*ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 512, с. 85–88*

**МАТЕМАТИКА**

*УДК 511.9*

# ВОЗВРАЩАЕМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**© 2023 г. Н. В. Денисова[1,2,*]**

Представлено академиком В.В. Козловым
Поступило 02.05.2023 г.
После доработки 25.06.2023 г.
Принято к публикации 13.07.2023 г.

Обсуждается круг вопросов, связанный с возвращаемостью интегралов условно периодических функций с нулевым средним значением. В случае гладких функций на торе возвращаемость интегралов заведомо имеет место для всех начальных фаз. Новое наблюдение заключается в том, что для почти всех начальных фаз свойство возвращаемости одновременно имеет место не только для интегралов, но и для фазовых точек на торе. Более того, этот результат справедлив и в случае, когда соответствующие функции на торе только непрерывны. Эти наблюдения переносятся на общий случай эргодических преобразований компактных метрических пространств с мерой Каратеодори.

*Ключевые слова:* условно периодическая функция, частоты, возвращаемость, мера Каратеодори, теорема Хопфа

**DOI:** 10.31857/S2686954323600258, **EDN:** SVEUKA

## 1. ФИНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 1\}$ – $n$-мерный тор с угловыми координатами $x_1, \ldots, x_n$ и $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – *непрерывная* функция. Пусть числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Функция

$$t \mapsto f(t) = f(\omega_1 t + x_1^0, \ldots, \omega_n t + x_n^0)$$

называется *условно периодической* функцией. Числа $\{\omega_j\}$ – *частоты*, а $\{x_j^0\}$ – *начальные фазы*. Можно сказать по-другому: условно периодическая функция – это композиция функций $t \mapsto x(t, x^0)$, где $x(\cdot, x^0)$ – решение системы дифференциальных уравнений на $\mathbb{T}^n$

$$\dot{x}_j = \omega_j, \quad 1 \le j \le n \qquad (1.1)$$

с начальным условием $x^0$, и непрерывной функции $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$.

Изучение интегралов

$$F(t, x^0) = \int_0^t f(\omega s + x^0) ds$$

относится к классическим задачам теории условно периодических функций (см., например, [1, 2]). Согласно теореме Вейля об усреднении, для всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{F(t, x^0)}{t} = \langle f \rangle, \quad \langle f \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f\, d^n x.$$

Усреднение $f$ производится по инвариантной мере динамической системы, определяемой дифференциальными уравнениями (1.1). В дальнейшем будем считать среднее $f$ *равным нулю*. Так что $F(t) = o(t)$ при $t \to \pm\infty$.

**Теорема 1.** *Для почти всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$ имеет место свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $t_k \uparrow \infty$ такая, что*

$$|F(t_k, x^0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(x(t_k, x^0), x^0) < \varepsilon. \qquad (1.2)$$

Расстояние dist между точками на торе определяется евклидовой метрикой $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$. Последовательность моментов времени $\{\tau_k\}$, удовлетворяющих только второму неравенству (1.2), универсальна: она не зависит от выбора функции $f$. Однако подпоследовательность $\{\tau_k\}$, удовлетворяющая первому неравенству (1.2), уже может зависеть от выбора начальной фазы $x^0$. По сравне-

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия*
**E-mail: ndenis@mech.math.msu.su*

нию с общим результатом работы [3] в заключении теоремы 1 присутствует содержательное свойство одновременной возвращаемости точки на торе с условно периодическим движением (второе неравенство (1.2)).

Положим $M = \{x \in \mathbb{T}^n : f(x) \neq 0\}$. Это измеримое множество в $\mathbb{T}^n$.

**Теорема 2.** *Для почти всех* $x^0 \in M$ *функция* $t \mapsto F(t, x^0)$ *имеет бесконечно много простых нулей как при* $t \to +\infty$, *так и* $t \to -\infty$.

Это простое следствие теоремы 1. В [3] установлена бесконечность числа нулей функции $t \mapsto F(t, x^0)$ для почти всех $x^0 \in \mathbb{T}^n$. Теорема 2 утверждает бесконечность числа *простых* нулей для почти всех $x^0$, удовлетворяющих неравенству $f(x^0) \neq 0$. С другой стороны, справедливо утверждение, которое обобщает и усиливает классический результат Боля (см. [4, 5]).

**Теорема 3.** *Найдутся точки* $x_{\pm}^0 \in \mathbb{T}^n$, $f(x_{\pm}^0) = 0$ *такие, что*

$$F(t, x_+^0) \geq 0 \quad (F(t, x_-^0) \leq 0)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Это утверждение справедливо и без предположения о независимости частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Надо только предположить, что $f$ непрерывна и $\langle f \rangle = 0$.

Свойство возвращаемости интеграла в Теореме 1 имеет место для *почти всех*, но *не всех* начальных фаз. Вот пример, восходящий к Пуанкаре [5, 6]: $n = 2$ и

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^m \cos 2\pi(u_m x_1 + v_m x_2), \tag{1.3}$$

где $\Lambda = \sqrt{2} + 1$, $(\Lambda + 1)/2 < A < \Lambda$, а целые числа $u_m$ и $v_m$ определяются из разложения

$$(\sqrt{2} - 1)^m = u_m + v_m\sqrt{2}.$$

Функция (1.3), очевидно, непрерывна на $\mathbb{T}^2$. Пусть частоты $\omega_1$, $\omega_2$ равны соответственно $1/2\pi$, $\sqrt{2}/2\pi$: а начальные фазы $x_1^0$, $x_2^0$ равны нулю. Тогда

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^m \cos \frac{t}{\Lambda^m},$$

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds = \sum_{m=0}^{\infty} A^m \sin \frac{t}{\Lambda^m}.$$

Можно показать, что $F(t) \to \pm\infty$ при $t \to \pm\infty$. При этом $f(x_1^0, x_2^0) > 0$ (ср. с заключением теоремы 3). В этом примере в качестве начальных фаз можно также взять $x_1^0 = \alpha$, $x_2^0 = \sqrt{2}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; тогда интеграл $F(t, \alpha, \sqrt{2}\alpha)$ также будет стремиться к $\pm\infty$ при $t \to \pm\infty$. Это множество начальных фаз всюду плотно на $\mathbb{T}^2$, но, конечно, имеет нулевую меру.

Как показано в [5], функция (1.3) не дифференцируема по переменным $x_1$, $x_2$ ни в одной точке двумерного тора. Это замечание имеет существенное значение. Дело в том, что для гладких $f$ неравенства (1.2) в теореме 1 справедливы одновременно для *всех* начальных фаз. Этот результат сначала был установлен для $f \in C^2(\mathbb{T}^2)$ [7], затем для непрерывно дифференцируемых функций [8], а в заметке [9] для функций, абсолютно непрерывных на двумерном торе.

В многомерном случае возвращаемость интеграла $F$ установлена в работе [10] в предположении аналитичности функции $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$. Правда, при этом ничего не говорится о выполнении второго неравенства (1.2). Этому результату предшествовала работа [11] о равномерной возвращаемости интеграла от условно периодической функции в предположении нечетности $f$ (в примере Пуанкаре функция $f$ четная). Общий результат о возвращаемости интеграла при $n = 3$ получен в [12].

Приложение свойств возвращаемости интегралов условно периодических функций к теории динамических систем содержится в [5, 13, 14].

## 2. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Имеется дискретный вариант теоремы 1. Чтобы его сформулировать, рассмотрим отображение $T : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, которое определяется формулами

$$x_j \mapsto x_j + \alpha_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Так что $T^k$ отображает точку $x \in \mathbb{T}^n$ в $x + k\alpha$. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и 1 считаем независимыми над $\mathbb{Z}$. Пусть $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Сопоставим ей сумму

$$G(k, x_1^0, \ldots, x_n^0) = \sum_{m=0}^{k-1} g(m\alpha_1 + x_1^0, \ldots, m\alpha_n + x_n^0).$$

Снова, по теореме Вейля,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{G(k, x^0)}{k} = \langle g \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} g d^n x$$

равномерно по $x^0 \in \mathbb{T}^n$. Пусть дальше $\langle g \rangle = 0$.

**Теорема 4.** *Для почти всех* $x^0 \in \mathbb{T}^n$ *имеет место свойство возвращаемости: для любого* $\varepsilon > 0$ *най-*

*дется последовательность целых чисел $k_s \uparrow \infty$ такая, что*

$$|G(k_s, x^0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(T^{k_s}x^0, x^0) < \varepsilon.$$

В [15] указан дискретный вариант теоремы 3, справедливый для более широкого класса строго эргодических преобразований.

Теорема 1 вытекает из теоремы 4. Действительно, $\omega_n \neq 0$, поскольку числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ независимы над $\mathbb{Z}$. Далее положим $\tau = 1/\omega_n$. Введем отображение $(n-1)$-мерного тора на себя формулой

$$T: x_1 \mapsto x_1 + \omega_1\tau, \ldots, x_{n-1} \mapsto x_{n-1} + \omega_{n-1}\tau$$

и непрерывную функцию

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \\ = \int_0^{1/\omega_n} f(\omega_1 t + x_1, \ldots, \omega_{n-1}t + x_{n-1}, \omega_n t + x_n^0)dt.$$

Число $x_n^0 \bmod 1$ фиксировано. Легко показать, что

$$\langle g \rangle = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} g dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0.$$

Числа $\omega_1\tau, \ldots, \omega_{n-1}\tau$ и 1, очевидно, независимы над $\mathbb{Z}$. Наконец,

$$F(m\tau, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \sum_{k=0}^{m-1} g(T^k(x_1, \ldots, x_{n-1})).$$

Остается применить теорему 4. Сама теорема 4 является следствием более общего результата из п. 3.

З а м е ч а н и е. Поскольку теорема 1 является следствием теоремы 4, то в теореме 1 моменты времени $\{t_k\}$ можно выбрать из некоторой арифметической прогрессии.

## 3. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ВОЗВРАЩЕНИИ

Пусть $\Gamma$ — полное компактное метрическое пространство с расстоянием $\rho$ и $\mu$ — конечная мера Каратеодори на $\Gamma$ (эта мера счетно аддитивная и все открытые множества в $\Gamma$ измеримы; подробности, например, в [16]). Пусть $T$ — непрерывное отображение, сохраняющее меру $\mu$.

Пусть $g: \Gamma \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с нулевым средним:

$$\int_\Gamma g d\mu = 0.$$

Нас будет интересовать поведение суммы

$$G(n, x) = g(x) + g(Tx) + \cdots + g(T^{n-1}x). \tag{3.1}$$

По теореме Биркгофа–Хинчина,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G(n, x)}{n} = 0$$

для почти всех $x \in \Gamma$.

**Теорема 5.** *Если $T$ — эргодическое преобразование, то для почти всех $x \in \Gamma$ имеет место свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность целых $n_k \uparrow \infty$ такая, что*

$$|G(n_k, x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho(T^{n_k}x, x) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Возвращаемости может не быть при *всех* $x \in \Gamma$ (как показывает пример Пуанкаре из п. 1). Кроме того, последовательность $\{n_k\}$ может зависеть от выбора точки $x$.

Справедлив непрерывный аналог теоремы 5. Пусть $(\Gamma, \mu, g^t)$ — динамическая система на компактном метрическом пространстве $\Gamma$ с конечной мерой Каратеодори $\mu$ и $\{g^t\}$ — семейство непрерывных преобразований $\Gamma$, сохраняющих меру $\mu$. Пусть $f$ — непрерывная функция на $\Gamma$ с нулевым средним значением.

**Теорема 6.** *Пусть система $(\Gamma, \mu, g^t)$ эргодическая. Тогда для почти всех $x \in \Gamma$ имеет место следующее свойство возвращаемости: для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $t_k \uparrow \infty$ такая, что*

$$\left|\int_0^{t_k} f(g^s x)ds\right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho(g^{t_k}x, x) < \varepsilon.$$

Это утверждение является некоторым усилением основного результата [3]. Непосредственным следствием этого утверждения является

**Теорема 7.** *Пусть система $(\Gamma, \mu, g^t)$ эргодическая и $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с нулевым средним значением. Тогда для почти всех $x \in \{x \in \Gamma : f(x) \neq 0\}$ функция*

$$t \mapsto \int_0^t f(g^s x)ds$$

*имеет бесконечно много простых нулей как при $t \to +\infty$, так и $t \to -\infty$.*

Докажем теорему 5 (теорема 6 доказывается аналогично). Расширим фазовое пространство, заменив $\Gamma$ на $\Gamma \times \mathbb{R}$. Это снова будет метрическим пространством, причем локально компактным. Расширим теперь действие $T$ на $\Gamma$ до действия $\widehat{T}$ на $\Gamma \times \mathbb{R} = \{(x, y)\}$, полагая

$$\widehat{T}(x, y) = (Tx, y + g(x)).$$

Отображение $\widehat{T}$ непрерывно и сохраняет меру $\hat{\mu}$ на $\Gamma \times \mathbb{R}$, которая есть произведение меры $\mu$ на $\Gamma$ и стандартной меры Лебега на $\mathbb{R}$. Ясно, что

$$\hat{T}^n(x, y) = (T^n x, y + G(n, x)).$$

Расширенная динамическая система с дискретным временем часто называется *цилиндрическим каскадом*. Собственно нам надо показать, что почти все точки $(x, y) \in \Gamma \times \mathbb{R}$ цилиндрического каскада устойчивы по Пуассону.

Сначала покажем, что почти все точки $\Gamma \times \mathbb{R}$ *не уходящие*. Напомним, что точка $p = (x, y)$ будет уходящей, если последовательность $\{\hat{T}^n p\}$, $n \geq 0$ не имеет предельных точек. В нашем случае это означает, что последовательность $|G(n, x)|$, $n \geq 0$ должна стремиться к $+\infty$ при $n \to \infty$.

Однако, поскольку $T$ эргодично и $\langle g \rangle = 0$, то для почти всех $x \in \Gamma$ сумма $G(n, x)$ меняет знак бесконечно много раз в *слабом* смысле: она не может быть в конечном счете положительной или отрицательной. Далее, поскольку $\Gamma$ компактно, а функция $f$ непрерывна, то $f$ ограничена. Следовательно, для почти всех $x \in \Gamma$ последовательность $|G(n, x)|$, $n \geq 0$ не может стремиться к $+\infty$ при $n \to \infty$.

Заметим теперь, что $\hat{\mu}(\Gamma \times \mathbb{R}) = \infty$, а для любого компактного подмножества $S \subset \Gamma \times \mathbb{R}$ мера $\hat{\mu} S$ конечна. Это позволяет применить известную эргодическую теорему Хопфа (см., например, [16]), согласно которой почти все точки $\Gamma \times \mathbb{R}$ являются либо уходящими, либо возвращающимися (устойчивыми по Пуассону). В нашем случае реализуется вторая возможность.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит академика В.В. Козлова за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бор Г.* Почти периодические функции. М.–Л., ОГИЗ, 1934. 128 с.
2. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. Гостехиздат. М. 1953. 396 с.
3. *Шнейберг И.Я.* Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 92–93.
4. *Боль П.Г.* Об одном дифференциальном уравнении из теории возмущений // Избранные труды, Изд-во АН Латвийской ССР, Рига, 1961. С. 127–154.
5. *Козлов В.В.* Об интегралах квазипериодических функций // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1978. № 1. С. 106–115.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат. М.–Л., 1947. 392 с.
7. *Козлов В.В.* Об одной задаче Пуанкаре // ПММ. 1976. Т. 40. № 2. С. 352–355.
8. *Крыгин А.Б.* Об ω-предельных множествах гладких цилиндрических каскадов // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 6. С. 873–884.
9. *Сидоров Е.А.* Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 184–188.
10. *Мощевитин Н.Г.* О возвращаемости интеграла гладкой условнопериодической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 737–748.
11. *Конягин С.В.* О возвращаемости интеграла нечетной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 570–577.
12. *Мощевитин Н.Г.* О возвращаемости интеграла гладкой трехчастотной условнопериодической функции // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 723–735.
13. *Kozlov V.V., Moshchevitin N.G.* Diffusion in Hamiltonian systems // Chaos. 1998. V. 8. № 1. P. 245–247.
14. *Козлов В.В.* Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 201–218.
15. *Козлов В.В.* Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 3. С. 358–367.
16. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат. М.–Л., 1949. 550 с.

# THE RETURNABILITY OF INTEGRALS OF CONDITIONALLY PERIODIC FUNCTIONS

**N. V. Denisova**[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS *V.V. Kozlov*

A range of issues related to the returnability of integrals of conditionally periodic functions with zero mean value is discussed. In the case of smooth functions on the torus, the returnability of integrals obviously holds for all initial phases. A new observation is that for almost all initial phases, the returnability property simultaneously holds not only for integrals, but also for phase points on the torus. Moreover, this result is also valid in the case where the corresponding functions on the torus are only continuous. These observations are transferred to the general case ergodic transformations of compact metric spaces with Carateodori measure.

*Keywords:* conditionally periodic function, frequencies, returnability, measure Karatheodori, Hopf's theorem