

УДК 517.984

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА И КОМПАКТНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ НЕСЕКТОРИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

© 2023 г. С. Н. Туманов^{1,*}

Представлено академиком РАН И.А. Таймановым

Поступило 31.03.2023 г.

После доработки 23.04.2023 г.

Принято к публикации 29.04.2023 г.

Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля на полуоси, когда потенциал принимает комплексные значения в более широкой области, чем полуплоскость, мало изучены. Оператор в этом случае, вообще говоря, несекториальный – числовой образ замечает всю комплексную плоскость. В этой ситуации предложены условия, обеспечивающие дискретность спектра и компактность резольвенты.

DOI: 10.31857/S2686954323700145, EDN: XJAIKI

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$, заданный дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + q(x)y$, $x \in \mathbb{R}_+$.

Здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $q = q(x)$ – комплекснозначная функция, принимающая значения при всех достаточно больших $x \geq x_0 \geq 0$ в открытом секторе

$$\Pi_\kappa = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \arg z \in (-\pi + \kappa, \pi - \kappa)\}, \quad \kappa \geq 0.$$

Введем максимальную область:

$$D = \{y \in L_2(\mathbb{R}_+) \mid y, y' \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+), l(y) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}$$

и форму краевых условий: пусть $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \\ U(y) = \alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0).$$

Сам оператор L_U будем рассматривать на области D_U , состоящей из таких $y \in D$, для которых $U(y) = 0$, где он действует как $L_U y = l(y)$.

В общем случае рассматриваемый оператор не является секториальным, а числовой образ замечает всю комплексную плоскость.

Вместе с оператором L_U введем L_U^0 , определяемый на области D_U^0 , состоящей из функций $y \in D_U$ с компактным носителем (своем для каждой такой функции y), где L_U^0 действует аналогично: $L_U^0 y = l(y)$.

Известно [1], что $D_U^0 \subset D_U$ плотно в $L_2(\mathbb{R}_+)$, исходный оператор L_U замкнут, а L_U^0 допускает замыкание. При этом может оказаться, что его замыкание $\widetilde{L_U^0} \neq L_U$ [2].

Случай, когда $\widetilde{L_U^0} = L_U$ называется определенным и представляет отдельный интерес. С одной стороны, как это следует из работы [1], реализация определенного случая эквивалентна тому, что $L_U^* = \bar{L}_U$, где $\bar{L}_U$ – оператор, определяющийся сопряженными краевыми условиями $\bar{U}(y) = \overline{\alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0)}$ и сопряженным дифференциальным выражением $\bar{l}(y) = -y'' + \overline{q(x)}y$ аналогично L_U . С другой стороны, реализация определенного случая позволяет записать формулу для резольвенты L_U . При вещественном q это соответствует реализации случая предельной точки Вейля [3] для однородного уравнения

$$-y'' + qy = 0. \quad (1)$$

Лидским [2] рассмотрены потенциалы с $\operatorname{Re} q \geq \operatorname{const}$, либо $\pm \operatorname{Im} q \geq \operatorname{const}$, и даны достаточные условия реализации определенного случая и

¹ Московский Центр фундаментальной и прикладной математики при МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: sntumanov@yandex.ru

компактности резольвенты L_U . Если при $\operatorname{Re} q \geq \operatorname{const}$ определенный случай реализуется всегда, то при неограниченной снизу вещественной части потенциала приходится прибегать к дополнительным условиям, например, условиям типа Сирса [2, 4].

Наличие ВКБ асимптотик решений (1) несколько упрощает исследование спектральных свойств L_U .

На этом пути были получены классические результаты Наймарка [6]. Недавно с помощью метода ВКБ были получены результаты Ишкиным [7] для несекториального оператора Штурма–Лиувилля. Стоит отметить, что случай несекториального оператора мало изучен, о чем более подробно сказано в [7].

Для существования ВКБ асимптотик достаточно, чтобы $q, q' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ и

$$\frac{1}{q^{1/4}} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{q^{1/4}} = \frac{5}{16} \frac{(q')^2}{q^{5/2}} - \frac{1}{4} \frac{q''}{q^{3/2}} \in L_1(\mathbb{R}_+),$$

см., например, [5], что обременительно и с точки зрения гладкости потенциала, и с точки зрения оценки роста его производных. Поэтому нас заинтересовал случай менее гладких q , когда решения (1), вообще говоря, таких асимптотик не имеют.

Договоримся через C обозначать произвольные положительные константы, возможно, различные в соседних формулах.

Введем условие на потенциал q , центральное для настоящей работы. Скажем, что q удовлетворяет условию А при $x \geq x_0$, если:

- потенциал $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$;
- образ $q([x_0, +\infty)) \subset \Pi_\kappa$, $\kappa \geq 0$;
- при $x \geq x_0$ имеет место оценка

$$\operatorname{Re} p(x) \geq C + \frac{1}{2} \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|, \quad C > 0, \quad (2)$$

где $p(x) = \sqrt{q(x)}$, а ветвь корня выбрана так, чтобы $\operatorname{Re} p(x) > 0$ при $x \geq x_0$.

Проясним наш интерес к (2): как легко заметить, в случаях, рассмотренных Наймарком и Ишкиным, когда $|q| \rightarrow +\infty$, $\kappa > 0$, $|q'|/q^{3/2} \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$, выполняется не только (2), но и даже более сильная оценка при $x \gg 1$:

$$\operatorname{Re} p(x) \geq C + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|, \quad C, \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Положим

$$\rho = \rho(x) = \operatorname{Re} p(x) - \frac{1}{2} \left| \frac{p'(x)}{p(x)} \right|.$$

В ряде наших утверждений ρ , $1/|q|$, $\rho/|q|$ участвуют в определении весовых L_2 -пространств. Отметим, что (3) дает возможность получить оценки:

$$\left| \frac{p'}{p} \right| \leq \frac{1}{1/2 + \varepsilon} \operatorname{Re} p,$$

$$\rho \geq \operatorname{Re} p - \frac{1/2}{1/2 + \varepsilon} \operatorname{Re} p = \frac{\varepsilon}{1/2 + \varepsilon} \operatorname{Re} p,$$

а в итоге:

$$C \operatorname{Re} p(x) \leq \rho(x) \leq \operatorname{Re} p(x),$$

что позволяет перейти от весов ρ , $1/|q|$, $\rho/|q|$ к более понятным $\operatorname{Re} p$, $1/|q|$, $\operatorname{Re} p/|q|$.

Заметим, что дополнительное условие $\kappa > 0$ безотносительно к (2) или (3) приводит к неравенству при $x \geq x_0$:

$$\operatorname{Re} p \leq |p| \leq C \operatorname{Re} p,$$

что вместе с (3) позволяет перейти уже к весам $|q|^{1/2}$, $1/|q|$, $1/|q|^{1/2}$.

Определим множество $\mathcal{N}$ тех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых условие А выполнено для $q_\lambda = q - \lambda$ при всех $x \geq x_0(\lambda)$ (для каждого λ возможно свое $x_0(\lambda)$).

Лемма 1. Пусть для q условие А выполнено при всех $x \geq x_0$. Тогда

Множество $\mathcal{N}$ открыто [и не пусто] в $\mathbb{C}$.

Условия $\mathcal{N} = \mathbb{C}$ и $|q(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ эквивалентны.

В формулировках результатов штрихом обозначаем дифференцирование по x .

Теорема 1. Пусть $\mathcal{N} \neq \emptyset$, тогда реализуется определенный случай: $\widehat{L}_U^0 = L_U$.

Пусть $\Omega \subset \mathcal{N}$ — область. Существует функция $\eta(x, \lambda)$ ($x \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \Omega$) нетривиальная при всех $\lambda \in \Omega$ со следующими свойствами:

- обе функции $\eta(x, \lambda)$ и $\eta'(x, \lambda)$ непрерывны по совокупности аргументов $(x, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$;
- при каждом $x \in \mathbb{R}_+$ функции $\eta(x, \lambda)$ и $\eta'(x, \lambda)$ однозначные аналитические в Ω как функции λ ;
- при любом $\lambda \in \Omega$ функция $\eta(x, \lambda) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ как функция x , является единственным нетривиальным решением уравнения

$$-y'' + (q(x) - \lambda)y = 0 \quad (4)$$

в классе решений из $L_2(\mathbb{R}_+)$ с точностью до постоянного множителя (не зависящего от x , но, возможно, зависящего от λ);

Спектр L_U в Ω дискретный (собственные пространства одномерны, корневые — конечномерны), собственные значения определяются условием $\mathcal{W}(\lambda) = 0$, где

$$\mathcal{W}(\lambda) = \alpha_0 \eta(0, \lambda) + \alpha_1 \eta'(0, \lambda),$$

а размерности корневых подпространств — кратностями нулей $\mathcal{W}(\lambda)$.

Вне точек спектра в Ω формула для резольвенты L_U имеет вид:

$$(R_\lambda f)(x) = \frac{\eta(x, \lambda)}{\mathcal{W}(\lambda)} \int_0^x \chi(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \\ + \frac{\chi(x, \lambda)}{\mathcal{W}(\lambda)} \int_x^{+\infty} \eta(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

где $\chi(x, \lambda) = \alpha_0 \varphi(x, \lambda) - \alpha_1 \psi(x, \lambda)$, а $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — решения задачи Коши для уравнения (4) с начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1,$$

$$\psi(0, \lambda) = 1, \quad \psi'(0, \lambda) = 0.$$

Функцию $\eta(x, \lambda)$ мы называем решением Вейля однородного уравнения (4).

Следствие. Пусть для q условие А выполнено при всех $x \geq x_0$, и $|q(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда спектр $\sigma(L_U)$ дискретный.

Отметим, что в условиях Следствия мы утверждаем только дискретность спектра. Более сильное условие — компактность резольвенты — дает следующей Теоремой:

Теорема 2. Пусть для q условие А выполнено при всех $x \geq x_0$, и $\rho \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда резольвента R_λ оператора L_U — вполне непрерывный оператор при $\lambda \notin \sigma(L_U)$.

Следующая Теорема может быть полезной при исследовании полноты системы СПФ оператора L_U (см., например, [8]).

Теорема 3. Пусть $q \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $|q(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, пусть $\kappa > 0$ и для некоторого $0 < \delta < 1$ при всех $x \geq x_0$:

$$q(x) \in \Pi_\kappa,$$

$$\left| \frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)} \right| < 4\delta \tan^{3/2} \kappa \sin \frac{\kappa}{2}.$$

Тогда

- спектр $\sigma(L_U)$ дискретный, а резольвента R_λ оператора L_U — вполне непрерывный оператор при $\lambda \notin \sigma(L_U)$.

- функция $\eta(x, \lambda)$, доставляемая Теоремой 1, целая по λ при каждом $x \geq 0$, и является замкнутым ядром в смысле Левина [9], т.е. если для некоторой $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_0^{+\infty} \eta(x, \lambda) f(x) dx \equiv 0,$$

то $f \equiv 0$.

При (2) справедливо вложение весовых пространств: $L_2(\rho) \subset L_2 \subset L_2(1/|q|)$, в этой связи интерес представляет следующая

Теорема 4. Пусть для q условие А выполнено при всех $x \geq 0$, тогда $R_0 = L_U^{-1}$ — ограниченный оператор из $L_2(\mathbb{R}_+, 1/|q|)$ в $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, а dR_0/dx (действующий как $d[(R_0 f)(x)]/dx$) — ограниченный оператор из $L_2(\mathbb{R}_+, 1/|q|)$ в $L_2(\mathbb{R}_+, \rho/|q|)$.

Следствие. Пусть для q условие А выполнено при всех $x \geq 0$, тогда для любой $y \in D$ следует, что $y \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, $y' \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho/|q|)$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН профессору Андрею Андреевичу Шкаликову за внимание к работе и поддержку.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при содействии РНФ, грант 20-11-20261.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М.А. // Тр. ММО 1954. Т. 3. С. 181–270.
2. Лидский В.Б. // Тр. ММО 1960. Т. 9. С. 45–79.
3. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Oxford, 1946. “Издательство иностранной литературы”, Москва, 1960.
4. Sears D.B. // Canadian journ. math. 1950. V. 2. № 3. Р. 314–325.
5. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. Academic Press, 1974. “Наука”, Физматлит, 1990.
6. Наймарк М.А. ДАН 1952. Т. 85. С. 41–44.
7. Ишкин Х.К. // Мат. заметки 2023. Т. 113.
8. Tumanov S.N. // JDE 2022. V. 319. Р. 80–99.
9. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., Москва, 1956.

ON ONE CONDITION FOR THE DISCRETENESS OF THE SPECTRUM AND THE COMPACTNESS OF THE RESOLVENT OF A NONSECTORIAL STURM–LIOUVILLE OPERATOR ON THE SEMIAXIS

S. N. Tumanov^a

*^aMoscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Taimanov

The spectral properties of the Sturm–Liouville operator on the semi-axis with the complex-valued potential with the range exceeding the half-plane, has been little studied. The operator in this case can be non-sectorial, the numerical range can coincide with the entire complex plane. In this situation we propose the conditions ensuring the discreteness of the spectrum and the compactness of the resolvent.