по образцу, характеристика объекта (группы объектов) по признакам (количество, форма, размер), группировка объектов по заданному признаку, нахождение закономерностей в ряду заданных объектов; данные о реальных процессах и явлениях окружающего мира, представленные на диаграммах, схемах, в таблицах, текстах. При этом нигде не говорится, что для сбора и анализа данных можно и нужно использовать цифровые инструменты. Но цифровые средства (как и в большинстве других ситуаций) не запрещены! Школа должна этим пользоваться. На наш взгляд, учащимся необходимо приобрести опыт в работе с графическим представлением информации не только на бумаге, но в первую очередь опирающимися на использование современных цифровых инструментов работы с данными — динамическими (электронными) таблицами. Умение эффективно использовать возможности динамических таблиц для вычислений, анализа данных и построения диаграмм будет необходимо выпускникам начальной школы для успешного обучения в основной школе. Также им важно научиться работать с различными цифровыми форматами данных, вносить данные в таблицы, анализировать данные, представленные в табличной форме.

Как уже было сказано выше, в динамических таблицах могут строиться модели решения текстовых и практических задач. Модели решения типовых задач, созданные учащимися самостоятельно, могут сохраняться на их цифровых устройствах и использоваться в дальнейшем при решении задач данного типа — как учебных задач на уроках и дома, так и практических, бытовых

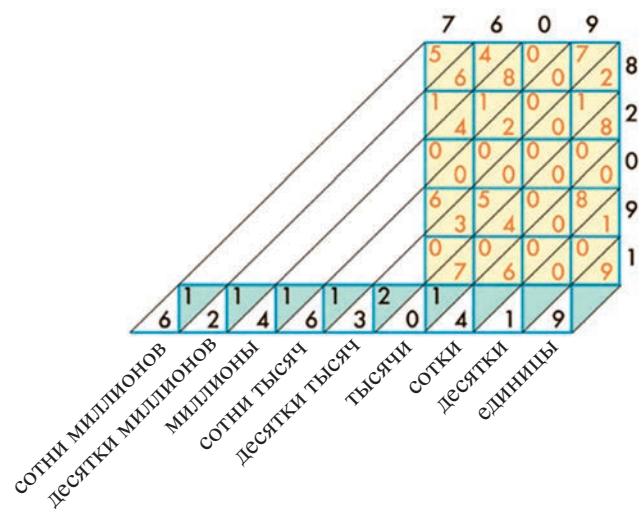


Рис. 1. Диагональный (итальянский) способ умножения чисел 7609 и 82091.

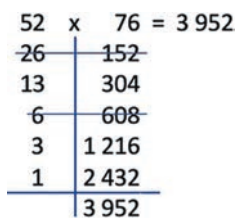


Рис. 2. “Русский крестьянский” способ умножения.

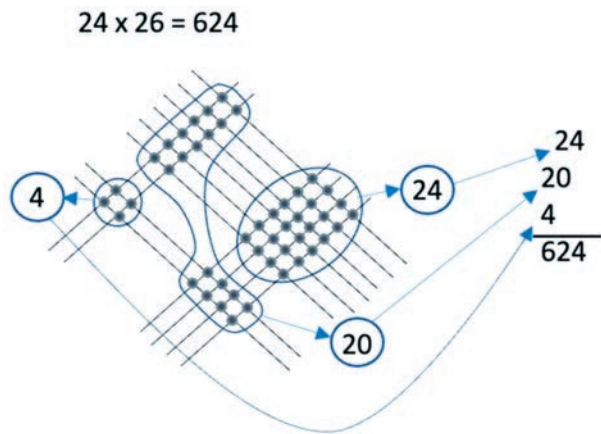


Рис. 3. Графический (японский) способ умножения.

задач. Находить соответствие между решаемой задачей и описывающей ее математической моделью является важным умением. Однако еще раз напомним, что важнейшая задача современного курса математики — научить придумывать решения для незнакомых, новых по содержанию, нетиповых задач.

7. ОТНОШЕНИЕ К ОШИБКЕ

Отдельно остановимся на отношении к ошибкам, возникающим у учащихся при решении задач курса математики. Учащимся необходимо научиться находить ошибки в собственных рассуждениях, позитивно относиться к процессу поиска и выявления ошибок — и самостоятельно, и с посторонней помощью. Проблема отношения к ошибкам — общая проблема начальной школы, касающаяся не только изучения математики. Существующая практика оценивания задается методическими рекомендациями [35], в которых упоминается снижение оценки на балл за два исправления. Усердные учителя трактуют это по-своему и приравнивают две исправленные ошибки (!) к одной ненайденной ошибке, и за это снижают оценку на балл. Такое приравнивание задачи развития математической грамотности к чистописанию — вопиющий анахронизм! Существование человека, технологии и общества XXI века в целом построено на механизмах обратной связи. Навык критического отношения к себе, умение посмотреть на себя со стороны, найти ошибку в своих действиях и рассуждениях, сам поиск решения задачи методом “проб и ошибок” — важнейший метапредметный результат образования, к которому человек обращается всю жизнь. Позитивно к ошибке, а главное — к попытке ее обнаружить и исправить, должны относиться и ученик, и учитель.

Использование цифрового письма, в том числе и цифровой математической тетради, упрощает работу над собственными ошибками, позволяет получить красиво и правильно оформленный итоговый результат даже в том случае, если первоначально была сделана и исправлена ошибка. Цифровая тетрадь формирует привычку возвращаться к решению, проверять работу, исправлять ошибки и добиваться правильного результата без мучительного многократного переписывания на белом.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Скорость цивилизационных изменений растет — ясно, что будущее человечества будет не менее цифровым, чем сегодня. Однако школа существенно отстает от цивилизационных изменений. Парадокс математического образования состоит в том, что:

- математика становится все более важным элементом современной цивилизации: все цифровые технологии построены на математических методах и результатах;
- отношение школьников к математике во многих странах ухудшается: дети теряют к ней интерес и не видят в ней смысла [13].

Интерес к математике, понимание ее основ закладывается в начальной школе. Важно в начальной школе заинтересовать математикой, вовлечь в ее изучение большинство детей.

Предмет “Математика” является единственным предметом в предметной области “Математика и информатика” в ФГОС НОО 2021 г. и, соответственно, в Примерной программе. Известным феноменом является ориентация школ на изучение обязательных предметов. Поэтому даже при наличии в отдельно взятом образовательном учреждении кадров необходимой квалификации и методического обеспечения предмета “Информатика” в начальной школе, он с большой вероятностью окажется на периферии учебного процесса. Поэтому учебным предметом, в ходе изучения которого в начальной школе должно возникнуть понимание о цифровых технологиях, цифровой природе будущей профессиональной деятельности в постиндустриальную эпоху, должна быть “Математика” [36].

Представляется также важным по итогам обучения в начальной школе сформировать у учащихся представление о математике как об интересном, современном, повседневно и повсеместно нужном предмете. Кроме того, одна из ключевых задач современной начальной школы – сформировать компетенции, необходимые для дальнейшего успешного обучения: использование цифровых технологий в жизни и в учебе. Описываемая нами тенденция развития может реализовываться и в дополнительном образовании, в компонентах образовательного процесса, самостоятельно определяемых его участниками, в частности, в предмете “Будущий мир” [37].

Эволюция человечества строится на расширении его возможностей через овладение технологиями как культурными орудиями развития. Курс математики начального общего образования должен учитывать, что изучает математику человек с расширенным сознанием, имеющий в руках не только ручку, тетрадку и энциклопедию, но и калькулятор, цифровой навигатор. Ему доступны ресурсы интернета и другие цифровые средства, расширяющие возможности человека. Это должно учитываться в содержании курса математики уже в начальной школе.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-29-14152 мк и № 19-29-14199 мк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полякова Т.С. Математическое образование в России до революции 1917 года // В кн.: Российское математическое образование. Ред. и сост.

А.П. Карп, Б. Вогели. М.: МПГУ, 2017. 576 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/rossiyskoe_matematicheskoe_obrazovanie_2017/p10/ (дата обращения 08.12.2022).

2. Магницкий Леонтий Филиппович (1669–1739). Арифметика Магницкого. Точное воспроизведение подлинника // С прил. ст. П. Баранова. М.: П. Баранов, 1914. 25 с. URL: <https://vieweg.rsl.ru/ru/rsl01004180690> (дата обращения 08.12.2022).
3. Муравьев Н. Начальное основание математики. Часть 1 // Санкт-Петербург, 1752. 312 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=562800> (дата обращения 08.12.2022).
4. Козельский Я. Арифметические предложения // Санкт-Петербург, 1764. 285 с. URL: https://archive.org/details/libgen_00126256 (дата обращения 08.12.2022).
5. Эйлер Л. Руководство к арифметике для употребления гимназии Императорской Академии наук // Санкт-Петербург, 1768. 383 с. URL: <https://arch.rgdb.ru/xmlui/handle/123456789/33406#page/5/mode/2up> (дата обращения 08.12.2022).
6. Гольденберг А.И. Сборник задач и примеров для обучения начальной арифметике // Вып. 1. Москва, Издание Д.Д. Полубояринова, 36-е изд., 1903. 64 с. URL: https://www.studmed.ru/goldenberg-ai-sbornik-zadach-i-primerov-dlya-obucheniya-nachalnoy-arifmetike-1903-g-izd_185366af43f.html (дата обращения 08.12.2022).
7. Аржеников К.П. Сборник арифметических задач и примеров для начальных народных училищ. Год первый // 94-е изд., Москва, 1918. 92 с. URL: https://archive.org/details/libgen_00126152 (дата обращения 08.12.2022).
8. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения: в 2 т. Т. 1. М.: Просвещение, 1982. 440 с. URL: https://www.studmed.ru/komenskiy-yaa-izbrannye-pedagogicheskie-sochineniya-tom-1-tom-2_206232a9605.html (дата обращения 08.12.2022).
9. Ушинский К.Д. Собр. соч. в 11 т. Т. 7. Руководство к преподаванию по “Родному слову”. М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1949. 156 с. URL: https://imwerden.de/pdf/ushinsky_sobranie_sochineniy_tom07_1949_text.pdf (дата обращения 08.12.2022).
10. Об использовании микрокалькуляторов в учебном процессе (Инструктивно-методическое письмо). НИИ содержания и методов обучения АПН СССР и Главное управление школ Министерства просвещения СССР // Математика в школе. 1982. 3. С. 6–8.
11. Эльконин Д.Б., Гальперин П.А., Леонтьев А.Н. Реформа школы и задачи психологии // Вопросы психологии. 1959. 1. С. 3–22. URL: <https://psychlib.ru/mgppu/periodica/VP011959/Lrs-001.htm> (дата обращения 08.12.2022).
12. Семенов А.Л., Поликарпов С.А., Рудченко Т.А. Будущее математического образования // Математика в школе, Армения. 2022. 1 (114). С. 10–15. ISBN 1829-4111.
13. Семенов А.Л. Перспективы математического образования в цифровом мире // Актуальные пробле-

- мы обучения математике и физике в школе и вузе в условиях обновленного содержания образования. Материалы международной научно-практической конференции, Алматы: КазНПУ им. Абая, изд-во “Улагат”, 2022. С. 11–17.
14. Семенов А.Л., Зискин К.Е. Расширенная личность как основной субъект и предмет философского анализа. Следствия для образования // Человек и системы искусственного интеллекта, ред. Лекторский В. А. СПб.: ООО «Издательство “Юридический центр”», 2022. С. 172–200. ISBN 978-5-94201-835-1.
 15. Семенов А.Л., Зискин К.Е. Концепция расширенной личности как ориентир цифрового пути образования // Сб. “Герценовские чтения: психологические исследования в образовании”. 2021. Вып. 4. С. 530–535.
<https://doi.org/10.33910/herzenpsyconf-2021-4-66>
 16. Семенов А.Л., Кондратьев В.В. Учащиеся как расширенные личности цифровой эпохи // Материалы IV Междунар. науч. конф. “Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании”. Красноярск, 6–9 октября 2020 г. : в 2 ч. Ч. 2. Под общ. ред. М. В. Носкова. Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. С. 560–566. ISBN 978-5-7638-4399-6.
 17. Семенов А.Л. Цели общего образования в цифровом мире. // Материалы III Международной конференции “Информатизация образования и методика электронного обучения”. Красноярск, СФУ, 2019. В 2 ч. Ч. 2. С. 383–388. ISBN 978-5-7638-4199-2.
 18. Фейгенберг И.М. Человек достроенный и этика. Цивилизация как этап развития жизни Земли // М.: ООО “Медицинское информационное агентство”, 2011. 128 с.
 19. Clark A. Natural-Born Cyborgs: Minds, Technologies, and the Future of Human Intelligence. New York: Oxford University Press, 2003. 229 p.
 20. Серр М. Девочка с пальчик // М.: Ад Маргинем Пресс, 2016. 77 с.
 21. Выготский Л.С. Инструментальный метод в психологии // В кн.: Выготский Л.С. Собрание сочинений. В 6 т., т. 1. М.: Педагогика, 1982. С. 103–108.
http://elib.gnpbu.ru/text/vygotsky_ss-v-6tt_t1_1982/go,108;fs,1/ (дата обращения 08.12.2022).
 22. Asmolov A., Guseltseva M. Education as a space of opportunities: from human capital to human potential // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences (online). 2019. V. 64 (6). P. 40–45.
 23. Ардашева и др. Рабочая книга по математике. Для 4-го года обучения. Хабаровск, Дальгиз, 1932. URL: <http://old.mathedu.ru/1931-1932.html> (дата обращения 08.12.2022).
 24. Перельман Я.И. Занимательная арифметика. Загадки и диовинки в мире чисел // Изд. 7-е, просмотренное и дополненное. ГОНТИ, Ред. научно-популярной и юношеской литературы, Москва–Ленинград, 1938. 196 с. URL: https://www.mathedu.ru/text/perelman_zanimatelnaya_arifmetika_1938 (дата обращения 08.12.2022).
 25. Gimmestad B.J. The Russian peasant multiplication algorithm: a generalization // The Mathematical Gazette. 1992. V. 75(72). 1991. P. 169–171.
<https://doi.org/10.2307/3620245>; URL: <https://www.wikihow.com/Multiply-Using-the-Russian-Peasant-Method> (дата обращения 08.12.2022).
 26. Сахаров И.П., Соколов Н.И. Новый арифметический задачник. Ч. 1 // Москва, 1906. 111 с. URL: <https://fr-lib.ru/books/nauka-i-ucheba/novyi-arifmeticheskii-zadachnik-download785348> (дата обращения 08.12.2022).
 27. Толстой Л.Н. Арифметика. В двух частях. С указаниями для учителя // Москва, 1913. URL: https://www.mathedu.ru/text/tolstoy_arifmetika_1913 (дата обращения 08.12.2022).
 28. Живая математика. Виртуальная математическая лаборатория // URL: <https://www.int-edu.ru/content/rusticus-0> (дата обращения 08.12.2022).
 29. The Geometer’s Sketchpad. Resource Center // URL: <https://www.dynamicgeometry.com/> (дата обращения 08.12.2022).
 30. Cabri Geometry. CabriLog. Making Math Success Simple // URL: <http://www.cabri.net/> (дата обращения 08.12.2022).
 31. Математический конструктор. Лучшая российская программа динамической математики // URL: <https://obr.lc.ru/mathkit/> (дата обращения 08.12.2022).
 32. GeoGebra GeoGebra for Teaching and Learning Math // URL: <https://www.geogebra.org/> (дата обращения 08.12.2022).
 33. Семенов А.Л., Посицельская М.А., Посицельский С.Е., Рудченко Т.А. и др. Математика и информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники и задачки) для общеобразоват. организаций // М.: МЦНМО, ИНТ, 2012–2019.
 34. Рудченко Т.А., Семенов А.Л. Информатика. 1–4 классы. Учебно-методический комплект (учебники, рабочие тетради, тетради проектов, поурочные разработки для каждого года обучения) для общеобразоват. организаций // Серия “Перспектива”. М.: Просвещение, ИНТ, 2019–2022.
 35. Методическое письмо Минобрнауки России от 19.11.1998 № 1561/14-15 “Контроль и оценка результатов обучения в начальной школе” // <https://legalacts.ru/doc/metodicheskoe-pismo-minobrnauki-rossii-ot-19111998-n-156114-15-kontrol/> (дата обращения 08.12.2022).
 36. Семенов А.Л., Муранов А.А., Поликарпов С.А., Бахтина Е.Ю. Содержание и методика преподавания курса математики начальной школы в условиях цифровизации // Математика. Информатика. Образование. № 3(27). Елец, 2022. С. 25–39. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49526196> (дата обращения 08.12.2022).
 37. Семенов А.Л., Булин-Соколова Е.И., Муранов А.А., Рудченко Т.А. Цифровые технологии в начальной школе. Вход в будущий мир // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании. Материалы VI Международной науч. конф., г. Красноярск, 20–23 сентября 2022 г. В 3 ч. Ч. 2 / под общ. ред. М.В. Носкова. Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2022. С. 325–329. ISBN 978-5-907558-24-3.

PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS IN THE CONTEXT OF DIGITALIZATION**A. A. Muranov^a, S. A. Polikarpov^b, and T. A. Rudchenko^c**^a *Russian Information Technology Development Fund, Moscow, Russian Federation*^b *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Moscow, Russian Federation*^c *Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center “Computer Science and Control” RAS, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

We consider the content and methods of teaching mathematics in primary school in the context of digitalization. The necessity of a significant updating of the curriculum is shown. In particular, this implies the use of digital tools as an object of study and a way to significantly improve the content and effectiveness of studying mathematics to really prepare children for the future life and work.

Keywords: mathematical literacy, primary general education, digital technologies, digital tools, digital transformation of education, personal educational trajectories, preparation for the future life