



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 508, 2023

ФИЗИКА

- Направления развития плазменной аэродинамики
Б. С. Алешин, В. Ю. Хомич, С. Л. Чернышев 3
- Волновые механизмы повышения микроциркуляции и трансапиллярного обмена
Е. И. Велиев, Р. Ф. Ганиев, А. А. Кубатиев, Д. Л. Ревизников, Л. Е. Украинский 9
- Релаксационный поворот при мартенситном превращении и рассеяние текстуры мартенсита
В. М. Гундырев, В. И. Зельдович, В. М. Счастливец 15
- Специфика импульсной катодолюминесценции при возбуждении электронным пучком наносекундной и субнаносекундной длительности
М. И. Яландин, В. И. Соломонов, А. В. Спирина, С. А. Шунайлов, К. А. Шарыпов, А. С. Макарова, А. И. Липчак 19
-

МЕХАНИКА

- Трехчленные представления степенных тензорных рядов в теории определяющих соотношений
Д. В. Георгиевский 27
- Сравнительный анализ приближений Дарси и Бринкмана при переходе к неустойчивости в пористой среде
А. Т. Ильичев, Г. Г. Цыпкин 30
- О формах равновесия начально-изогнутой балки Бернулли–Эйлера при электрических и тепловых воздействиях
Н. Ф. Морозов, Д. А. Индейцев, Н. В. Можгова, А. В. Лукин, И. А. Попов 35
- Перенос вещества капли при формировании первичной каверны
Ю. Д. Чашечкин, А. Ю. Ильиных 42
-

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

- Оценка температурных напряжений в литосфере ранней Луны
С. А. Воропаев, А. П. Кривенко 53
- Моделирование вибраций железнодорожных конструкций сеточно-характеристическим методом
И. Б. Петров, А. А. Кожемяченко, А. В. Фаворская 59
- Исследование воздействия сильной магнитной бури на Объединенную энергетическую систему Центра России
А. А. Тренькин, С. В. Воеводин, О. Н. Коблова, В. Д. Селемир, В. В. Вахнина, А. А. Кувшинов, А. Н. Черненко 64
- Необходимые условия существования космических аппаратов на замкнутых ультранизких орбитах
А. С. Филатьев, А. А. Голиков 68
-
-

CONTENTS

Volume 508, 2023

PHYSICS

- Development Trends in Plasma Aerodynamics
B. S. Aleshin, V. Yu. Khomich, and S. L. Chernyshev 3
- The Wave Mechanisms of Microcirculation and Transcapillary Exchange Intensification
E. I. Veliev, R. F. Ganiev, A. A. Kubatiev, D. L. Reviznikov, and L. E. Ukrainsky 9
- Relaxation Rotation During Martensitic Transformation and Scattering of Martensite Texture
V. M. Gundyrev, V. I. Zel'dovich, and V. M. Schastlivtsev 15
- Specific Features of Pulsed Cathodoluminescence under Excitation
by Nanosecond and Subnanosecond Electron Beams
*M. I. Yalandin, V. I. Solomonov, A. V. Spirina, S. A. Shunailov, K. A. Sharypov,
A. S. Makarova, and A. I. Lipchak* 19
-

MECHANICS

- Three-Term Representations of Power Tensor Series in the Theory of Constitutive Relations
D. V. Georgievskii 27
- Comparative Analysis of the Darcy and Brinkman Approximations
for the Transition to Instability in a Porous Medium
A. T. Il'ichev and G. G. Tsyarkin 30
- Equilibrium Forms of an Initially Curved Bernoulli-Euler Beam in Electric and Thermal Fields
N. F. Morozov, D. A. Indeitsev, N. V. Mozhgova, A. V. Lukin, and I. A. Popov 35
- Transfer of a Drop Material During the Primary Cavern Formation
Yu. D. Chashechkin and A. Yu. Ilyinykh 42
-

TECHNICAL SCIENCE

- Assessment of Temperature Stresses in the Lithosphere of the Early Moon
S. A. Voropaev, and A. P. Krivenko 53
- Simulation the Vibrations of Railway Structures by the Grid-Characteristic Method
I. B. Petrov, A. A. Kozhemyachenko, and A. V. Favorskaya 59
- A Study of Impact of Strong Magnetic Storm on Consolidated Power System of Centre of Russia
*A. A. Trenkin, S. V. Voevodin, O. N. Koblova, V. D. Selemir,
V. V. Vakhnina, A. A. Kuvshinov, and A. N. Chernenko* 64
- Necessary Conditions for the Existence of Spacecraft in Closed Ultra-low Orbits
A. S. Filatyev and A. A. Golikov 68
-
-

УДК 532.526:533.6:538.4

НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ПЛАЗМЕННОЙ АЭРОДИНАМИКИ

© 2023 г. Академик РАН Б. С. Алешин^{1,*},
академик РАН В. Ю. Хомич^{2,**}, академик РАН С. Л. Чернышев^{3,***}

Поступило 15.11.2022 г.

После доработки 15.11.2022 г.

Принято к публикации 16.11.2022 г.

Предлагаются наиболее перспективные направления исследований в области плазменной аэродинамики. На основе представленных экспериментальных данных, полученных в последнее время, рассматриваются возможности использования объемного силового воздействия на течение газа в аэродинамических приложениях, реализуемого с помощью приповерхностных электрических разрядов. Одним из таких приложений является увеличение протяженности ламинарного участка пограничного слоя на стреловидном крыле с целью уменьшения аэродинамического сопротивления летательного аппарата в крейсерском режиме полета. Второе направление связано с управлением трехмерным отрывом пограничного слоя на элементах механизации стреловидного крыла на режимах взлета и посадки. И третье направление – уменьшение поверхностного трения в турбулентном пограничном слое, который реализуется на большей части поверхности современных около- и сверхзвуковых летательных аппаратов. Предлагаемые исследования имеют не только прикладное, но и фундаментальное значение ввиду физической сложности изучаемых явлений.

Ключевые слова: генератор высоковольтных импульсов, холодная плазма, трехмерный пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход, отрыв пограничного слоя, турбулентное трение

DOI: 10.31857/S2686740023010017, **EDN:** TKUXZG

Плазменная аэродинамика как наука зародилась более 50 лет назад, но повышенное внимание исследователей привлекла в конце двадцатого века, когда резервы улучшения аэродинамической эффективности летательных аппаратов (ЛА) традиционными способами были практически исчерпаны. Применение холодной плазмы (слабоионизированной среды) для управления течениями открывает новое направление в развитии авиастроения. Оно связано с решением одной из актуальных задач современного самолетостроения – уменьшение сопротивления трения летательных аппаратов, которое составляет около 50% полного аэродинамического сопротивления современных магистральных лайнеров. При этом более половины сопротивления трения приходится на

крыло и оперение самолета, и снижение этого показателя на 50% за счет увеличения протяженности ламинарных участков пограничного слоя на поверхности указанных элементов ЛА приводит к уменьшению полного сопротивления самолета больше 10%. Такое значительное продвижение по показателю сопротивления равносильно переходу к новому поколению летательных аппаратов с улучшенной аэродинамической и энергетической эффективностью.

К числу наиболее перспективных относится технология, использующая процесс взаимодействия холодной плазмы с воздушной средой, в результате которого образуется электрогазодинамический (ЭГД) поток [1]. Электрогазодинамическое управление обтеканием аэродинамических тел основано на объемном силовом воздействии на течение газа, возникающем в приповерхностных электрических разрядах некоторых типов (коронном, барьерном, скользящем). Устройства, реализующие это воздействие, принято называть плазменными актуаторами (ПА) [2, 3].

Первые экспериментальные исследования в аэродинамической трубе, посвященные управлению отрывом пограничного слоя на модели прямого крыла с отклоняемым закрылком, были выполнены в СССР в 60-х годах прошлого века с использованием барьерного разряда. Внешний

¹ Национальный исследовательский центр
“Институт имени Н.Е. Жуковского”, Москва, Россия

² Институт электрофизики и электроэнергетики
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

³ Центральный аэродинамический институт
имени профессора Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Московская обл., Россия

*E-mail: aleshin@moscowoffice.group

**E-mail: khomich@ras.ru

***E-mail: info@tsagi.ru

электрод, на который подавалось высокое переменное напряжение, имел вид гребенки и располагался на основной части диэлектрической модели крыла перед закрылком. Несколько заземленных электродов были установлены внутри закрылка. Барьерный разряд, возникающий на зубцах гребенки, обеспечивал безотрывное обтекание модели крыла при скорости набегающего потока, не превышавшей 10 м/с [4].

Интерес к исследованиям ЭГД-управления обтеканием тел резко возрос в начале этого века, после того как была предложена простая и удобная для установки на аэродинамической поверхности схема ПА, использующего барьерный разряд: два ленточных электрода, расположенных на разных сторонах тонкого слоя диэлектрика (барьера). На узкий внешний (активный) электрод подается высокое переменное напряжение, а внутренний изолированный электрод имеет нулевой потенциал. В зависимости от ширины и расположения внутреннего электрода относительно внешнего барьерный разряд возникает в окрестности одной или обеих кромок внешнего электрода, объемным силовым воздействием индуцируя течение газа, направленное в сторону от кромки [5].

Основные результаты последовавших исследований ЭГД-метода управления обтеканием тел представлены в обзорах [6–8]. Возможности практического использования ПА в разных задачах управления пограничным слоем рассмотрены в обзоре [9]. На основе анализа основных достоинств и недостатков ПА и современного уровня знаний особенностей их функционирования в работе [9] сделан вывод о том, что наиболее перспективным является управление ламинарно-турбулентным переходом в двумерном пограничном слое. Отмечается также, что задачи управления ламинарно-турбулентным переходом, вызванным неустойчивостью поперечного течения в трехмерном пограничном слое, а также процессами, ответственными за повышенное трение в турбулентном пограничном слое, являются гораздо более сложными, но и наиболее актуальными для авиационной науки и техники.

Первое экспериментальное подтверждение возможности управления устойчивостью поперечного течения с помощью ПА получено в аэродинамической трубе на модели скользящего крыла [10]. В экспериментах использовался один актуатор, изготовленный по классической двухэлектродной схеме и установленный параллельно передней кромке крыла на небольшом расстоянии от нее. Силовое воздействие ПА, направленное навстречу потоку, ослабляло поперечное течение в пограничном слое в малой окрестности передней кромки, что вело к смещению ламинарно-турбулентного перехода вниз по потоку на несколько

процентов хорды крыла. Сделан вывод о том, что для расширения области ЭГД-воздействия вниз по потоку с целью более значительного ослабления поперечного течения необходимо использовать наборы актуаторов, установленных вдоль линий тока внешнего невязкого течения.

Для увеличения протяженности области аэродинамической поверхности, над которой создается однонаправленное силовое воздействие, были предложены более сложные схемы многоэлектродных актуаторных систем (МАС), позволивших существенно повысить эффективность создания такого воздействия [11]. В Центральном аэрогидродинамическом институте имени профессора Н.Е. Жуковского (ЦАГИ) была предложена схема МАС [12], отличающаяся от известных аналогов простотой конструкции при высокой эффективности генерации продольной объемной силы, а также возможностью существенной миниатюризации, что принципиально для управления течением в узких областях, например, в тонком пограничном слое вблизи передней кромки крыла или вязком подслое турбулентного пограничного слоя.

Дальнейшие работы в области плазменной аэродинамики проводились совместно с Институтом электрофизики и электроэнергетики Российской академии наук (ИЭЭ РАН) по трем основным направлениям, таким как: 1) развитие теоретической электрогазодинамики современных трансзвуковых крыльев и созданной на этой основе теории и математических моделей течения и его гидродинамической устойчивости; 2) развитие фундаментальных основ электродинамики для холодной плазмы на основе разряда с диэлектрическим барьером и создание эффективной многоэлектродной актуаторной системы и с источником питания от полностью твердотельного высоковольтного генератора импульсов; 3) решение комплексной задачи по интеграции единой системы управления обтеканием в системе крыло–поток, осуществляющей взаимосвязь между газодинамическими параметрами пограничного слоя и характеристиками холодной плазмы и создание на этой основе цифровой системы управления всеми параметрами.

Составной частью проводимых исследований являются разработанные в ИЭЭ РАН генераторы высоковольтных импульсов полностью на твердотельной элементной базе [13]. В зависимости от схемы генератора форма выходного напряжения может быть прямоугольной, пилообразной или синусоидальной с амплитудой до 20 кВ, частотой повторения до 30 кГц, средней мощностью питания до 2 кВт. Достоинствами таких генераторов являются: высокая надежность и долговечность, управляемое включение и выключение, стабиль-

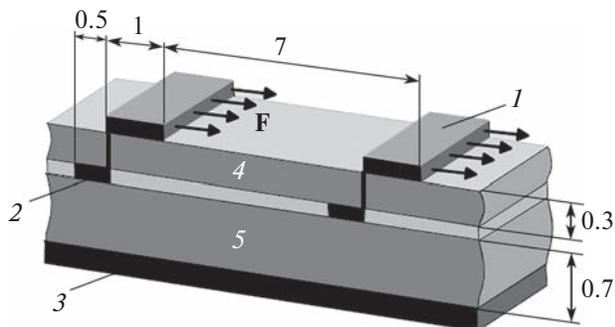


Рис. 1. Схема МАС и размеры в мм. Электроды: 1 – активный, 2 – экранирующий, 3 – ускоряющий, 4, 5 – слои диэлектрика. F – вектор горизонтальной компоненты объемной силы.

ность характеристик, низкие потери, сравнительно малые габариты и вес.

В результате выполненных параметрических экспериментальных исследований газоразрядных электрофизических и аэродинамических характеристик была создана эффективная много-разрядная актуаторная система с площадью поверхности разряда около 1000 см^2 для активного управления ламинарным обтеканием крыла с превосходящими мировые аналоги характеристиками индуцированного воздушного потока [14, 15]. Достоинства и уникальность разработанной МАС заключаются в простоте ее конструкции без движущихся частей, малом весе, возможности электронного управления характеристиками силового воздействия в широком диапазоне, высоком быстродействии при настраивании на изменения режима обтекания, масштабируемости и совместимости со сложной формой аэродинамических поверхностей, устойчивости к изменениям давления и влажности, малом энергопотреблении.

Модель МАС, схема и характерные размеры которой показаны на рис. 1, была использована в экспериментах по управлению устойчивостью поперечного течения в трехмерном пограничном слое на стреловидной пластине с углом скольжения 35° при отрицательном продольном градиенте давления, который создавался установленным над пластиной телом вытеснения [16, 17]. Измерения распределений компонент скорости в пограничном слое показали, что при силовом воздействии МАС, направленном против поперечного течения, его максимальная скорость даже на значительном удалении от МАС вниз по потоку может быть снижена более чем в 2 раза.

На рис. 2 представлены вертикальные распределения безразмерной скорости поперечного течения, измеренные на расстоянии 45 мм ниже по течению от края области воздействия МАС при двух режимах переменного напряжения, подавае-

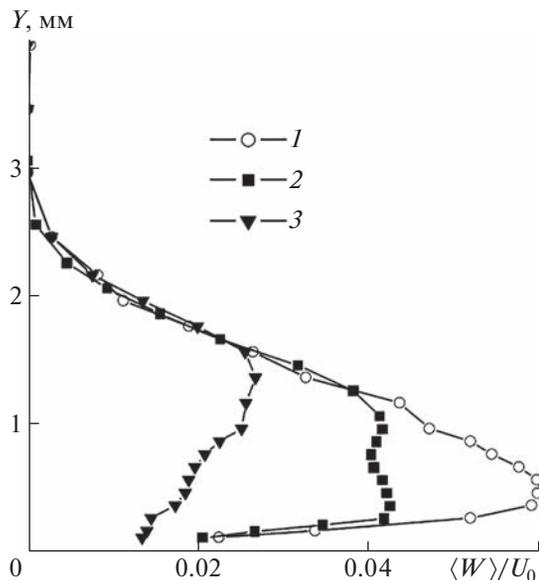


Рис. 2. Профили осредненной по размаху скорости поперечного течения, отнесенной к скорости набегающего потока $U_0 = 22 \text{ м/с}$: 1 – без разряда, 2 – режим 1, 3 – режим 2.

мого на внешние и экранирующие электроды МАС: с амплитудой $\pm 4 \text{ кВ}$, частотой 10 кГц (режим 1) и $\pm 4.5 \text{ кВ}$, 12 кГц (режим 2).

В результате ослабления поперечного течения наблюдалось значительное уменьшение вертикальных размеров и интенсивности стационарных вихрей его неустойчивости. Также было получено экспериментальное подтверждение нескольких эффектов, предсказанных ранее в расчетных исследованиях. Положение ламинарно-турбулентного перехода в этих экспериментах не было зафиксировано ввиду деградации поверхности МАС, обусловленной длительностью проведенных экспериментов. С учетом полученных результатов эксперименты в данном направлении необходимо продолжить с целью определения влияния воздействия МАС на положение области ламинарно-турбулентного перехода.

Как отмечено выше, другой важной фундаментальной и прикладной проблемой плазменной аэродинамики является уменьшение поверхностного трения в турбулентном пограничном слое. Экспериментальные исследования возможности управления течением в турбулентном пограничном слое с помощью набора классических ПА, функционирующих на основе барьерного разряда и расположенных на плоской пластине вдоль потока, были начаты в начале 2000-х годов [18] и продолжаются до настоящего времени [19–22]. Эксперименты показали, что при воздействии набора ПА, индуцирующих поперечное течение в вязком подслое турбулентного погранич-

ного слоя, в зависимости от соотношения толщины слоя и геометрических параметров ПА возможно уменьшение поверхностного трения от 3–10% [20] до 70% [22]. В исследовании [22] показано, что силовое воздействие ПА влияет на генерацию и эволюцию пристеночных продольных вихревых структур, ответственных за увеличение поверхностного трения в турбулентном пограничном слое [23]. Отличительной особенностью экспериментов [22] было использование униполярного импульсного барьерного разряда (УИБР) вместо обычного разряда знакопеременного напряжения. Учитывая противоречивость опубликованных экспериментальных данных о силовом воздействии УИБР [24], исследование возможности существенного улучшения характеристик ПА, использующих разряд этого типа, является важной самостоятельной задачей.

Применение в экспериментах по уменьшению поверхностного трения в турбулентном пограничном слое, аналогичным [22], разработанной в ЦАГИ МАС [12], за счет ее миниатюризации позволяет существенно увеличить исследуемый диапазон скорости потока. Кроме этого, в ЦАГИ и ИЭ РАН разрабатываются новые схемы МАС, предназначенные для эффективного воздействия на указанные выше вихревые структуры при существенно меньших затратах электрической мощности по сравнению с ПА, применявшимися в предыдущих исследованиях.

Одной из старейших, но остающейся актуальной, проблем аэродинамики является управление отрывом пограничного слоя. Большинство экспериментальных исследований аэродинамических приложений ПА, судя по обзорам [6–9], было посвящено решению именно этой проблемы. При этом в большинстве этих исследований рассматривался отрыв двумерного пограничного слоя.

Управление отрывом пограничного слоя с помощью ПА на модели стреловидного крыла с трансзвуковым профилем и углом стреловидности 25° исследовалось в малотурбулентной аэродинамической трубе в диапазоне скорости потока 3–50 м/с [25]. В этих условиях глобальному отрыву потока на крыле при больших углах атаки предшествовало появление небольшого отрывного “пузыря” вблизи передней кромки крыла. Заметное уменьшение размеров области отрыва было достигнуто при некоторых режимах работы одиночного ПА классической схемы, установленного вдоль передней кромки крыла перед местом появления отрывного “пузыря”.

Значительный интерес представляет исследование возможности управления непосредственно трехмерным отрывом пограничного слоя на элементах механизации стреловидного крыла (закрылке). Трехмерный отрыв возникает, когда при

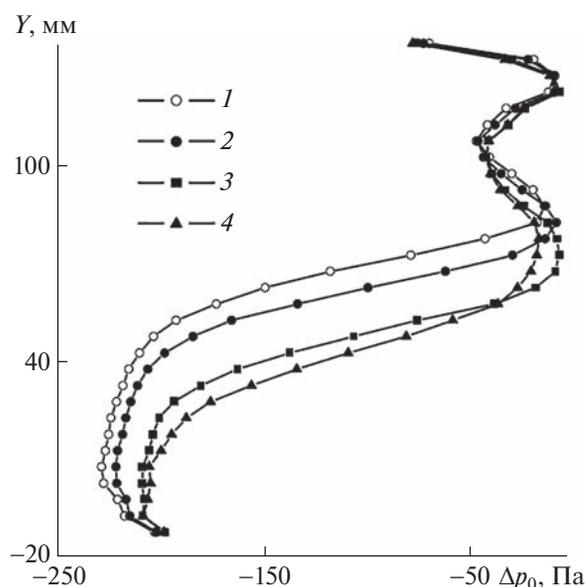


Рис. 3. Потери полного давления в следе при $U_0 = 18$ м/с: 1 – без разряда, 2 – ± 5 кВ, 3 – ± 7 кВ, 4 – ± 8 кВ, частота разряда – 12 кГц.

наличии положительного продольного градиента давления предельная линия тока, направление которой определяется вектором силы поверхностного трения, поворачивается параллельно задней кромке закрылка.

Была проведена первая серия экспериментов по управлению с помощью предложенной МАС трехмерным отрывом на модели скользящего закрылка, обтекаемого развитым турбулентным пограничным слоем. Силовое воздействие МАС распространялось как на предотрывное течение, так и на область отрыва. Была предусмотрена возможность изменения направления силового воздействия относительно вектора скорости набегающего потока. Визуализация течения в вертикальной и горизонтальной плоскостях с помощью PIV-технологии позволяет анализировать структуру течения. Потери импульса потока вследствие отрыва фиксировались с помощью гребенки насадков полного давления, установленной в следе за моделью.

Эксперименты продемонстрировали возможность существенного влияния силового воздействия МАС на положение и размеры области отрыва и структуру течения в ней. Получены следующие новые результаты: 1) при фиксированных скорости внешнего обтекания и интенсивности силового воздействия МАС, определяемого амплитудой и частотой подаваемого на нее напряжения, результат воздействия существенно зависит от его направления, что указывает на наличие оптимального направления воздействия, которое, по-видимому, зависит как от скорости обте-

кания, так и от интенсивности воздействия; 2) даже при незначительном сдвиге вниз по потоку линии отрыва, что наблюдалось при достаточно высокой скорости набегающего потока, в результате силового воздействия МАС потери импульса течения в следе за моделью существенно снижаются, а поперечный размер следа уменьшается.

Данный эффект иллюстрирует рис. 3, где показано распределение потерь полного давления в следе за моделью закрылка при различных амплитудах напряжения на МАС, содержащей 20 внешних электродов, расположенных с периодом 6 мм.

В эксперименте, результаты которого представлены на рис. 3, скорость потока на внешней границе пограничного слоя перед областью отрыва достигала 25 м/с, толщина вытеснения и форм-параметр составляли $\delta^* = 1.72$ мм и $H = 1.57$, соответственно, что соответствует развитому турбулентному пограничному слою. Смещение линии отрыва при амплитуде напряжения на МАС ± 5 кВ было незаметным, а при амплитуде ± 7 и ± 8 кВ линия отрыва смещалась вниз по потоку, соответственно, на $12 \delta^*$ и $16 \delta^*$. Структура течения в области отрыва при ± 8 кВ изменялась качественно.

Полученные результаты очевидно требуют продолжения исследований в этом направлении. К преимуществам предложенной технологии активного плазменного управления аэродинамического обтекания ЛА следует отнести хорошую совместимость системы управления МАС с системами искусственного интеллекта, что приобретает особое важное значение для управления беспилотными ЛА. Таким образом, совместные работы ЦАГИ и ИЭЭ РАН направлены на решение актуальных фундаментальных и прикладных задач плазменной аэродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хомич В.Ю., Ямщиков В.А. Электрогидродинамический поток для активного управления течением газов // Успехи физических наук. 2017. Т. 187. № 6. С. 653–666. <https://doi.org/10.3367/UFN.2017.01.038047>
2. Moreau E. Airflow control by non-thermal plasma actuators // J. Phys. D: Appl. Phys. 2007. V. 40. P. 605–636. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/3/S01>
3. Cattafesta L.N., Sheplak M. Actuators for active flow control // Annu. Rev. Fluid Mech. 2011. V. 43. P. 247–272. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160634>
4. Касьянов В.А., Боярский Г.Н., Фридланд В.Я. Экспериментальное исследование влияния электрогидродинамического эффекта на аэродинамические характеристики профиля // Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамики: Сб. науч. тр. К.: КИИГА, 1966. Вып. 2.
5. Roth J.R., Sherman D., Wilkinson S.P. Boundary layer flow control with a one atmosphere uniform glow discharge surface plasma // AIAA Paper. 1998. № 1998–328. 28 p. <https://doi.org/10.2514/6.1998-328>
6. Corke T.C., Post M.L., Orlov D.M. SDBD plasma enhanced aerodynamics: concepts, optimization and applications // Prog. Aerospace Sci. 2007. V. 43. P. 193–217. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2007.06.001>
7. Corke T.C., Enloe C.L., Wilkinson S.P. Dielectric barrier discharge plasma actuators for flow control // Annu. Rev. Fluid Mech. 2010. V. 42. P. 505–529. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-121108-145550>
8. Wang J.-J., Choi K.-S., Feng L.-H., Jukes T.N., Whalley R.D. Recent developments in DBD plasma flow control // Prog. Aerospace Sci. 2013. V. 62. P. 52–78. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.05.003>
9. Kriegseis J., Simon B., Grundmann S. Towards in-flight applications? A review on dielectric barrier discharge-based boundary-layer control // Appl. Mech. Rev. 2016. V. 68. № 2. P. 020802. <https://doi.org/10.1115/1.4033570>
10. Yadala S., Hehner M.T., Serpieri J., Benard N., Dörr P.C., Kloker M.J., Kotsonis M. Experimental control of swept-wing transition through base-flow modification by plasma actuators // J. Fluid Mech. 2018. V. 844. R2. 11 p. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.268>
11. Benard N., Moreau E. Electrical and mechanical characteristics of surface AC dielectric barrier discharge plasma actuators applied to airflow control // Exp. Fluids. 2014. V. 55. P. 1846. <https://doi.org/10.1007/s00348-014-1846-x>
12. Газируллин М.Д., Курячий А.П., Литвинов В.М., Чернышев С.Л. Исследование упрощенной схемы набора плазменных актуаторов для управления течением в пограничном слое // Уч. зап. ЦАГИ. 2014. Т. XLV. № 6. С. 28–35.
13. Мошкунов С.И., Хомич В.Ю. Генераторы высоковольтных импульсов на основе составных твердотельных коммутаторов. М.: Физматлит, 2018. 166 с.
14. Алешин Б.С., Хомич В.Ю., Чернышев С.Л. Развитие метода силового электрогидродинамического воздействия на пограничный слой для активного управления аэродинамическими течениями // ДАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 662–664. <https://doi.org/10.7868/S0869565216360081>
15. Khomich V.Yu., Yamshchikov V.A., Chernyshev S.L., Kuryachii A.P. Multi-discharge actuator system for electrogasdynamic flow control // Acta Astronautica. 2021. V. 101. P. 292–300. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.01.032>
16. Баранов С.А., Газируллин М.Д., Киселев А.Ф., Курячий А.П., Сбоев Д.С., Толкачев С.Н., Чернышев С.Л. Ослабление неустойчивости поперечного течения в трехмерном пограничном слое с помощью многозарядной актуаторной системы // ДАН. 2019. Т. 488. № 2. С. 147–152. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524882147-152>

17. *Baranov S.A., Chernyshev S.L., Khomich V.Yu., Kiselev A.Ph., Kuryachii A.P., Moshkunov S.I., Rebrov I.E., Sboev D.S., Tolkachev S.N., Yamshchikov V.A.* Experimental cross-flow control in a 3D boundary layer by multi-discharge plasma actuators // *Aerosp. Sci. Technol.* 2021. V. 112. P. 106643. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106643>
18. *Wilkinson S.P.* Investigation of an oscillating surface plasma for turbulent drag reduction // *AIAA Paper 2003-1023*. 2003. 19 p.
19. *Jukes T.N., Choi K.-S., Johnson G.A., Scott S.J.* Turbulent drag reduction by surface plasma through spanwise flow oscillation // *AIAA Paper 2006-3693*, 2006. 14 p. <https://doi.org/10.2514/6.2006-3693>
20. *Коган М.Н., Литвинов В.М., Пименова Т.А., Успенский А.А.* Исследование возможности уменьшения сопротивления турбулентного пограничного слоя при воздействии диэлектрического барьерного разряда // *Ученые записки ЦАГИ*. 2012. Т. 43. № 5. С. 1–14.
21. *Corke T.C., Thomas F.O.* Active and passive turbulent boundary layer drag reduction // *AIAA Journal*. 2018. V. 56. Issue 10. P. 3835–3847. <https://doi.org/10.2514/1.J056949>
22. *Duong A.H., Corke T.C., Thomas F.O.* Characteristics of drag reduced turbulent boundary layers through pulsed-DC plasma actuation // *AIAA Paper 2020-0098*, 2020. 32 p.
23. *Orlandi P., Jimenez J.* On the generation of turbulent wall friction // *Phys. Fluids*. 1994. V.6. № 2. P. 634–641.
24. *Nakai S., Nishida H., Oshio Y.* Investigation on performance characteristics of dielectric discharge plasma actuator using pulsed-dc waveform // *J. Fluid Sci. Tech.* 2018. V. 13. No. 3. 13 p. <https://doi.org/10.1299/jfst.2018jfst0018>
25. *Maslov A., Sidorenko A.A., Zanin B.Yu., Postnikov B.V., Budovsky A.D., Malmuth N.D.* Plasma control of flow separation on swept wing at high angles of attack // *AIAA 2008-540*. 2008. 14 p.

DEVELOPMENT TRENDS IN PLASMA AERODYNAMICS

**Academician of the RAS B. S. Aleshin^a, Academician of the RAS V. Yu. Khomich^b,
and Academician of the RAS S. L. Chernyshev^c**

^a *Zhukovsky Institute (National Research Center), Moscow, Russia*

^b *Institute for Electrophysics and Electric Power of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia*

^c *Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow Region, Russia*

The most promising areas of research in the field of plasma aerodynamics are proposed. On the basis of the presented experimental data obtained recently, the possibilities of using the volumetric force effect on the gas flow in aerodynamic applications, which is realized with the help of near-surface electric discharges, are considered. One of these applications is to increase the length of the laminar section of the boundary layer on the swept wing in order to reduce the aerodynamic drag of the aircraft in the cruise flight mode. The second direction is associated with the control of the three-dimensional separation of the boundary layer on the elements of the mechanization of the swept wing in the take-off and landing modes. And the third direction is the reduction of surface friction in the turbulent boundary layer, which is realized on most of the surface of modern near- and supersonic aircraft. The proposed studies are not only of applied, but also of fundamental importance due to the physical complexity of the studied phenomena.

Keywords: high-voltage pulse generator, cold plasma, three-dimensional boundary layer, laminar-turbulent transition, separation of the boundary layer, turbulent friction

УДК 532.59; 534.7

ВОЛНОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ ПОВЫШЕНИЯ МИКРОЦИРКУЛЯЦИИ И ТРАНСКАПИЛЛЯРНОГО ОБМЕНА

© 2023 г. Е. И. Велиев¹, академик РАН Р. Ф. Ганиев², академик РАН А. А. Кубатиев³, Д. Л. Ревизников², член-корреспондент РАН Л. Е. Украинский^{2,*}

Поступило 26.09.2022 г.
После доработки 26.09.2022 г.
Принято к публикации 12.10.2022 г.

Рассматривается влияние внешнего волнового воздействия на фильтрацию жидкости из капилляров с проницаемыми стенками в окружающее поровое пространство и обратно. Установлены два механизма ускорения фильтрации. Первый из них обусловлен нелинейной связью между проницаемостью, окружающей капилляр, пористой среды и пористой поверхности капилляра с характеристиками волнового воздействия. Второй обусловлен синхронными и синфазными колебаниями давления в капилляре и проницаемости в стенке капилляра и в окружающей капилляр пористой среде. Он проявляется только в резонансном случае, когда частоты колебаний давления в капилляре и проницаемости в пористой среде подчиняются определенным установленным зависимостям. Оба эффекта могут быть использованы для интенсификации транскапиллярного обмена в медицине.

Ключевые слова: микроциркуляция, транскапиллярный обмен, проницаемость, насыщенные жидкостью пористые среды, волновые воздействия

DOI: 10.31857/S268674002301011X, EDN: UNXJCS

Транскапиллярный обмен является одним из важнейших физиологических процессов в живых организмах. Он обеспечивает снабжение элементов мышечной ткани и других органов кислородом и другими веществами, присутствующими в крови, и эвакуацию их из ткани в кровеносную систему. Этот процесс происходит в форме микроциркуляции, происходящей в микрососудах (капиллярах с проницаемыми стенками) и окружающей их тканевом пространстве.

Совместному применению численного моделирования и обработки данных измерений применительно к анализу пульсовой волны посвящена работа авторов [1] и ряд других. В этих работах использовалась вычислительная модель течения крови в системе крупных артерий.

В настоящей работе рассматриваются микроциркуляционные течения, обеспечивающие снабжение элементов ткани кислородом и другими ве-

ществами, присутствующими в крови. Как правило, говоря о микроциркуляции, имеют в виду прежде всего процессы, протекающие в микрососудах. К ним относятся капилляры, мельчайшие артериолы и вены, артериоло-веноулярные анастомозы, а также лимфоносные сосуды. Часто к этим процессам добавляется течение жидкости в окружающем кровеносные сосуды тканевом пространстве. Подробно вопросы микроциркуляции рассмотрены, например, в монографии [2]. Экспериментальному изучению микроциркуляторных процессов посвящены работы [3–7], теоретическому [8–14].

Интенсификация микроциркуляции связана с увеличением скорости фильтрации сквозь поры стенок проницаемых капилляров и в тканевом пространстве. Поиск возможных внешних воздействий, обеспечивающих такое изменение проницаемости, является целью настоящей работы. Рассматриваются внешнее волновое воздействие, его влияние на интенсивность транскапиллярного обмена.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается модель одиночного капилляра, взаимодействующего с окружающей тканью. Предполагается, что взаимодействие между капиллярами не существенно, и геометрия системы

¹ Государственная клиническая больница им. С.П. Боткина Департамента здравоохранения Москвы, Москва, Россия

² Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

³ Научно-исследовательский институт общей патологии и патофизиологии, Москва, Россия

*E-mail: leukrainsky@gmail.com

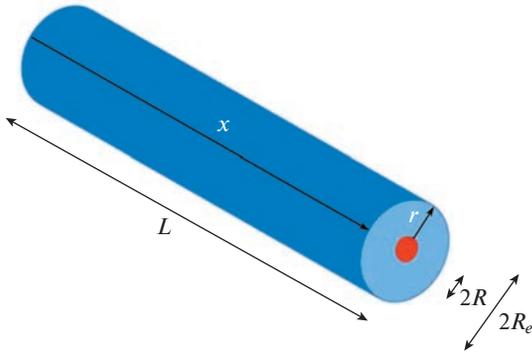


Рис. 1. Форма области “капилляр – окружающая ткань”.

может быть задана в виде цилиндрического капилляра и окружающего тканевого цилиндра (рис. 1).

Уравнения движения, описывающие медленное течение жидкости по капилляру с проницаемыми стенками и фильтрацию по окружающей капилляр пористой среде, могут быть записаны следующим образом.

Для жидкости внутри капилляра:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \xi u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} v_f = 0, \quad \frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{2\xi}{R} v_f.$$

Для области, занятой пористой средой, окружающей капилляр:

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial P}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + J.$$

Граничные условия:

$$p(0) = p_{\text{left}}, \quad p(L) = p_{\text{right}};$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R_c} = \alpha (p - P - \Delta P_o) \Big|_{r=R_c}, \quad J = \beta (P - P_l).$$

Здесь p и u – давление и скорость жидкости в капилляре, v_f – скорость фильтрации жидкости через стенку капилляра, ξ – коэффициент сопротивления, λ – проницаемость ткани, P – давление в насыщающей пористую ткань жидкости, ζ – сжимаемость пористого каркаса, r – поперечная координата, ΔP_o – разность онкотических давлений в капилляре и ткани, α – проницаемость капиллярной стенки, J – поток жидкости в лимфатическую систему, β – проницаемость стенок лимфатических сосудов, P_l – давление в лимфатическом русле, p_{left} и p_{right} – давления на артериальном и венозном концах капилляра.

Для описания движения в насыщенной жидкостью пористой ткани использовался закон Дарси, связывающий скорость жидкости и градиент давления. Для описания фильтрации жидкости через стенку капилляра в окружающую ткань

и обратную реабсорбцию жидкости из ткани в капилляр используется гипотеза Старлинга, согласно которой плотность потока жидкости через стенку пропорциональна локальной разности давлений в капилляре и окружающей ткани с учетом онкотической составляющей, обусловленной белками в капилляре и ткани. Значения параметров в настоящей работе брались из статьи [8]. При расчетах на границах тканевого цилиндра задавались нулевые производные давления. Обмен жидкостью между тканью и лимфатической системой в расчетах не учитывался. Вязкость жидкости считалась постоянной.

Пульсационное воздействие на течение в капилляре может быть описано с помощью периодического изменения давления на левой (артериальной) границе капилляра:

$$p(0) = p_0(0) + \gamma_p (p_0(0) - p(L)) \sin(\omega_p t),$$

где γ_p – относительная амплитуда колебаний давления, ω_p – частота колебаний. Несмотря на то что в действительности пульсовые колебания не являются гармоническими, такое приближение представляется уместным в свете анализа влияния внешнего волнового воздействия на микроциркуляционное течение.

В настоящей работе ставится задача качественного определения возможного влияния волновых воздействий на фильтрацию жидкости сквозь стенку капилляра и сквозь пористую ткань. В общем случае проницаемость ткани зависит от пористости ткани и размеров пор, а проницаемость стенки капилляра зависит от размеров межклеточного пространства и расстояний между клетками в эндотелии. Будем рассматривать лишь такие внешние воздействия, при которых объемы насыщенной жидкостью ткани, окружающей капилляр, и проницаемой стенки капилляра изменяются лишь за счет изменения пористости и размеров пор, а жидкость и скелеты пористых сред остаются несжимаемыми. Здесь для модельного описания волновых воздействий такого рода принимается гипотетическая модель, согласно которой объем насыщенного жидкостью тканевого цилиндра V , окружающего капилляр (рис. 1), и объем эндотелия v , лежащего между капилляром и тканью, однозначно связаны с проницаемостями тканевого цилиндра λ и поверхности капилляра α соответственно степенными функциями:

$$\lambda = \Phi_\lambda(V), \quad \alpha = \Phi_\alpha(v),$$

где $\Phi_\lambda(V) = V^{\eta_\lambda}$, $\Phi_\alpha(v) = v^{\eta_\alpha}$, η_λ и η_α – показатели степеней гипотетических функций, определяющих проницаемости тканевого цилиндра и пористой поверхности капилляра соответственно.

Таким образом, если объемы будут подвергаться периодическим изменениям, то в выбранной здесь модели проницаемости ткани и поверхности капилляра будут также изменяться периодически. Такой упрощенный подход, ограничивающийся однозначной связью между величинами объема пористой ткани и объема эндотелия и их проницаемостью, позволяет установить простейшие закономерности фильтрации жидкости сквозь колеблющуюся пористую среду. Это, в свою очередь, позволит вскрыть простейшие возможные механизмы волновых воздействий на микроциркуляцию жидкости. Конечно, для более точного и детального анализа следует перейти к более сложным моделям, учитывающим динамическое поведение насыщенных жидкостью пористых сред. В настоящей работе мы ограничимся лишь простейшей вышеописанной моделью.

Будем считать, что последнее соотношение может быть конкретизировано следующим образом:

$$\lambda = (\lambda_0 + \gamma_\lambda \lambda_0 \sin(\omega_\lambda t + \varphi_\lambda))^{\eta_\lambda},$$

$$\alpha = (\alpha_0 + \gamma_\alpha \alpha_0 \sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha))^{\eta_\alpha},$$

где λ_0 и α_0 – невозмущенные значения объемов тканевого цилиндра и пористой поверхности капилляра соответственно.

Предложенные здесь модельные соотношения для зависимости проницаемости от колебаний объемов могут быть пригодны для широкого круга пористых систем, отвечающих различным значениям показателей η_λ и η_α . Для уточнения этих значений могут быть поставлены специальные эксперименты.

В дальнейшем будем использовать единую форму для обоих коэффициентов:

$$a = (a_0 + \gamma_a a_0 \sin(\omega_a t + \varphi_a))^\eta, \quad (1)$$

где γ_a – относительная амплитуда колебаний, ω_a – частота, φ_a – фаза колебаний объемов пористых элементов.

В силу малых размеров капилляра и тканевого цилиндра, а также для небольших частот (до 5 Гц) можно считать, что колебания как внутри капилляра, так и в окружающей ткани осуществляются синхронно и синфазно по всей исследуемой области.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем здесь некоторые результаты численного интегрирования приведенной выше системы уравнений.

На рис. 2 и 3 показаны результаты интегрирования течения без внешних волновых воздействий. Рисунок 2 относится к стационарному случаю, а рис. 3 к случаю, когда давление внутри ка-

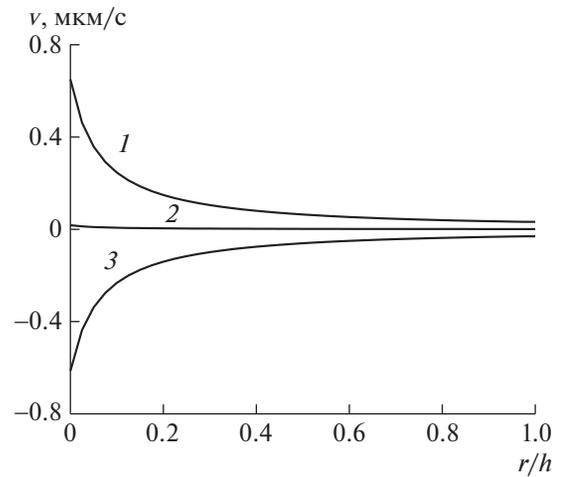


Рис. 2. Поперечные профили нормальной компоненты скорости в тканевом пространстве. 1 – левая граница, 2 – середина капилляра, 3 – правая граница.

пилляра пульсирует с периодом $T = 1$ с. Профили на рис. 2 построены для случая, когда давление на внешней границе цилиндра, занятого проницаемой тканью, $r = R_e$, равно давлению посередине капилляра. При этом микроциркуляция происходит вокруг этой точки. С изменением давления внутри капилляра скорость микроциркуляции также изменяется. Она достигает максимума в момент времени $t = T/4$, а затем уменьшается и достигает минимума при $t = 3T/4$. Скорость микроциркуляции колеблется с частотой изменения давления в капилляре. Однако в среднем она не изменяется и соответствует стационарному режиму (рис. 2).

Перейдем к рассмотрению внешнего волнового воздействия, заключающегося в том, что проницаемость ткани и стенки капилляра изменяется во времени согласно соотношению (1). Причем пульсация давления в капилляре сохраняется.

Согласно результатам численного интегрирования вышеприведенной двумерной системы уравнений при $\omega_p = \omega_a$, $\varphi_a = 0$, $\gamma_a = 0.5$, $\eta = 2$, были получены следующие результаты.

В момент времени, соответствующий пику пульсации давления в капилляре и максимальному значению проницаемости, волновое воздействие приводит к двукратному увеличению мгновенной скорости микроциркуляции. При этом увеличение осредненной за период скорости микроциркуляции, согласно расчетам, составляет около 30%. Основным механизмом интенсификации фильтрации в данном варианте являются, с одной стороны, повышение давления в капилляре вследствие пульсовой волны и, с другой стороны, синхронное и синфазное с изменением давления повышение проницаемости среды

вследствие внешнего волнового воздействия. Отметим, что в этом случае интенсификация микроциркуляции наблюдается и при линейной зависимости коэффициентов проницаемости от пористости, т.е. при $\eta = 1$. Существенным фактором в данном варианте является сдвиг фаз между колебаниями пульса и внешним воздействием. Наибольшее усиление фильтрации реализуется при нулевом сдвиге. Этот механизм повышения микроциркуляции транкапиллярного обмена является резонансным. Он существенно зависит от равенства частот волнового воздействия и пульсовой волны.

Как показывают расчеты, в общем случае, когда специальные резонансные соотношения между ω_p и ω_a не выполняются, при $\eta \neq 1$ изменение средней скорости микроциркуляции все же происходит и составляет более 10%. Здесь действует нерезонансный механизм изменения микроциркуляции, обусловленный нелинейной связью между объемами проницаемых элементов и их проницаемостью.

С целью получения приближенных функциональных зависимостей для оценки влияния волнового воздействия на интенсивность фильтрации рассмотрим квазиодномерную задачу. Ограничимся случаем, когда изменением продольной скорости жидкости вдоль оси капилляра можно пренебречь. Уравнения преобразуются следующим образом:

$$P'' + \frac{1}{r}P' = 0, \quad \lambda \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\alpha(P|_{r=R} - p),$$

$$P(R_e) = p_e,$$

где R_e – радиус тканевого цилиндра, p_e – давление на внешней границе тканевого цилиндра, включающее онкотическую составляющую.

Принимаем, что давление во внутренних точках капилляра меняется во времени также, как и на границе $p = p_0 + \gamma_p p_0 \sin(\omega_p t)$, где $p_0 = p_0(x)$ – исходное распределение давления в капилляре, близкое к линейному.

Волновое воздействие определяется соотношением (1). Принимая $\omega_a = k\omega_p$, $p_e = 0$, получаем для относительного (по отношению к величине потока без волновых воздействий) изменения среднего по времени односторонне направленного фильтрационного потока жидкости (совпадающего с изменением среднего потока микроцир-

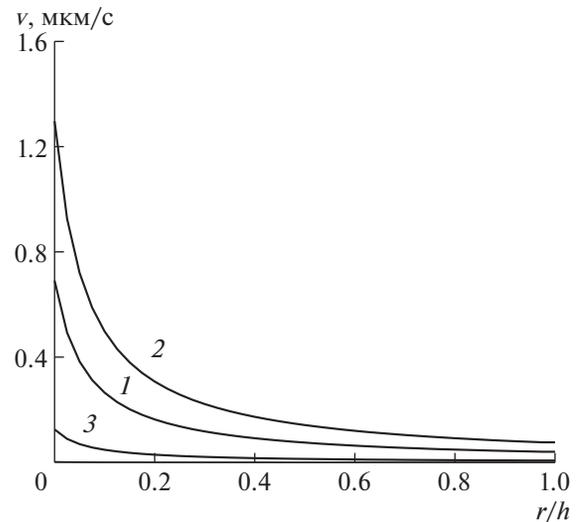


Рис. 3. Поперечные профили нормальной компоненты скорости в тканевом пространстве в различные моменты времени: $t = 0$ (1), $t = T/4$ (2), $t = 3T/4$ (3).

куляции) через стенку капилляра при волновом воздействии следующее выражение: $\bar{q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$,

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \gamma_a \sin(k\omega_p t + \varphi))^n \gamma_p \sin(\omega_p t) dt,$$

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (1 + \gamma_a \sin(k\omega_p t + \varphi))^n dt.$$

Первое слагаемое описывает резонансную часть изменения среднего потока микроциркуляции. Оно отлично от нуля только при определенных (резонансных) значениях параметра k . Второе слагаемое описывает нерезонансную часть изменения среднего потока микроциркуляции.

На рис. 4 показана амплитудно-частотная характеристика относительного потока микроциркуляции. Как видим, изменение микроциркуляционного потока при всех частотах, кроме тех, которым соответствуют $k = 1$ и $k = 1/2$, примерно на 13% превосходит исходный поток. В резонансных условиях, при $k = 1$ и $k = 1/2$, увеличение потока микроциркуляции имеет место на 25 и 15% соответственно.

Изменение микроциркуляционного потока существенно зависит от параметра η , характеризующего нелинейность зависимости проницаемости от волновых воздействий. Так, для $\eta = 3$ нерезонансный микроциркуляционный поток превосходит исходный на 37.5% (при $\gamma_a = 0.5$). С ростом η микроциркуляционный поток возрастает еще больше.

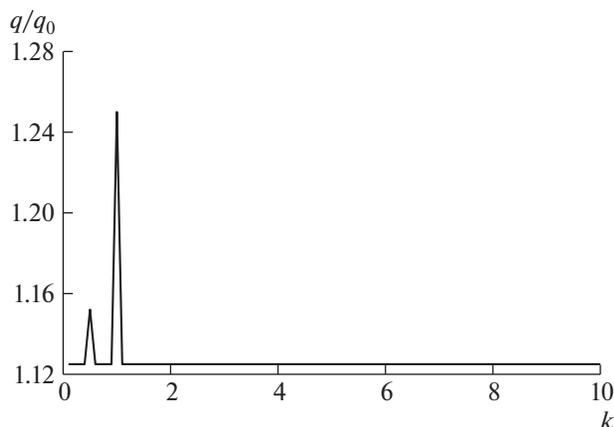


Рис. 4. Зависимость относительного потока микроциркуляции \bar{q} от относительной частоты волнового воздействия k , $\eta = 2$, $\varphi_p = 0$, $\varphi_a = \pi/3$, $\gamma_p = \gamma_a = 0.5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение подчеркнем основной вывод.

Основным резонансным механизмом интенсификации фильтрации, микроциркуляции и транскапиллярного обмена в данном случае являются синфазное повышение давления в капилляре вследствие пульсовой волны и увеличение проницаемости благодаря колебаниям в окружающей капилляр среде вследствие внешнего волнового воздействия. Величина увеличения скорости микроциркуляции существенно зависит при действии указанного механизма от сдвига фаз между колебаниями давления в капилляре и колебаниями пористых элементов.

Нерезонансный механизм обусловлен несимметричными во времени колебаниями проницаемости, благодаря чему увеличение потока жидкости, поступившей из капилляра в пористую ткань, по сравнению со стационарным режимом за ту часть периода колебательных воздействий, когда проницаемость повышена, превосходит уменьшение потока жидкости, поступившей из капилляра в пористую ткань, по сравнению со стационарным режимом, за оставшееся до конца периода воздействий время, когда проницаемость уменьшена. Эта несимметричность определяется нелинейностью зависимости проницаемости от изменяющегося объема окружающей капилляр пористой среды и проницаемой стенки капилляра при его колебаниях. Он реализуется при $\eta > 1$. При $\eta < 1$ действие этого механизма приводит к уменьшению средней скорости фильтрации. При $\eta = 1$ (в линейном случае) этот механизм не действует.

Практическая реализация установленного эффекта для нужд медицины возможна с помощью разработанных в последние годы гидродинамиче-

ских массажеров [15], которые к настоящему времени уже запатентованы [16–18] и проходят клинические испытания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по программе ФНИ РФ за 2021–2030 гг., тема 1-13ф (FFGU-2021-0009), “Развитие фундаментальных основ волнового машиностроения. Научные основы волновых технологий получения композитных материалов с уникальными свойствами и новых средств функциональной диагностики”, номер госрегистрации 121121700339-6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф., Ревизников Д.Л., Рогоза А.Н., Слостушенский Ю.В., Украинский Л.Е. Анализ и диагностика сердечно-сосудистой системы человека на принципах нелинейной волновой механики // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 2. С. 96–103.
2. Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. The Mechanics of the Circulation. Second Edition, 2012.
3. Bagayev S.N., Fomin Yu.N., Orlov V.A., Panov S.V., Zakharov V.N., Metyolkin M.G. Investigation of Transcapillary Exchange by the Laser Method // Laser Physics. 2005. V. 15. № 9. P. 1292–1298.
4. Bagayev S.N., Zakharov V.N., Orlov V.A., Panov S.V., Fomin Yu.N. Investigation of Physical Mechanisms of Blood Microcirculation and Transcapillary Exchange by Using the Phase Sensitive Laser Method // Rus. J. Biomechanics. 2006. V. 10. № 3. P. 21–38.
5. Подтаев С.Ю., Мизева И.А., Смирнова Е.Н. Диагностика функционального состояния микроциркуляции на основе термометрии высокого разрешения // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2012. № 3–4. С. 11–19.
6. Жарких Е.В., Маковик И.Н., Потапова Е.В., Дрёмин В.В., Жеребцов Е.А., Жеребцова А.И., Дунаев А.В., Сидоров В.В., Крупаткин А.И. Оптическая неинвазивная диагностика функционального состояния микроциркуляторного русла пациентов с нарушением периферической микрогемодинамики // Регионарное кровообращение и микроциркуляция. 2018. № 17(3). С. 23–32.
7. Крупаткин А.И., Сидоров В.В. Функциональная диагностика состояния микроциркуляторно-тканевых систем: Колебания, информация, нелинейность. Руководство для врачей. URSS. 2022. 496 с.
8. Шабрыкина Н.С. Математическое моделирование микроциркуляторных процессов // Российский журнал биомеханики. 2005. Т. 9. № 3. С. 70–78.
9. Шабрыкина Н.С. Моделирование микроциркуляторных процессов: нестационарное течение жидкости в ткани // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7. Вып. 1. С. 69–73.
10. Хмель Т.А., Федоров А.В., Фомин В.М., Орлов В.А. Моделирование процессов микрогемодинамики с учетом пульсовых колебаний давления // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 2. С. 92–102.

11. Хмель Т.А., Федоров А.В. Моделирование пульсирующих течений в кровеносных капиллярах // Матем. биология и биоинформ. 2013. Т. 8. Вып. 1. С. 1–11.
12. Моисеева И.Н. Транскапиллярная фильтрация жидкости: модель с сосредоточенными параметрами // Биофизика. 1984. Т. XXIX. Вып. 1. С. 126–129.
13. Регирер С.А., Шадрин Н.Х. Математическое описание движения крови в микрососудистом модуле скелетной мышцы // Биофизика. 1994. Т. 39. № 1. С. 107–115.
14. Мозохина А.С., Мухин С.И. О квазиодномерном течении жидкости с анизотропной вязкостью в сокращающемся сосуде // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 956–962.
15. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Корнеев А.С., Украинский Л.Е. Гидродинамические генераторы колебаний – новый тип устройств для осуществления периодических воздействий // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 501. С. 79–83.
16. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Ганиев С.Р., Касилов В.П., Украинский Л.Е. Гидроволновой массажер для физиотерапевтического лечения заболеваний мочевого пузыря / Патент РФ на полезную модель 189154, выдан 05.02.2019, опубликован 15.05.2019, бюллетень № 14.
17. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Ганиев С.Р., Корнеев А.С., Украинский Л.Е. Гидроволновой массажер для лечения сексуального расстройства. Патент РФ на полезную модель 189155, выдан 15.05.2019, опубликован 15.05.2019, бюллетень № 14.
18. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Корнеев А.С., Украинский Л.Е. Волновое устройство для гидромассажа. Патент РФ на полезную модель 210193 выдан 31.03.2022, опубликован 31.03.2022, бюл. № 10.

THE WAVE MECHANISMS OF MICROCIRCULATION AND TRANSCAPILLARY EXCHANGE INTENSIFICATION

**E. I. Veliev^a, Academician of the RAS R. F. Ganiev^b, Academician of the RAS A. A. Kubatiev^c,
D. L. Reviznikov^b, and Corresponding Member of the RAS L. E. Ukrainsky^b**

^a Botkin Hospital, Moscow, Russia

^b Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^c Research Institute of General Pathology and Pathophysiology, Moscow, Russia

The influence of outside wave impact on filtration of fluids from capillaries into environment porous media and back is considered. Two mechanisms of filtration acceleration had installed. The first of them caused with changing the permeability of environment porous media and surface layer of capillary due to wave impact. The second caused by synchronous and in-phase boost of pressure into capillary and permeability environment porous media. It occurs in resonance case only. Both of those effects can be used for intensification of transcapillary exchange in medicine.

Keywords: microcirculation, transcapillary exchange, porous saturated with liquid media, permeability, Darcy equations, outside periodic impacts

УДК 669.14:536.424

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ПОВОРОТ ПРИ МАРТЕНСИТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ И РАССЕЙАНИЕ ТЕКСТУРЫ МАРТЕНСИТА

© 2023 г. В. М. Гундырев^{1,*}, В. И. Зельдович^{1,**}, академик РАН В. М. Счастливцев^{1,***}Поступило 15.06.2022 г.
После доработки 15.06.2022 г.
Принято к публикации 10.10.2022 г.

В нашей кристаллографической теории мартенситного превращения появляется новая характеристика мартенситного превращения – релаксационный поворот, которого не было в общепринятой феноменологической теории мартенситного превращения. Релаксационный поворот необходим для получения инвариантной плоскости. Рассчитанный угол релаксационного поворота для сплавов железа с нетермоупругим мартенситом составляет 1.75–1.85 градуса, для термоупругих сплавов Гейслера с многослойным мартенситом – 0.19–0.36 градуса. Релаксационный поворот приводит к рассеянию текстуры мартенсита. Выполнено измерение углов рассеяния единичных рентгеновских отражений мартенсита в разных сплавах и установлено, что угол рассеяния соответствует углу релаксационного поворота. Этот результат показывает, что наша кристаллографическая теория мартенситного превращения описывает реальный механизм мартенситного превращения.

Ключевые слова: кристаллографическая теория мартенситного превращения, релаксационный поворот, рассеяние текстуры мартенсита

DOI: 10.31857/S2686740023010066, EDN: UNGUEE

В общепринятой феноменологической теории мартенситного превращения (ФТМП) деформация формы (макроскопический сдвиг) P_1 записывается как произведение трех матриц:

$$P_1 = RPВ, \quad (1)$$

где B – чистая деформация решетки аустенита для получения решетки мартенсита (деформация Бейна), P – деформация мартенсита при инвариантной решетке, R – поворот мартенситной пластины [1, 2]. В предложенной нами [3] кристаллографической теории мартенситного превращения (КТМП) для описания деформации решетки взят реальный сдвиг Γ вместо гипотетической деформации Бейна. Сдвиг происходит по плоскости двойникования в направлении двойникования решетки аустенита и совпадает с первым сдвигом в двухсдвиговой схеме образования мартенсита Курдюмова–Закса [4]. Для получения решетки мартенсита сдвиг необходимо дополнить деформацией сжатия–растяжения B_1 вдоль трех

взаимно перпендикулярных направлений, образованных направлением сдвига, нормалью к плоскости сдвига и поперечным направлением. В КТМП деформация формы записывается как произведение четырех матриц:

$$P_1 = R_1PB_1\Gamma, \quad (2)$$

где произведение $B_1\Gamma$ – деформация решетки, P – деформация при инвариантной решетке, такая же, как в ФТМП, R_1 – относительно небольшой поворот кристалла мартенсита, по сравнению с поворотом R в ФТМП, для получения инвариантной плоскости. Этот поворот мы назвали релаксационным [3].

В ФТМП деформацию решетки при мартенситном превращении разделяют на чистую деформацию B (деформацию Бейна) и вращение R . Чистая деформация решетки вычисляется из параметров решеток аустенита и мартенсита. Вращение R мартенситной пластины определяется из условия получения инвариантной плоскости. При расчетах по ФТМП угол ϕ поворота R мартенситной пластины получается достаточно большим. Например, для сплава Fe-31%Ni он равен 9.8 градуса [3]. Такой большой угол указывает на то, что деформация решетки при мартенситном превращении идет сдвиговым путем. Это обстоятельство учитывается в КТМП, и поэтому для деформации решетки используется сдвиг Γ . В этом случае угол ϕ поворота R_1 равен 1.75 градуса [3]. Как видим,

¹ Институт физики металлов им. М.Н. Михеева
Уральского отделения Российской академии наук,
Екатеринбург, Россия

*E-mail: gundyrev@imp.uran.ru

**E-mail: zeldovich@imp.uran.ru

***E-mail: schastliv@imp.uran.ru

Таблица 1. Значения сдвигов и угла релаксационного поворота для сплавов с термоупругим (сплавы 1–4) и нетермоупругим (сплавы 5–7) мартенситным превращением

№	1	2	3	4	5	6	7
Сплав	Ni ₅₁ Mn ₂₄ Ga ₂₅	Ni ₆₃ Al ₃₇	Ni ₄₇ Mn ₄₂ In ₁₁	Ti ₄₉ Ni ₅₁	Fe–1.75C	Fe–31Ni	37ХН3А
g ₀	0.133	0.159	0.185	0.177	0.275	0.354	0.354
g	0.092	0.111	0.126	0.070	0.221	0.272	0.276
g ₁	0.092	0.107	0.127	0.141	0.172	0.226	0.225
φ, град	0.19	0.28	0.36	1.04	1.56	1.75	1.85

g₀ – величина сдвига при деформации Г решетки аустенита (Курдюмовский сдвиг), g – величина сдвига при деформации Р мартенсита, g₁ – величина сдвига при деформации формы Р₁, φ – угол релаксационного поворота R₁ пластины мартенсита.

угол φ поворота мартенситного кристалла R₁ в КТМП много меньше, чем R в ФТМП, но, тем не менее, он не равен нулю. Отсюда следует, что для получения инвариантной плоскости при мартенситном превращении требуется дополнительное вращение мартенситной пластины R₁. Таким образом, в КТМП появляется новая характеристика мартенситного превращения – релаксационный поворот, которой не было в общепринятой ФТМП.

Цель настоящей работы – сравнить угол релаксационного поворота в разных сплавах, установить факторы, влияющие на величину этого угла, а также получить экспериментальное подтверждение реальности описания механизма мартенситного превращения с помощью КТМП. В работе впервые показано, что угол рассеяния текстуры единичных рентгеновских отражений мартенсита в разных сплавах соответствует рассчитанному углу релаксационного поворота.

В табл. 1 представлены сводные данные значений сдвигов и угла релаксационного поворота, полученные нами в КТМП для сплавов с термоупругим и нетермоупругим мартенситным превращением [3, 5, 6].

Из табл. 1 видно, что при постепенном увеличении значений деформации решетки g₀ постепенно увеличивается деформация макросдвига g₁. Но угол релаксационного поворота φ увеличивается скачкообразно при переходе от термоупругих сплавов (1–3) к нетермоупругим с многослойным мартенситом (5–7). Никелид титана (сплав 4) занимает промежуточное положение. Значит, величина угла релаксационного поворота зависит от деформации сдвига, но, главным образом, от типа мартенситного перехода. Этот результат важен, так как показывает, что при больших значениях (более 1.5 градуса) угла релаксационного поворота исчезает термоупругость, значит, наруша-

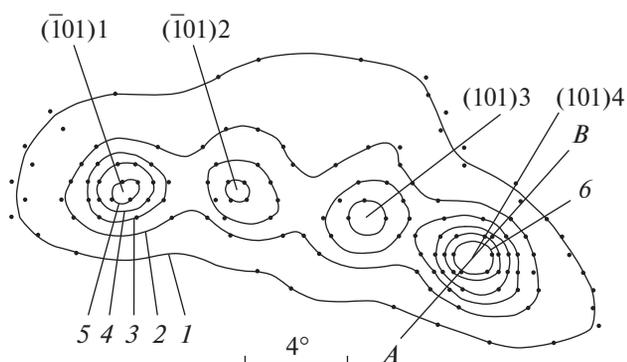


Рис. 1. Фрагмент экспериментальной полюсной фигуры {110} мартенсита с текстурными максимумами (101)1, (101)2, (101)3, (101)4. Цифры после индексов указывают номера ориентировок, сталь 37ХН3А.

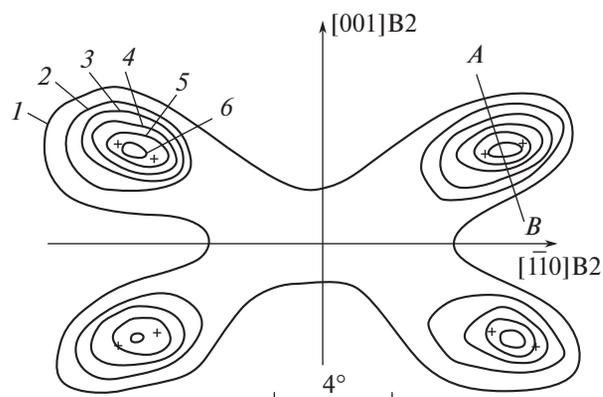


Рис. 2. Распределение полюсов (111) и (111) B19'-мартенсита на месте полюса (110) B2-фазы, сплав Ti₄₉Ni₅₁. Идеальные ориентировки показаны крестиками.

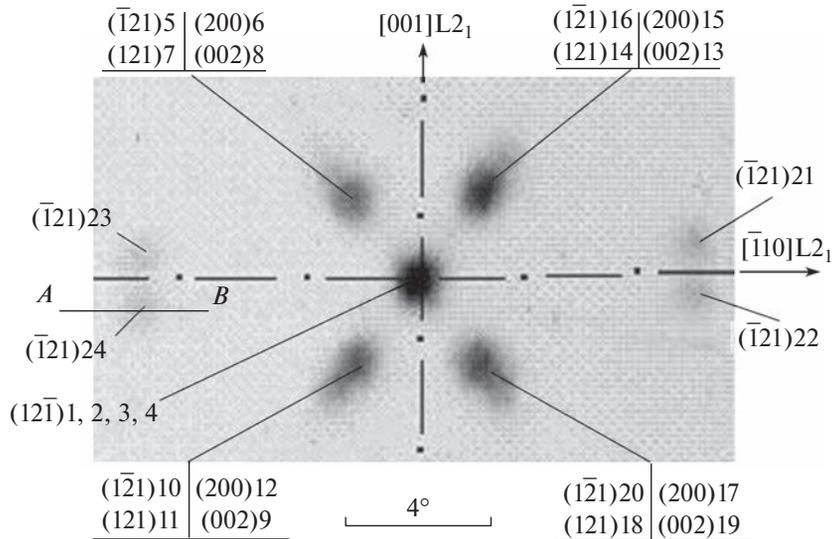


Рис. 3. Рентгеновский снимок текстурных максимумов мартенсита, полученных в окрестностях полюса (220)L2₁. Цифры после индексов соответствуют номерам эквивалентных ориентировок. Сплав Ni₄₇Mn₄₂In₁₁.

ются пути обратимого перемещения атомов при обратном мартенситном превращении [4, 7].

Релаксационный поворот мартенситной пластины происходит в конце мартенситного превращения, когда мартенситная пластина уже получила наклеп от деформации мартенсита при инвариантной решетке в виде системы двойников. Для того чтобы повернуть мартенситную пластину с сохранением ее формы, необходимо задействовать несколько систем скольжения или двойникования. Однако легких систем скольжения или двойникования в мартенситной пластине уже нет из-за структурных дефектов, возник-

ших при деформации **P**. Поэтому релаксационный поворот кристалла мартенсита создает упругие напряжения, которые приводят к упругим изгибам решетки мартенсита. Изгиб кристаллографических плоскостей вызовет рассеяние текстурных максимумов мартенсита. Чем больше угол релаксационного поворота, тем больше изгиб плоскостей и рассеяние текстуры мартенситных пиков. По всей видимости, при значениях угла релаксационного поворота около 1.5 градуса и более упругая деформация сопровождается пластической. Можно предположить, что остаточные упругие напряжения второго рода и рассеяние текстуры в мартенсите являются результатом релаксационного поворота мартенситных пластинок.

Рассеяние текстуры было исследовано по полюсным фигурам и по рефлексам на лауэграммах. На рис. 1 и 2 представлены фрагменты полюсных фигур мартенсита для монокристаллов стали 37ХН3А и сплава Ti₄₉Ni₅₁.

Видно, что рассеяние текстуры в стали больше, чем в никелиде титана. В сплаве Ni₄₇Mn₄₂In₁₁ с модулированной структурой мартенсита рассеяние текстуры было измерено по лауэграмме. На рис. 3 представлен фрагмент лауэграммы, полученной с одного зерна закаленного образца сплава Ni₄₇Mn₄₂In₁₁ [6].

Видно, что рассеяние рефлексов еще меньше, чем в никелиде титана. Лауэграммы, приведенные в [8, 9] для сплавов Ni-37.0at%Al и Ni-Mn-Ga, имеют аналогичное небольшое рассеяние рефлексов.

Для сопоставления величины угла релаксационного поворота с рассеянием единичных ре-

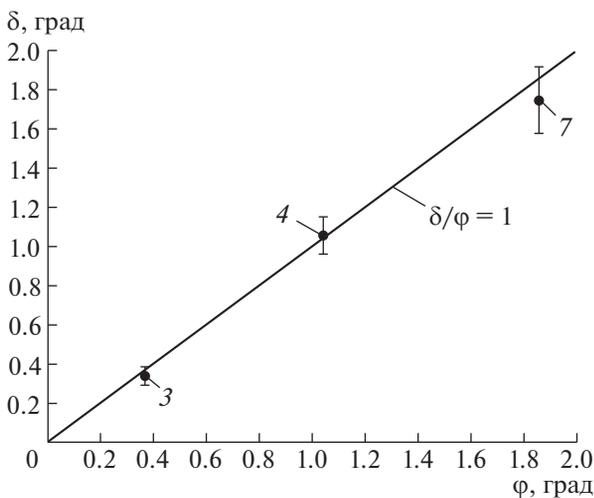


Рис. 4. Зависимость рассеяния текстуры мартенсита δ от величины угла релаксационного поворота φ . Цифры указывают номер сплава из табл. 1.

Таблица 2. Углы релаксационного поворота φ и углы рассеяния текстуры δ

Сплав	Ni ₄₇ Mn ₄₂ In ₁₁	Ti ₄₉ Ni ₅₁	37ХН3А
φ , град	0.36	1.04	1.85
δ , град	0.33	1.06	1.74

флексов мартенсита была определена полуширина рефлексов на половине высоты. Был измерен профиль интенсивности рефлексов вдоль линий АВ, указанных на рисунках; затем учтено инструментальное уширение рефлексов и выполнен расчет физического уширения по стандартной методике [10]. В табл. 2 и на рис. 4 представлены данные сравнения углов релаксационного поворота φ и углов рассеяния текстуры δ . В пределах погрешности 10% эти углы равны.

Полученный результат важен, так как, во-первых, является экспериментальным подтверждением расчетов по КТМП, а во-вторых, показывает, что расчетным путем по КТМП можно оценить рассеяние текстуры в мартенсите.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены в рамках государственного задания по темам “Структура” г.р. № 122021000033-2 и “Давление” г.р. № 122021000032-5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wechsler M.S., Lieberman D.S., Read T.A.* On the Theory of the Formation of Martensite // *Trans. AIME.* 1953. V. 197. P. 1503–1515.
2. *Wayman C.M.* Introduction to the Crystallography of Martensitic Transformations. N.Y.–L., 1964. 193 p.
3. *Гундырев В.М., Зельдович В.И., Счастливцев В.М.* Кристаллографический анализ и механизм мартенситного превращения в сплавах железа // *ФММ.* 2020. Т. 121. № 11. С. 1142–1161.
4. *Курдюмов Г.В., Утевский Л.М., Энтин Р.И.* Превращения в железе и стали. М.: Наука, 1977. 238 с.
5. *Гундырев В.М., Зельдович В.И.* Кристаллографический анализ и механизм термоупругого мартенситного превращения в сплавах Гейслера с семислойной структурой мартенсита // *ФММ.* 2022. Т. 123. № 1. С. 27–34.
6. *Гундырев В.М., Калетина Ю.В.* Кристаллографический анализ и механизм мартенситного превращения в сплаве Гейслера Ni₄₇Mn₄₂In₁₁ // *ФММ.* 2019. Т. 120. № 11. С. 1193–1199.
7. *Лободюк В.А., Эстрин Э.И.* Мартенситные превращения. М.: Физматлит, 2009. 351 с.
8. *Murakami Y., Otsuka K., Hanada S., Watanabe S.* Self-accommodation and morphology of 14M (7R) martensites in an Ni-37.0at%Al alloy // *Materials Science and Engineering.* 1994. A189. P. 191–199.
9. *Martynov V.V.* X-ray diffraction study of thermally and stress-induced phase transformations in single crystalline Ni–Mn–Ga alloys // *J. Phys. IV (Paris).* 1995. V. 5. P. 8–91.
10. *Тейлор А.* Рентгеновская металлография. М.: Металлургия, 1965. 663 с.

RELAXATION ROTATION DURING MARTENSITIC TRANSFORMATION AND SCATTERING OF MARTENSITE TEXTURE

V. M. Gundyrev^a, V. I. Zel'dovich^a, and Academician of the RAS V. M. Schastlivtsev^a

^a M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

In the our crystallographic theory of martensitic transformation, a new characteristic of martensitic transformation appears – a relaxation rotation, which was not in the generally accepted phenomenological theory of martensitic transformation. The relaxation rotation is necessary to obtain an invariant plane. The calculated angle of relaxation rotation for iron alloys with non-thermoelastic martensite is 1.75–1.85 degrees, for thermoelastic Geisler alloys with multilayer martensite 0.19–0.36 degrees. The relaxation rotation leads to the scattering of the texture of martensite. The scattering angles of single X-ray reflections of martensite in different alloys were measured and it was found that the scattering angle corresponds to the angle of relaxation rotation. This result shows that the our crystallographic theory of martensitic transformation describes the real mechanism of martensitic transformation.

Keywords: crystallographic theory of martensitic transformation, relaxation rotation, scattering of martensite texture

УДК 535.376; 537.5

СПЕЦИФИКА ИМПУЛЬСНОЙ КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ НАНОСЕКУНДНОЙ И СУБНАНОСЕКУНДНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

© 2023 г. Академик РАН М. И. Яландин¹, В. И. Соломонов^{1,*}, А. В. Спирина¹, С. А. Шунайлов¹, К. А. Шарыпов¹, А. С. Макарова¹, А. И. Липчак¹

Поступило 06.09.2022 г.

После доработки 06.09.2022 г.

Принято к публикации 11.10.2022 г.

Представлены результаты сравнительных исследований параметров импульсной катодолюминесценции кристаллов и керамики, возбуждаемой пучками убегающих электронов длительностью 10–12 пс и пучками электронов длительностью 2 нс, генерируемыми в вакуумном диоде. Показано, что спектр люминесценции и кинетика затухания полос в обоих случаях совпадают. При возбуждении пучком убегающих электронов наблюдается меньшая интенсивность свечения, а в некоторых случаях обнаружено наличие задержки появления люминесценции относительно начала действия электронного пучка. Механизм появления задержки при возбуждении пучком убегающих электронов связан с процессом разгорания люминесценции.

Ключевые слова: убегающие электроны, кристалл, керамика, люминесценция, спектр, кинетика

DOI: 10.31857/S2686740023010121, **EDN:** UNZTLK

В настоящее время имеется много работ [1–3], посвященных изучению импульсной катодолюминесценции (ИКЛ). Она отличается от люминесценции, возбуждаемой другими способами, относительно высокой яркостью и информативностью спектра, а также наличием специфической кинетики излучения, проявляющейся в возможности регистрации не только спада свечения, но и процесса его возникновения. ИКЛ обычно возбуждают при воздействии на вещество электронного пучка наносекундной длительности (1–20 нс) с энергией электронов порядка 100–200 кэВ и плотности тока 100–200 А/см². Такие пучки электронов генерируются достаточно сложными устройствами в вакуумных трубках с использованием эффекта взрывной эмиссии электронов [4, 5].

В последнее время достигнут значительный успех в генерации пучков убегающих электронов в газовом промежутке [6, 7]. Эти электроны эмитируются с границы прикатодного плазменного слоя в результате автоэмиссии из микровыступов кромки катода, возле которой усилено электрическое поле. Если напряженность этого поля

больше некоторого критического значения, а прирост энергии электронов при ускорении полем между столкновениями с молекулами превышает ионизационные потери, то эти электроны переходят в режим убегания. Такой режим функционирует в течение единиц-десятков пикосекунд, до тех пор, пока за счет расширения плазмы электрическое поле на границе плазменного слоя у катода не станет меньше критического. При этом ток убегающих электронов обрывается.

Возможность использования пучков убегающих электронов для возбуждения ИКЛ показана в ряде работ [8–10]. В работах [9, 10] для возбуждения люминесценции использовались пучки убегающих электронов длительностью 0.1 и 0.25 нс, генерируемые в газовом диоде, заполненном гелием до давления 60 и 30 торр соответственно. Максимальный ток пучка составлял 100 А/см², а энергия электронов до 300 кэВ. В этих работах показано, что при возбуждении такими пучками кристаллов Nd:YAG, сподумена и алмаза спектр люминесценции в диапазоне 200–800 нм идентичен спектру ИКЛ, возбуждаемой электронным пучком длительностью 2–10 нс. При исследовании кинетики обнаружено [9], что полосы люминесценции Nd:YAG появлялись приблизительно на 10 нс позже электронного пучка. В сподумене и алмазе люминесценция появлялась без задержки, а затем спадала с характерным временем 4.7–5 нс в сподумене [9] и 9–14 нс в алмазе [10].

¹ Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

*E-mail: plasma@iep.uran.ru

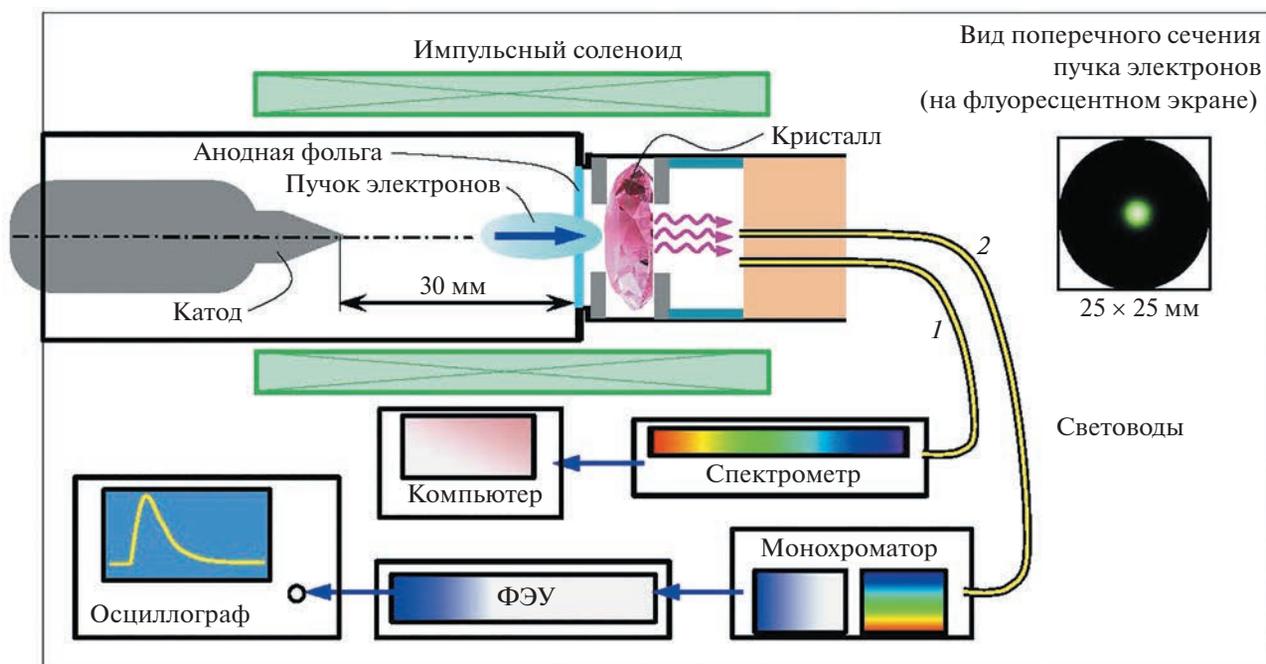


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки. Вверху справа приведено свечение люминесцирующего экрана под действием электронного пучка.

В [8] с помощью ФЭУ, чувствительным в интервале 380–620 нм, исследовалась кинетика люминесценции кальцита, шеелита, флюорита, алмаза и кимберлита при их облучении пучком убегающих электронов длительностью 0,25 нс (10^9 электронов в импульсе) при средней энергии электронов 270 кэВ. Авторы обнаружили люминесценцию всех указанных выше минералов в наносекундном интервале (0–50 нс) после электронного пучка. Во всех этих работах [8–10] при измерении кинетики спектральный интервал выделялся с помощью широкополосных светофильтров.

Для выяснения природы появления задержки свечения и наличия люминесценции в наносекундном интервале в настоящей работе используются два способа возбуждения – пучок убегающих электронов длительностью 10–12 пс, сфокусированный на объекте с помощью магнитного поля [5], и пучок электронов длительностью 2 нс. Сравнительные исследования позволят выявить особенности возбуждения импульсной катодолюминесценции.

ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 1 представлена схема выходного узла экспериментальной установки. Формирование высоковольтных импульсов с перестраиваемыми амплитудой и длительностью обеспечивалось

устройствами, описанными в [11–14]. Промежуток катод–анод заполнен воздухом атмосферного давления. По передающей линии на катод подавался высоковольтный импульс с амплитудой – 150 кВ и крутизной фронта до 10^{15} В/с. Длительность импульса, составляющая около 250 пс на полувысоте, достаточна для ускоренного движения до анода электронов, эмиссия которых возникает на фронте напряжения примерно при 80 кВ. Использовался конический стальной катод, удаленный на 30 мм от анодной алюминиевой фольги толщиной 15 мкм. Для создания однородного магнитного поля $B_z \approx 1$ Тл в области эмиссии и ускорения убегающих электронов применен импульсный соленоид, магнитное поле которого удерживает убегающие электроны вблизи оси системы [5].

Для визуализации электронного пучка [15] использовался листовый рентгеновский люминофор, устанавливаемый вместо анодной фольги. Временные параметры электронного пучка измерялись с помощью коллекторного датчика [16], устанавливаемого за анодной фольгой, и осциллографа Tektronix DPO73304D.

На рис. 2а представлены распределения заряда (кривая 1) и пиковой плотности тока (кривая 2) убегающих электронов по радиусу пучка, полученные в месте установки образцов при фиксированном значении магнитного поля $B_z \approx 1$ Тл. Примерно 90% заряда электронов сосредоточено в центральной области пучка, что иллюстрируется

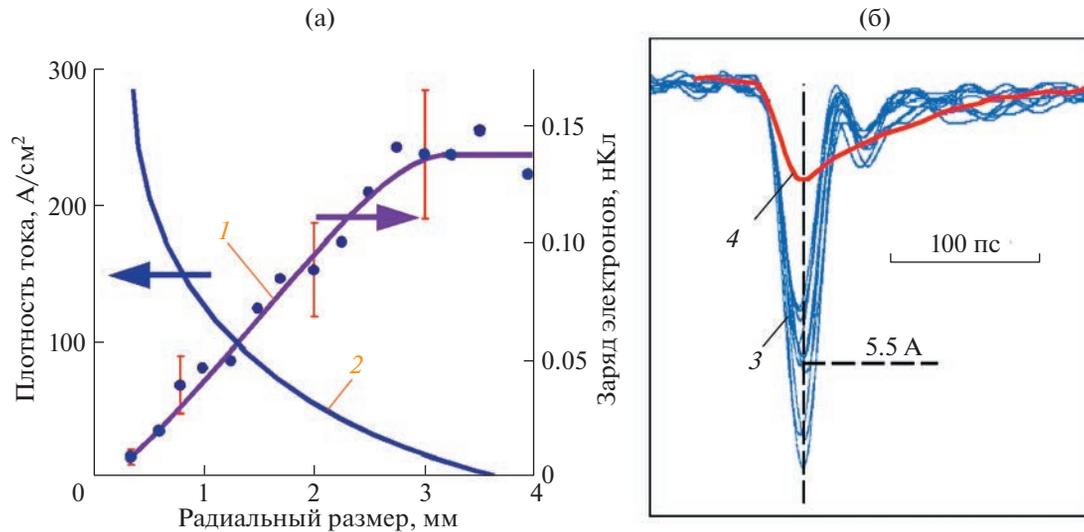


Рис. 2. а – Заряд (1) и пиковая плотность тока (2) пучка убегающих электронов, прошедших через коллиматоры с разными радиусами отверстий; б – импульсы тока убегающих электронов непосредственно на месте анодной фольги (3) и на расстоянии 6 см от нее (4).

свечением люминесцентного экрана (рис. 1, вставка). Осциллограммы тока пучка убегающих электронов, измеренные непосредственно на месте анодной фольги, приводятся на рис. 2б (серия кривых 3). Видно, что, несмотря на разброс по амплитуде, форма импульса тока электронов повторяется. Здесь же (рис. 2б, кривая 4) приводится импульс тока, измеренный на расстоянии 6 см от анодной фольги и смещенный по времени на 290 пс относительно кривых 3 (на рисунке пики этих токов представлены совмещенными по времени). Данный результат времяпролетных измерений указывает на присутствие в пучке электронов с энергией около 200 кэВ. Основная же доля убегающих электронов имеет меньшие энергии.

С учетом коррекции измеряемой длительности фронта импульса и переходной характеристики осциллографа (13 пс) [17], реальная длительность на полувысоте (FWHM) тока пучка убегающих электронов в области анодной фольги составляла $t_{e1} = 10\text{--}12$ пс, что совпадает с [16]. Таким образом, в зоне диаметром менее 0.7 мм плотность тока достигает величины $j_{e1} = 300$ А/см². В этом случае пиковая плотность мощности сгустка электронов равна $P_{e1} \approx 45$ МВт/см², но при этом его энергия невелика и составляет 0.22 мДж.

Для объективного сравнения параметров люминесценции, возбуждаемой пучком убегающих электронов, все люминесцентные исследования дополнительно проводились на установке КЛАВИ [18, 19] при возбуждении электронными пучками длительностью $t_{e2} = 2$ нс (FWHM), средней энергии электронов $\epsilon_{e2} = 170$ кэВ, плотности тока $j_{e2} = 130$ А/см² и плотности пиковой мощности

$P_{e2} \approx 22$ МВт/см², по порядку величины, близкой к P_{e1} . Это означает, что скорость генерации электронно-дырочных пар $G = P_e / (e \cdot d \cdot \epsilon_i)$ [1, 2] обоими пучками электронов в одних и тех же образцах приблизительно одинакова $G_1 \approx G_2 \approx 10^{27}$ см⁻³ с⁻¹. Близкими оказываются и характерные времена ионизации вещества обоими пучками $\tau_i \approx (G \cdot B)^{-1/2} \approx 3$ нс. Здесь e – заряд электрона, $d \approx 100$ мкм – средняя глубина проникновения инжектируемых электронов в вещество, $\epsilon_i \approx 20$ эВ – энергия ионизации вещества, $B \approx 10^{-10}$ см³ с⁻¹ – константа скорости квадратичной рекомбинации электронно-дырочных пар. Однако же максимальная концентрация электронно-дырочных пар $n_{ehm} \approx G \cdot t_e$, достигаемая в веществе при воздействии пучка убегающих электронов (10^{16} см⁻³), почти на два порядка меньше, чем для наносекундного пучка (10^{18} см⁻³).

В качестве объектов исследования использовались поликристаллические образцы (оптическая керамика) Nd:Y₂O₃ с содержанием оксида неодима 1 мол. %, неактивированные поликристаллы иттрий-алюминиевого граната (YAG) и активированные церием (Ce:YAG) с содержанием 0.5, 3 и 4 мол. % оксида церия и неодимом (Nd:YAG) с содержанием 1 мол. % оксида неодима. Также использовались монокристаллические образцы Nd:YAG, рубина (Cr:Al₂O₃) и сапфира (Ti:Al₂O₃). Толщина всех образцов не превышала 2–3 мм. Выбор данных образцов обусловлен хорошей изученностью их люминесцентных свойств при разных способах возбуждения [1, 2, 20].

В силу технических причин на первой установке образцы устанавливались на оси пучка убегаю-

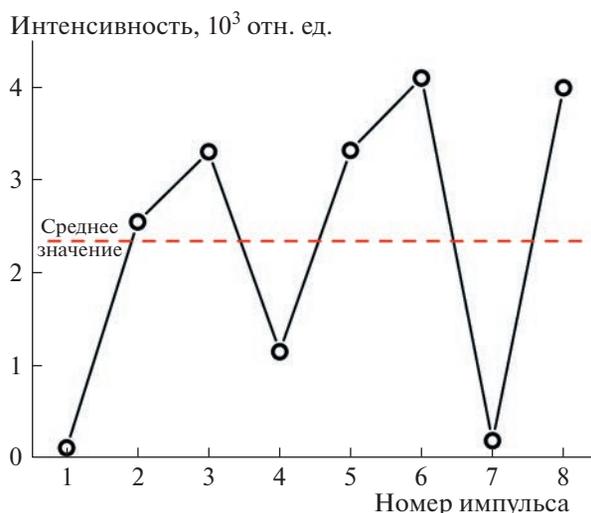


Рис. 3. Разброс интенсивности полосы люминесценции ионов хрома при 694.3 нм в монокристалле рубина от импульса к импульсу при возбуждении уходящими электронами.

щих электронов на расстоянии 6 мм от выходной фольги, а люминесценция регистрировалась “на просвет”, т.е. со стороны, противоположной облучаемой поверхности образца (рис. 1), так же, как и в [9, 10]. На второй установке люминесценция регистрировалась “на отражение” — со стороны облучаемой поверхности образца под углом 45° к ее нормали.

Для измерения люминесцентных параметров на обеих установках использовалась одна и та же фотоспектрометрическая аппаратура. Посредством многожильного кварцевого световода длиной 1.5 м световой поток люминесценции передавался на регистрирующую аппаратуру (рис. 1). Для получения интегральных по времени спектров люминесценции в диапазоне 200–850 нм использовались спектрометры с фотоприемниками на основе ПЗС-линеек с оптическими усилителями, совмещенными с персональным компьютером [18, 19]. Для регистрации кинетики использовались фотоэлектронные умножители ФЭУ-100 и ФЭУ-62, совмещенные с цифровым осциллографом Tektronix DPO4034В с полосой пропускания 350 МГц. При этом спектральный участок шириной 4 нм отдельных полос люминесценции в диапазоне 200–1200 нм выделялся посредством монохроматора МДР-41. При кинетических измерениях запуск осциллографа осуществлялся сигналом с делителя напряжения, формирующего электронный пучок. Сигнал подавался на вход первого канала осциллографа посредством 50-омного коаксиального кабеля длиной 3 м, поэтому задержка входящего сигнала относительно импульса напряжения с учетом аттенуаторов составляла 16 нс. На второй канал осциллографа подавался сигнал с ФЭУ. Этот сигнал задержан относитель-

но импульса люминесценции образца на 8.5 нс за счет прохождения в световоде и монохроматоре, а также передачи его на вход осциллографа коаксиальным кабелем длиной 1.5 м (задержка 7.5 нс). Таким образом, схема передачи обеспечивала одинаковую задержку сигналов люминесценции и напряжения на входах осциллографа. На обеих установках измерения проводились на воздухе при комнатной температуре образцов.

Для снижения уровня помех, обусловленных электромагнитной наводкой при генерации электронного пучка, измерение кинетики люминесценции проводились при нагрузке ФЭУ на входное сопротивление осциллографа $R = 1$ МОм. Такой способ позволяет получить значительно усиленные сигналы с ФЭУ, но при этом измеряется напряжение

$$U_R = R \frac{\exp(-t/\tau_a)}{\tau_a} \int_0^t I_p(t') \exp(t'/\tau_a) dt', \quad (1)$$

представляющее собой свертку фототока ФЭУ I_p и аппаратной функции измерительной цепи

$$f(t, t') = \exp[-(t - t')/\tau_a], \quad (2)$$

где $(t - t')$ — временной промежуток между моментом интегрирования t и текущим значением фототока t' в промежутке $0-t$, $\tau_a = RC$ — характерное время разряда емкости или аппаратное время измерительной цепи. В нашем случае $\tau_a = 169 \pm 2$ мкс для ФЭУ-100 и 172 ± 2 мкс для ФЭУ-62. Сигнал фототока находился путем деконволюции свертки (1), уравнение которой удобно записать в следующем виде:

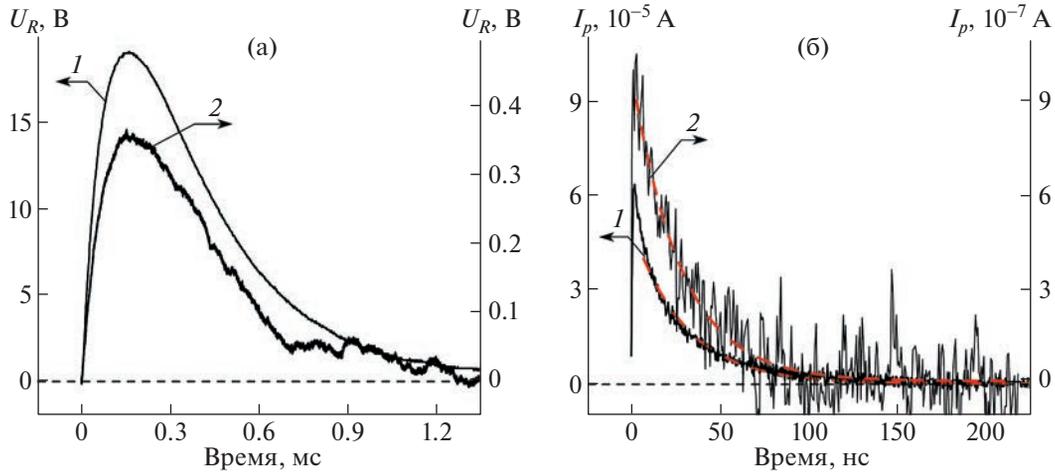


Рис. 4. Поведение кинетики линии люминесценции неодима при 885 нм в монокристалле Nd:YAG “на отражение” на установке КЛАВИ (1) и “на просвет” при возбуждении убегающими электронами (2): а – измеренная свертка фототока, б – деконволюция свертки (фототок).

$$I_p = \frac{\tau_a}{R} \left(\frac{dU_R}{dt} + \frac{U_R}{\tau_a} \right). \quad (3)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

При регистрации интегрирующими по времени фотоприемниками спектры люминесценции исследованных образцов, возбуждаемой убегающими электронами на первой установке, оказались качественно подобными спектрам, измеренным на установке КЛАВИ [1, 2, 20], так же, как и в [8, 9]. Особенности спектров люминесценции, возбуждаемой пучками убегающих электронов, являются меньшая интенсивность всех полос спектра и повышенный разброс их значений от импульса к импульсу (рис. 3), обусловленный большей нестабильностью амплитуды тока пучка убегающих электронов.

Кроме того, при регистрации спектра люминесценции “на просвет” на установке с убегающими электронами наблюдается перераспределение интенсивностей спектральных компонент во внутрицентровых полосах люминесценции относительно спектров, зарегистрированных “на отражение” на установке КЛАВИ. А именно, наблюдается заметное снижение интенсивностей компонент, для которых оптические переходы заканчиваются на основном уровне центра. Это характерно для полос переходов ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{15/2-9/2}$ в Nd:YAG и Nd:Y₂O₃, в которых ослабленными являются коротковолновые крылья (869–875 нм) полосы перехода ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ иона Nd³⁺. Полоса иона титана Ti³⁺ при 720 нм хорошо проявляется в сапфире “на отражение” на установке КЛАВИ,

но отсутствует в спектре “на просвет” при возбуждении убегающими электронами. Это явление связано с самопоглощением полос при прохождении излучения сквозь толщу образца.

Кинетика интенсивностей полос люминесценции, снятых на обеих установках, также оказалась подобной (рис. 4). В первом приближении кривые деконволюции всех полос хорошо аппроксимируются экспоненциальными кривыми (рис. 4б, красные пунктирные линии). Времена затухания люминесценции при возбуждении убегающими электронами отличаются от измеренных на установке КЛАВИ в среднем на 10–15%. В частности, для линии люминесценции иона неодима при 885 нм в Nd:YAG (рис. 4б) время жизни уровня составило 166 и 177 мкс при возбуждении субнаносекундным и наносекундным пучком электронов соответственно. Это расхождение обусловлено, в основном, повышенной погрешностью измерения кинетики при возбуждении убегающими электронами из-за более низкой интенсивности люминесценции и возрастания отношения шум/сигнал. К тому же для внутрицентровых полос на переходах, заканчивающихся на основном состоянии, в кривых затухания проявляется немонотонность спада интенсивностей (рис. 4а, кривая 2).

При кинетических исследованиях обнаружено, что полосы люминесценции всех образцов регистрировались после электронного пучка с задержкой t_z (рис. 5).

Причем при возбуждении пучком электронов длительностью 2 нс эта задержка являлась статистически постоянной величиной $t_{z0} = 37 \pm 3$ нс (рис. 5б), соответствующей времени пролета электронов в диодной системе умножения ФЭУ

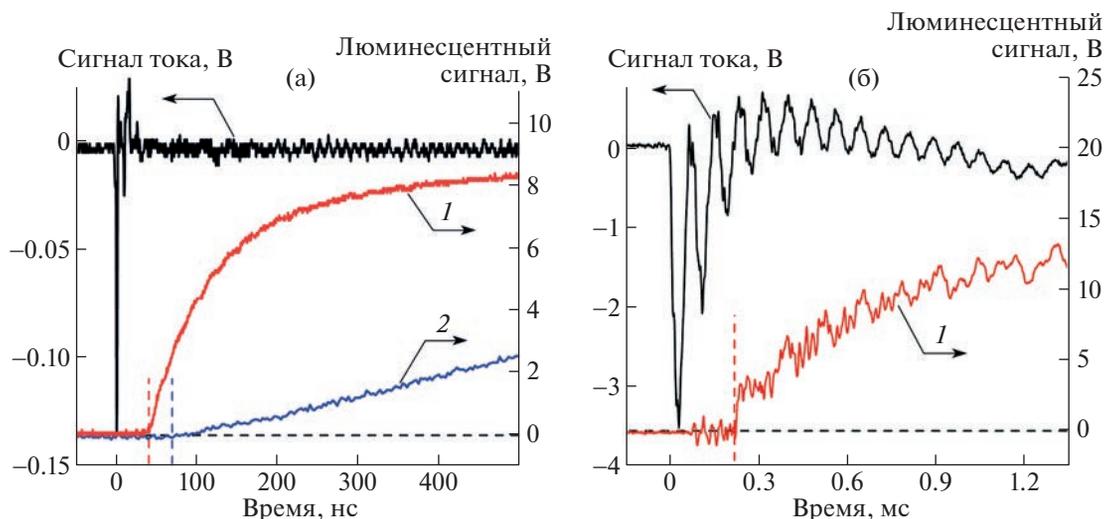


Рис. 5. Задержка люминесценции относительно момента облучения пучком убегающих электронов (а) и на установке КЛАВИ (б): 1 – полоса люминесценции Се:YAG при 560 нм, 2 – полоса люминесценции Nd:YAG при 525 нм.

(согласно паспортам ФЭУ $t_{z0} \approx 35\text{--}40$ нс). Этот эффект практически не искажает импульс люминесценции, но инструментально сдвигает его от пучка возбуждающих электронов по шкале времени. При возбуждении убегающими электронами для разных полос люминесценции время задержки изменялось в пределах $t_z = 35\text{--}70$ нс, причем его значение увеличивалось с уменьшением интенсивности полос люминесценции – чем меньше интенсивность полосы, тем больше время задержки. Этот факт указывает на то, что при возбуждении убегающими электронами, кроме пролетной задержки t_{z0} , которая является характеристикой ФЭУ, присутствует дополнительная задержка, $t_{z1} = t_z - t_{z0}$, зависящая от интенсивности полос люминесценции.

Логично предположить, что механизм этой задержки связан с разгоранием люминесценции. Действительно, возбуждение излучательных уровней происходит в процессах передачи энергии центрам люминесценции от электронно-дырочных пар. Поэтому время разгорания люминесценции возрастает с уменьшением концентрации электронно-дырочных пар в веществе. Поскольку их начальная концентрация при облучении пучком электронов субнаносекундной длительности значительно меньше, чем при облучении пучком электронов наносекундной длительности, то это приводит к увеличению времени разгорания люминесценции при возбуждении убегающими электронами.

Заметим, что ни для одной спектральной полосы мы не обнаружили времен спада люминесценции порядка единиц наносекунд, как в [9, 10]. Скорее всего, зафиксированное в [9, 10] быстро затухающее излучение имеет другую природу, на-

пример, люминесценция на переходах внутри зоны проводимости и валентной зоны [21] или излучение Вавилова–Черенкова [22, 23]. Эти оба типа излучений характеризуются малой интенсивностью при большой ширине полосы, поэтому из-за узкого спектрального интервала регистрации ($\Delta\lambda \approx 4$ нм) и низкой интенсивности нам не удалось их зафиксировать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при облучении пучком убегающих электронов длительностью 10–12 пс кристаллов и керамики в них возбуждается импульсная катодлюминесценция, спектр и кинетика затухания полос которой совпадают с таковыми при облучении пучками электронов наносекундной длительности. Отличительной особенностью является наличие задержки появления люминесценции после пучка убегающих электронов, обусловленной ее разгоранием. Возникающая при облучении пучками убегающих электронов люминесценция диэлектрических материалов может быть использована для обнаружения присутствия этих пучков в электроразрядных системах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Уральский федеральный университет, предоставивший осциллограф Tektronix DPO73304D, и Центр коллективного пользования ИЭФ УрО РАН за возможность использования в экспериментах импульсного высоковольтного оборудования.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной поддержке проекта РФФИ № 20-08-00018.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соломонов В.И., Михайлов С.Г. Импульсная катодолюминесценция и ее применение для анализа конденсированных веществ. Екатеринбург: Издательство УрО РАН, 2003. 182 с.
2. Соломонов В.И., Спирина А.В. Импульсная катодолюминесценция и ее применение. Beau Bassin: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. 181 с.
3. Полисадова Е.Ф. Люминесценция кристаллов с оксианионами и оксидных стекол при возбуждении импульсами потока электронов. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07. Томск, 2017. 363 с.
4. Месяц Г.А. Генерирование мощных наносекундных импульсов. М: Сов. радио, 1974. 256 с.
5. Коровин С.Д., Литвинов Е.А., Месяц Г.А., Мурзакеев А.М., Ростов В.В., Шпак В.Г., Шунайлов С.А., Яландин М.И. Экспериментальное исследование взрывоэмиссионных графитовых катодов в импульсно-периодическом режиме работы // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 19. С. 30–39.
6. Mesyats G.A., Osipenko E.A., Sharypov K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Yalandin M.I., Zubarev N.M. An ultrashort dense paraxial bunch of sub-relativistic runaway electrons // IEEE Electron Device Lett. 2022. V. 43. No. 4. P. 627–630. <https://doi.org/10.1109/LED.2022.3155173>
7. Генерация убегающих электронов и рентгеновского излучения в разрядах повышенного давления / Под ред. В.Ф. Тарасенко. Томск: STT, 2015. 568 с.
8. Babich L.P., Becker K.H., Loiko T.V. Luminescence from minerals excited by subnanosecond pulses of runaway electrons generated in an atmospheric-pressure // IEEE Transactions on Plasma Science. 2009. V. 37. No 11. P. 2261–2264. <https://doi.org/10.1109/TPS.2009.2030577>
9. Бакуит Е.Х., Бураченко А.Г., Соломонов В.И. Люминесценция сподумена и граната, возбуждаемая субнаносекундными электронными пучками // Изв. вузов. Физика. 2011. Т. 54. № 6. С. 17–20.
10. Липатов Е.И., Бакуит У.Х., Бураченко А.Г., Соломонов В.И., Тарасенко И.Ф. Люминесценция кристаллов при возбуждении сверхкоротким лавинным электронным пучком // Генерация убегающих электронов и рентгеновского излучения в разрядах повышенного давления / Под ред. В.Ф. Тарасенко. Томск: STT, 2015. С. 495–508.
11. Shpak V.G., Shunailov S.A., Yalandin M.I., Dyadkov A.N. The radan SEF-303A, a small high-current pulsed-power supply // Instrum. Exp. Tech. 1993. V. 36. P. 106.
12. Mesyats G.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Yalandin M.I. Desk-top subnanosecond pulser: research, development and applications // Proc. SPIE Intense Microwave Pulses II. Los Angeles. 1994. V. 2154. P. 262–268. <https://doi.org/10.1117/12.175753>
13. Yalandin M.I., Lyubutin S.K., Oulmascoulov M.R., Rukin S.N., Shpak V.G., Shunailov S.A., Slovikovsky B.G. High peak power and high average power subnanosecond modulator operating at a repetition frequency of 3.5 kHz // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. V. 30. Iss. 5. P. 1700–1704. <https://doi.org/10.1109/TPS.2002.805383>
14. Zubarev N.M., Kozhevnikov V.Yu., Kozyrev A.V., Mesyats G.A., Semeniuk N.S., Sharypov K.A., Shunailov S.A., Yalandin M.I. Mechanism and dynamics of picosecond radial breakdown of a gas-filled coaxial line // Plasma Sources Sci. Technol. 2020. V. 29. No. 12. 125008. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/abc414>
15. Соломонов В.И., Липчак А.И., Михайлов С.Г. Визуализация сильноточных импульсных электронных пучков // ПТЭ. 1997. № 2. С. 78–80.
16. Mesyats G.A., Yalandin M.I., Zubarev N.M., Sadykova A.G., Sharypov K.A., Shpak V.G., Shunailov S.A., Ulmashkulov M.R., Zubareva O.V., Kozyrev A.V., Semeniuk N.S. How short is the runaway electron flow in an air electrode gap? // Appl. Phys. Lett. 2020. V. 116. 063501. <https://doi.org/10.1063/1.5143486>
17. Mazda F.F. Electronic instruments and measurement techniques. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 320 p.
18. Соломонов В.И., Михайлов С.Г., Осипов В.В. Импульсный катодолюминесцентный анализатор веществ // ПТЭ. 2001. № 3. С. 164–165.
19. Solomonov V.I., Michailov S.G., Lipchak A.I., Osipov V.V., Shpak V.G., Shunailov S.A., Yalandin M.I., Ulmashkulov M.R. CLAVI Pulsed Cathodoluminescence Spectroscopy // Laser Physics. 2006. V. 16. No. 1. P. 126–129. <https://doi.org/10.1134/S1054660X06010117>
20. Соломонов В.И., Осипов В.В., Шитов В.А., Лукьяшин К.Е., Бубнова А.С. Собственные центры люминесценции керамических иттрий-алюминиевого граната и оксида иттрия // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. Вып. 1. С. 5–9. <https://doi.org/10.21883/OS.2020.01.48831.117-19>
21. Вайсбург Д.И., Семин Б.Н. Фундаментальная люминесценция ионных кристаллов при наносекундном облучении плотными электронными пучками // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 5. С. 1112–1116.
22. Спектральные и амплитудно-временные характеристики излучения Черенкова при энергиях электронов в сотни кэВ: монография / Е.Х. Бакуит, М.В. Ерофеев, В.Ф. Тарасенко, В.И. Олешко. Томск: STT, 2020. 180 с.
23. Бакуит Е.Х., Вуколов А.В., Ерофеев М.В., Науменко Г.А., Потылицын А.П., Тарасенко В.Ф., Бураченко А.Г., Шевелев М.В. Излучение Вавилова–Черенкова в видимой и УФ областях спектра при прохождении электронов с энергией 6 МэВ через кварцевую пластинку // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 109. Вып. 9. С. 584–588. <https://doi.org/10.1134/S0370274X19090029>

SPECIFIC FEATURES OF PULSED CATHODOLUMINESCENCE UNDER EXCITATION BY NANOSECOND AND SUBNANOSECOND ELECTRON BEAMS

**Academician of the RAS M. I. Yalandin^a, V. I. Solomonov^a, A. V. Spirina^a,
S. A. Shunailov^a, K. A. Sharyпов^a, A. S. Makarova^a, and A. I. Lipchak^a**

^a *Institute of Electrophysics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

Pulsed cathodoluminescence of crystals and ceramics was excited by runaway electron beams with a duration of 10–12 ps and electron beams with a duration of 2 ns generated in a vacuum diode. The results of comparative studies of their pulsed cathodoluminescence parameters are presented. The luminescence spectrum and the decay kinetics of the bands are shown to coincide in both cases. When excited by a beam of runaway electrons, a lower luminescence intensity is observed. Also in some cases a delay in the appearance of luminescence relative to the onset of the electron beam action was found. The mechanism for the delay appearance under excitation by a runaway electron beam is associated with the process of luminescence rise.

Keywords: runaway electrons, crystal, ceramics, luminescence, spectrum, kinetics

УДК 539.3

ТРЕХЧЛЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ РЯДОВ В ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

© 2023 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,3,*}

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 23.06.2022 г.

Поступило 24.06.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

В трехмерном пространстве рассмотрен класс степенных тензорных рядов (определяющих соотношений) с коэффициентами (материальными функциями), являющимися функциями трех независимых инвариантов. На основе формулы Гамильтона–Кели найдены в виде матричных рядов точные выражения для коэффициентов трехчленных представлений таких степенных рядов. Выведена взаимосвязь коэффициентов прямых и обратных трехчленных определяющих соотношений. Обсуждены случаи тензорной линейности, или квазилинейности, а также независимости материальных функций от инвариантов.

Ключевые слова: изотропная тензорная функция, инвариант, тензорный ряд, квазилинейность, взаимнообратность, матричные представления

DOI: 10.31857/S2686740023010042, EDN: TKXDGO

1. Изотропные нелинейные тензор-функции в трехмерном пространстве в виде степенных рядов

$$\mathbf{b} = A_0 \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{a}^n, \quad (1)$$

связывающие два симметричных тензорных поля второго ранга $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^3$, моделируют зависимость силового тензора (например, \mathbf{b}) от кинематического \mathbf{a} в теории определяющих соотношений для широкого класса изотропных сплошных сред [1–5]. С позиций механики сплошной среды A_0, A_1, A_2, \dots в (1) являются материальными функциями трех независимых инвариантов [6] тензора \mathbf{a} , в качестве которых удобно выбрать I_{a1}, I_{a2}, I_{a3} , где

$$I_{an} = \sqrt[n]{\text{tra}^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad I_{a2} = \|\mathbf{a}\|. \quad (2)$$

Инварианты I_{an} , $n \geq 4$, алгебраически выражаются через I_{a1}, I_{a2} и I_{a3} . Например, для $n = 4, 5, 6$ имеем [7]

$$6I_{a4}^4 = I_{a1}^4 - 6I_{a1}^2 I_{a2}^2 + 8I_{a1} I_{a3}^3 + 3I_{a2}^4,$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

³ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

$$\begin{aligned} 6I_{a5}^5 &= I_{a1}^5 - 5I_{a1}^3 I_{a2}^2 + 5I_{a1}^2 I_{a3}^3 + 5I_{a2}^2 I_{a3}^3, \\ 12I_{a6}^6 &= I_{a1}^6 - 3I_{a1}^4 I_{a2}^2 + 4I_{a1}^3 I_{a3}^3 - \\ &- 9I_{a1}^2 I_{a2}^4 + 12I_{a1} I_{a2}^2 I_{a3}^3 + 3I_{a2}^6 + 4I_{a3}^6. \end{aligned} \quad (3)$$

Помимо I_{a2} и I_{a3} будем использовать и другие квадратичный и кубический инварианты тензора \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{1}{2}(I_{a1}^2 - I_{a2}^2), \\ \Delta_a \equiv \det \mathbf{a} &= \frac{1}{6} I_{a1}^3 - \frac{1}{2} I_{a1} I_{a2}^2 + \frac{1}{3} I_{a3}^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся формулой Гамильтона–Кели в R^3 :

$$\mathbf{a}^3 = \Delta_a \mathbf{I} - J_a \mathbf{a} + I_{a1} \mathbf{a}^2. \quad (5)$$

Обозначим через $K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$ коэффициенты в трехчленном разложении

$$\mathbf{a}^n = K_{a0}^{(n)} \mathbf{I} + K_{a1}^{(n)} \mathbf{a} + K_{a2}^{(n)} \mathbf{a}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда, согласно (5),

$$\mathbf{a}^{n+1} = K_{a0}^{(n)} \mathbf{a} + K_{a1}^{(n)} \mathbf{a}^2 + K_{a2}^{(n)} (\Delta_a \mathbf{I} - J_a \mathbf{a} + I_{a1} \mathbf{a}^2), \quad (7)$$

откуда следует рекуррентная связь

$$\begin{aligned} K_{a0}^{(n+1)} &= \Delta_a K_{a2}^{(n)}, \quad K_{a1}^{(n+1)} = K_{a0}^{(n)} - J_a K_{a2}^{(n)}, \\ K_{a2}^{(n+1)} &= K_{a1}^{(n)} + I_{a1} K_{a2}^{(n)}, \end{aligned} \quad (8)$$

которую можно записать в матричной форме

$$(K_{a0}^{(n+1)}, K_{a1}^{(n+1)}, K_{a2}^{(n+1)})^T = Q_a \cdot (K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}, K_{a2}^{(n)})^T, \quad (9)$$

$$Q_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_a \\ 1 & 0 & -J_a \\ 0 & 1 & I_{a1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(K_{a0}^{(n)}, K_{a1}^{(n)}, K_{a2}^{(n)})^T = Q_a^n \cdot (1, 0, 0)^T, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

т.е. тройка коэффициентов $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$ является первым столбцом матрицы Q_a^n . Технически выписать общий вид Q_a^n для любого n , очевидно, затруднительно, поэтому оставим выражения для инвариантов $K_{a0}^{(n)}$, $K_{a1}^{(n)}$ и $K_{a2}^{(n)}$, фигурирующих в (6), в форме (10).

Таким образом, степенной тензорный ряд (1) эквивалентен трехчленному соотношению

$$\mathbf{b} = C_0 \mathbf{I} + C_1 \mathbf{a} + C_2 \mathbf{a}^2 \quad (11)$$

с вычисляемыми согласно описанной выше процедуре материальными функциями

$$C_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{a0}^{(n)}, \quad (12)$$

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_{a1}^{(n)}, \quad C_2 = \sum_{n=2}^{\infty} A_n K_{a2}^{(n)}.$$

Нижние пределы суммирования в (12) можно выбрать именно такими, поскольку, как следует из (6), $K_{a1}^{(0)} = 0$, $K_{a2}^{(0)} = 0$, $K_{a2}^{(1)} = 0$.

2. Положим, что ряд (1) обратим:

$$\mathbf{a} = B_0 \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathbf{b}^n, \quad (13)$$

где материальные функции B_0, B_1, B_2, \dots зависят от инвариантов I_{b1} , I_{b2} и I_{b3} , определенных аналогично (2). Нетрудно [7] вывести следующие алгебраические связи троек инвариантов I_{b1} , I_{b2} , I_{b3} и I_{a1} , I_{a2} , I_{a3} :

$$I_{b1} = 3C_0 + I_{a1}C_1 + I_{a2}^2C_2,$$

$$I_{b2}^2 = 3C_0^2 + 2I_{a1}C_0C_1 + I_{a2}^2(C_1^2 + 2C_0C_2) + 2I_{a3}^3C_1C_2 + I_{a4}^4C_2^2, \quad (14)$$

$$I_{b3}^3 = 3C_0^3 + 3I_{a1}C_0^2C_1 + 3I_{a2}^2C_0(C_1^2 + C_0C_2) + I_{a3}^3C_1(C_1^2 + 6C_0C_2) + 3I_{a4}^4C_2(C_1^2 + C_0C_2) + 3I_{a5}^5C_1C_2^2 + I_{a6}^6C_2^3,$$

куда из (3) должны быть подставлены выражения I_{a4}^4 , I_{a5}^5 и I_{a6}^6 . Обратные к (14) связи запишем в общем виде

$$I_{an} = I_{an}(I_{b1}, I_{b2}, I_{b3}), \quad n = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Построим теперь, как это сделано в (9), (10), последовательность троек инвариантов $K_{b0}^{(n)}$, $K_{b1}^{(n)}$ и $K_{b2}^{(n)}$:

$$(K_{b0}^{(n)}, K_{b1}^{(n)}, K_{b2}^{(n)})^T = Q_b^n \cdot (1, 0, 0)^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad Q_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta_b \\ 1 & 0 & -J_b \\ 0 & 1 & I_{b1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

и запишем ряд (13) в виде трехчленного соотношения

$$\mathbf{a} = D_0 \mathbf{I} + D_1 \mathbf{b} + D_2 \mathbf{b}^2, \quad (17)$$

$$D_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n K_{b0}^{(n)}, \quad (18)$$

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_{b1}^{(n)}, \quad D_2 = \sum_{n=2}^{\infty} B_n K_{b2}^{(n)}.$$

Подставляя тензорную функцию (11) в обратную ей (17), после преобразований получим связь материальных функций C_0, C_1, C_2 и D_0, D_1, D_2 . Она следует из решения линейной неоднородной системы уравнений относительно D_0, D_1 и D_2 :

$$D_0 + C_0 D_1 + (C_0^2 + 2C_1 C_2 \Delta_a + C_2^2 I_{a1} \Delta_a) D_2 = 0,$$

$$C_1 D_1 + (2C_0 C_1 - 2C_1 C_2 J_a - C_2^2 I_{a1} J_a + C_2^2 \Delta_a) D_2 = 1, \quad (19)$$

$$C_2 D_1 + (2C_0 C_2 + C_1^2 + 2C_1 C_2 I_{a1} + C_2^2 I_{a1}^2 - C_2^2 J_a) D_2 = 0$$

и замены в решении инвариантов I_{an} на I_{bn} , $n = 1, 2, 3$, согласно (15). Из второго и третьего уравнений (19) находятся D_1 и D_2 , после чего из первого уравнения определяется D_0 .

3. В теории определяющих соотношений обычно фигурируют два эквивалентных определения тензорной линейности функций (11) и (17) (по терминологии [2] квазилинейности). Одно из них связано с тождественным обращением в нуль коэффициентов C_2 в (12) и D_2 в (18), а другое — с тем, что угол между девиаторами $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - I_{a1} \mathbf{I}/3$ и $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - I_{b1} \mathbf{I}/3$ нулевой [8], т.е.

$$\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{b}} = \sqrt{\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}}} \sqrt{\bar{\mathbf{b}} : \bar{\mathbf{b}}}.$$

Условия разделения девиаторных и шаровых свойств изотропных тензор-функций в общем случае нелинейности и в случае квазилинейности подробно освещены в [9].

Взаимобратные тензорные функции (11) и (17) квазилинейны либо неквазилинейны одновременно. Наличие в рядах (1) и (13) слагаемых со степенями тензоров больше первой еще не говорит о тензорной нелинейности соответствующих функций. Так, например, если $A_2 = -I_{a1} A_3$, то

функция $\mathbf{b} = A_2 \mathbf{a}^2 + A_3 \mathbf{a}^3$ тем не менее тензорно линейна и равна $A_3(\Delta_a \mathbf{I} - J_a \mathbf{a})$.

4. Важным частным случаем является ситуация, когда все коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2$, в (1) постоянны, т.е. не зависят от инвариантов тензора \mathbf{a} . Тогда их можно рассматривать как коэффициенты ряда Тейлора вблизи нуля $A_n = F^{(n)}(0)/n!$ некоторой скалярной функции $F(x)$, а сам ряд (1) интерпретировать как тензорную функцию $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, порожденную (посредством набора A_n) скалярной функцией F . Квазилинейность такой тензор-функции, эквивалентная, как было отмечено выше, равенству нулю C_2 в (12), имеет место тогда и только тогда, когда $A_2 = A_3 = \dots \equiv 0$, т.е. при отсутствии в (1) слагаемых со степенями тензора \mathbf{a} больше первой. Это сразу следует из того, что введенная в (6) функция $K_{a_2}^{(n)}$ — многочлен степени $n - 2$ от инвариантов I_{a_1} , I_{a_2} и I_{a_3} .

Примерами подобных построений являются взаимобратные друг другу тензорные (матричные) экспонента и логарифм:

$$\mathbf{b} = \beta \left(\exp \frac{\mathbf{a}}{\alpha} - \mathbf{I} \right) \equiv \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathbf{a}}{\alpha} \right)^n,$$

$$\mathbf{a} = \alpha \ln \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{b}}{\beta} \right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{\mathbf{b}}{\beta} \right)^n,$$

где α и β — характерные величины с физическими размерностями, совпадающими с размерностями \mathbf{a} и \mathbf{b} соответственно.

Для функции $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, допускающей трехчленное представление (11), (12), в матричной форме можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (\mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{a}^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n (K_{a_0}^{(n)}, K_{a_1}^{(n)}, K_{a_2}^{(n)})^T = \\ &= (\mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{a}^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_a^n \cdot (1, 0, 0)^T = \\ &= (\mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{a}^2) \cdot F(Q_a) \cdot (1, 0, 0)^T. \end{aligned} \quad (20)$$

Это означает, что столбец $(C_0, C_1, C_2)^T$ совпадает с первым столбцом матрицы $F(Q_a)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РФФ (грант 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
2. *Победра Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
3. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
4. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. М.: Наука, 2017. 432 с.
5. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.
6. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
7. *Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 150–176.
8. *Георгиевский Д.В.* Порядок малости эффекта Пойнтинга с позиций аппарата тензорно нелинейных функций // Известия РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 29–33.
9. *Георгиевский Д.В.* Условия разделения девиаторных и шаровых свойств у изотропных тензорно-нелинейных функций // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 504. С. 32–35.

THREE-TERM REPRESENTATIONS OF POWER TENSOR SERIES IN THE THEORY OF CONSTITUTIVE RELATIONS

D. V. Georgievskii^{a,b,c}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

A class of power tensor series (constitutive relations) with coefficients (material functions), which are functions of three independent invariants, is considered in three-dimensional space. Based on the Hamilton–Cayley formula the exact expressions in the form of matrix series are found for the coefficients of three-term representations of such power series. The relationship of the coefficients of direct and inverse three-term constitutive relations is derived. The cases of tensor linearity, or quasi-linearity, as well as the independence of material functions from invariants are discussed.

Keywords: isotropic tensor function, invariant, tensor series, quasi-linearity, reciprocity, matrix representations

УДК 532.546

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДАРСИ И БРИНКМАНА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. А. Т. Ильичев^{1,*}, Г. Г. Цыпкин^{1,**}

Представлено академиком РАН А.Г. Куликовским 10.05.2022 г.

Поступило 13.05.2022 г.

После доработки 13.05.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

Проведено исследование устойчивости фронта испарения в пористой среде. Для описания течения используется обобщенное уравнение фильтрации Бринкмана. Представлено сравнение полученных результатов с результатами, найденными в рамках приближения Дарси. Показано, что использование приближения Бринкмана устраняет неограниченность скорости роста возмущений на малых масштабах, что имеет место в случае закона Дарси. Поверхность раздела становится более устойчивой, а в случае неустойчивости наиболее неустойчивая мода соответствует конечному значению волнового числа.

Ключевые слова: пористая среда, испарение, поверхность раздела, уравнение Бринкмана, неустойчивость

DOI: 10.31857/S2686740023010078, EDN: UNLRGO

1. Изучение устойчивости течений в пористых средах представляет интерес для большого числа приложений. Проблемы, связанные с устойчивостью, возникают при исследовании эффективности разработки нефтяных месторождений методом вытеснения [1], при распространении загрязняющих примесей в грунтовых водах [2, 3], при формировании и разработке геотермальных резервуаров [4, 5] и т.д.

Величина волнового числа, соответствующего наиболее неустойчивой моде, определяет характерный размер возмущения, которое развивается на нелинейной стадии. Аналитические исследования линейной устойчивости фильтрационных течений с использованием закона Дарси показали, что существует несколько различных типов переходов к неустойчивому состоянию, характеризующимся значением модуля волнового числа [4–9]. В работе [1] получен критерий неустойчивости в виде линейной зависимости скорости роста (затухания) возмущения от волнового числа, а переход к неустойчивости происходит при смене знака коэффициента, стоящего перед волновым числом, и реализуется одновременно для всех значений волнового числа. Наиболее неустойчи-

вое возмущение может соответствовать конечным или нулевым волновым числам [4, 5]. В [5–9] были найдены режимы перехода к неустойчивости при бесконечно больших значениях волнового числа, когда линейный размер наиболее неустойчивого возмущения стремится к нулю.

Если при волновом числе $\kappa \rightarrow \infty$ мнимая часть частоты $\text{Im}\omega \rightarrow \infty$ [10], то принцип причинности нарушается. Наличие подобной неустойчивости означает, что наиболее неустойчивое возмущение имеет бесконечно малый размер и его эволюция со временем не может быть описана в рамках механики сплошной среды. Естественно предположить, что возникающие трудности обусловлены выбором математической модели, которая не дает адекватного описания рассматриваемого физического процесса.

В настоящей работе для задачи устойчивости поверхности испарения предлагается использовать обобщенное уравнение фильтрации Бринкмана, когда в рамках приближения Дарси наиболее неустойчивое возмущение имеет бесконечно малый размер. Показано, что применение уравнения Бринкмана делает наиболее неустойчивой моду, которая соответствует конечному волновому числу.

2. Рассмотрим задачу о функционировании таких подземных сооружений, как горные выработки, тоннели и т.д., располагающиеся под водоносным горизонтом и слоем водонасыщенных пород (грунта) $0 < z < L$ (рис. 1). Вентиляция со-

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: ilichev@mi.ras.ru

**E-mail: tsypkin@ipmnet.ru

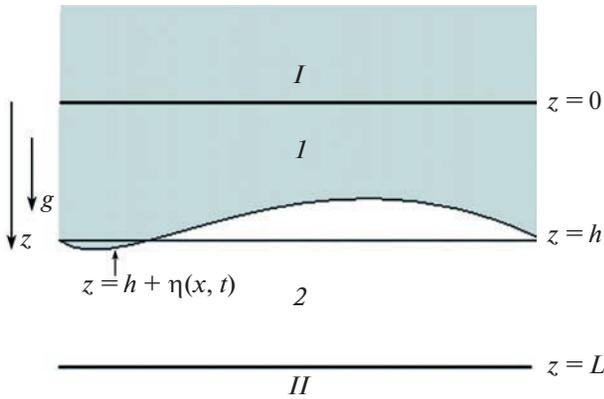


Рис. 1. Схема задачи. I и 2 – низкопроницаемые области. I – высокопроницаемая область, насыщенная водой. II – высокопроницаемая область, насыщенная воздухом.

оружения приводит к испарению воды с кровли и образованию области, насыщенной влажным воздухом $h < z < L$ (область 2), а область I ($0 < z < h$) насыщена водой. Линии $z = 0$ соответствует высокопроницаемому водоносному горизонту, а $z = L$ – кровле подземного сооружения [9]. На поверхности раздела $z = h$ происходит испарение воды с последующим диффузионным переносом пара в область открытого пространства $z > L$.

Движение воды в области I описывается уравнением неразрывности и законом фильтрации Бринкмана с учетом массовой силы

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = -\frac{k}{\mu_w} \operatorname{grad} (P_1 - \rho_w g z) + \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнения в области 2 представляют собой уравнение неразрывности и закон Бринкмана для воздуха

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = -\frac{k}{\mu_a} \operatorname{grad} P_2 + \frac{k}{\mu_a} \mu_{ea} \Delta \mathbf{w}, \quad (2)$$

уравнение диффузии пара, а для газов справедливо уравнение Клайперона

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \operatorname{div} D \operatorname{grad} \rho_v, \quad P_v = \rho_v R_v T, \quad P_a = \rho_a R_a T. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{v}, \mathbf{w} – векторы скоростей фильтрации воды и воздуха, m – пористость, k – проницаемость, μ – вязкость, P – давление, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность, D – коэффициент диффузии пара. Индексы v, w, a отвечают величинам для пара, воды и воздуха, соответственно, индексы ew, ea обозначают эффективную вязкость воды и воздуха соответственно. Эф-

фективная вязкость определяется соотношением $\mu_e = \mu/m$ [11, 12].

Вместо уравнения диффузии для плотности пара удобно использовать аналогичное уравнение для функции влажности $v = \rho_v / (\rho_a + \rho_v)$. Это уравнение следует из (3) и при условии малости парциального давления пара по сравнению с атмосферным давлением и имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \Delta v. \quad (4)$$

Поскольку скорость фронта мала, то процесс диффузии можно рассматривать как квазистационарный. Тогда из (1), (2) и (4) получаем

$$\Delta v = 0, \quad \Delta P_{1,2} = 0. \quad (5)$$

Рассматриваемая задача сформулирована в изотермическом приближении, поскольку поглощением тепла при испарении, когда температура ниже точки кипения, можно пренебречь [8]. На поверхности раздела в области 2 пар находится в состоянии насыщения, влажность v_* является функцией температуры и находится из соотношения [13]

$$v_* = \frac{R_a F(T)}{R_v P_a},$$

$$F(T) = 10^5 \exp \left[-7226.6 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{373.16} \right) + 8.2 \ln \frac{373.16}{T} - 0.0057(373.16 - T) \right].$$

Условие сохранения массы на поверхности раздела имеет вид

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \frac{\rho_v}{\rho_w} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} + D \frac{\rho_a}{\rho_w} \operatorname{grad} v \cdot \mathbf{n}, \quad (6)$$

где \mathbf{V} – вектор скорости поверхности испарения.

Динамические условия на поверхности испарения имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(-P_1 + 2\mu_{ew} \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) n_1 + \mu_{ew} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) n_2 = \\ & = \left(-P_2 - P_c + 2\mu_{ea} \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) n_1 + \mu_{ea} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) n_2, \\ & \mu_{ew} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) n_1 + \left(-P_1 + 2\mu_{ew} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) n_2 = \\ & = \mu_{ea} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) n_1 + \left(-P_2 - P_c + 2\mu_{ea} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) n_2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^\top$,

$$n_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad n_2 = -1.$$

Граничные условия на верхней границе $z = 0$ и на нижней границе $z = L$, совпадающей с кровлей конструкции, записываются в виде

$$z = 0: P_1 = P_0; \quad z = L: P_2 = P_a, \quad v = v_a. \quad (7)$$

При постоянных граничных условиях задача имеет стационарное решение с линейными распределениями давления и влажности, которое будет исследоваться на устойчивость. Динамическое условие на неподвижной поверхности $z = h$ имеет вид $P_1 = P_2 + P_c \equiv P_a + P_c$. Положение границы раздела находится из квадратного уравнения для безразмерного параметра $H = h/L$

$$H_{1,2} = -\frac{1}{2}(\beta - \alpha - 1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 - 4\alpha}, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{P_c + P_a - P_0}{\rho_w g L}, \quad \beta = \frac{D \rho_a (v_* - v_a)}{k \rho_w} \frac{m \mu_w}{\rho_w g L}.$$

3. Пусть $\delta P_{1,2}$, δv , η , $\delta v_{x,z}$, $\delta w_{x,z}$ обозначают возмущения давления, влажности, положения поверхности фазового перехода и компонент скоростей воды и воздуха на поверхности $z = h$ соответственно.

Линеаризованная форма закона сохранения массы (6) имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \delta v_z - \frac{\rho_v}{\rho_w} \delta w_z + D \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{\partial \delta v}{\partial z}, \quad z = h. \quad (9)$$

Линеаризованные динамические условия имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_{ew} \left(\frac{\partial \delta v_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial x} \right) &= \mu_{ea} \left(\frac{\partial \delta w_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta w_z}{\partial x} \right), \\ -\delta P_1 - \frac{\partial P_{1st}}{\partial z} \eta + 2\mu_{ew} \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} &= \\ = -\delta P_2 + 2\mu_{ea} \frac{\partial \delta w_z}{\partial z}, \quad z = h. \end{aligned} \quad (10)$$

Линеаризованное условие постоянства влажности на поверхности фазового перехода приводится к соотношению:

$$\delta v + \frac{dv_{st}}{dz} \eta = 0, \quad z = h. \quad (11)$$

Устойчивость решения в виде бегущей волны исследуем методом нормальных мод. Ищем решение уравнений (9)–(11) в виде $\{\delta P_{1,2}, \delta v, \eta, \delta v_{x,z}, \delta w_{x,z}\} = \{\tilde{P}_{1,2}(z), \tilde{v}(z), \tilde{\eta}, \tilde{v}_{1,2}(z), \tilde{w}_{1,2}(z)\} \exp(\sigma t + ikx)$,

$$\eta = \hat{\eta} \exp(ikz + \sigma t), \quad \hat{\eta} = \text{const}.$$

Кроме того, из закона Бринкмана (1), (2) имеем

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \right) \tilde{v}_1 - \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \frac{d^2 \tilde{v}_1}{dz^2} = -i\kappa \frac{k}{m \mu_w} \tilde{P}_1,$$

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \right) \tilde{v}_2 - \frac{k}{\mu_w} \mu_{ew} \frac{d^2 \tilde{v}_2}{dz^2} = -\frac{k}{m \mu_w} \frac{d \tilde{P}_1}{dz},$$

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \right) \tilde{w}_1 - \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \frac{d^2 \tilde{w}_1}{dz^2} = -i\kappa \frac{k}{m \mu_v} \tilde{P}_2, \quad (12)$$

$$\left(1 + \kappa^2 \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \right) \tilde{w}_2 - \frac{k}{\mu_v} \mu_{ev} \frac{d^2 \tilde{w}_2}{dz^2} = -\frac{k}{m \mu_v} \frac{d \tilde{P}_2}{dz}.$$

Из граничных условий (7) находим выражения для амплитуд давления и влажности

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(z) &= \hat{P}_- \frac{\text{sh} \kappa z}{\text{sh} \kappa h}, \quad \tilde{P}_2(z) = \hat{P}_+ \frac{\text{sh} \kappa(L-z)}{\text{sh} \kappa(L-h)}, \\ \tilde{v}(z) &= \hat{v}_+ \frac{\text{sh} \kappa(L-z)}{\text{sh} \kappa(L-z)}. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу того обстоятельства, что при отсутствии давления движения нет, однородное решение уравнений (12) полагается равным нулю, а единственное неоднородное решение имеет вид

$$\tilde{v}_1(z) = -i \hat{P}_- \frac{k}{m \mu_w} \kappa \frac{\text{sh} \kappa z}{\text{sh} \kappa h}, \quad (14)$$

$$\tilde{v}_2(z) = -\hat{P}_- \frac{k}{m \mu_w} \kappa \frac{\text{ch} \kappa z}{\text{sh} \kappa h},$$

$$\tilde{w}_1(z) = -i \hat{P}_+ \frac{k}{m \mu_v} \kappa \frac{\text{sh} \kappa(L-z)}{\text{sh} \kappa(L-h)},$$

$$\tilde{w}_2(z) = \hat{P}_+ \frac{k}{m \mu_v} \kappa \frac{\text{ch} \kappa(L-z)}{\text{sh} \kappa(L-h)},$$

иными словами, возмущение скорости однозначно восстанавливается по возмущению давления.

Подставляя полученные решения (13), (14) в условия на поверхности раздела, получаем систему однородных уравнений для амплитуд, которая в матричной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{y} &= 0, \quad \mathbf{y} = \{\hat{P}_-, \hat{P}_+, \hat{\eta}, \hat{v}\}^T, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$a_{11} = -2i \frac{k \mu_{ew}}{m \mu_w} \kappa^2 \text{cth} \kappa h,$$

$$a_{12} = -2i \frac{k \mu_{ev}}{m \mu_v} \kappa^2 \text{cth} \kappa(L-h),$$

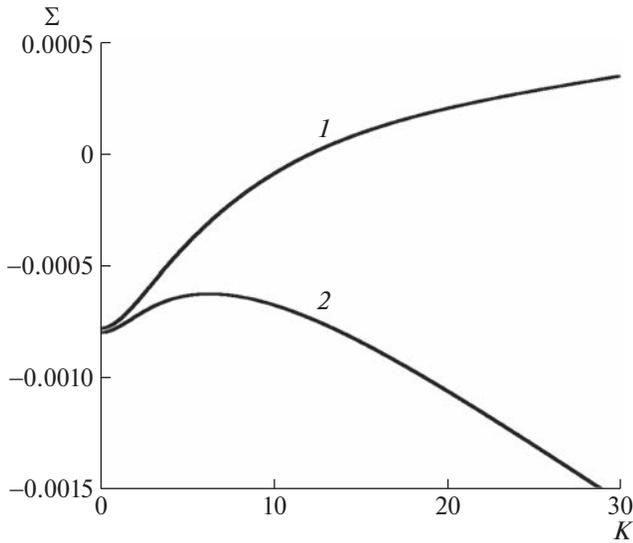


Рис. 2. Дисперсионные кривые: 1 – приближение Дарси, 2 – приближение Бринкмана. $L = 10$ м, $k = 10^{-17}$ м², $P_0 = 10^5$ Па, $P_c = 0.45 \times 10^5$ Па.

$$a_{21} = -1 - 2 \frac{k\mu_{ew}}{m\mu_w} \kappa^2, \quad a_{22} = 1 + 2 \frac{k\mu_{ev}}{m\mu_v} \kappa^2,$$

$$a_{23} = -\frac{P_a + P_c - P_0}{h},$$

$$a_{31} = \frac{k}{m\mu_w} \kappa \text{th} \kappa h,$$

$$a_{32} = \frac{k\rho_v}{\rho_w m\mu_v} \kappa \text{th} \kappa(L - h), \quad a_{33} = \sigma,$$

$$a_{34} = D \frac{\rho_a}{\rho_w} \kappa \text{th} \kappa(L - h),$$

$$a_{43} = -\frac{v^* - v_a}{L - h}, \quad a_{44} = 1.$$

Однородная система уравнений (15) имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равен нулю:

$$a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = 0.$$

Вычисления проводились при характерных значениях физической системы [9]. На рис. 2 представлены дисперсионные кривые, полученные в приближении Дарси (кривая 1) и приближении Бринкмана (кривая 2). Видно, что при малых значениях безразмерного волнового числа $K = \kappa L$, соответствующих большому линейным масштабам физической задачи, оба приближения дают очень близкие результаты. При увеличении волнового числа дисперсионные кривые расходятся, а при больших K наблюдается качественное различие результатов. В рамках приближения

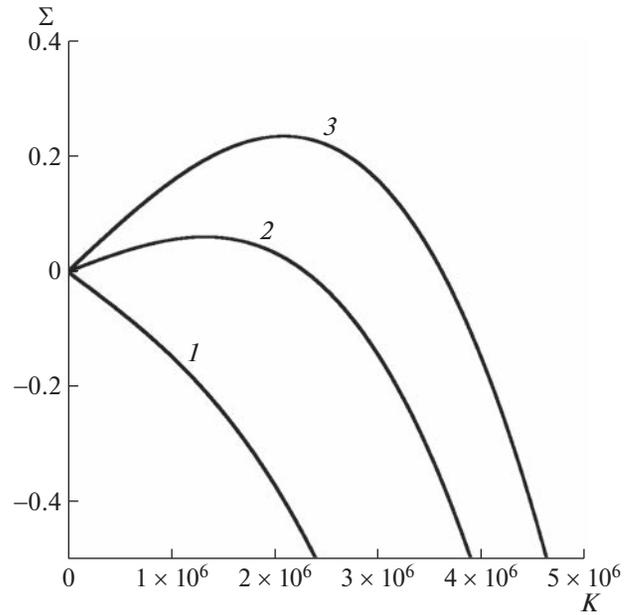


Рис. 3. Эволюция дисперсионных кривых при переходе к неустойчивости в рамках приближения Бринкмана. $L = 10$ м, $k = 10^{-17}$ м², $P_0 = 10^5$ Па. Кривые 1–3: $P_c = 0.5955, 0.5957, 0.5958 \times 10^5$ Па.

Дарси скорость роста малых возмущений неограниченно возрастает, а использование уравнения Бринкмана дает затухание малых возмущений.

Затухание малых возмущений в рамках приближения Бринкмана при $K \rightarrow \infty$ можно показать аналитически. Рассмотрим асимптотику полученного дисперсионного уравнения. Оставляя главные члены, получаем

$$\Sigma \sim -\frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{v^* - v_a}{1 - H} K + O(K^{-1}),$$

$$K \rightarrow \infty, \quad \Sigma = \sigma \frac{L^2}{D}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что для очень коротких волн $\Sigma < 0$ и возмущения убывают при $K \rightarrow \infty$ при любых допустимых значениях параметров как в устойчивом, так и в неустойчивом случаях. Отсюда можно сделать вывод, что переход к неустойчивости реализуется при конечных значениях волнового числа, как показано на рис. 3.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность академику РАН А.Г. Куликовскому за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00126).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid // Proc. R. Soc. London, 1958. A 245. P. 312–329.
2. *Rose D.A., Konukcul F., Gowing J.W.* Aust. J. Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid // Soil Res. 2005. V. 43. P. 565–573.
3. *Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G., Pritchard D.T., Richardson C.N.* Instability of the salinity profile during the evaporation of saline groundwater // J. Fluid Mech. 2008. V. 614. P. 87–104.
4. *Schubert G., Straus J.M.* Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 6505–6512.
5. *Tsyarkin G.G., Il'ichev A.T.* Gravitational stability of the water-vapor phase transition interface in geothermal systems // Transport in porous media. 2004. V. 55. P. 183–199.
6. *Khan Z.H., Pritchard D.* Liquid-vapour fronts in a porous media: multiplicity and stability of front positions // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 61. P. 1–17.
7. *Khan Z.H., Pritchard D.* Anomaly of spontaneous transition to instability of liquid–vapour front in a porous medium // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 84. P. 448–455.
8. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2015. V. 83. P. 552–561.
9. *Цыпкин Г.Г., Ильичев А.Т.* Жесткий переход к неустойчивости Релея–Тейлора поверхности раздела в пористой среде // ДАН. 2006. Т. 57. № 9. С. 523–527.
10. *Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G.* Catastrophic transition to instability of evaporation front in a porous medium // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2008. V. 25. P. 665–677.
11. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2635–2646.
12. *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II. Comparison with experiment // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2647–2655.
13. *Вукалович М.П.* Термодинамические свойства воды и водяного пара. М.: Машгиз, 1955. 92 с.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DARCY AND BRINKMAN APPROXIMATIONS FOR THE TRANSITION TO INSTABILITY IN A POROUS MEDIUM

A. T. Il'ichev^a and G. G. Tsyarkin^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.G. Kulikovskiy

We studied the stability of the evaporation front in a porous media. To describe the flow, the generalized Brinkman equation is used. Comparison of the obtained results with the results found within the framework of the Darcy approximation is presented. It is shown, that the use of the Brinkman approximation eliminates the unboundedness of the perturbation growth rate at small scales arising in the case of Darcy's law. Interface becomes more stable, and in the case of instability the most unstable mode corresponds to the finite value of the wave number.

Keywords: porous medium, evaporation, interface, Brinkman equation, instability

УДК 531.2

О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ НАЧАЛЬНО-ИЗОГНУТОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

© 2023 г. Академик РАН Н. Ф. Морозов^{1,2,*}, член-корреспондент РАН Д. А. Индейцев^{2,3},
Н. В. Можгова³, А. В. Лукин^{3,**}, И. А. Попов³

Поступило 24.08.2022 г.

После доработки 24.08.2022 г.

Принято к публикации 11.10.2022 г.

На основе геометрически нелинейной модели балки Бернулли–Эйлера исследовано влияние амплитуды и формы начальной погиби на характер и устойчивость положений статического равновесия системы в условиях электростатических и тепловых воздействий. С помощью численных методов теории бифуркаций выполнен полный параметрический анализ диаграмм эволюции положений равновесия для балок с начальной погибью по симметричной и несимметричной нижним формам свободных колебаний. Определены области в пространстве параметров величин осевой силы механической или температурной природы и напряженности электростатического поля, в которых упругая система обладает свойством бистабильности. Отмечена перспектива использования рассмотренного класса конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии в качестве чувствительных элементов высокоточных микроэлектромеханических сенсоров различных физических величин.

Ключевые слова: МЭМС, балка с начальной погибью, бистабильность, бифуркации положений равновесия

DOI: 10.31857/S268674002301008X, EDN: UNMSTC

ВВЕДЕНИЕ

Все большее распространение в современной индустрии наномикроэлектромеханических систем (Н/МЭМС) находит использование существенно нелинейных характеристик проектируемых механических архитектур и принципов генерации колебаний, что позволяет на порядки повысить точность и стабильность измерений для широкого класса датчиков физических величин [1]. Значительный научный и практический интерес представляет изучение статического поведения чувствительных элементов МЭМС с проектируемыми возмущениями геометрии (начальной погибью) при действии полей различной природы. На настоящий момент в большинстве созданных устройств в качестве чувствительного

элемента применяется микробалка с симметричной формой начальной погиби, обладающая свойством бистабильности (существования двух устойчивых положений равновесия при одном значении амплитуды воздействия) при действии постоянного электрического поля в межэлектродном зазоре.

Содержательный обзор ключевых явлений потери упругой устойчивости при появлении несмежных форм равновесия (систем с перескоками) и вопросов применения к этим задачам методов теории бифуркаций приведен в классической монографии Я.Г. Пановко, И.И. Губановой [2]. Математическое моделирование и проектирование механических конструкций рассматриваемого класса требуют использования весьма сложных геометрически и физически нелинейных моделей упругого деформирования континуальных систем. Этой группе вопросов посвящена обширная литература (см., к примеру, [3–11]). Отдельное интенсивно развивающееся направление исследований составляют задачи нелинейной статике и динамики микромеханических конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии, действующих в электрических полях различных конфигураций. Значительное число работ посвяще-

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

³ Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: n.morozov@spbu.ru

**E-mail: lukin_av@spbstu.ru

но изучению вопросов ветвления, бифуркаций, нарушения симметрии положений равновесия и режимов переключения между ними для микробалок с начальной погибью [12–16]. Особенности спектральных и нелинейных динамических характеристик таких конструкций также являются предметом обширной группы исследований [17–21]. Известны работы, посвященные вопросам синтеза алгоритмов управления колебаниями подобных систем и обработки выходных сигналов [22]. Активно развивается направление проектирования микромеханических датчиков с проектируемыми возмущениями геометрии более сложной формы: мембран и пластинок [23–25].

В настоящей работе выполняется параметрический анализ влияния формы (симметричной/несимметричной) начальной погиби балки на ее статическое поведение при электрических и тепловых воздействиях. Обсуждается перспектива использования конструкций с проектируемыми возмущениями геометрии в качестве чувствительных элементов высокоточных микроэлектромеханических сенсоров (в частности, резонансных акселерометров).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается изначально изогнутая микробалка (рис. 1) длины L , заделанная с двух сторон и имеющая прямоугольное поперечное сечение толщиной d и шириной b . Балка изготовлена из однородного изотропного упругого материала с модулем Юнга E . Начальная форма балки описывается функцией $\hat{z}_0(\hat{x}) = \hat{h} \cdot w_0(\hat{x})$, где \hat{h} – начальное отклонение верхней точки балки от средней линии в неискривленном положении и $w_0(\hat{x})$ – безразмерная функция, для которой выполняется условие

$$\max_{\hat{x} \in [0, L]} |w_0(\hat{x})| = 1.$$

Уравнение равновесия системы имеет вид

$$EI(\hat{z}'''' - \hat{z}_0''''') = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon b V_{DC}^2}{(g_0 + \hat{z})^2} + \left(N + \frac{EA}{2L} \int_0^L (\hat{z}'^2 - \hat{z}_0'^2) d\hat{x} \right) \hat{z}'', \quad (1)$$

где $\hat{z}(\hat{x})$ – функция прогиба, $I = \frac{bd^3}{12}$ – момент инерции сечения балки, N – распорное усилие, $A = bd$ – площадь поперечного сечения балки, $()'$ – производная по координате $\frac{d}{d\hat{x}}$, ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды в зазоре, b – ширина балки, V_{DC} – амплитуда постоянной компоненты напряжения, g_0 – межэлектродный зазор.

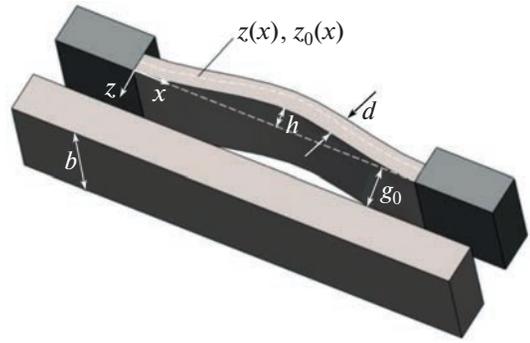


Рис. 1. Начально изогнутая микробалка в поле одного электрода.

Распорное усилие N вызвано тремя факторами:

1) (N_{th}) тепловое воздействие (например, эффект Джоуля–Ленца, возникающий из-за протекающего тока вдоль балки,

$$N_{th} = -\frac{EA}{L} \int_0^L \alpha (T(x) - T_0) dx,$$

где T – распределение температуры в балке, T_0 – начальная температура балки, α – коэффициент температурного расширения),

2) (N_m) инерционная сила (в случае работы микробалки как чувствительного элемента акселерометра при наличии переносных сил инерции),

3) (N_0) механическое усилие, вызванное преднапряженным состоянием балки (может быть как растягивающим, так и сжимающим).

После введения безразмерных параметров

$$z = \frac{\hat{z}}{g_0}, \quad x = \frac{\hat{x}}{L},$$

$$\alpha_1 = 6 \left(\frac{g_0}{d} \right)^2, \quad \alpha_2 = \frac{6\epsilon L^4}{E g_0^3 d^3},$$

$$N_{non} = \frac{12L^2}{Ebd^3} N, \quad \lambda = \alpha_2 V_{DC}^2,$$

может быть получено уравнение в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 z_0}{\partial x^4} = \alpha_1 \int_0^1 (z'^2 - z_0'^2) dx \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_{non} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\alpha_2 V_{DC}^2}{(1+z)^2}. \quad (2)$$

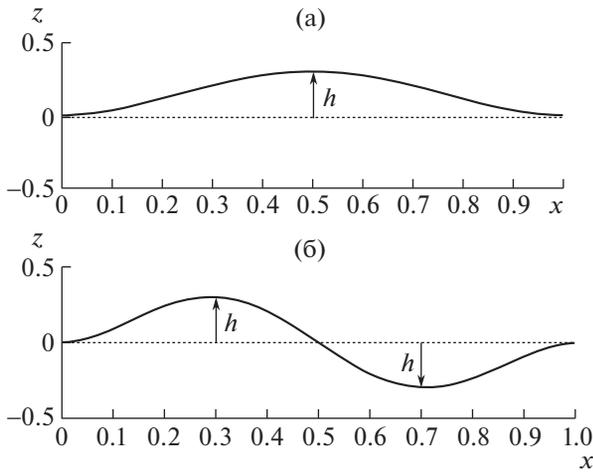


Рис. 2. Форма начальной погиби соответствует первой (а) и второй (б) собственной форме изгибных колебаний балки.

2. ПАРАМЕТРЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

В работе рассмотрены два вида функции начальной погиби – по первой и второй собственным формам (рис. 2).

3. ДИАГРАММЫ СТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Для получения модели пониженного порядка применяется метод Бубнова–Галеркина с разложением по собственным формам защемленной с двух концов прямой балки. Уравнения статического равновесия приобретают вид

$$\int_0^1 \phi_j \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n C_i \omega_{non,i}^2 \phi_i \right) dx + \lambda \int_0^1 \phi_j dx - \alpha_1 \int_0^1 \phi_j \left(1 - \sum_{l=1}^n C_l \phi_l \right)^2 \times \left[\sum_{i=1}^n C_i \phi_i'' \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n C_k \phi_k \right)^2 dx \right] dx = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где ϕ_i и C_i – собственные формы и модальные коэффициенты, соответственно, $\omega_{non,i}$ – безразмерные собственные частоты. Полученная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_i решается с помощью методов теории бифуркаций [26]. Подробное описание применяемой методики и численных методов, а также вопросы сходимости разложений приведены, например, в [27, 28].

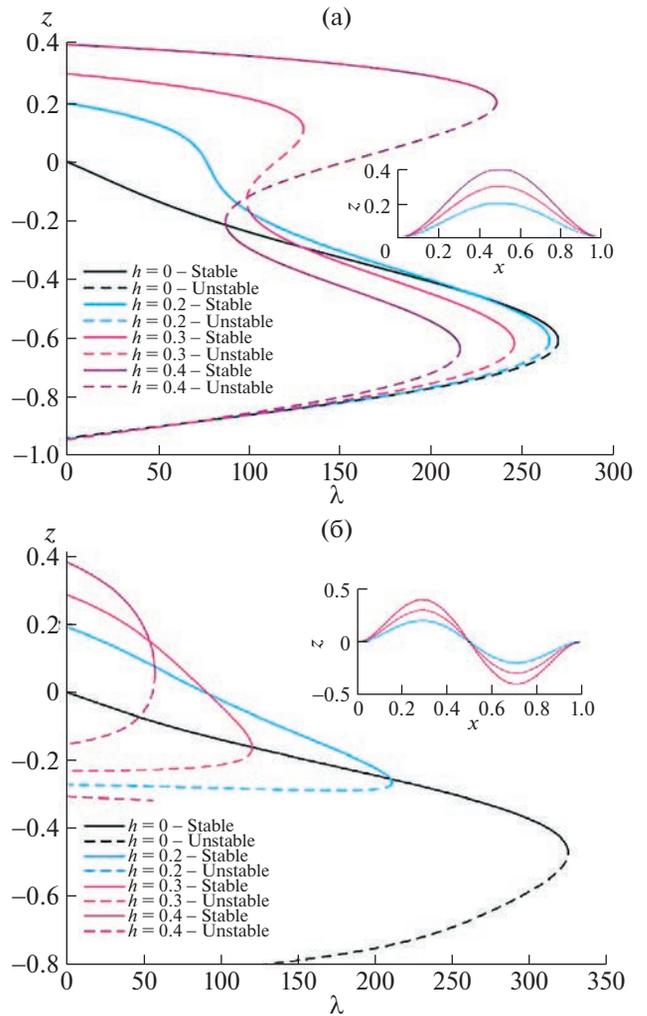


Рис. 3. Диаграмма равновесия для различных значений амплитуды начальной погиби ($\alpha_1 = 96, N_{non} = 0$): а – по первой собственной форме, прогиб в центре балки; б – по второй собственной форме, прогиб в 1/4 длины балки.

Далее представлены результаты исследования влияния амплитуды и формы начальной погиби на вид диаграммы равновесия (рис. 3).

График на рис. 3а наглядно демонстрирует, что не при всех значениях амплитуды начальной погиби по первой собственной форме микробалки в системе будет наблюдаться эффект бистабильности, т.е. наличия двух устойчивых положений равновесия при одном значения параметра λ . При функции начальной погиби, соответствующей второй собственной форме микробалки (рис. 3б), при данных значениях параметров эффекта бистабильности не наблюдается. При этом видна сильная зависимость критического напряжения от величины амплитуды начальной погиби.

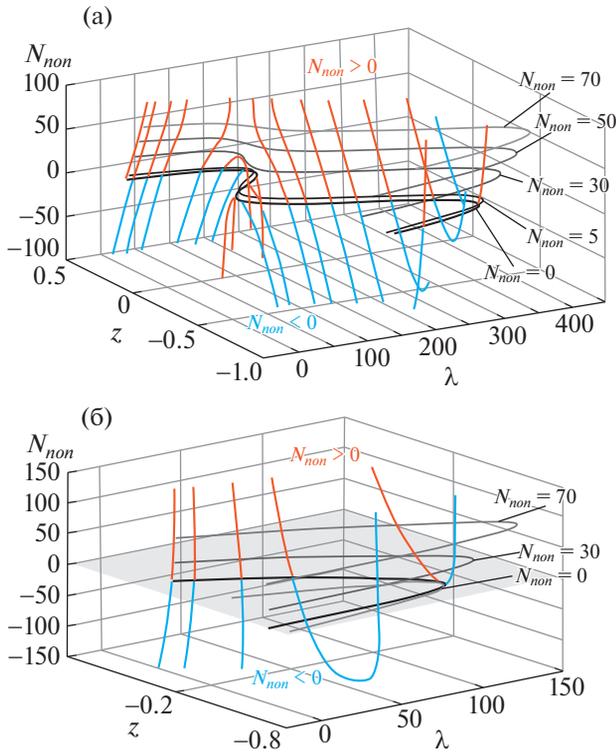


Рис. 4. Диаграмма равновесия в трехмерном пространстве параметров z, N_{non}, λ : а – по первой собственной форме, прогиб в центре балки; б – по второй собственной форме, прогиб в $1/4$ длины балки.

Проведено исследование статического поведения системы в зависимости от величины распорного усилия N . График на рис. 4 представляет собой трехмерную диаграмму статического равновесия в пространстве параметров z, N_{non}, λ .

Можно отметить, что влияние осевой силы на поведение системы является значительным. С увеличением значения параметра осевой силы увеличивается и критическое значение параметра электростатической силы, при котором теряется устойчивость системы. В состояниях, близких к неустойчивой ветви, поведение систем с увеличением осевой силы отличается от других устойчивых состояний – они переходят в неустойчивые состояния равновесия. При уменьшении осевой силы поведение системы аналогично.

Представляет интерес график зависимости точек бифуркации типа складка в пространстве параметров осевая сила N – статическое напряжение λ для микробалки, начально изогнутой по первой собственной форме, который изображен на рис. 5.

Линия синего цвета отражает зависимость первой точки бифуркации, при которой микробалка проявляет свойство бистабильности и про-

щелкивается в сторону к электроду в иное устойчивое положение равновесия. Линия черного цвета отражает зависимость второй точки бифуркации, которая является началом второй устойчивой ветви на статической диаграмме прогиб – напряжение. Линия красного цвета отражает зависимость третьей точки бифуркации на статической диаграмме, после которой происходит полная потеря устойчивости и микробалка “прилипает” к неподвижному электроду (“pull-in”). Также на рис. 5 вложенные графики иллюстрируют вид статической диаграммы равновесия при определенном значении параметра осевой силы N . При значениях безразмерной силы $N > 30$ (график синего цвета) на статической диаграмме равновесия будет наблюдаться одна точка бифуркации – система не будет обладать свойством бистабильности, так как положительное значение параметра N соответствует растягивающему усилию, которое приводит к уменьшению амплитуды погиби до нулевого значения. Значение безразмерной силы $N = 30$ (график бордового цвета) соответствует границе, после которой система проявляет свойство бистабильности и имеет три точки бифуркации на статической диаграмме равновесия. Значение безразмерной силы $N \approx -30$ (график фиолетового цвета) соответствует случаю, когда два критических электростатических напряжения (напряжение прощелкивания и напряжение полной потери устойчивости – прилипания) имеют одно и то же числовое значение. В диапазоне значений $N = [-70, -30]$ (график серого цвета) критическое значение напряжения при полной потере устойчивости меньше, чем критическое значение напряжения при прощелкивании. При значениях безразмерной силы $N < -70$ (график зеленого цвета) система формально имеет две точки бифуркации, однако значение напряжения первой точки мало и в действительности система будет терять устойчивость при достижении большего значения напряжения из двух, которое определяется кривой черного цвета на рис. 5. Также стоит отметить, что этому диапазону соответствует большая сжимающая осевая сила, которая увеличивает амплитуду погиби, что приводит к весьма сложному характеру статического поведения такой системы. График, соответствующий статической диаграмме при $N = -200$, демонстрирует наличие статических положений равновесия вблизи нуля, т.е. около прямого положения микробалки, однако эти положения равновесия граничат с зонами неустойчивости.

Микробалка с формой начальной погиби по второй собственной форме не обладает свойством бистабильности, и график зависимости точки бифуркации будет делить плоскость на две

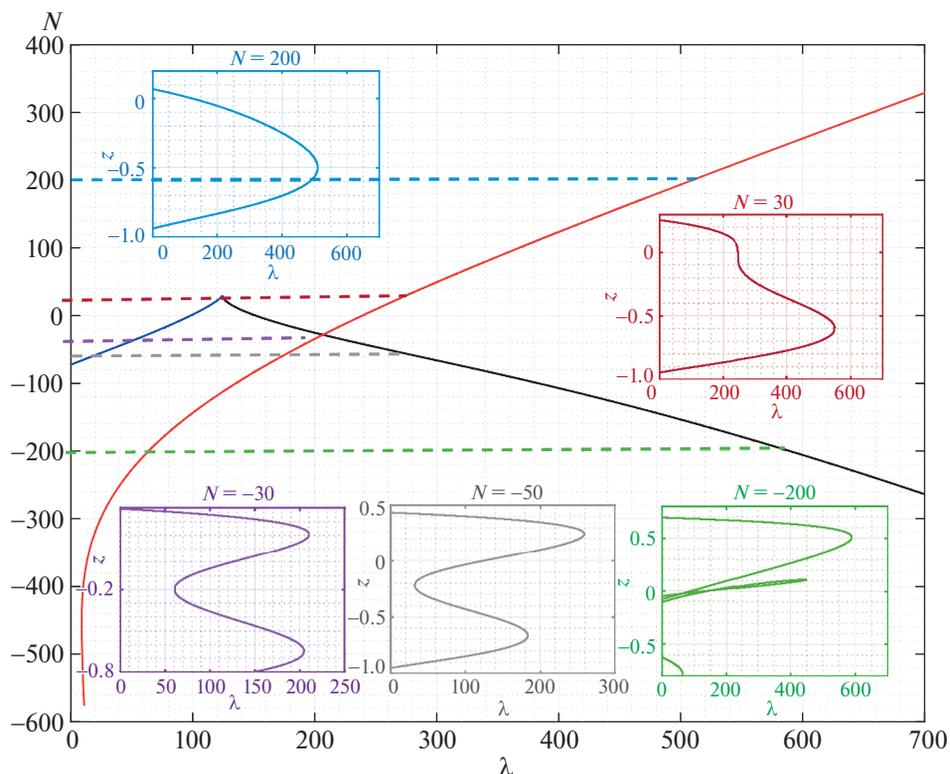


Рис. 5. Зависимость точек бифуркации типа складки в пространстве параметров $N - \lambda$ ($\alpha_1 = 96$), начальная погибь по первой собственной форме.

части — области устойчивых и неустойчивых положений равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнено параметрическое исследование нелинейной задачи статики для изначально искривленной микробалки при электрических и тепловых воздействиях. Изучен фактор формы начальной погиби микробалки. Показано, что при несимметричной форме начальной погиби микробалка не обладает свойством бистабильности. При симметричной форме начальной погиби получена зависимость точек бифуркации типа складки в пространстве параметров электростатическое напряжение — распорное усилие. В результате анализа данной зависимости сделан вывод о том, что микробалка с симметричной начальной погибью обладает свойством бистабильности в относительно небольшом интервале значений распорного усилия вблизи нуля — $[-50, 30]$ безразмерных единиц. Положительное осевое усилие большей амплитуды приводит к уменьшению амплитуды погиби балки до нуля и, как следствие, вырождению бифуркационной диаграммы в традиционную диаграмму ветвления для прямой микробалки с одним критическим значением напряжения. В об-

ласти больших сжимающих осевых усилий статическое поведение такой системы имеет сложный характер. Результаты исследования показывают помимо начальной устойчивой конфигурации наличие статических положений равновесия вблизи нуля, т.е. около прямого положения микробалки, однако эти положения равновесия граничат с зонами неустойчивости. Выполненный параметрический анализ диаграмм эволюции форм равновесия микробалок с начальной погибью открывает путь к разработке микромасштабных сенсоров предельных значений различных физических величин, основанных на принципе детектирования критических состояний упругой системы, связанных с переходом в несмежные положения равновесия.

Стоит отметить, что на основе полученных результатов решения задачи статики может быть исследована задача о малых колебаниях около найденных положений равновесия. Изучение уникальных спектральных (модальных и резонансных) свойств микромеханических систем с проектируемыми возмущениями геометрии (в первую очередь микробалок) представляет значительный научный и практический интерес с точки зрения использования этих свойств для высокоточных измерений. Механические системы с начальной погибью могут быть использованы, в частности, в

качестве чувствительных элементов модально-локализованных акселерометров, принципом действия которых является влияние измеряемой компоненты ускорения на вид собственной формы колебаний системы [29, 30]. В литературе известны результаты исследования эффекта модальной локализации колебаний между симметричной и несимметричной формами колебаний балки с начальной погибью при возбуждении колебаний несимметричным электростатическим полем. Предмет дальнейших работ составляет исследование влияния формы начальной погиби микробалки на ее спектральные характеристики.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-01-00537.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amal Hajjaj et al.* Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Review of recent advances // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2019. Oct. 119.
2. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. URSS, 2006.
3. *Giuseppe Rega, Walter Lacarbonara, Ali Nayfeh.* Reduction Methods for Nonlinear Vibrations of Spatially Continuous Systems with Initial Curvature. Jan. 2000. P. 235–246.
4. *Cao D.Q., Liu Dongsheng, Wang Charles.* Nonlinear dynamic modelling for MEMS components via the Cosserat rod element approach // J. of Micromechanics and Microengineering. 2005. June. 15. P. 1334.
5. *Walter Lacarbonara, Hiroshi Yabuno.* Refined models of elastic beams undergoing large in-plane motions: Theory and experiment // Intern. J. of Solids and Structures. 2005. Oct. 43.
6. *Narakorn Srinil, Giuseppe Rega, Somchai Chucheepsakul.* Two-to-one resonant multi-modal dynamics of horizontal / inclined cables. Pt I. Theoretical formulation and model validation // Nonlinear Dynamics. 2007. May. 48. P. 231–252.
7. *Cao D.Q., Tucker Robin.* Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation // International Journal of Solids and Structures. 2008. Jan. 45. P. 460–477.
8. *Luo A.C.J.* On a nonlinear theory of thin rods // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Feb. 15.
9. *Nicholas Vljajic et al.* Geometrically exact planar beams with initial pre-stress and large curvature: Static configurations, natural frequencies, and mode shapes // Intern. J. of Solids and Structures. 2014. Oct. 51. P. 3361–3371.
10. *Yang Zhou, Zhuangpeng Yi, Ilinca Stanciulescu.* Nonlinear Buckling and Postbuckling of Shallow Arches With Vertical Elastic Supports // J. of Applied Mechanics. 2019. Feb. 86. P. 1.
11. *Samir Emam, Walter Lacarbonara.* Buckling and post-buckling of extensible, shear-deformable beams: Some exact solutions and new insights // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2021. Jan. 129. P. 103667.
12. *Medina Lior, Gilat Rivka, Krylov Slava.* Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force // Intern. J. of Solids and Structures. 2012. June. 49. P. 1864–1876.
13. *Medina Lior, Gilat Rivka, Krylov Slava.* Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force // Intern. J. of Solids and Structures. 2014. Feb. 51. P. 2047.
14. *Milad Shojaeian, Yaghoob Tadi Beni, Hossein Ataei.* Size-dependent snap-through and pull-in instabilities of initially curved pre-stressed electrostatic nano-bridges // J. of Physics D. Applied Physics. 2016. June. 49.
15. *Medina Lior, Seshia Ashwin.* Bistability and simultaneous mode actuation in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2020. July. 126. P. 103549.
16. *Medina Lior et al.* Single Electrode Bidirectional Switching of Latchable Prestressed Bistable Micromechanical Beams // IEEE Sensors Journal. 2021. Aug. PP. P. 1–1.
17. *Walter Lacarbonara, Haider Arafat, Ali Nayfeh.* Non-linear interactions in imperfect beams at veering // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2005. Sept. 40. P. 987–1003.
18. *Amal Hajjaj, Nouha Alcheikh, Mohammad Younis.* The static and dynamic behavior of MEMS arch resonators near veering and the impact of initial shapes // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2017. July. 95.
19. *Mergen Ghayesh, Hamed Farokhi.* Bistable nonlinear response of MEMS resonators // Nonlinear Dynamics. 2017. Nov. 90.
20. *Amal Hajjaj et al.* Theoretical and experimental investigations of the crossover phenomenon in micromachined arch resonator. Pt I. Linear problem // Nonlinear Dynamics/ 2020. Jan.
21. *Amal Hajjaj et al.* Theoretical and experimental investigations of the crossover phenomenon in micromachined arch resonator. Pt II. Simultaneous 1:1 and 2:1 internal resonances // Nonlinear Dynamics. 2020. Jan. 99.
22. *Medina Lior et al.* Open Loop, Self-Excitation in a Bistable Micromechanical Beam Actuated By a DC Electrostatic Load. 2017. Jan.
23. *Medina Lior, Gilat Rivka, Krylov Slava.* Bistable behavior of electrostatically actuated initially curved micro plate // Sensors and Actuators A: Physical. 2016. July. 248.
24. *Shahid Saghir, Mohammad Younis.* An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // Acta Mechanica. 2018. July. 229.
25. *Mergen Ghayesh, Hamed Farokhi.* Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Sept. 109. P. 220–234.
26. *Dhooge Annick, Govaerts Willy, Kuznetsov Yu.A.* MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2003. 29.2. P. 141–164.

27. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. № 17 (6). С. 1107–1115.
28. Лукин А.В., Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В. Устойчивость балки Бернулли–Эйлера в связанных электрических и тепловых полях // ДАН. 2018. Т. 481. № 6. С. 619–624.
29. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В. Нелинейная динамика МЭМС-акселерометра с балочными чувствительными элементами, основанного на явлении модальной локализации // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. № 8.2. С. 233–246.
30. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Игумнова В.С., Беляев Я.В., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В. Модель микромеханического акселерометра, основанного на явлении модальной локализации // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. № 1. С. 51–56.

EQUILIBRIUM FORMS OF AN INITIALLY CURVED BERNOULLI–EULER BEAM IN ELECTRIC AND THERMAL FIELDS

Academician of the RAS **N. F. Morozov^{a,b}**, Corresponding Member of the RAS **D. A. Indeitsev^{b,c}**,
N. V. Mozhgova^c, **A. V. Lukin^c**, and **I. A. Popov^c**

^a Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

^b Institute for Problems in Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

^c Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

On the basis of a geometrically nonlinear model of a Bernoulli-Euler beam, the influence of the amplitude and shape of the initial curvature on the nature and stability of the static equilibrium positions of the system under conditions of electrostatic and thermal effects has been studied. With the help of numerical methods of the theory of bifurcations, a complete parametric analysis of the diagrams of evolution of equilibrium positions for beams with initial curvature in terms of symmetric and asymmetric lower modes of free vibrations is performed. The regions in the parameter space of the values of the axial force of a mechanical or temperature nature and the strength of the electrostatic field, in which the elastic system has the property of bistability, are determined. The prospect of using the considered class of structures with projected geometry perturbations as sensitive elements of high-precision microelectromechanical sensors of various physical quantities is noted.

Keywords: MEMS, initially curved beams, bistability, bifurcations of the equilibrium positions

УДК 532.5

ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА КАПЛИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПЕРВИЧНОЙ КАВЕРНЫ

© 2023 г. Ю. Д. Чашечкин^{1,*}, А. Ю. Ильных^{1,**}

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 04.04.2022 г.

Поступило 04.04.2022 г.

После доработки 04.04.2022 г.

Принято к публикации 09.06.2022 г.

Методами скоростной видеорегистрации впервые прослежен перенос вещества свободно падающей капли в покоящуюся принимающую жидкость на этапе формирования первичной каверны. В опытах капли воды, разбавленного в соотношении 1:100 раствора чернил или насыщенного раствора пищевой соды диаметром $D = 0.43$ см падали со скоростью $U = 3.1$ м/с в воду или 20%-й раствор роданида аммония в режиме формирования всплеска. Во всех опытах стенку растущей каверны пронизывают тонкие волокна, содержащие вещество капли, которые образуют промежуточный тонкоструктурный слой. После окончания стадии роста волокон продолжительностью 7–8 мс и диффузионного сглаживания градиентов концентрации, вокруг растущей каверны образуется слой жидкости промежуточной плотности толщиной от 1.5 до 0.7 мм. Слой отделен резкой границей от принимающей жидкости. Новая группа наклонных волокнистых петель образуется в следе за схлопывающейся каверной.

Ключевые слова: капля, каверна, волокна, промежуточный слой

DOI: 10.31857/S2686740022060062, **EDN:** TJYXUK

Первичная каверна, осесимметричная полость с гладкой поверхностью в центре выступающего венца, визуально наблюдалась еще в первых опытах с искровым освещением [1]. Длительное время изучалась геометрия течений, создаваемых каплей воды в пресной воде в различных условиях. Для получения контрастных изображений применялось встречное освещение (“на просвет”), подчеркивающее четкость контура растущей каверны.

Максимальная глубина каверны в глубокой жидкости рассчитана в [2], зависимости размеров каверны и всплеска от времени прослежены в [3, 4]. Влияние вязкости на динамику и форму каверны изучено в [5], сравнение расчетов и наблюдений каверны в слое жидкости и тонкой пленке проведено в [6, 7]. Перенос вещества капли в [2–7] детально не изучался.

В последующих опытах с каплей окрашенной жидкости установлено отличие гладких форм поверхности каверны от изломанных границ окра-

шенных участков в глубокой жидкости [8] и с волокнистой структурой в тонком слое [9].

В последние годы в окрестности границы области слияния капли с принимающей жидкостью замечены кольцевые капиллярные волны и тонкие радиальные струйки с веществом капли [10]. Струйки пронизывают пелену и образуют на ее кромке зубцы с тонкими шипами.

Внутри пятна начального контакта капли воды, падающей в концентрированный раствор поваренной соли NaCl с помощью дистанционного микроскопа (разрешение 1.04 мкм/пиксель, скорость съемки – 5 млн к/с, экспозиция – 100 нс, мощность вспышки около 300 Вт) визуализированы радиальные струйки толщиной порядка 10 мкм [11].

При пересечении границы области контакта тонкие струйки ускоряются процессами преобразования доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ), сосредоточенной в слое толщиной порядка размера молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см. Здесь ДППЭ переходит в другие формы, в том числе в возмущения давления, ускоряющие тонкий слой сливающихся жидкостей [12]. Струйки с веществом капли текут по дну каверны, образуют зубцы кромки венца и шипы с вылетающими капельками. Следы струек образуют волокнистые структуры на дне каверны и стенках венца.

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: chakin@ipmnet.ru

**E-mail: ilynykh@ipmnet.ru

В начале растекания капли, когда линия контакта движется наружу от центра, окрашенные струйки образуют линейчатые структуры [13]. При слиянии донной части капли, когда граница пятна контакта стягивается к центру, струйки на дне каверны образуют сетку, состоящую из треугольных и многоугольных ячеек [14].

Жидкость капли, движущаяся вдоль волокон на границах ячеек, скапливается в узлах сетки и продавливается сквозь стенки каверны. Под узлами в фазе коллапса каверны образуются лигаменты – тонкие струйки с вихревыми оголовками, вторгающиеся в принимающую жидкость. Струйки постепенно вытягиваются, разделяются на волокна и образуют систему наклонных петель. В режиме формирования всплеска петли наблюдаются при слиянии и инертных, и химически реагирующих сред [15–17].

Образование лигаментов связано с процессами быстрой передачи энергии при перестройке тонкой структуры воды и водных растворов, включающей войды, свободные молекулы, кластеры, клатраты, сетки и другие системы [18, 19]. Изменения структуры сопровождаются преобразованием части внутренней энергии в другие формы и, наоборот, потерей части кинетической энергии при образовании новых контактных поверхностей. Возникающие градиенты термодинамических потенциалов формируют тонкие прослойки или волокна в толще и на поверхности жидкости.

Процессы диффузионного сглаживания волокнистых структур в областях взаимопроникновения лигаментов на границах контактирующих сред дополняют механизмы смешения и перемешивания (“stirring and mixing”), в которых прослойки вытягиваются течениями, скручиваются в спирали вихрями и диффузно расплываются [20]. Большая площадь боковых поверхностей лигаментов – систем волокон и петель, содержащих вещество капли, обеспечивает быстрое диффузионное выравнивание плотностей жидкостей [12]. Волокна в картине распределения вещества капли сохраняются на всех последующих этапах эволюции течения и в покоящейся принимающей жидкости [21], и в поле гравитационно-капиллярных волн [22].

Форма первичной каверны зависит от физических свойств сред, направления движения и скорости капли. Ось каверны отклоняется от вертикали при контакте капли с наклонной поверхностью [23]. Измерения формы каверны капли, падающей на гребень или впадину волны, выполнены в [24].

Интерес к изучению переноса вещества капель в жидкости обусловлен научной содержательностью явления, составляющего основу массовых технологий в химической, нефтехимической,

фармацевтической и других отраслях промышленности. В расчетах обычно предполагается равномерное распределение вещества капли по поверхности каверны [6]. В опытах установлено, что в ряде режимов вещество капли сохраняется в тонких волокнах на поверхности каверны [13, 14], в петлях следа за спадающей каверной [15–17], растущим и спадающим всплеском [21, 22]. Перенос вещества капли на начальном этапе слияния ранее не изучался. В данной работе впервые визуализированы тонкие радиальные волокна, содержащие вещество капли, которые пронизывают поверхность растущей первичной каверны в смешивающихся жидкостях. Со временем вокруг каверны образуется промежуточный слой, отделенный тонкой оболочкой от принимающей жидкости.

Методика опытов разрабатывалась с учетом свойств полных решений системы фундаментальных уравнений механики жидкостей [12]. В силу большой теплоемкости воды течения считались изотермическими, температура смешивающихся жидкостей – комнатной $T_d = T_t = T_a = 20^\circ\text{C}$ (индексом t обозначены параметры принимающей жидкости, d – капли, a – воздушной среды). Жидкости характеризуются потенциалами Гиббса и другими термодинамическими величинами [12].

В опытах капля воды, водного раствора чернил или минеральной соли диаметром D (площадь поверхности S_d , объем V_d , масса M) свободно падает с ускорением g в воздухе с высоты H и достигает скорости U при контакте с принимающей жидкостью в стеклянном бассейне размерами $10 \times 10 \times 5$ см. Размерные параметры течения – плотности $\rho_{a,d,t}$, кинематические $\nu_{a,d,t}$, $\nu_d = \mu_d/\rho_d$ и динамические $\mu_{a,d,t}$ вязкости сред, коэффициенты поверхностного натяжения – полные σ_d^a , σ_t^a и нормированные на плотность $\gamma_d^a = \frac{\sigma_d^a}{\rho_d}$,

$\gamma_t^a = \frac{\sigma_t^a}{\rho_t}$ см³/с², коэффициенты диффузии веще-

ства капли κ_t^d и маркирующей примеси κ_t^m в принимающей жидкости. Отношения физических параметров определяют собственные масштабы

времени $T_U^D = \frac{D}{U}$, длины $L_g^V = \sqrt[3]{\frac{V^2}{g}}$ и скорости

$U_V^Y = \frac{Y}{\nu}$ или $U_K^Y = \frac{Y}{\kappa}$ [13], которые задают требования к разрешающей способности инструментов.

Отношения коэффициентов и параметров базовой системы уравнений [3] образуют семейство безразмерных величин (чисел) – Рейнольдса

$$\text{Re}_d = \frac{UD}{\nu_d}, \text{ Фруда } \text{Fr}_d = \frac{U^2}{gD}, \text{ Вебера } \text{We}_d = \frac{U^2 D}{\gamma_d^a},$$

$$\text{Бонда } \text{Bo} = \frac{gD^2}{\gamma_d^a}, \text{ Онезорге } \text{Oh}_d = \frac{\nu_d}{\sqrt{\gamma_d^a D}}, \text{ Шмидта}$$

$$\text{Sc} = \nu_t / \kappa_t^m, \text{ капиллярных отношений } \text{Ca}_U^v = \frac{U_d}{U_v^\gamma},$$

$$\text{Ca}_U^\kappa = \frac{U_d}{U_\kappa^\gamma}, \text{ используемых при описании течений.}$$

Различия физических свойств контактирующих сред характеризуются безразмерными отношениями, составленными по аналогии с числом Атвуда – относительной разностью плотностей –

$$\text{R}_\rho = \frac{\rho_t - \rho_d}{\rho_t + \rho_d}, \text{ коэффициентов поверхностного на-}$$

$$\text{тяжения } \text{R}_\sigma = \frac{\sigma_t - \sigma_d}{\sigma_t + \sigma_d} \text{ и динамических вязкостей}$$

$$\text{R}_\mu = \frac{\mu_t - \mu_d}{\mu_t + \mu_d} \text{ [14].}$$

Кинетическая энергия $E_k = \frac{MU^2}{2}$ распределе-

на по всему объему капли с плотностью $W_k = \frac{E_k}{V}$.

ДППЭ $E_\sigma = \sigma_d^a S_d$ сосредоточена в приповерхностном слое толщиной порядка размера молекулярного кластера δ_σ и объемом $V_\sigma \approx 4\pi R^2 \delta_\sigma$ с плотностью $W_\sigma = \frac{E_\sigma}{V_\sigma}$. Отношение компонентов

энергии составляет в опытах несколько процен-

тов: $E_R = \frac{E_\sigma}{E_k} \ll 1$, а их плотностей наоборот: $W_R =$

$= \frac{E_\sigma V_d}{E_k V_\sigma} \gg 1$. Время передачи кинетической энер-

гии определяется скоростью и размером капли

$T_U^D \sim 10^{-3}$ с, длительность преобразования ДППЭ в другие формы на масштабах δ_σ много короче и

составляет $T_U^\sigma = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$ с [15]. Освобожденная ДППЭ участвует в формировании лигаментов – быстро движущихся тонких слоев и воло-

кон. Методика эксперимента и организации освещения разрабатывалась с целью визуализации стенок каверны и разрешения тонких волокон в картине переноса вещества [12–15]. Экспозиция устанавливалась минимальной – от 1/4000 до 1/50000 с. Технические возможности, в частности предельная экспозиции и скорость съемки, ограничивают четкость регистрации быстрых компонентов, изображение границ которых размывается.

Опыты выполнены на стенде ТБП комплекса УИУ “ГФК ИПМех РАН” [25]. Капли воды (коэффициент преломления $n_w = 1.33$), водных растворов ализариновых чернил или пищевой соды (NaHCO_3 – гидрокарбонат натрия, $\rho_s = 1.041 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\gamma_s^a = 62 \text{ см}^3 \text{ с}^{-2}$, $\nu_s = 0.012 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $n_s = 1.34$) падали в стеклянный бассейн, заполненный частично дегазированной водопроводной водой или водным раствором роданида аммония (NH_4SCN , $\rho_r = 1.043 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\gamma_r^a = 50.8 \text{ см}^3 \text{ с}^{-2}$, $\nu_r = 0.009 \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, $n_r = 1.36$). Различия коэффициентов преломления контактирующих сред обеспечивают визуализацию контактных границ и определение местоположения структурных компонентов прямым теневым методом.

Картина течения регистрировалась видеокамерой Optronis CR300x2. Для освещения одновременно использовались прожектора Reylab Xenos-1000 и Optronis MultiLED, световодные осветители Schott KL2500LCD. Число и расположение осветителей подбирались из условия четкости визуализации тонкой структуры. Опыты проведены в диапазоне параметров образования всплеска – центральной кумулятивной струи, методика опытов приведена более полно в [10, 15, 17].

Выборки из видеофильма течения в начальной стадии формирования каверны свободно падающей каплей воды в растворе роданида аммония (20%) приведены на рис. 1. Первичный контакт капли сопровождается образованием выпуклой неоднородной полоски длиной $d_w = 4.58$ мм и высотой $h_w = 0.58$ мм при $t = 0.25$ мс – размытого изображения области вторжения вещества капли в принимающую жидкость. Шероховатости границы полоски образованы отдельными волокнами и их группами. Контрастность полоски объясняется большими градиентами коэффициента преломления сред на границах волокон и всей области вторжения жидкости капли в принимающем растворе роданида аммония.

Сравнительный анализ тонкой структуры изображений показывает, что область вторжения сформирована отдельными тонкими струйками и петлями, включающими вещество капли (воды). Полосчатая структура изображения позволяет именовать данную область моховидным слоем или мшаником. Размытость кромки капли и отдельных волокон мшаника при $t = 0.25$ мс объясняется высокой скоростью движения компонентов (капля за время экспозиции $\Delta t = 0.25$ мс смещается на $\Delta h_w = 0.78$ мм, нижняя кромка полоски – на $\Delta h_m = 0.45$ мм). Скорость продвижения наружных кромок волокон $v_f = 1.84$ м/с сравнима со скоростью капли $U = 3.1$ м/с.

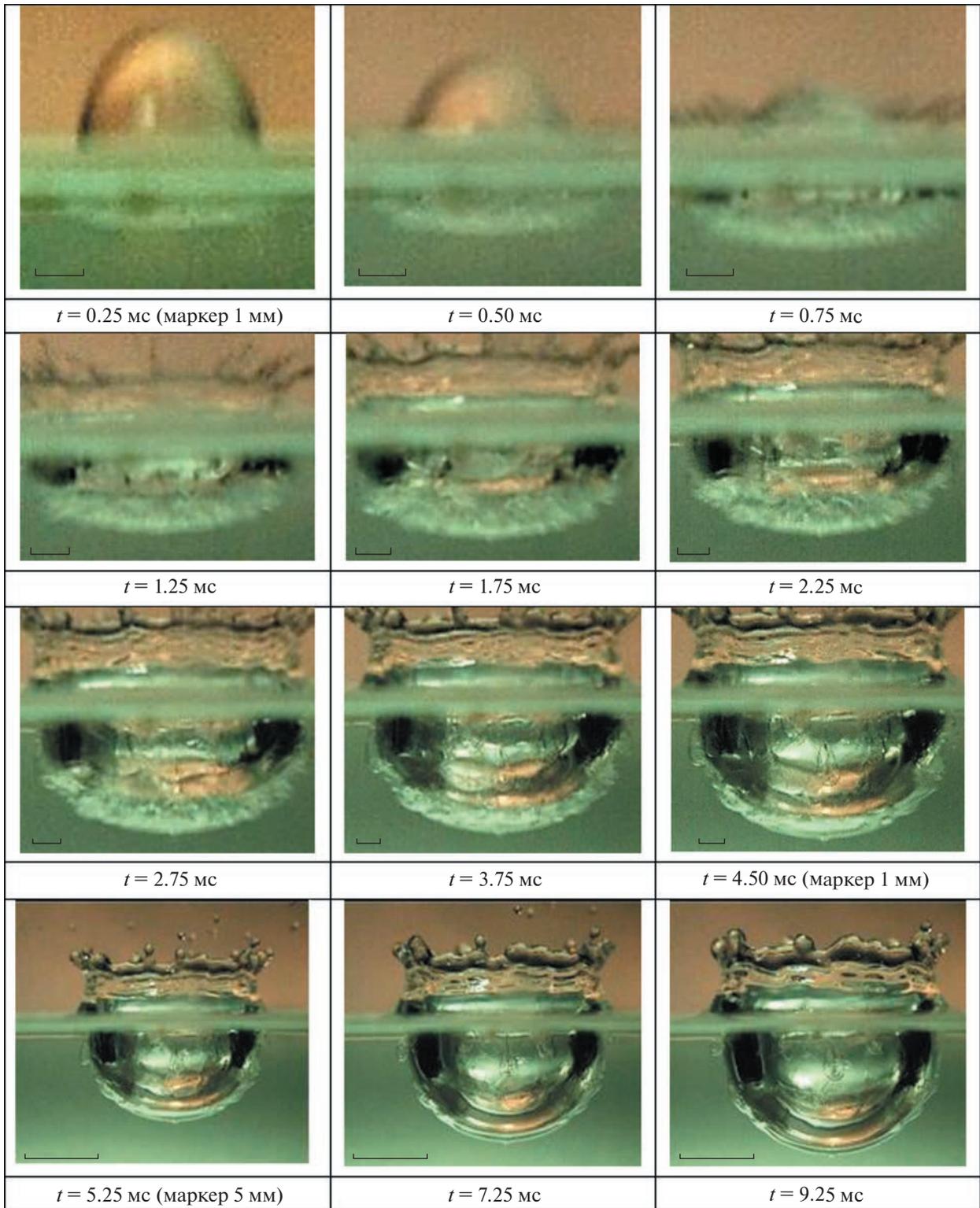


Рис. 1. Эволюция волокнистой структуры промежуточного слоя с веществом капли, образующего оболочку каверны (слияние капли воды с 20%-м раствором роданида аммония, $D = 0.43$ см, $U = 3.1$ м/с, $E_k = 200$ мкДж, $E_\sigma = 4.2$ мкДж, $Re = 13\,300$, $We = 570$, $Fr = 228$, $Bo = 2.5$, $Oh = 0.0018$, $E_R = 48$, $W_R = 1.7 \times 10^{-3}$, $R_\rho = 0.03$, скорость съемки 4000 к/с, экспозиция 1/4000 с, разрешение 50 мкм/пикс, кадр 512×512 пикс).

В процессе растекания капли пятно вторжения волокон продвигается в толщу жидкости, утолщается и расширяется (диаметр $d_w = 5$ мм, высота $h_w = 1$ мм при $t = 0.5$ мс). Нижняя кромка мшаника приобретает выпуклую форму. Между верхней кромкой пятна под свободной поверхностью, которая здесь отображается размытым слоем капиллярного поднятия жидкости на стенке кюветы, отдельные каустики высвечивают формирующуюся плоскую каверну диаметром $d_c = 4.8$ мм и глубиной $h_c = 0.25$ мм.

Каверна с плоским дном активно растет ($d_c = 5.4$ мм, $h_c = 0.4$ мм, $t = 0.75$ мс) и на следующем кадре полностью отделяет мшаник высотой $h_m = 1.08$ мм от свободной поверхности (здесь центральная часть каверны шириной $\Delta d_c = 3.8$ мм светлая, ее периферия – темная). Поскольку скорость смещения нижней кромки мшаника $v_f = 1.8$ м/с превышает скорость опускания дна каверны $v_c = 1.6$ м/с, его высота растет. Изображения отдельных волокон в мшанике становятся более четкими.

Остаток капли над свободной поверхностью окружен зубчатым венцом с шипами, с вершин которых вылетают капельки. Качественно структуры распределения вещества капли в обеих контактирующих средах оказываются подобными – шипам в воздухе, включающим обе жидкости, соответствуют волокна в принимающей среде.

В стадии растекания капли размеры каверны, светлой в центральной части и затемненной на периферии, а также области внедрения волокон растут ($h_m = 1.11$ мм, $d_m = 7$ мм при $t = 1.25$ мс). Дно каверны выделено темной линией под верхним неровным краем мшаника, темный бугорок в центре – остаток растекающейся капли. Растущий венец с наклонными шипами на утолщенной кромке окружает облако брызг, вылетающих с вершин шипов.

В ходе дальнейшей эволюции шипы поворачиваются к вертикали, от кромки по стенке венца сбегает капиллярные волны. Дно каверны продолжает углубляться и после полного слияния капли приобретает сферическую форму ($t = 1.75$ мс, $d_c = 7.9$ мм, $h_c = 1.38$ мм). Пятно мшаника толщиной $h_m = 1.34$ мм, $d_m = 7$ мм покрывает нижнюю часть каверны, его верхняя кромка находится на расстоянии $\Delta h_m = 1.38$ мм от поверхности жидкости. Нижняя кромка мшаника изрезана тонкими волокнами, которые теперь прослеживаются по всей толщине слоя вторжения.

Постепенно между мшаником высотой $h_m = 1.38$ мм и свободной поверхностью жидкости вокруг боковой стенки каверны начинает формироваться промежуточный слой более однородной жидкости пониженной плотности высо-

той $h_d = 1.3$ мм и толщиной $h_l = 0.8$ мм. Сохраняющаяся разность плотностей жидкостей вне и внутри промежуточного слоя подчеркивается резкой внешней границей на всех этапах его эволюции – при вторжении волокон, их размывании и последующем растекании слоя.

Высота промежуточного слоя, отделяющего верхнюю кромку мшаника от поверхности жидкости, растет по мере углубления каверны (при $t = 2.25$ мс, $d_c = 8.48$ мм, $h_c = 2.08$ мм) и окончания процесса освобождения ДППЭ после полного слияния капли. Более того, кинетическая энергия жидкости теперь расходуется на создание и перемещение новой контактной поверхности.

Пелена на вершине венца стягивается в изломанный круговой валик, от которого вниз по стенкам венца бегут группы капиллярных волн, форма гребней и впадин которых повторяет контур его кромки.

В течение следующих $\Delta t = 0.5$ мс тонкая структура в верхней части промежуточного слоя с гладкой боковой и волнистой верхней границей выражается. Однако волокна сохраняются под дном и на небольшой высоте сбоку каверны ($h_m = 1.28$ мм, при $t = 2.75$ мс, $d_c = 9.16$ мм, $h_c = 2.8$ мм).

Заметные изменения в структуре промежуточного слоя наблюдаются в интервале $3.75 < t < 4.5$ мс, когда прекращение вторжения новых волокон заменяется быстрым сглаживанием тонкой структуры промежуточного слоя по всей высоте за исключением центра донной части, где сохраняются крупные возмущения. Одновременно начинает убывать его толщина. Узкий промежуточный слой толщиной до 0.6 мм охватывает всю поверхность каверны.

В ходе дальнейшей эволюции промежуточный слой теряет однородность, в нем появляются языки сложной формы и сбоку каверны, и в ее центре. В нижней части каверны при $t = 7.25$ мс наблюдаются несколько вложенных наклонных колец. Граница слоя остается гладкой под дном каверны. Его толщина убывает от $h_m = 0.78$ мм при $t = 5.25$ мс до $h_m = 0.56$ мм при $t = 7.25$ мс. На высоте $h = 2.3$ мм от дна каверны можно выделить две наклонные петли, слева – языки, в центре – набор солевых пальцев.

Венец над свободной поверхностью при этом продолжает расти, его верхняя кромка утолщается (при $t = 7.25$ мс составляет 1.14 мм), как и шипы на сглаженных зубцах. Регулярность картины капиллярных волн на боковой поверхности венца нарушается, кольцевые гребни разбиваются на отдельные наклонные отрезки.

Сравнения размеров каверны, полной глубины области возмущения h_s , включающей собственно каверну и промежуточный слой (мша-

Таблица 1

t , мс	0.25	0.5	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.75	4.5	5.25	7.25	9.25
d_c , мм			5.37	7.02	7.93	8.48	9.16	10.30	10.94	11.32	13.05	14.01
h_s , мм	0.58	1.03	1.49	2.13	2.72	3.46	4.08	5.07	5.69	6.34	7.34	8.27
h_m , мм	0.58	1.03	1.08	1.11	1.34	1.38	1.28	1.08	1	0.78	0.56	0.56

ник), и высоты промежуточного слоя h_m , приведенные в табл. 1, показывают, что на начальной стадии процесса на фоне равномерного роста каверны толщина мшаника растет, достигает максимума при $t = 2.25$ мс и далее начинает быстро убывать.

Сжатие промежуточного слоя вызвано увеличением размеров каверны и прекращением роста волокон после полного погружения капли. Далее волокна расплываются под действием процессов диффузии. Большая продолжительность этапа роста каверны обеспечивается инерционными свойствами течений в маловязкой жидкости.

Распределения освещенности на границе каверны с увеличенным изображением промежуточного слоя при $t = 1.75$ и 2.75 мс, пространственные спектры поперечных масштабов возмущений приведены на рис. 2. В стадии формирования структуры при $t = 1.75$ мс в спектре выделены поперечные масштабы от 0.03, 0.04, 0.045, 0.08, 1.05 и 1.1 мм. Со временем мелкомасштабные возмущения постепенно сглаживаются, а крупные неоднородности размером в 1–2 мм сохраняются.

Визуализация картины распределения вещества при растекании капли разбавленных чернил в воде показывает, что на ранних этапах слияния здесь также образуется промежуточный слой, составленный из окрашенных волокон, пронизывающих стенки каверны (рис. 3). Для наглядности на первых трех фотографиях приведены первичный кадр и его нижняя часть в масштабе 5 : 1. Здесь при $t = 0.5$ мс выражены волокнистая центральная часть и более гладкая периферия. Гладкая часть кромки окрашенной жидкости слева вверху и размытая справа указывают на аксиальную неоднородность распределения вещества капли.

По мере роста размеров каверны общая картина течения перестраивается с сохранением неравномерности распределения вещества капли, включающего вертикальные полосы на стенках и волокна в промежуточном слое ($t = 2.75$ мс). В картине распределения брызг отчетливо выражена зональная структура; ярусы, содержащие капли, разделены пустыми промежутками. Волокна в каверне толщиной до 0.2 мм продолжают-

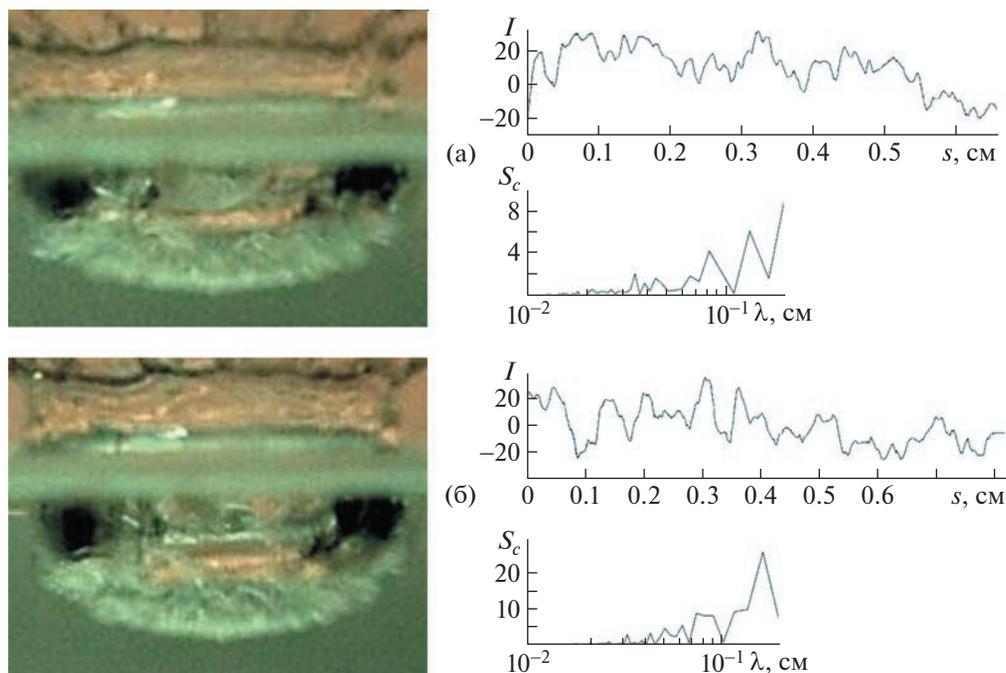


Рис. 2. Распределения интенсивности света в волокнистом слое вдоль границы каверны и пространственные спектры структуры (слияние капли воды с 20%-м раствором роданида аммония): $t = 1.75$ (а) и 2.75 мс (б).

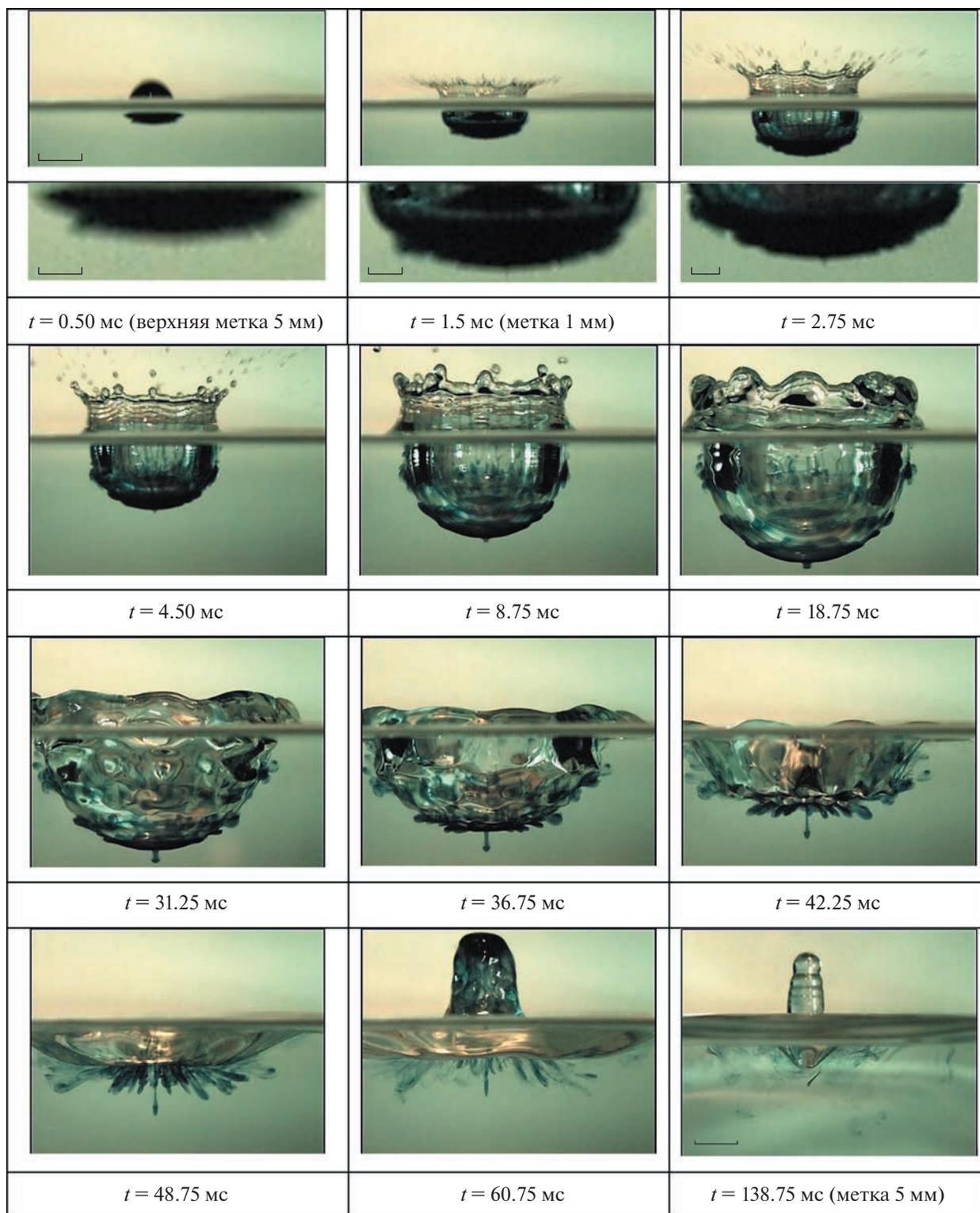


Рис. 3. Эволюция течения с волокнистым промежуточным слоем (слияние капли разбавленного раствора чернил в соотношении 1:100 с водой): $D = 0.43$ см, $U = 3.1$ м/с, $R_0 = -0.01$, разрешение 52 мкм/пикс, остальные параметры приведены на рис. 1, на первых трех кадрах приведено увеличенное изображение дна каверны в масштабе 5:1.

Таблица 2

t , мс	0.25	0.5	0.75	1.25	1.75	2.5
d_c , мм	3.62	4.97	5.92	7.17	8.07	9.31
h_s , мм	0.39	0.78	1.2	1.98	2.64	3.56
h_m , мм	0.39	0.78	1	1.35	1.47	1.47

ся в венце, шипах и образуют неравномерно окрашенные капельки. Постепенно стенки каверны выглаживаются, окрашенная жидкость собирается в пятнах в нижней части каверны, образующих кольцевой слой высотой $h_l = 1.7$ мм при $t = 4.5$ мс.

Далее окрашенные слои разделяются. Дно каверны охватывает плотный слой высотой $h_l = 0.5$ мм при $t = 8.75$ мс. Верхний слой высотой $h_u = 0.8$ мм, отстоящий от дна на $\Delta h = 4.7$ мм, распадается на отдельные сгустки волокон, примыкающих снаружи к стенкам каверны.

Со временем распределение чернил на поверхности каверны становится все более неравномерным, при $t = 18.75$ мс в верхнем слое высотой 3.2 мм, отстоящем от свободной поверхности на $\Delta h = 0.9$ мм, образуются отдельные пятна. Промежуточный слой высотой $h_l = 2.4$ мм также теряет однородность. На контуре каверны прослеживаются группы кольцевых капиллярных волн. Стекающая по волокнам окрашенная жидкость частично просачивается через стенки каверны и образует характерные выступы в принимающей жидкости, как и в [15].

В начале фазы схлопывания форма каверны усложняется, азимутальная однородность волновых фронтов нарушается, кольцевые волны трансформируются в трехмерные с выраженными выступами и впадинами, распределенными по ярусам. Окрашенная жидкость скапливается в отдельных сгустках по всей поверхности каверны за исключением донного слоя ($t = 31.25$ мс).

В стадии коллапса стенки каверны принимают угловатые формы, в принимающей жидкости под дном каверны появляются петли $t = 36.75$ мс, длина которых растет по мере схлопывания каверны ($t = 42.25$ мс) вплоть до начала фазы формирования всплеска ($t = 48.75$ мс) [15, 17]. По мере затягивания жидкости в растущий всплеск плотность окраски верхних слоев в растворе жидкости, длина и число петель уменьшаются.

Окрашенная жидкость с выраженными волокнами собирается в верхней части растущего всплеска ($t = 60.75$ мс) и уносится вылетающей с его вершины каплей. Отдельные окрашенные волокна сохраняются в толще жидкости до полного погружения всплеска ($t = 138.75$ мс). Здесь плотно окрашены кромки новой растущей конической каверны и оболочки заостренного всплеска, бо-

ковая поверхность которого покрыта капиллярными волнами длиной $\lambda = 0.57, 0.8, 1.13$ мм.

Выборки из видеогаммы начальной стадии картины течения при растекании капли насыщенного раствора соды в воде, визуализированной “методом темного поля”, приводятся на рис. 4 в прямой и частично инвертированной форме. На первом кадре представлена структура области вторжения жидкости капли с выраженной волокнистой структурой, которая проявляется в изрезанной форме границы с дном каверны.

Дно каверны, к которому примыкает система волокон промежуточного слоя, появляется в поле зрения при погружении нижней четверти капли ($t = 0.5$ мс).

Далее под каверной видны группа пронизывающих волокон и нижняя граница промежуточного слоя ($t = 0.75$ мс).

При полном погружении капли $t = 1.25$ мс образуется каверна ($d_c = 7.17$ мм, $h_c = 0.63$ мм), под которой располагается промежуточный слой высотой $h_m = 1.35$ мм и шириной $d_m = 3.2$ мм с тонкими волокнами толщиной $\Delta l = 0.15$ мм, расположенными в угловом диапазоне от 40° до 90° к горизонту. На дне каверны виден шаровой сегмент погружающейся капли.

Нижнюю границу промежуточного слоя обозначает округлое пятнышко под центром каверны на расстоянии $\Delta h = 2$ мм от свободной поверхности – вершина формирующейся быстрой струйки, образовавшейся при уничтожении свободной поверхности в первичном контакте сливающихся жидкостей.

Под плоским дном каверны ($h_c = 1.17$ мм, $t = 1.75$ мкс) выделяется группа волокон конической формы с вихревыми окончаниями, граница области которых отстоит на $\Delta h = 2.2$ мм от свободной поверхности. Здесь высота промежуточного слоя составляет $h_m = 1.47$ мм, его нижняя кромка располагается на расстоянии $\Delta h = 2.64$ мм от свободной поверхности.

Постепенно дно каверны скругляется, при $t = 2.5$ мс волокна не регистрируются в данной технике визуализации. Размеры основных структурных компонентов – диаметра и глубины каверны, толщины промежуточного волокнистого слоя приведены в табл. 2. Здесь размеры каверны растут монотонно, а высота промежуточного слоя достигает максимума при $t = 2.5$ мс.

Временные зависимости всей глубины области возмущения, включающей каверну и промежуточный слой, образующейся при погружении капли раствора соды в воду ($R_\rho = -0.03$), воды в раствор роданида аммония ($R_\rho = 0.03$), а также глубина каверны при погружении капли раствора соды в воду представлены на рис. 5. Все три по-

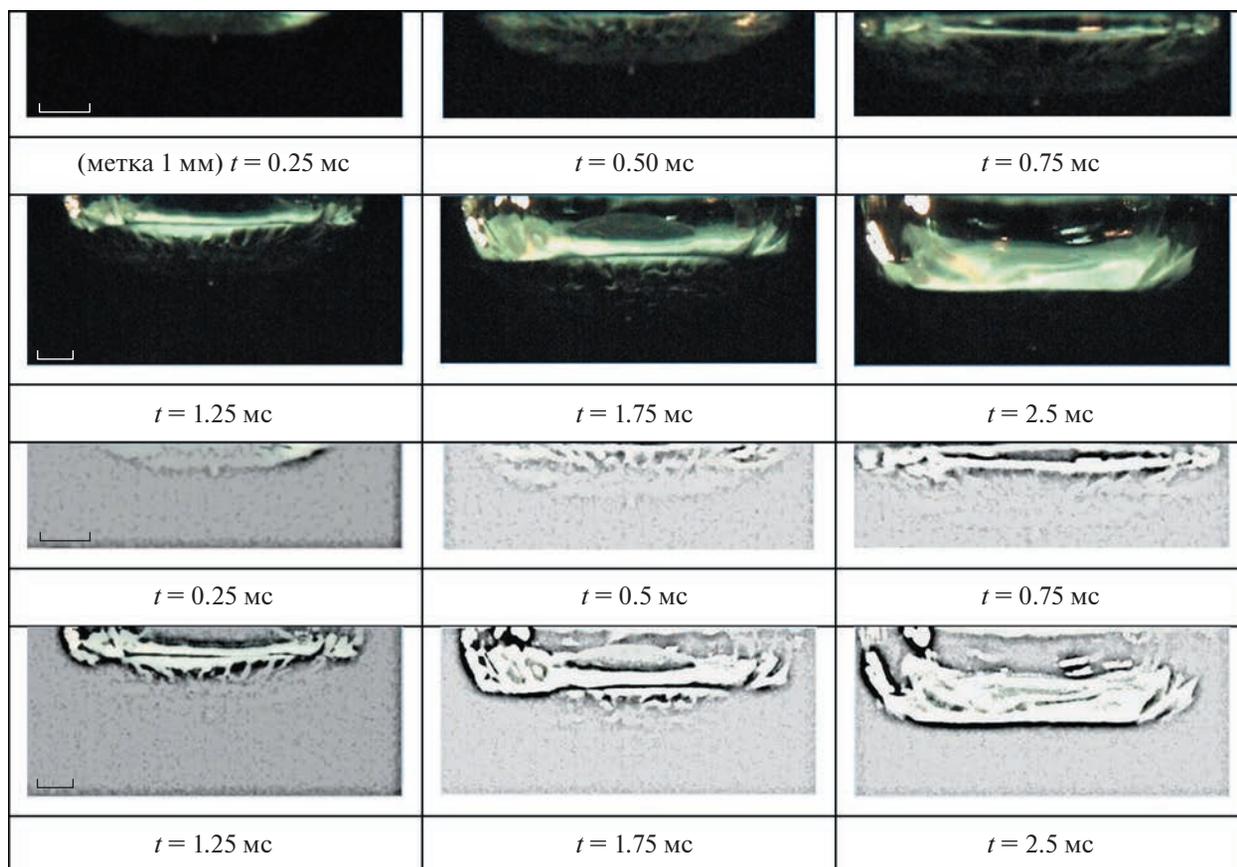


Рис. 4. Эволюция течения в начальной стадии слияния капли водного раствора гидрокарбоната натрия с водой ($D = 0.42$ см, $U = 3.1$ м/с, $Re = 11\,300$, $We = 650$, $Fr = 234$, $Bo = 2.8$, $Oh = 0.0023$, $E_k = 194$ мкДж, $E_G = 3.6$ мкДж, $E_R = 54$, $W_R = 1.9 \times 10^{-3}$, $R_p = -0.03$, скорость съемки 4000 к/с, экспозиция 1/20 000 с, разрешение 26 мкм/пикс, кадр 512×512).

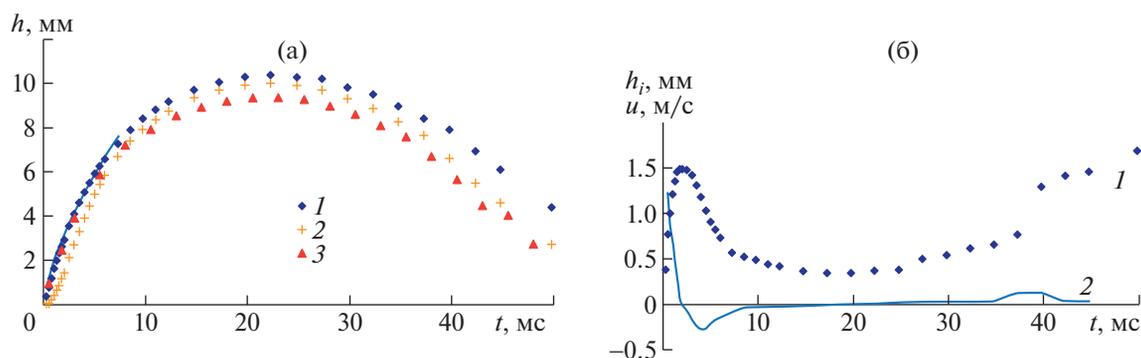


Рис. 5. Зависимости размеров компонентов течений от времени: *a* – полная глубина возмущения, кривые 1, 2 – при слиянии капли раствора гидрокарбоната натрия с водой, 3 – капли воды с раствором роданида аммония, сплошная кривая – $h(t) = 2t^{2/3}$, *б* – толщина промежуточного слоя и скорость его нижней кромки.

добные кривые на начальном участке аппроксимируются функцией $h(t) = 2t^{2/3}$, $h = [\text{мм}]$, $t = [\text{мс}]$.

При прочих равных условиях глубина каверны растет с увеличением плотности капли. Различие в значениях глубин областей возмущения увеличивается со временем и достигает $\Delta h = 2.4$ мм при $t = 43$ мс.

Объединенный график зависимости толщины и скорости продвижения нижней кромки промежуточного слоя от времени приведен на рис. 5б. В начальной фазе быстрого роста слоя скорость опускания его дна достигает $u_b = 1.2$ м/с при $t = 0.25$ мс. Далее наступает фаза деградации структуры, обусловленная прекращением роста воло-

кон и увеличением площади поверхности каверны. С началом схлопывания каверны при $t = 22.3$ мс начинают расти петли, длина которых немонотонно меняется со временем [15–17].

В проведенных опытах волокна, пронизывающие дно растущей каверны, образуются и при погружении капли легкой жидкости в тяжелую ($R_p = 0.03$), и тяжелой жидкости в легкую ($R_p = -0.03$), и при малой разности плотностей ($R_p = -0.01$). Образование волокон связано с изменением собственной микроструктуры воды и водных растворов [18, 19], сопровождающимся быстрым преобразованием внутренней энергии, ускоряющим формирование тонких струек. Поскольку эффективность капельных технологий во многих отраслях промышленности зависит от площади поверхности контакта жидкостей, преимущества получают физические условия образования волокон и петель максимальной длины.

БЛАГОДАРНОСТИ

Эксперименты проведены на стендах УИУ “ГФК ИПМех РАН”.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Worthington A.M.* On impact with a liquid surface // Proc. of the Royal Society of London. 1882. V. 34. Issue 217–230. https://books.google.it/ao/books?id=44vy9MMSc-Q0C&source=gbs_navlinks_s
2. *Engel O.G.* Crater depth in fluid impacts // J. Appl. Phys. 1966. V. 37. P. 388–394. <https://doi.org/10.1063/1.1708605>
3. *Brutin D.* Drop impingement on a deep liquid surface: study of a crater’s sinking dynamics // C. R. Mecanique. 2003. V. 331. P. 61–66. [https://doi.org/10.1016/S1631-0721\(02\)00014-1](https://doi.org/10.1016/S1631-0721(02)00014-1)
4. *Bisighini A., Cossali G.E., Tropea C., Roisman I.V.* Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target // Phys. Rev. Phys. Rev. E 82 (3, Pt.2), 036319. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036319>
5. *Fink J., Gault D., Greeley R.* The Effect of Viscosity on Impact Cratering and Possible Application to the Icy Satellites of Saturn and Jupiter // J. Geophys. Res.: Solid Earth. 1984. V. 89 (B1). P. 417–423.
6. *Berberovic E., van Hinsberg N.P., Jakirlic S., Roisman I.V., Tropea C.* Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: dynamics of the cavity evolution // Phys. Rev. 2009. V. E79. 036306. P. 1–15. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.036306>
7. *Zhang Y.J., Liu P.Q., Qu Q.L., Hu T.X.* Energy conversion during the crown evolution of the drop impact upon films // Intern. J. Multiph. Flow. 2019. V. 115. P. 40–61. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.03.023>
8. *Cai Y.K.* Phenomena of a liquid drop falling to a liquid surface // Experiments in Fluids. 1989. V. 37. P. 388–394. <https://doi.org/10.1063/1.857581>
9. *Ersoy N.E., Eslamiana M.* Capillary surface wave formation and mixing of miscible liquids during droplet impact onto a liquid film // Phys. Fluids. 2019. V. 31. 012107. <https://doi.org/10.1063/1.5064640>
10. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Распад капли на отдельные волокна на границе области контакта с принимающей жидкостью // Доклады РАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 497. С. 31–35. <https://doi.org/10.31857/S2686740021020139>
11. *Li E.Q., Thoraval M.-J., Marston J.O., Thoroddsen S.T.* Early azimuthal instability during drop impact // J. Fluid Mech. 2018. V. 848. P. 821–835. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.383>
12. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
13. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Полосчатые структуры в картине распределения вещества капли по поверхности принимающей жидкости // ДАН. 2018. Т. 481. № 2. С. 145–150. <https://doi.org/10.1134/S1028335818070066>
14. *Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика погружающейся капли: линейчатые структуры на поверхности венца // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 152–165. <https://doi.org/10.1134/S0015462817020144>
15. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Формирование системы наклонных петель в течениях импакта капли // Доклады. Физика, технические науки. 2021. Т. 499. С. 39–48. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040052>
16. *Müller S.C.* Observation of Chemical Reactions Induced by Impact of a Droplet // The micro-world observed by ultra high-speed cameras. K. Tsuji (ed.). Springer International Publishing. AG 2018. P. 343–354. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61491-5_16
17. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Визуализация областей контакта сред в течениях импакта капли с химическими реакциями // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 500. С. 39–47. <https://doi.org/10.31857/S2686740021050023>
18. *Маленков Г.Г.* Структура и динамика жидкой воды // Журнал структурной химии. 2006. Т. 47. Приложение. С. S5–S35.
19. *Маленков Г.Г.* Структура и динамика поверхности тонких пленок и микрокапель воды. // Коллоидный журнал. 2010. Т. 72. № 5. С. 649–659.
20. *Villermaux E.* Mixing Versus Stirring // Annual Review of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 51. С. 245–273. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010518-040306>
21. *Чашечкин Ю.Д.* Эволюция тонкоструктурного распределения вещества свободно падающей капли в

- смешивающихся жидкостях // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 3. С. 67–77.
<https://doi.org/10.1134/S0001433819020026>
22. Чашечкин Ю.Д. Перенос вещества окрашенной капли в слое жидкости с бегущими плоскими гравитационно-капиллярными волнами // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 2. С. 218–289.
<https://doi.org/10.31857/S0002351522020031>
23. Singh A., Kumar P. Droplet impact dynamics onto a deep liquid pool of wavy free surface // Phys. Fluids. 2022. 34. 022107.
<https://doi.org/10.1063/5.008453>
24. van Hinsberg N.P., Charbonneau-Grandmaison M. Single-drop impingement onto a wavy liquid film and description of the asymmetrical cavity dynamics // Phys Rev E. 2015. V. 92. 013004.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.013004>
25. УИУ “ГФК ИПМех РАН”:
<http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>.

TRANSFER OF A DROP MATERIAL DURING THE PRIMARY CAVERN FORMATION

Yu. D. Chashechkin^a and A. Yu. Plynykh^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev

The transfer of a freely falling drop matter in the bulk of a target fluid at rest at the stage of primary cavity formation was traced by high-speed video recording for the first time. In the experiments, drops of water, ink solution (diluted in a ratio of 1:100) or a saturated solution of baking soda with a diameter of $D = 0.43$ cm fell with velocity of $U = 3.1$ m/s into fresh water or a 20% ammonium thiocyanate solution in the splash formation mode. In all experiments, the wall of the growing cavity was penetrated by thin fibers containing drop matter, which form an intermediate fine-structured layer. After the end of the fiber growth stage with a duration of 7–8 ms, the diffusion smoothed the concentration gradients, a liquid shell of intermediate density with a thickness of 1.5 to 0.7 mm was formed around the growing cavity. The shell is separated by a sharp boundary from the target fluid. A new group of inclined fibrous loops was formed in the wake of the collapsing cavity.

Keywords: drop, cavity, fibers, intermediate layer

УДК 536.4/52-54

ОЦЕНКА ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛИТОСФЕРЕ РАННЕЙ ЛУНЫ

© 2023 г. С. А. Воропаев^{1,*}, А. П. Кривенко^{1,**}

Представлено академиком РАН М.Я. Маровым 13.04.2022 г.

Поступило 18.04.2022 г.

После доработки 18.04.2022 г.

Принято к публикации 10.08.2022 г.

На ранних этапах развития Луны ее растущая литосфера испытала сложные изменяющиеся во времени температурные и гравитационные напряжения. Несмотря на последующее интенсивное ударное преобразование поверхности, в ходе гравиметрической съемки космической миссии GRAIL было обнаружено наличие реликтовых глубинных разломов. Анализ линейных гравитационных аномалий показывает расширение внешнего жесткого слоя планеты на определенном раннем этапе эволюции Луны из-за превышения температурных напряжений над гравитационным сжатием. Получение зависимости временного интервала расширения литосферы от ряда безразмерных параметров теплопроводности позволит уточнить существующие модели тепловой и геохимической эволюции ранней Луны.

Ключевые слова: температурные напряжения, деформации, тепловое расширение, гравитация, радиоактивный разогрев, Луна

DOI: 10.31857/S2686740022060153, **EDN:** UOBXRU

Формирование коры и мантии ранней Луны сопровождалось возникновением температурных и гравитационных напряжений в растущей литосфере, с чем связаны особенности ее гравитационного поля, отражающие наличие реликтовых разломов и гравитационных аномалий (масконов). Космическая миссия GRAIL по изучению внешнего гравитационного поля Луны с помощью взаимного зондирования движения двух спутников на низкой орбите позволила обнаружить скрытые подповерхностные геологические структуры [1]. Предыдущие исследования ограничивались крупномасштабной съемкой низкого разрешения, при которой вклад только значительных объектов был заметен в сигнале. Тем не менее это позволило сделать ряд важных выводов о внутренней структуре Луны (малое ядро, реликтовый приливной выступ) и обнаружить гравитационные аномалии (масконы) под основными лунными морями [2]. GRAIL позволил довести разложение гравитационного поля по сферическим гармоникам до 420 порядка (модель GLA 0420A), что соответствует пространственно-

му разрешению ~13 км на поверхности планеты. Это сделало возможным исследование ранней эволюции Луны, поскольку ударными кратерами стерло большую часть геологической летописи первых ~700 млн лет ее истории.

Полученная карта распределения горизонтального градиента потенциала Буге отображает богатый набор коротковолновых структур в лунной коре. Особенно заметен ряд удлиненных линейных гравитационных аномалий (ЛГА), характеризующихся отрицательными градиентами, которые четко выделяются над фоновой изменчивостью. Четыре крупных ЛГА имеют протяженность более 500 км, оценка 22 наиболее отчетливых ЛГА дает общую протяженность 5300 км и еще 44 возможные аномалии имеют общую протяженность 8160 км [3]. Из земной геологии известно, что плоские магматические интрузии формируются перпендикулярно направлению растягивающего главного напряжения с образованием вертикальных даек в горизонтальном поле напряжений растяжения и складок в горизонтальном поле напряжений сжатия. Хотя локальные напряжения при изгибе литосферы могут изменять ориентацию интрузии, в общем ЛГА равномерно распределены по всей Луне и не показывают четкой предпочтительной ориентации или связи с морями. Эта закономерность указывает на изотропное глобальное горизонтальное расширение литосферы в прошлом.

¹Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: voropaev@geokhi.ru

**E-mail: krivenko@geokhi.ru

U–Pb-изотопные исследования большинства отобранных образцов морских базальтов показали возраст экструзии магмы в интервале примерно 3.9–3.1 млрд лет назад [4]. Геологические оценки времени формирования грабенов возле масконов указывают на глобальное прекращение этого процесса примерно 3.6 млрд лет назад [5]. Это накладывает временные ограничения как на тепловые модели, так и на смену режимов растяжение–сжатие литосферы ранней Луны. Анализ геофизических данных о текущем тепловом состоянии Луны на основе тепловых потоков, сейсмических данных и электромагнитного зондирования [6] показал, что внешние слои Луны являются субсолидусными. При этом, ниже примерно 1000 км, температуры, возможно, находятся на уровне точки плавления. Это подтверждает тот факт, что хрупкое разрушение в виде лунных землетрясений происходит примерно на глубине 1000 км. Таким образом, в силу малого размера Луны, ее магматический океан (МО) был ограничен по размеру и довольно быстро, по геологическим масштабам времени, закристаллизовался [7]. Магматические извержения моложе 3 млрд лет объясняются уже локальными причинами: значительными ударными событиями и сопровождавшими их подъемами мантийного вещества с последующим декомпрессионным плавлением.

Поскольку большую часть своей истории породы Луны были в субсолидусном состоянии, мы можем для оценки напряжений периода после застывания МО использовать простую сферически-симметричную модель твердого шара с однородным распределением радиоактивных изотопов в качестве внутреннего источника тепла. При расчете упругих деформаций литосферы Луны под действием внешних нагрузок может быть применена хорошо разработанная методика с использованием гравитационного (приливного, центробежного и др.) потенциала [8]. Результирующая сила \mathbf{F} в объеме тела может быть определена с помощью градиента полного потенциала

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \rho_0 \text{grad}[V(\mathbf{r})], \\ V(\mathbf{r}) &= V_g(\mathbf{r}) + V_\omega(\mathbf{r}) + V_t(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_0 – средняя плотность, V_g – гравитационный, V_ω – центробежный и V_t – приливной потенциалы. Для твердого шара радиуса R , в случае сферической симметрии всех нагрузок, вектор деформации \mathbf{u} имеет только радиальную компоненту $u(r)$, а тензоры деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} – радиальную и тангенциальную компоненты. Условия равновесия вещества в объеме изотропного тела под действием результирующей силы имеют вид

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) = -\mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \nu \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

где μ , λ – упругие постоянные Ламе, ν – коэффициент Пуассона, а E – модуль Юнга для вещества тела. Данные ограничения на поле деформаций должны быть дополнены граничными условиями нагрузки на поверхность. Если внешняя поверхность свободна от внешней нагрузки, как это обычно бывает для безатмосферных планет и малых тел, то $\sigma_{rr}(R) = 0$ при $r = R$.

Предположим, что изменение начальной температуры, T_0 , на $\Delta T = T - T_0$ не повлияло существенно на механические свойства лунных пород. Тогда единственным следствием нагрева будет возникновение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением с коэффициентом α . Эти деформации накладываются на упругие и должны быть учтены как вызывающие температурные напряжения. В таком случае, связь тензоров деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon - (2\mu + 3\lambda) \alpha \Delta T,$$

а выражение (1) обобщено как

$$\mathbf{F} = \rho_0 \text{grad}(V(\mathbf{r})) - (2\mu + 3\lambda) \alpha \text{grad}(\Delta T). \quad (3)$$

В силу линейности уравнения равновесия (2), удобно разделить решение для радиального смещения $u(r)$ с помощью (3) на две части: гравитационную u_G – с силой тяжести, $g(r) = dV_g/dr$, и температурную u_T – с $\alpha \Delta T(r)$:

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{d\left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_G)}{dr}\right)}{dr} = \rho_0 g(r) \frac{r}{R}, \quad (4a)$$

$$\frac{d^2 u_T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_T}{dr} - \frac{2u_T}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{d\Delta T}{dr}. \quad (4b)$$

Решение (4a), удовлетворяющее граничному условию $\sigma_{rr}(R) = 0$, при $r = R$ имеет вид

$$u = \rho_0 g_0 \frac{R(1+\nu)(1-2\nu)}{10E(1-\nu)} r \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right], \quad (5)$$

где $g_0 = G \frac{4}{3} \pi \rho_0 R$ – ускорение свободного падения на поверхности, G – гравитационная постоянная. Компоненты тензора напряжений σ_r и σ_r , можно представить в виде

$$\sigma_r = \rho_0 g_0 R \frac{3-\nu}{10} (1-\nu) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1 \right], \quad (6a)$$

$$\sigma_r = \rho_0 g_0 R \frac{1+3\nu}{10} (1-\nu) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{3-\nu}{1+3\nu} \right]. \quad (6b)$$

Легко заметить, что при любом значении коэффициента Пуассона в разумном интервале, $\nu = 0-0.5$, компоненты σ_r и σ_t отрицательны, что указывает на общее сжатие пород под действием гравитации.

Решение (4б) имеет общий вид:

$$u(r) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\alpha}{r^2} \int_a^r T(x)x^2 dx + C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad (7)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями; a – удобный нижний предел интегрирования, например, нижняя граница литосферы Луны; $T(r)$ – отклонение температуры ΔT от начальной, при которой напряжения полагаются нулевыми. В этом случае, согласно (7), компоненты тензора напряжений σ_r и σ_t , можно представить как

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2\alpha E}{(1 - \nu)r^3} \int_a^r T(x)x^2 dx + \\ &+ \frac{EC_1}{(1 - 2\nu)} - 2\frac{EC_2}{(1 + \nu)r^3}, \\ \sigma_t &= \frac{2\alpha E}{(1 - \nu)r^3} \int_a^r T(x)x^2 dx + \frac{EC_1}{(1 - 2\nu)} + \\ &+ \frac{EC_2}{(1 + \nu)r^3} - \frac{\alpha E T(r)}{(1 - \nu)}. \end{aligned}$$

Для сплошного шара $a = 0$ и при смещении в центре $u(0) = 0$, $C_2 = 0$. Тогда при свободной от нагрузок внешней поверхности

$$\frac{EC_1}{(1 - 2\nu)} = \frac{2\alpha E}{(1 - \nu)R^3} \int_0^R T(x)x^2 dx,$$

а компоненты тензора напряжений (7) принимают вид

$$\sigma_r = 2\alpha \frac{E}{(1 - \nu)} \left[\frac{1}{R^3} \int_0^R T(x)x^2 dx - \frac{1}{r^3} \int_0^r T(x)x^2 dx \right], \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \alpha \frac{E}{(1 - \nu)} \left[\frac{1}{r^3} \int_0^r T(x)x^2 dx + \right. \\ &\left. + \frac{2}{R^3} \int_0^R T(x)x^2 dx - T(r) \right]. \quad (8б) \end{aligned}$$

Средняя температура сферы $\check{T}(r)$ внутри радиуса r составит

Таблица 1. Значения теплогенерации основных радиоактивных элементов в земных недрах

Изотоп	Q , Вт/кг	$t_{1/2}$, лет	Концентрация C , кг/кг
^{238}U	9.37×10^{-5}	4.47×10^9	25.5×10^{-9}
^{235}U	5.69×10^{-4}	7.04×10^8	0.185×10^{-9}
U	9.71×10^{-5}	–	25.7×10^{-9}
^{232}Th	2.69×10^{-5}	1.40×10^{10}	103×10^{-9}
^{40}K	2.79×10^{-5}	1.25×10^9	32.9×10^{-9}
K	3.56×10^{-9}	–	25.7×10^{-5}

$$\check{T}(r) = \frac{4\pi \int_0^r T(x)x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r^3} \int_0^r T(x)x^2 dx. \quad (9)$$

Следовательно, радиальное напряжение σ_r при любом радиусе r пропорционально разности между средней температурой всей сферы $\check{T}(R)$ и средней температурой сферы радиуса r $\check{T}(r)$:

$$\sigma_r = \frac{2}{3} \alpha \frac{E}{1 - \nu} [\check{T}(R) - \check{T}(r)]. \quad (10a)$$

Аналогично, для тангенциального напряжения σ_t

$$\sigma_t = \alpha \frac{E}{1 - \nu} \left[\check{T}(r) - T(r) + \frac{2}{3} (\check{T}(R) - \check{T}(r)) \right]. \quad (10б)$$

Из данных выражений легко увидеть, что горячая внутренняя часть вызывает радиальное сжатие более холодной внешней поверхности $\sigma_r < 0$, с одновременным ее тангенциальным растяжением $\sigma_t > 0$.

Для определения величины и временного поведения температуры в недрах Луны необходимо оценить мощность внутренних источников тепла. Нестабильные изотопы ^{26}Al , ^{60}Fe и другие короткоживущие изотопы могли обеспечивать теплогенерацию лишь первые несколько миллионов лет существования Солнечной системы. Радиоактивный разогрев мантии и коры как Земли, так и Луны происходил в основном за счет распада долгоживущих изотопов урана ^{235}U и ^{238}U , тория ^{232}Th и ^{40}K . Удельная теплогенерация Q , связанная с этими элементами, и их периоды полураспада приведены в табл. 1 [9].

Тепловыделение подсчитано на основе современных средних значений концентрации радиоактивных элементов в мантии Земли. Полагая общий источник вещества при формировании Земли и Луны, оценочно можно принять схожие значения концентраций и для мантии Луны.

Таблица 2. Значения $\mu_n = k_n R$ для различных $Bi = HR$

$Bi = HR$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0.05	0.3854	4.5045	7.7317	10.9087	14.0697	17.2237
2	2.0288	4.9132	7.9787	11.0856	14.2075	17.3364
8	2.7654	5.6078	8.5406	11.5408	14.5817	17.6567
16	2.9476	5.9080	8.8898	11.8959	14.9251	17.9742

Описанная выше длительность магматической активности Луны – примерно 1 млрд лет, указывает на вероятный источник тепла – радиоактивный распад нестабильного изотопа калия ^{40}K с периодом полураспада 1.25 млрд лет. Соответственно, удельное тепло $w(t)$, выделявшееся в недрах ранней Луны, будет определяться первоначальной концентрацией ^{40}K и зависеть от времени по закону

$$w(t) = w_0 \exp(-\lambda t), \quad \text{где } w_0 = Q_0 \rho_0, \quad (11)$$

где константа λ связана с периодом полураспада простым соотношением:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{1.25 \times 10^9 \text{ лет}} = 5.54 \times 10^{-10} \text{ год}^{-1}.$$

Будем считать, что в некоторый (начальный для расчетов) момент времени Луна оказывается в среде с постоянной температурой $T_c < T$, а теплообмен между поверхностью планеты и окружающей средой происходит по закону Ньютона. Это отображает в первом приближении сложный лучистый и конвективный теплообмен, в котором доля лучистого потока тепла является преобладающей. Решение упрощенного уравнения теплопроводности для сферически симметричной Луны радиуса R , с однородным распределением плотности $\rho(r) = \rho_0$ и теплоемкости слагающих пород $C_p(r, t) = C$, позволяет аналитически оценить поведение температуры со временем

$$\frac{\partial(rT(r,t))}{\partial t} = a \frac{\partial^2[rT(r,t)]}{\partial r^2} + \frac{w_0}{C} \rho_0 r e^{-\lambda t}, \quad (12)$$

$$0 \leq r \leq R,$$

с известными граничными и начальными условиями:

$$-\frac{\partial(T(R,t))}{\partial r} + H(T_c - T(R,t)) = 0 \quad \text{при } r = R,$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0; \quad (13)$$

$$T(r,0) = f(r) = T_0 \quad \text{при } t = 0,$$

где r – текущее радиальное расстояние от центра планеты, a – коэффициент температуропроводности пород Луны, H – коэффициент теплообмена.

Вид уравнения (11) позволяет найти общее решение методом разделения переменных:

$$\theta(r,t) = T(r,t) - T_c = -\frac{w_0}{C} \rho_0 k_0 \exp(-\lambda t) +$$

$$+ A \frac{\sin(k_0 r)}{r} e^{-\lambda t} + C_n \frac{\sin(k_n r)}{r} \exp(-k_n^2 a t),$$

где $k_0^2 a = \lambda$ и $\frac{\partial(\theta(R,t))}{\partial r} = -H\theta(R,t)$ при $r = R$. Начальное условие $T_0 = \text{const}$ при $t = 0$ определяет возможные значения k_n следующим выражением для $\mu_n = k_n R$:

$$\text{tg}(\mu_n) = -\frac{\mu_n}{HR - 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Некоторые частные решения уравнения (14) приведены в табл. 2.

В безразмерной форме, с помощью разложения Фурье, поведение температуры представляется в виде

$$\Theta = \frac{T(r,t) - T_0}{T_0 - T_c} = 1 + \text{Po} \cdot \exp(-\lambda t) \times$$

$$\times \left[1 - \text{Bi} \cdot \frac{\sin(k_0 r)}{(r/R)} / (k_0 R \cos(k_0 R) + \sin(k_0 R)(\text{Bi} - 1)) \right] +$$

$$+ \sum_n C_n(\text{Bi}, \mu_n) \exp(-\mu_n^2 a t / R^2) \sin(\mu_n r / R) / (r/R) \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\text{Po}}{\left(1 - \frac{\mu_n^2}{(k_0 R)^2} \right)} \right],$$

где

$$C_n(\text{Bi}, \mu_n) =$$

$$= 2 \cos(\mu_n) \frac{\text{Bi}}{\text{Bi} - 1} (\mu_n - \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)). \quad (15)$$

Безразмерные величины Bi (параметр Био), Pd (критерий Предводителя) и Po (критерий Померанцева) хорошо известны из теории теплопроводности [10] как $Bi = HR$, $\text{Po} = \frac{w_0}{C} \rho_0 \lambda (T_0 - T_c)$

и $\text{Pd} = (k_0 R)^2 = \lambda \frac{R^2}{a} = \ln(2) \frac{t^*}{t_{1/2}}$, где $t^* = \frac{R^2}{a}$. Их

физический смысл определяется как безразмерные отношения скоростей теплообмена с внешней средой, внутренней теплогенерации и охлаждения за счет теплопроводности. На рис. 1 приведены два примера временного поведения

безразмерной температуры $\Theta = \frac{T(r,t) - T_0}{T_0 - T_c}$ с глубиной при различных значениях величин Bi , Po и Pd .

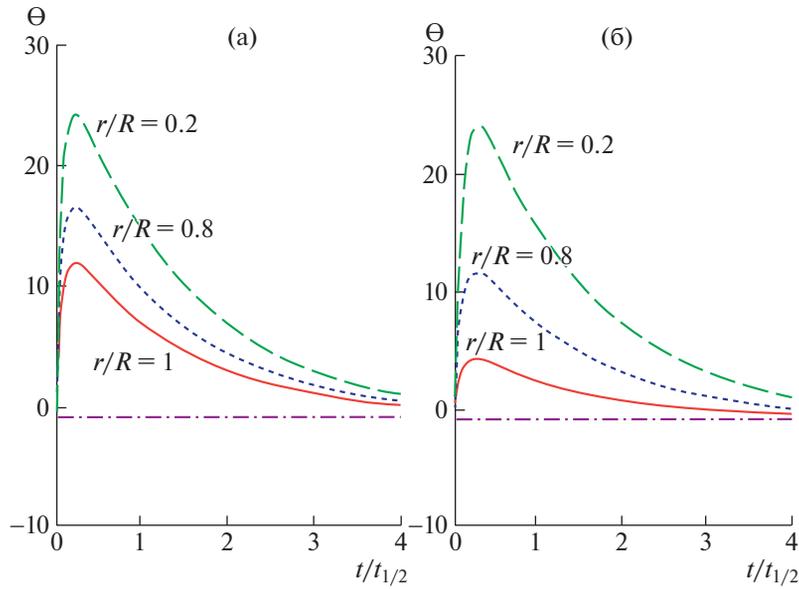


Рис. 1. Временное поведение $\Theta = \frac{T(r,t) - T_0}{T_0 - T_c}$ на разных глубинах: (а) $Bi = 2, Po = 450, Pd = 0.2$; (б) $Bi = 8, Po = 300, Pd = 0.5$.

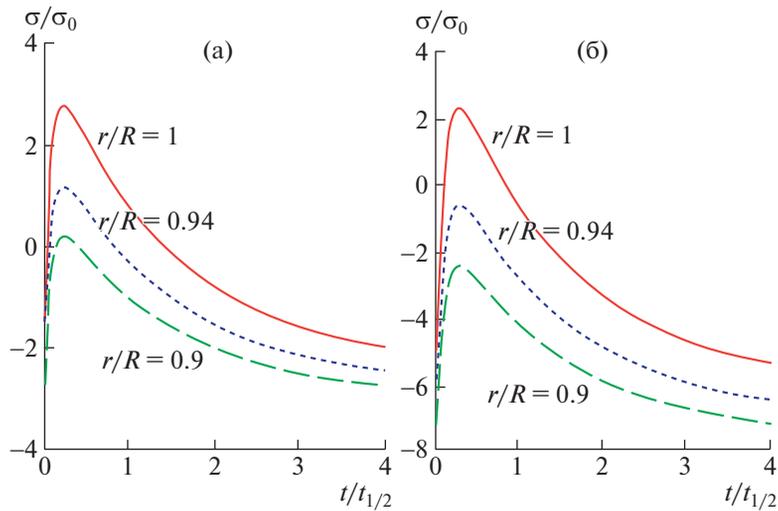


Рис. 2. Временное поведение σ_r/σ_0 на разных глубинах литосферы, $\nu = 0.2$: (а) $Bi = 2, Po = 450, Pd = 0.2, p = 2$; (б) $Bi = 8, Po = 300, Pd = 0.5, p = 5$.

Заметно, что большая интенсивность теплообмена с окружающей средой (см. рис. 1б, $Bi = 8$) способствует более холодной литосфере, при сравнимом поведении температуры в мантии.

Общее тангенциальное напряжение в недрах планеты определяется суммой выражений (6б) и (10б) в безразмерной форме:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{1 - \nu} \left\{ \left[\Theta(r) - \Theta(r) + \frac{2}{3}(\Theta(R) - \Theta(r)) \right] + p(1 + 3\nu) \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{3 - \nu}{1 + 3\nu} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$\sigma_0 = \alpha E(T_0 - T_c),$$

$$p = \rho_0 g_0 \frac{R}{10} \alpha E(T_0 - T_c),$$

где $\Theta(r)$ – средняя безразмерная температура сферы радиуса r согласно (9); p – новый безразмерный параметр, определяемый отношением гравитационных и температурных напряжений. Для оценки возможного интервала значений параметра p мы используем как физические величины, хорошо известные для Луны: $\rho_0 \approx 3300 \text{ кг/м}^3$, $g_0 \approx 1.63 \text{ м/с}^2$ и $R \approx 1730 \text{ км}$, так и приближительные, характерные для схожих горных пород (ба-

зальты): $\alpha \approx 1-10 \times 10^{-6}$ 1/град, $E \approx 10-100$ ГПа, $T_0 - T_c \approx 100-1000^\circ\text{C}$: $p \approx 1-10$. На рис. 2 приведены два примера временного поведения тангенциального напряжения с глубиной в литосфере при различных значениях величин V_i , P_0 и P_d , использованных нами ранее при оценке поведения температуры.

Заметно, что большая интенсивность теплообмена с окружающей средой (см. рис. 2б, $V_i = 8$) способствует более быстрому переходу от расширения к сжатию в более холодной литосфере.

Приведенные расчеты температурных напряжений в литосфере ранней Луны показали принципиальную применимость использованной простой тепловой модели. На основе точных решений, возможных в сферически-симметричной постановке задачи теплопроводности, получено качественно правильное временное поведение температуры и напряжений, согласующееся с геологическими данными. Для типичных параметров горной породы: $\alpha \approx 10^{-5}$ 1/градус, $E \approx 60$ ГПа, $\nu \approx 0.2$ и $T_0 - T_c \approx 100^\circ\text{C}$, максимальное общее растягивающее напряжение в литосфере Луны могло достигать 120 МПа. Это большая величина, вполне достаточная для образования трещин и разломов [11]. Более точная модель должна учитывать неоднородное распределение радиоактивных элементов в мантии Луны и зависимость физических параметров (плотность, температуропроводность) от глубины в соответствии с уравнением состояния [12]. Такое уточненное рассмотрение требует уже численного моделирования и является предметом последующей работы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-17-00120).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zuber M.T. et al. Gravity field of the Moon from the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) mission // *Science*. 2013. V. 339. P. 668–671. <https://doi.org/10.1126/science.1231507>
2. Zuber M.T., Smith D.E., Lemoine F.G., Neumann G.A. The shape and internal structure of the Moon from the Clementine mission // *Science*. 1994. V. 266. P. 1839–1843. <https://doi.org/10.1126/science.266.5192.1839>
3. Andrews-Hanna J.C. et al. Ancient Igneous Intrusions and Early Expansion of the Moon Revealed by GRAIL Gravity Gradiometry // *Science*. 2012. V. 339. P. 675–678. <https://doi.org/10.1126/science.1231753>
4. Shearer C.K. et al. Thermal and Magmatic Evolution of the Moon // *Reviews in Mineralogy & Geochemistry*. 2006. V. 60. P. 365–518. <https://doi.org/10.2138/rmg.2006.60.4>
5. Solomon S., Head J. W. Lunar mascon basins: Lava filling, tectonics, and evolution of the lithosphere // *Rev Geophys Space Phys*. 1980. V. 18. P. 107–141.
6. Hood L.L., Zuber M.T. Recent refinements in geophysical constraints on lunar origin and evolution / In: *Origin of the Earth and Moon*. Canup R.M., Righter K. (eds). Univ Arizona Press, 2000. P. 397–412.
7. Elkins-Tanton L.T. Magma Oceans in the Inner Solar System // *Annual Review Earth Planetary Science*. 2012. V. 40. P. 113–139.
8. Воропаев С.А., Джуанго Я., Барриот Ж.-П. Разрыв вытянутого малого тела приливными силами при полете: возможные сценарии // *Астрономический вестник*. 2020. Т. 54. № 2. С. 171–182.
9. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. М.: Мир, 1985. Т. 1. 381 с.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1987. 602 с.
11. Воропаев С.А., Нугманов И.И., Душенко Н.В., Джуанго Я. Зависимость упругих свойств Н5-хондритов (NWA 12370) от давления // *ДАН. Физика, Технические науки*. 2020. Т. 495. С. 14–17.
12. Жарков В.Н., Трубицын В.П., Самсоненко Л.В. Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. М.: Наука, 1971. 383 с.

ASSESSMENT OF TEMPERATURE STRESSES IN THE LITHOSPHERE OF THE EARLY MOON

S. A. Voropaev^a and A. P. Krivenko^a

^a*Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS M.Ya. Marov

In the early stages of the Moon's formation, its growing lithosphere experienced complex time-varying temperature and gravitational stresses. Despite the subsequent intense impact transformation of the surface, during the gravimetric study of the GRAIL space mission, the presence of ancient deep intrusions was detected. The analysis of linear gravitational anomalies shows the expansion of the outer rigid layer of the planet at a certain early stage of the Moon's evolution due to the excess of temperature stresses over gravitational compression. Obtaining the dependence of the time interval of the lithosphere expansion on a number of dimensionless thermal conductivity parameters will make it possible to refine existing models of the thermal and geochemical evolution of the early Moon.

Keywords: temperature stresses, deformations, thermal expansion, gravity, radioactive heating, Moon

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, А. А. Кожемяченко^{1,**}, А. В. Фаворская^{1,***}

Поступило 08.08.2022 г.

После доработки 08.08.2022 г.

Принято к публикации 10.10.2022 г.

Целью исследования является применение сеточно-характеристического метода на структурированных сетках в различных задачах, связанных с железнодорожной безопасностью транспорта; получение результатов полного волнового моделирования с использованием данного численного метода и их анализ для лучшего понимания физических процессов, происходящих в условиях тяжеловесного и высокоскоростного движения на различных участках пути. К задаче исследования относится рассмотрение движения поезда по балластному и безбалластному мостовому полотну. В ходе компьютерного моделирования были получены и проанализированы различные волновые поля и динамические распределения давления и компонент тензора напряжений Коши при движении состава по железнодорожному пути. Произведена оценка времени, за которое происходит распространение волновых процессов в различных конструкциях моста. Полученные результаты дают представление о волновых явлениях при движении подвижного состава в зоне мостов и по железнодорожному пути в целом.

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, численное моделирование, система “колесо–рельс”, волновые явления, железнодорожный путь

DOI: 10.31857/S2686740023010091, EDN: UNNMET

Актуальность исследования распределения динамической нагрузки при движении подвижного состава в зоне мостов обуславливается необходимостью более глубокого изучения волновых процессов и их влияния на конструкцию пролетного сооружения, для возможного их учета при анализе безопасности того или иного строения. В работах [1–3] В.Ю. Поляковым и Н.Т. Дангом исследована проблема устойчивого движения железнодорожного состава на высокоскоростных магистралях, обустроенных на мостах. В работе показано, что при движении поезда по безбалластному железнодорожному полотну моста усилие на контакте “колесо–рельс” может упасть ниже допустимого предела, что приводит к отрыву колеса от рельса и последующему ударному взаимодействию, сила которого может быть эквивалентна силе удара, возникающей при ударном взаимодействии незакатанного ползуна и рельса (более 300 кН). Подобные явления существенно увеличивают риск схода железнодорож-

ного состава, что в условиях движения по мосту может привести к тяжелым последствиям. Отрыв колеса от железнодорожного полотна связан с колебаниями пролетных строений и параметрами демпфирования системы, которые существенно отличаются, так как в безбалластной конструкции моста отсутствуют сильные демпферы, такие как земляное полотно или насыпь (балласт). Таким образом, достижение проектной скорости железнодорожного состава на том или ином пролетном сооружении оказывается под вопросом, в связи с более ранним достижением критической скорости, вызывающей резонанс пролетных строений мостов, что, в свою очередь, приводит к отрыву колес от рельсов. В [4, 5] В.М. Бельковым железнодорожное полотно представлено в виде слоистой среды, состоящей из рельса, подкладки, шпалы, щебня, песчаной подушки и суглинка. Для моделирования используются аппарат линейного гармонического анализа и теория волновых процессов. В работе А.А. Воробьева [6], посвященной анализу контакта в системе “колесо–рельс”, отмечается, что величина и распределение контактных напряжений существенно зависят от профилей рельса и колеса и вида контакта, причем при конформном профиле площадь пятна контакта увеличивается, что приводит к снижению значения контактных напряжений. Изу-

¹ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: kozhemyachenko@phystech.edu

***E-mail: favorskaya@phystech.edu

чено влияние тангенциального усилия на взаимодействие в системе “колесо–рельс”, вследствие которого могут возникать дополнительные пластические деформации в материале вблизи поверхности катания, что приводит к образованию областей потенциального разрушения материала. Анализ напряженного-деформированного состояния колеса и рельса был проведен также с использованием конечно-элементного подхода в моделировании. Различные аналитические подходы по оценке усилия в контакте “колесо–рельс” предложены в [7, 8].

В настоящей работе авторами используется сеточно-характеристический метод для расчета волновых процессов в железнодорожном полотне, представленном в виде многослойной гетерогенной линейно-упругой среды. В настоящее время данный метод в основном применяется для решений задач сейсморазведки [9, 10], неразрушающего контроля и ультразвуковой дефектоскопии [11], в том числе железнодорожных рельсов [12, 13] и др. Стоит отметить, что для решения класса задач численного моделирования, связанных с расчетом волновых процессов в железнодорожных рельсах, применяются также метод конечных элементов (FE) [14], разрывный метод Галеркина, методы конечных разностей и их модификации [15], полуаналитический конечно-элементный метод (SAFE) [16], используется коммерческое закрытое программное обеспечение ANSYS [17].

Проведенное авторами исследование в области железнодорожной безопасности с использованием сеточно-характеристического метода является продолжением таких работ, как [12, 18]. В [12] на примере численного моделирования задачи ультразвуковой дефектоскопии показана невозможность определения некоторых дефектов на практике без глубокого анализа волновых процессов при суперкомпьютерном моделировании. Используя аналитический подход из [8], в [18] было разработано граничное условие, учитывающее три стадии взаимодействия поврежденного колеса с железнодорожным полотном, а также проведено моделирование распределения динамической нагрузки при движении элемента подвижного состава.

Для описания линейно-упругой сплошной среды и отыскания скорости движения \mathbf{v} и симметричного тензора Коши $\boldsymbol{\sigma}$ используется следующая система уравнений:

$$\rho \mathbf{v}_t = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})^T, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость, $\boldsymbol{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений Коши, ∇ – вектор-градиент, ρ – плотность, λ, μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала, \mathbf{I} – единичный

тензор второго ранга, \otimes – тензорное произведение векторов, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

Для численного решения системы (1)–(2) применяется сеточно-характеристический численный метод. С его помощью можно использовать корректные численные алгоритмы для расчета граничных точек и точек контактирующих сред, имеющих разные параметры Ляме и/или плотности. В двумерном случае система (1)–(2) представима в следующем виде:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_x + \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_y = 0,$$

где \mathbf{q} – это составленный из двух компонент скорости и трех компонент симметричного тензора напряжений вектор,

$$\mathbf{q} \in \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T.$$

Далее после расщепления по двум направлениям по каждому из них получается система вида

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_x = 0. \quad (3)$$

Система (3) гиперболическая. Поэтому у матрицы \mathbf{A}_1 существует набор линейно независимых собственных векторов, и она представима в виде

$$\mathbf{A}_1 = \boldsymbol{\Omega}^1 \boldsymbol{\Lambda}^1 (\boldsymbol{\Omega}^1)^{-1},$$

где матрица $\boldsymbol{\Omega}^1$ составлена из левых собственных векторов, а собственные значения матрицы \mathbf{A}_1 есть элементы диагональной матрицы $\boldsymbol{\Lambda}^1 = \text{diag}\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, 0\}$. Здесь $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость продольных волн, а $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – поперечных.

Теперь (3) запишется в виде:

$$\mathbf{q}_t + \boldsymbol{\Omega}^1 \boldsymbol{\Lambda}^1 (\boldsymbol{\Omega}^1)^{-1} \mathbf{q}_x = 0.$$

После перехода к инвариантам Римана $\mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}$ каждая из систем (3) распадается на пять независимых скалярных уравнений переноса, которые решаются с помощью метода характеристик, либо обычными конечно-разностными схемами.

Для учета граничных условий вводится тело a и тело b . В случае условия полного сцепления выполняются следующие условия для скорости контактной границы \mathbf{V} и плотности внешних сил \mathbf{f} :

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^b = \mathbf{V},$$

$$\mathbf{f}^a = -\mathbf{f}^b.$$

В работе используется также условие свободной границы: $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0$, которое означает отсутствие напряжений вдоль границы области интегрирования, а также неотражающие граничные условия.

Для задания внешней силы \mathbf{f} в зоне контакта железнодорожного колеса с рельсом используется разработанное граничное условие в соответ-

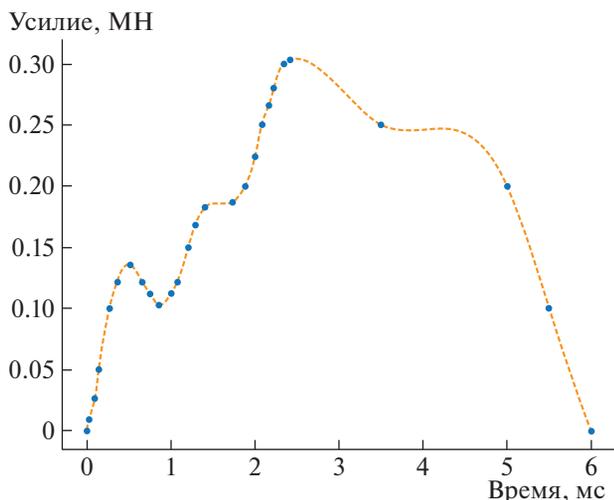


Рис. 1. Усилие в контакте “колесо–рельс” при ударном взаимодействии.

ствии с формулами из [18] или усилие в контакте “колесо–рельс” из [1–3], представленное на рис. 1.

На рис. 2 показана область интегрирования, на основе моделей поперечных срезов балластного и безбалластного мостов согласно «Техническим указаниям по устройству и конструкции мостового полотна на железнодорожных мостах ОАО “РЖД»». Используемые параметры упругих сред представлены в табл. 1.

Рассмотрим область интегрирования, изображенную на рис. 2. Между слоями сред выставлены контактные условия полного слипания. На левой границе обеих областей для каждой из сред ставятся неотражающие граничные условия в связи с тем, что каждая область интегрирования из рис. 2 – это половина реального ж/д пути. Для всех границ рельса (кроме нижней), верхних неконтактных границ шпала, насыпи, несущей конструкции моста выставлено условие свободной границы. Шаг по времени $\tau = 10^{-7}$ с, шаги по пространству $h_x = 10^{-3}$ м, $h_y = 10^{-3}$ м. На верхней границе головки рельса задается распределение внешней силы f .

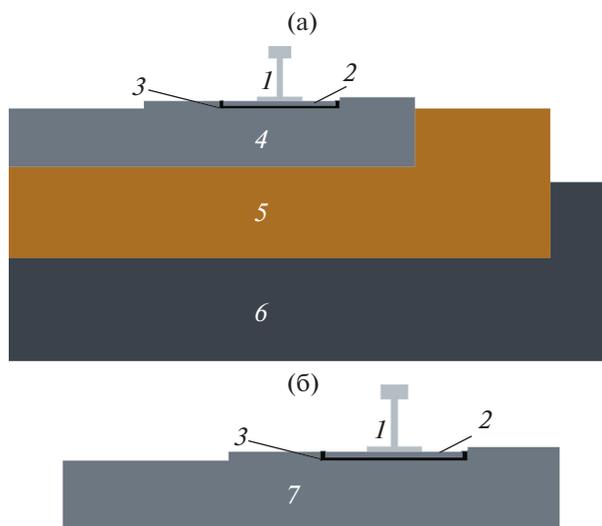


Рис. 2. Модель балластного (а) и безбалластного (б) мостового полотна: 1 – рельс, 2 – подкладка, 3 – резиновая прокладка, 4 – шпала, 5 – балласт, 6 – несущая конструкция, 7 – железобетонная плита.

Мост был рассмотрен как многослойная линейно-упругая среда, а его приближенная геометрическая модель соответствует типовым проектам при строительстве мостов с балластным слоем и без него. В [1–3] показана возможность отрыва колесной пары при движении состава по безбалластному мостовому полотну с последующими сериями ударов. Характерное время ударного взаимодействия колеса и рельса составило $5-7 \times 10^{-3}$ с, а время возрастания усилия в контакте от нуля до максимального значения 303 кН может составлять 2×10^{-3} с. В связи с чем было высказано предположение о возможном влиянии волновых процессов, происходящих за время ударного взаимодействия, на дальнейший отрыв колеса от рельса ввиду их значительной скорости распространения в материалах, из которых состоит мостовое полотно.

На рис. 3 представлены результаты моделирования распространения волнового возмущения, источником которого был импульс постоянной

Таблица 1. Параметры упругости сред в составе ж/д пути на мосту

Часть ж/д пути	Материал	Скорость Р-волн, м/с	Скорость S-волн, м/с	Плотность, кг/м ³
Рельс	Сталь	5740	3092	7800
Шпала	Железобетон	4200	2200	2500
Насыпь	Щебень	500	300	1400
Подкладка КБ-65	Сталь	6200	3000	7650
Резиновая прокладка	Резина	1400	27	1500
Несущая конструкция	Сталь	6200	3000	7650

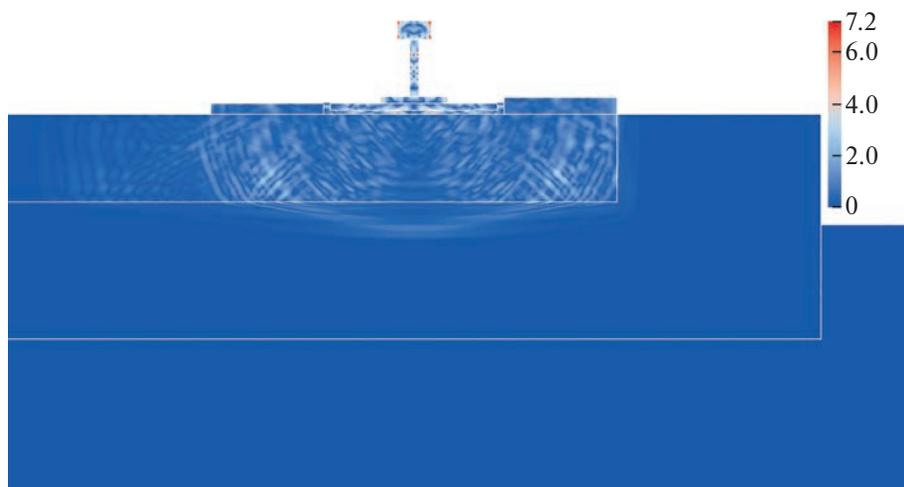


Рис. 3. Распространение волнового фронта по конструкции мостового полотна с балластом в момент времени 24×10^{-5} с.

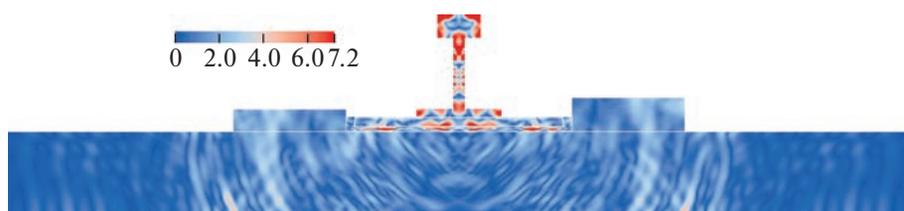


Рис. 4. Распространение волнового фронта по конструкции безбалластного мостового полотна в момент времени 24×10^{-5} с.

величины, в мостовом полотне с ездой на балласте, а именно распределение поля скоростей.

Рассмотрим теперь волновые поля, полученные для модели безбалластного мостового полотна (см. рис. 4). На рис. 3, 4 единицы измерения модуля скорости даны в пикометрах в секунду.

Вполне закономерно, что волновые поля в первые моменты времени напоминают ранее полученные результаты для мостового полотна с ездой на балласте, однако только в момент времени $t = 12 \times 10^{-5}$ с волновой фронт отражается от свободной границы железобетонной плиты. Также на рис. 4 можно наблюдать отражение волнового фронта на линии раздела сред стальной подкладки КБ-65 и резиновой прокладки. Благодаря проведенной симуляции распространения постоянного импульса видно, что характерное время распространения волновых процессов в исследуемой модели многослойной среды много меньше общего времени ударного взаимодействия из [1–3].

Результаты численных экспериментов показывают, что характерное время распространения волновых откликов от материалов, входящих в состав железнодорожного пути, которое составило $t \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ с, что на один или два порядка

меньше времени ударного взаимодействия колеса и рельса при отрыве первого от последнего.

Полученные результаты дают полное представление о волновых явлениях, происходящих при высокоскоростном и тяжеловесном движении поезда в области мостов. Они могут быть использованы для дальнейших фундаментальных исследований в области численного моделирования задач железнодорожной безопасности, включая изучение сложных динамических процессов, возникающих при движении поезда по мосту.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН по теме № FNEF-2022-0005 “Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых и реагирующих средах с использованием многопроцессорных вычислительных систем”, Рег. № 1021060708369-1-1.2.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляков В.Ю., Данг Н.Т. Безопасность движения и динамические свойства мостового полотна на ВСМ // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2018. Т. 77.

- № 6. С. 357–363.
<https://doi.org/10.21780/2223-9731-2018-77-6-357-363>
2. Поляков В.Ю., Данг Н.Т. Ударное взаимодействие колеса и рельса на мостах высокоскоростных магистралей // Интернет-журнал “Транспортные сооружения”. 2019. № 1.
<https://doi.org/10.15862/15SATS119>
 3. Поляков В.Ю., Данг Н.Т. Безбалластное мостовое полотно на ВСМ // Мир транспорта. 2018. Т. 16. № 2. С. 36–55.
 4. Бельков В.М. Моделирование вибродемпфирующих свойств упруговязкопластических слоев земляного полотна. Постановка задачи 1 // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2017. Т. 76. № 3. С. 187–192.
<https://doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-3-187-192>
 5. Бельков В.М. Моделирование вибродемпфирующих свойств упруговязкопластических слоев земляного полотна. Постановка задачи 2 // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. 2017. Т. 76. № 5. С. 312–320.
<https://doi.org/10.21780/2223-9731-2017-76-5-312-320>
 6. Воробьев А.А. Контактное взаимодействие колеса и рельса // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2009. № 3 (39). С. 42–47.
 7. Bogdevicius M., Zygiene R., Bureika G., Dailydka S. An analytical mathematical method for calculation of the dynamic wheel–rail impact force caused by wheel flat // Vehicle system dynamics. 2016. V. 54. № 5. P. 689–705.
<https://doi.org/10.1080/00423114.2016.1153114>
 8. Loktev A.A., Sychev V.P., Buchkin V.A., Bykov Y.A., Andreichikov A.V., Stepanov R.N. Determination of the pressure between the wheel of the moving railcar and rails subject to the defects // Proc. 2017 International Conference “Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies”, IT and QM and IS. 2017. P. 748–751.
<https://doi.org/10.1109/ITMQIS.2017.8085934>
 9. Nikitin I.S., Golubev V.I. Higher order schemes for problems of dynamics of layered media with nonlinear contact conditions // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2022. V. 274. P. 273–287.
https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0_19
 10. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // Journal of Computational Physics. 2021. V. 446. Art. № 110637.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110637>
 11. Favorskaya A.V., Muratov M.V. Ultrasonic study of sea ice ridges // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2022. V. 309. P. 259–268.
https://doi.org/10.1007/978-981-19-3444-5_23
 12. Петров И.Б., Кабисов С.В., Фаворская А.В. Моделирование ультразвуковых волн в железнодорожных рельсах с явным выделением дефектов // ДАН. 2018. Т. 481. № 1. С. 20–23.
 13. Favorskaya A.V., Khokhlov N.I. Using Chimera grids to describe boundaries of complex shape // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2022. V. 309. P. 249–258.
https://doi.org/10.1007/978-981-19-3444-5_22
 14. Nejad R.M. Using three-dimensional finite element analysis for simulation of residual stresses in railway wheels // Engineering Failure Analysis. 2014. V. 45. P. 449–455.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.07.018>
 15. Бархатов В.А. Моделирование ультразвуковых волн методом конечных разностей во временной области. Двумерная задача. Оптимальные алгоритмы. Анализ погрешностей. Поглощающие области вблизи границ сетки // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 58–75.
 16. Bartoli I., Marzani A., di Scalea F.L., Viola E. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section // Journal of Sound and Vibration. 2006. V. 295. № 3–5. P. 685–707.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.021>
 17. Zumpano G., Meo M. A new damage detection technique based on wave propagation for rails // International Journal of Solids and Structures. 2006. V. 43. № 5. P. 1023–1046.
<https://doi.org/10.1117/12.541536>
 18. Кожемяченко А.А., Петров И.Б., Фаворская А.В., Хохлов Н.И. Граничные условия для моделирования воздействия колес на железнодорожный путь // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 9. С. 1587–1603.
<https://doi.org/10.31857/S0044466920090112>

SIMULATION THE VIBRATIONS OF RAILWAY STRUCTURES BY THE GRID-CHARACTERISTIC METHOD

Corresponding Member of the RAS I. B. Petrov^a, A. A. Kozhemyachenko^a, and A. V. Favorskaya^a

^a *Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The aim of the study is to apply the grid-characteristic method on structured grids in various problems related to railway traffic safety; obtaining the results of full wave modeling using this method and analyzing them for a better understanding of the physical processes occurring in conditions of heavy and high-speed traffic on various sections of the track. The problem is to consider the traffic on a ballast and non-ballast bridge desk. In the course of computer simulation, various wave fields and dynamic distributions of the pressure and components of the Cauchy stress tensor were obtained during the traffic. An estimate of the calculation time during which the propagation of wave processes occurs in various bridge structures was made. The results obtained give an idea of wave phenomena during the traffic in the area of bridges and along the railway track as a whole.

Keywords: grid-characteristic method, numerical simulation, wheel-rail system, wave phenomena, railway track

УДК 550.377

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ БУРИ НА ОБЪЕДИНЕННУЮ ЭНЕРГЕТИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ЦЕНТРА РОССИИ

© 2023 г. А. А. Тренькин¹, С. В. Воеводин¹, О. Н. Коблова¹, член-корреспондент РАН В. Д. Селемир¹, В. В. Вахнина^{2,*}, А. А. Кувшинов², А. Н. Черненко²

Поступило 30.08.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принято к публикации 12.10.2022 г.

Представлены результаты расчетного моделирования воздействия ожидаемых при сильной магнитной буре геоиндуцированных токов на Объединенную энергетическую систему Центра России. Показано, что при таком воздействии возникает комплекс факторов, способный вызвать развитие системной аварии: значительное снижение напряжения на ряде объектов энергетической системы, массовое отключение линий электропередачи действием релейной защиты и недопустимый нагрев элементов конструкций некоторых силовых трансформаторов.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, геомагнитная буря, геоиндуцированный ток, подмагничивание трансформаторов, системная авария

DOI: 10.31857/S2686740023010108, EDN: UNPFOP

Во время геомагнитных бурь (ГМБ) в земной коре возникают геоиндуцируемые токи (ГИТ), которые втекают в глухозаземленные нейтрали силовых трансформаторов (СТ) и вызывают их подмагничивание. В результате чего происходит значительное увеличение тока намагничивания СТ, рост потребляемой ими реактивной мощности, генерация высших гармоник, недопустимый нагрев элементов конструкции СТ [1–9]. Указанные факторы могут являться причиной повреждения мощного оборудования, сбоев в работе систем релейной защиты (РЗ) и автоматики и вызывать крупные системные аварии.

Негативные воздействия ГИТ на электроэнергетические системы (ЭЭС) с высоким экономическим ущербом неоднократно происходили во время сильных магнитных бурь, преимущественно в высокоширотных районах [4–6]. В этой связи многие промышленно развитые страны предпринимают значительные усилия, направленные на защиту или снижение тяжести последствий от негативных воздействий космической погоды и других электромагнитных факторов на свою критическую инфраструктуру.

Актуальность повышения надежности электроснабжения не только в высокоширотных областях связана с тем, что с ростом интенсивности ГМБ области максимального воздействия смещаются в направлении низких широт. При сильных ГМБ максимальное воздействие ожидается на магнитных широтах 40°–60° [10], куда попадает энергонасыщенная часть территории России.

Для расчета режимов работы Объединенной энергетической системы (ОЭС) Центра России при воздействии ГИТ разработана ее модель, включающая наиболее мощные объекты (электрические станции, трансформаторные подстанции) и линии электропередачи (ЛЭП), образующие электрическую сеть с номинальным напряжением 500 и 750 кВ (рис. 1). В модель входят 10 электростанций, 31 подстанция, 12 ЛЭП 750 кВ и 61 ЛЭП 500 кВ. Связь со смежными ОЭС осуществляется через подстанции: три выхода 750 кВ и шесть – 500 кВ.

Исходные данные по параметрам индуцируемого при ГМБ геоэлектрического поля взяты из американского стандарта [11], что обусловлено отсутствием отечественной нормативной документации, касающейся вопросов воздействия ГМБ на ЭЭС.

Ввиду сложности решаемой задачи для исследования воздействия ГМБ на ЭЭС выделен ряд наиболее существенных эффектов – изменение реактивной мощности и температуры элементов конструкции СТ при их подмагничивании, а также работа РЗ ЛЭП. Исходя из этого, была развита

¹ Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Нижегородская область, Россия

² Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Самарская область, Россия

*E-mail: vvhahina@yandex.ru

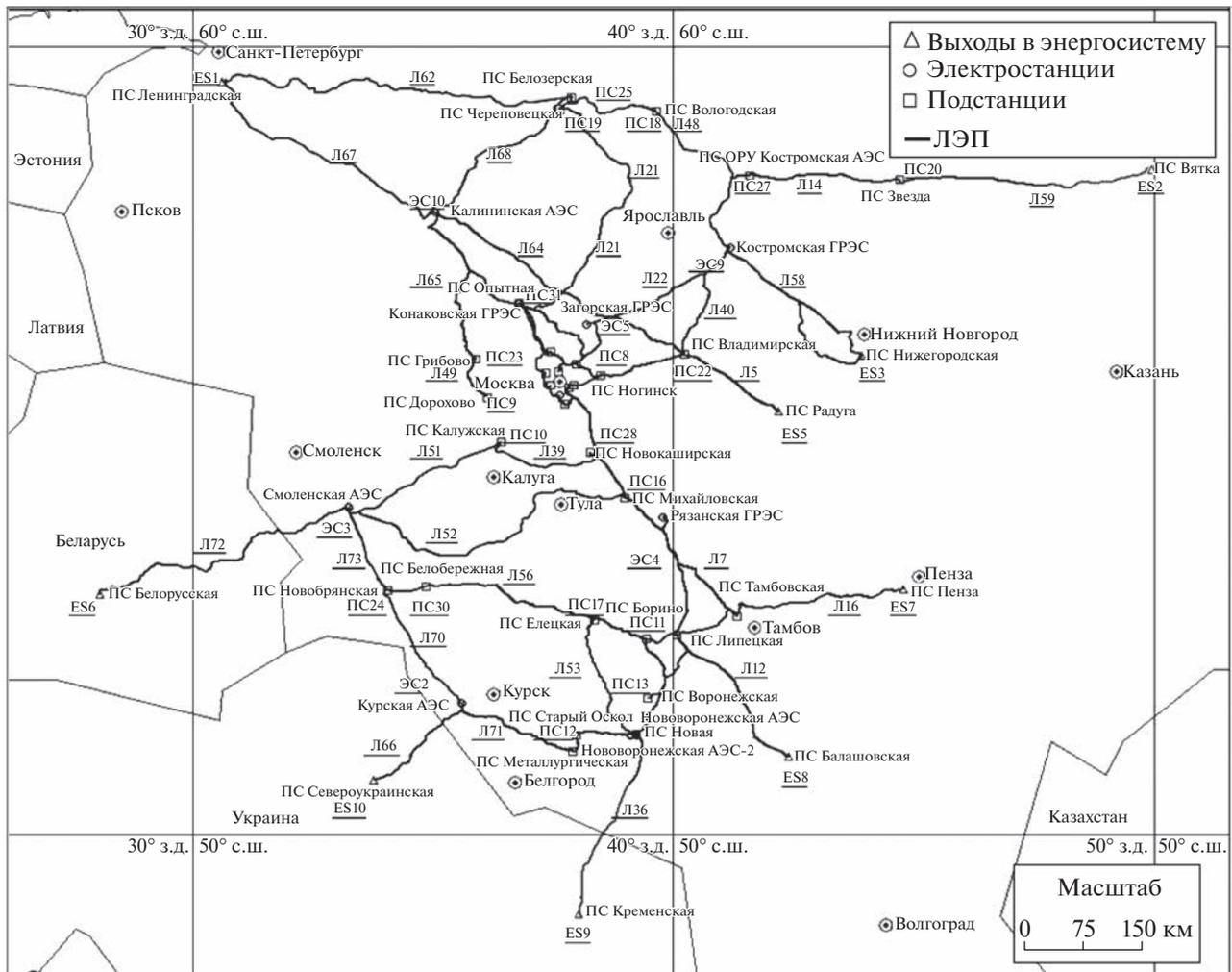


Рис. 1. Расположение объектов модели ОЭС Центра.

методология моделирования (рис. 2), заключающаяся в следующем.

Интегрирование вектора напряженности геоэлектрического поля вдоль трасс ЛЭП дает вариации напряжения между заземляющими устройствами СТ. Для каждого силового трансформатора проводятся расчеты величины тока подмагничивания i_0 , вычисляется временная зависимость потерь реактивной мощности ΔQ_p , вызванная насыщением магнитных систем СТ [12]. Результаты определения ΔQ_p на объектах (Q-модель) являются исходными данными для расчета “утяжеленных” (послеаварийных) установившихся режимов и оценки нагрева элементов конструкции СТ.

Расчеты исходного и последующих утяжеленных режимов проводятся с использованием соответствующей модели (U-модель), построенной с учетом полных схем замещения электроэнергетических объектов. При этом на стороне высокого напряжения СТ подключается дополнительная,

вызванная ГИТ, изменяющаяся во времени реактивная нагрузка. Затем рассчитываются действующие значения напряжений на шинах объектов и согласно нормативным требованиям [13] оценивается степень влияния воздействий ГИТ на модель ОЭС Центра.

Эффект форсировки возбуждения генераторов электростанций моделировался путем увеличения перед началом расчетов на 50% уровня вырабатываемой ими реактивной мощности по сравнению с номинальным.

При моделировании работы систем РЗ, а именно III ступени дистанционной защиты, было принято, что характеристика ее срабатывания для всех линий соответствует характеристике, реализованной в шкафу защиты типа ШЭ2710-521.

Также выполнялись расчеты температуры наиболее нагретой точки СТ – прессующей (стяжной) пластины при его намагничивании [9]. При этом полагалось, что параметры тепловой

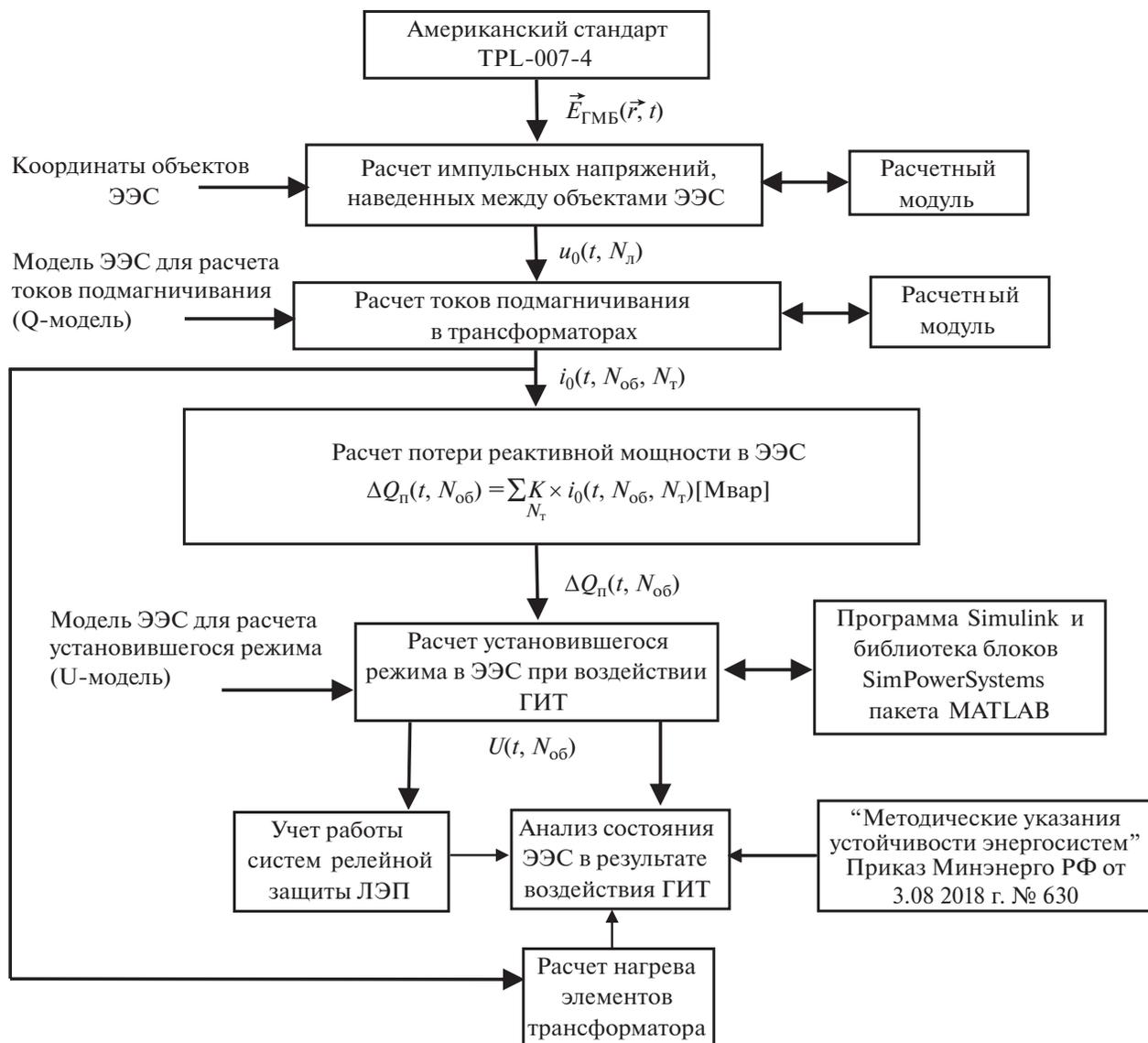


Рис. 2. Блок-схема расчетного моделирования воздействия ГИТ на ЭЭС. $\vec{E}_{ГМБ}$ – напряженность электрического поля на поверхности земли при ГМБ; u_0 – импульс напряжения, индуцируемый между объектами; i_0 – ток подмагничивания трансформатора; $N_{об}$, N_L , N_T – соответственно, номера объектов (электростанции или подстанции), линий электропередачи, трансформаторов на объекте; ΔQ_p – потери реактивной мощности, вызванные подмагничиванием трансформатора.

модели СТ такие же, как у однофазного мощностью 167 МВ·А напряжением 400 кВ из [14].

В результате моделирования получено, что максимальная суммарная потеря реактивной мощности в силовых трансформаторах ОЭС Центра из-за воздействия ГИТ составляет 20% от ее суммарной генерации. Наиболее тяжелому воздействию подвергается подстанция ПС20, где относительные потери реактивной мощности составили 66%. Заметное снижение напряжения происходит на подстанциях ПС9, ПС18, ПС19, ПС23, ПС25. На остальных объектах сохраняется номинальный уровень напряжения.

Учет работы РЗ устанавливает каскадное отключение, как минимум, девяти ЛЭП 500 кВ: Л6, Л22–Л24, Л31, Л34, Л40, Л44, Л45 в течение 30 с.

Наибольшему тепловому воздействию подвержены СТ подстанций ПС18 и ПС20: на ПС20 максимальной перепад температур составил 92 К, а на ПС18 – 67 К. В этом случае возникает вероятность пробоя изоляции СТ или срабатывания его газовой защиты: на ПС20 – при температуре масла $\theta_m > 88^\circ\text{C}$, а на ПС18 – при $\theta_m > 113^\circ\text{C}$ [15].

Таким образом, проведенное моделирование воздействия геомагнитной бури на ОЭС Центра России свидетельствует о высокой вероятности развития крупной системной аварии и возмож-

ном выходе из строя некоторых силовых трансформаторов. При этом с учетом используемых допущений по воздействующим факторам геомагнитной бури и параметрам модели ОЭС Центра данный результат, по-видимому, следует рассматривать как оптимистичный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пилипенко В.А.* Воздействие космической погоды на наземные технологические системы // Солнечно-земная физика. 2021. Т. 7. № 3. С. 72–110. <https://doi.org/10.12737/szf-73202106>
2. *Kappenman J.* (Oak Ridge National Laboratory / Metatech Corporation) Geomagnetic storms and their impacts on the U.S. power grid [Electronic resource]: Goleta, California; 2010 January. Available at: https://www.ferc.gov/industries/electric/industry/reliability/cybersecurity/ferc_Meta-R-319.pdf (20.09.2017) – Meta-R-319.
3. *Селиванов В.Н., Баранник М.Б., Билин В.А. и др.* Анализ результатов многолетнего мониторинга токов в нейтральных автотрансформаторов // Вестник МГТУ. 2018. Т. 21. № 4. С. 607–615. <https://doi.org/10.21443/1560-9278-2018-21-4-607-615>
4. *Bolduc L., Langlois P., Boteler D., et al.* A study of geoelectromagnetic disturbances in Quebec, 2. Detailed analysis of a large event // IEEE Transactions on Power Delivery. 2000. V. 15. Iss. 1. P. 272–278. <https://doi.org/10.1109/61.847262>
5. *Kappenman J.G.* An overview of the impulsive geomagnetic field disturbances and power grid impacts associated with the violent Sun-Earth connection events of 29–31 October 2003 and a comparative evaluation with other contemporary storms // Space Weather. 2005. V. 3. Iss. 8. S08C01. <https://doi.org/10.1029/2004SW000128>
6. *Pulkkinen A., Lindal S., Viljanen A., et al.* Geomagnetic storm of 29–31 October 2003: Geomagnetically induced currents and their relation to problems in the Swedish highvoltage power transmission system // Space Weather. 2005. V. 3. Iss. 8. S08C03. <https://doi.org/10.1029/2004SW000123>
7. *Вахнина В.В.*, ред. Механизмы воздействия квазипостоянных геоиндуцированных токов на электрические сети. М.: Инфра-Инженерия, 2018. 256 с.
8. *Кувшинов А.А.*, ред. Влияние квазипостоянных токов на электродинамическую стойкость силовых трансформаторов: элементы теории и методы испытаний. В 2 ч. М.: НТФ “Энергопрогресс”, 2019.
9. Transformer Thermal Impact Assessments for DC Withstand Capability: Examining the Impacts of Geomagnetically Induced Current (GIC) on Transformer Thermal Performance: EPRI, Palo Alto, CA: 2019. – 3002017708.
10. *Pulkkinen A., Bernabeu E., Eichner J., et al.* Generation of 100-year geomagnetically induced current scenarios // Space Weather. 2012. V. 10. S04003. <https://doi.org/10.1029/2011SW000750>
11. NERC Standard TPL-007-4: Transmission System Planned Performance for Geomagnetic Disturbance Events. March 19, 2020.
12. *Воеводин С.В.* Аналитическое выражение для тока возбуждения силового трансформатора при его подмагничивании геоиндуцированным током. В сб.: Пятнадцатая ежегодная конференция “Физика плазмы в солнечной системе”; 10–14 февраля 2020 г. Москва; 2020. Доступно по: <https://plasma2020.cosmos.ru/docs/PLASMA-2020-IKI-AbstractBook.pdf>.
13. Методические указания по устойчивости энергосистем: требования к обеспечению надежности электроэнергетических систем, надежности и безопасности объектов электроэнергетики и энергопринимающих установок, утверждены приказом Минэнерго России от 03.08.2018 № 630.
14. *Picher P., Bolduc L., Dutil A., et al.* Study of the Acceptable DC Current Limit in Core-Form Power Transformer // IEEE Transactions on Power Delivery. 1997. V. 12. № 1. P. 163–168. <https://doi.org/10.1109/61.568248>
15. Силовые трансформаторы. Справочная книга / Под. ред. С.Д. Лизунова, А.К. Лоханина. М.: Энергоиздат, 2004. 616 с.

A STUDY OF IMPACT OF STRONG MAGNETIC STORM ON CONSOLIDATED POWER SYSTEM OF CENTRE OF RUSSIA

A. A. Trenkin^a, S. V. Voevodin^a, O. N. Koblova^a, Corresponding Member of the RAS V. D. Selemir^a, V. V. Vakhnina^b, A. A. Kuvshinov^b, and A. N. Chernenko^b

^a Federal Nuclear Center of Russia – All-Russia Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Russia

^b Togliatti State University, Togliatti, Russia

This article represents results of simulation of geomagnetically induced current impact on Consolidated power system of Centre of Russia during strong magnetic storm. The paper shows that complex of factors appears during this impact which can induce progress of blackout: significant decrease of voltage on a set of electrical power elements, mass cutoff of power transmission lines under the influence of relay protection and dangerous heating of construction elements of power transformers.

Keywords: electrical power system, geomagnetic storm, geomagnetically induced current, magnetic bias of transformers, blackout

УДК 629.78

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ЗАМКНУТЫХ УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТАХ

© 2023 г. А. С. Филатьев^{1,2,*}, А. А. Голиков^{1,3}

Представлено академиком РАН С.Л. Чернышевым 04.07.2022 г.

Поступило 28.07.2022 г.

После доработки 28.07.2022 г.

Принято к публикации 10.10.2022 г.

Рассмотрена задача стабилизации космических аппаратов на ультранизких (для Земли 120–250 км) орбитах с помощью воздушного электрореактивного двигателя, использующего газы окружающей атмосферы в качестве рабочего тела. Выделяются качественные отличия воздушных электрореактивных двигателей от традиционных электроракетных двигателей и на основании фундаментальных законов механики и электродинамики обосновываются необходимые условия существования космических аппаратов с воздушным электрореактивным двигателем на замкнутых ультранизких орбитах.

Ключевые слова: космический аппарат, ультранизкие орбиты, воздушный электрореактивный двигатель, электроракетный двигатель, стабилизация орбиты

DOI: 10.31857/S2686740023010030, EDN: TKVMTU

Значительный интерес в мире к стабилизации космических аппаратов (КА) на ультранизких (для Земли 120–250 км) орбитах (УНО) обусловлен их значительными преимуществами по энергетике выведения и эффективности использования для связи и мониторинга поверхности планет [1]. Однако аэродинамическое сопротивление на этих высотах достаточно велико, что при пассивном полете не позволяет замкнуть орбиты, и время жизни КА исчисляется неделями и часами. Использование традиционных двигателей, в том числе электроракетных двигателей (ЭРД), принципиально не решает проблемы из-за необходимости запастись на борту большую массу топлива. Поэтому перспектива длительного существования КА на таких высотах связывается с воздушными электрореактивными двигателями (ВЭРД), для которых окружающая разреженная атмосфера является рабочим телом. Исследования ВЭРД в настоящее время проводятся во многих странах [2–4], но до практической реализации они не до-

ведены. Одной из причин этого может являться представление о ВЭРД как о простом сопряжении традиционных ЭРД с воздухозаборником. Вместе с тем имеются качественные отличия ВЭРД от традиционных ЭРД, которые определяют условия существования КА с ВЭРД на замкнутых УНО.

1. ПРЕИМУЩЕСТВА УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТ

Рассмотрим основные объективные преимущества УНО.

Снижение высоты полета КА h при одинаковой апертуре системы наблюдения поверхности планеты приводит к уменьшению предельно различимого на изображении размера объекта наблюдения Δ (улучшению разрешения изображения) пропорционально высоте:

$$\Delta \sim h. \quad (1)$$

При том же разрешении необходимый линейный размер (апертура) системы наблюдения также сокращается пропорционально высоте:

$$l \sim h. \quad (2)$$

Как правило, размеры КА определяются размерами размещаемой на нем целевой аппаратуры. В таком случае для выполнения задач наблюдения объем V и, следовательно, масса КА $m_{КА}$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский авиационный институт, Москва, Россия

³ Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская область, Россия

*E-mail: filatyev@yandex.ru

Таблица 1

Характеристика	Выигрыш
Разрешение изображения земной поверхности при заданной апертуре	3–6 раз
Требуемый объем и масса КА при том же разрешении	22–200 раз
Энергетика выведения КА для решения той же задачи наблюдения	25–300 раз
Масса и объем приемника спутниковой связи при той же передающей аппаратуре	8–35 раз
Масса и объем передатчика спутниковой связи при той же принимающей аппаратуре	8–35 раз
Срок службы электронных комплектующих из-за снижения радиационного фона	~8–16 раз
Снижение вероятности столкновения с космическим мусором [1, 6]	более 70 раз

пропорциональны кубу линейного размера системы наблюдения и с учетом (2):

$$V \sim l^3 \sim h^3, \quad m_{КА} \sim V \sim h^3. \quad (3)$$

Для КА связи оценим изменение потока мощности W_c передающей/принимающей аппаратуры при снижении высоты. Поскольку площадь пропорциональна квадрату линейного размера, то в соответствии с законом сохранения энергии излучения и предположением, что масса m_c такой аппаратуры пропорциональна потоку мощности, получим:

$$W_c \sim h^2, \quad m_c \sim W_c \sim h^2. \quad (4)$$

Для околоземных орбит УНО лежат ниже пояса высокого радиационного фона, что существенно снижает радиационное воздействие на электронные комплектующие, увеличивая их срок службы (по оценке [5], примерно в 8–16 раз).

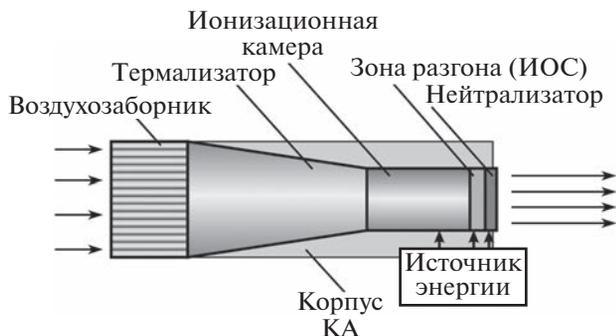


Рис. 1. Схема ВЭРД.

В табл. 1 показана в соответствии с (1)–(4) оценка выигрыша в массо-габаритных характеристиках при замене низкой околоземной орбиты высотой 700 км на УНО (нижняя граница выигрыша – для 250 км, верхняя – 120 км).

2. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОТЛИЧИЯ ВОЗДУШНОГО ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ ОТ ЭЛЕКТРОРАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Схема ВЭРД показана на рис. 1. Свободномолекулярный поток с орбитальной скоростью КА (для Земли ~7.8 км/с) поступает через сотовый воздухозаборник в термализационную камеру, где после диффузного отражения от стенок частицы газа приобретают сравнительно небольшие тепловые скорости с хаотическим направлением. При этом концентрация газа значительно возрастает (на один-два порядка). Термализованный газ частично перераспределяется в ионизационную камеру (ИК), где происходит его ионизация, например, электронами, эмитируемыми с нагревательного катода [7]. Далее в ионно-оптической системе (ИОС) плазма ускоряется электростатическим полем до требуемых скоростей и, наконец, реактивная плазменная струя нейтрализуется за счет притока свободных электронов. Ионизация и ускорение, в принципе, могут быть организованы разными способами и средствами, в том числе без катода и ИОС [8].

Такая схема ВЭРД дает формальные основания считать, что он состоит из традиционного ЭРД, в котором изменена схема подачи рабочего тела: из окружающей атмосферы через воздухозаборник и термализатор, а не из резервуара на борту КА. Вместе с тем, несмотря на схожие общие черты, КА с ВЭРД и КА с ЭРД имеют принципиальные отличия.

В ЭРД используется топливо с заранее заданными плотностью и химическим составом (часто это ксенон), оптимальным по удельным энергетическим затратам на единицу тяги. В то время как ВЭРД использует забортный газ, состав и плотность которого сильно варьируется в зависимости от состояния атмосферы. При этом средняя молекулярная масса атмосферных газов значительно меньше, а энергия ионизации выше, чем у ксенона и других традиционных рабочих газов ЭРД. Длительная эксплуатация элементов ВЭРД в среде со значительной долей активного атомарного кислорода является дополнительной проблемой.

Возможность ионизации топлива при концентрации, зависящей от внешних атмосферных условий, является фундаментальной проблемой для ВЭРД. Если не рассматривать использование хранящегося на борту топлива, то концентрация

молекул газа в ИК n , определяемая конфигурацией воздухозаборника, термализатора и характеристиками внешней атмосферы, должна превышать допустимый пороговый уровень [9]:

$$n \geq n_{\text{adm}}, \quad (5)$$

что ограничивает сверху допустимую высоту полета.

Еще одно отличие ВЭРД от ЭРД связано с ролью атмосферы. Для КА с ЭРД атмосфера является однозначно вредным фактором, а топливо — ценным невозобновляемым ресурсом. Тяга ЭРД не зависит от высоты, а сопротивление экспоненциально растет при ее снижении, поэтому возможность компенсации аэродинамического сопротивления тягой ЭРД определяет ограничение снизу допустимой высоты полета.

Для КА с ВЭРД атмосферные газы являются источником одновременно и сопротивления, и тяги. Как будет показано ниже, условие их баланса не содержит плотности атмосферы и, следовательно, непосредственно не накладывает ограничения снизу на допустимую высоту полета. Для ВЭРД такое ограничение обусловлено только энергетическими возможностями.

В ЭРД, которые на практике используются в системах ориентации или как маршевые двигатели в открытом космосе, главная задача — максимизировать тягу на единицу располагаемой мощности. Для этого используют рабочее тело с максимально возможной молекулярной массой (например, ксенон), а скорость истечения, как правило, постоянна и равна максимально достижимой при располагаемой мощности.

В ВЭРД нет возможности выбирать молекулярную массу и массовый расход рабочего тела. Поэтому для компенсации непрерывно меняющегося аэродинамического сопротивления имеется единственная возможность — управление скоростью истечения.

Разница между рассматриваемыми типами двигателей проявляется и при оптимизации компоновки КА. Поскольку тяга ЭРД задана, то оптимизация компоновки КА с ЭРД сводится к минимизации его аэродинамического сопротивления. Для оптимизации же КА с ВЭРД корректна только интегральная постановка, т.е. одновременное рассмотрение в едином взаимосвязанном комплексе задач формирования тяги, снижения аэродинамического сопротивления, энергообеспечения и управления полетом. Тем самым постановка задачи оптимизации КА с ВЭРД приближается к аналогичной задаче для высокоскоростного самолета.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ВОЗДУШНЫМ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ НА ЗАМКНУТЫХ УЛЬТРАНИЗКИХ ОРБИТАХ

Учитывая перечисленные выше особенности ВЭРД, сформулируем три необходимых условия для возможности стабилизации замкнутой УНО для КА с ВЭРД.

При исследовании и разработке КА с ВЭРД следует учитывать общие требования, обеспечивающие возможность длительного удержания КА на орбите. Выполнение этих требований может зависеть от взаимного влияния характеристик ВЭРД, аэродинамической формы и траектории КА.

Во-первых, для возможности инициации плазмы и ее стабильного горения требуется выполнение условия (5), которое перепишем в форме критерия для концентрации газа в ИК:

$$\varphi_n = \frac{n}{n_{\text{adm}}} \geq 1. \quad (6)$$

Экспериментальная оценка n_{adm} для плазменно-ионного двигателя (ПИД) ЦАГИ [10]:

$$n_{\text{adm}} \approx (1-2) \times 10^{18} \text{ м}^{-3}, \quad (7)$$

что близко к данным других авторов для такого типа двигателей [11, 12].

Концентрация атмосферного газа n_{∞} на высотах УНО в соответствии со стандартом [13] при среднем уровне солнечной и геомагнитной активности:

$$\begin{aligned} n_{\infty}(h = 120 \text{ км}) &= 4.7 \times 10^{17} \text{ м}^{-3}, \\ n_{\infty}(h = 250 \text{ км}) &= 1.5 \times 10^{15} \text{ м}^{-3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнение (7) и (8) показывает, что требуется повышение концентрации газа в ИК ВЭРД по сравнению с окружающей атмосферой. Для этих целей служат воздухозаборники. Пассивные соотопы воздухозаборники способны увеличить концентрацию газа в 300–400 раз [12, 17] и, тем самым, обеспечить выполнение условия (6) в некотором диапазоне высот.

Только часть молекул набегающего потока может быть использована для создания тяги. Введем эффективность забора газа, определяемую как отношение массы газа, прошедшего через зону разгона, к массе газа, поступающего в воздухозаборник в единицу времени: $\eta_c = \mu_{\text{out}}/\mu_{\text{in}}$. Другая часть газового потока μ_{back} выходит из воздухозаборника навстречу набегающему потоку, так что закон сохранения массы дает: $\mu_{\text{in}} = \mu_{\text{out}} + \mu_{\text{back}}$. В силу термализации молекул при отражении от стенок, средняя скорость обратного потока равна средней тепловой скорости молекул u при температуре

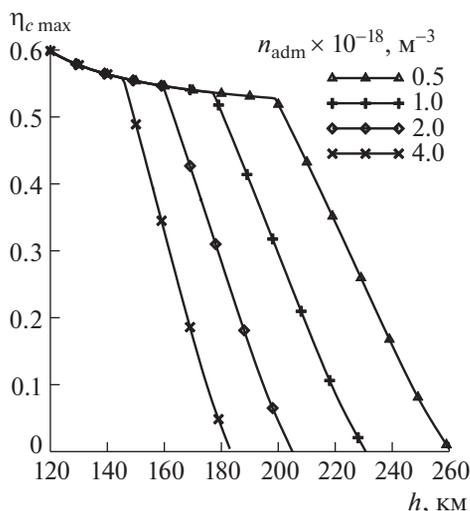


Рис. 2. Зависимость максимальной эффективности забора газа $\eta_{c \max}$ от высоты полета h при различном допустимом пороговом уровне концентрации газа в ИК.

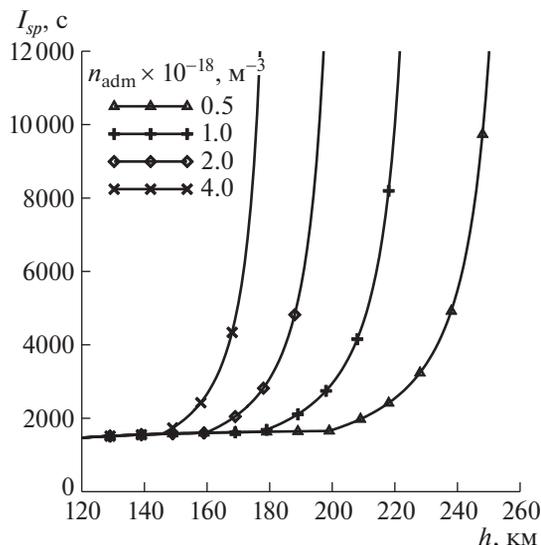


Рис. 3. Зависимость требуемого удельного импульса двигателя I_{sp} от высоты полета h при различном допустимом пороговом уровне концентрации газа в ИК.

внутренней поверхности воздухозаборника и термализатора, которая значительно меньше как орбитальной скорости V космического аппарата, так и скорости истечения c :

$$u \ll V, \quad u \ll c. \tag{9}$$

Из условия баланса импульсов входящего и исходящего потоков ВЭРД получаем второе необходимое условие поддержания КА с ВЭРД на УНО: $\mu_{in} \cdot V \leq \mu_{out} \cdot c - \mu_{back} \cdot u$, что с учетом (9) приводит к критерию, подобному впервые введенному в [14]:

$$\phi_m = \frac{c\eta_c}{V} \geq 1. \tag{10}$$

Например, для ПИД ЦАГИ ($c \approx 140$ км/с [14]) критерий (10) выполняется при $\eta_c > 0.06$. Критерий (10) допускает обобщение на случай произвольного соотношения площадей поперечных сечений входных каналов воздухозаборника A_{in} и всего КА A_{ref} , включая панели солнечных батарей:

$$\phi_m = \frac{c\eta_c^*}{V} \geq 1, \tag{11}$$

где $\eta_c^* = \eta_c \cdot k \cdot \frac{2}{C_{xa}}$, $k = \frac{A_{in}}{A_{ref}}$, C_{xa} – коэффициент аэродинамического сопротивления КА.

Условие (11) баланса сопротивления и тяги КА инвариантно к плотности атмосферы. Это принципиально важное отличие и преимущество

ВЭРД в сравнении с ЭРД, так как плотность атмосферы даже при движении КА по одной круговой орбите может изменяться многократно.

Для пассивных воздухозаборников критерий (11) связан с критерием (6) в силу зависимости между повышением концентрации газа в ИК по сравнению с окружающей атмосферой n/n_∞ и эффективностью забора газа η_c . В общем случае при вариации компоновочных параметров воздухозаборника и термализатора увеличение максимального значения n/n_∞ сопровождается уменьшением максимального значения η_c .

Для наиболее изученного типа воздухозаборников с системой узких каналов-сот (рис. 1), использующих принцип “молекулярной ловушки” [3, 15], известные модели и результаты [12, 15–17] позволяют при заданных характеристиках атмосферы определить оптимальные компоновочные параметры воздухозаборника и термализатора, обеспечивающие максимальное η_c (далее $\eta_{c \max}$) с учетом ограничения (6). Для конкретной модели атмосферы могут быть получены зависимости $\eta_{c \max}(h, n_{adm})$. При $n = n_{adm}$ с ростом высоты полета h и, соответственно, падением n_∞ уменьшается $\eta_{c \max}$.

На рис. 2 приведены зависимости $\eta_{c \max}$ от высоты полета h и n_{adm} для модели атмосферы [13] при средней солнечной активности. Меньший наклон кривых при малых высотах определяется выходом на ограничение по отношению площади выходного сечения ВЭРД A_{out} к площади входно-

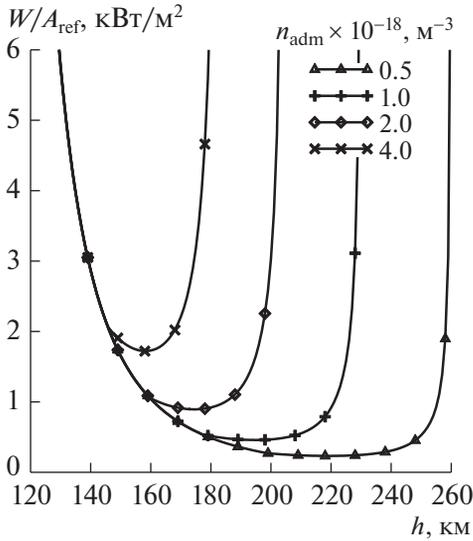


Рис. 4. Зависимость требуемой удельной энерговооруженности КА W/A_{ref} от высоты полета h при различном допустимом пороговом уровне концентрации газа в ИК; $\eta_T = 0.6$.

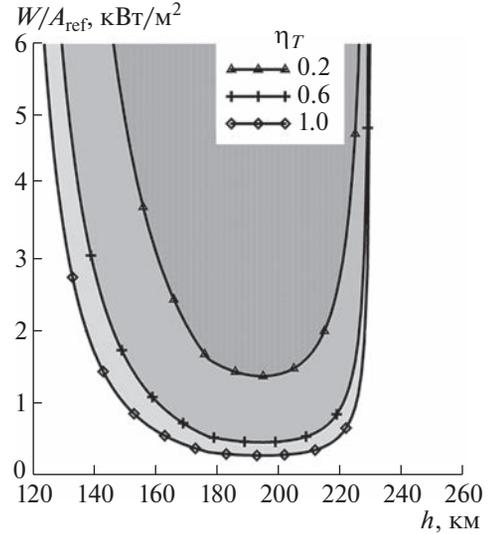


Рис. 5. Область высот орбит h для длительного существования КА с ВЭРД в зависимости от располагаемой удельной энерговооруженности W/A_{ref} и полного КПД двигателя η_T ; $n_{\text{adm}} = 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

го сечения A_{in} , которое устанавливается компоновочными требованиями размещения ВЭРД в корпусе КА (на рис. 2 принято $A_{\text{out}}/A_{\text{in}} \leq 0.5$).

Представленные на рис. 2 зависимости позволяют определить максимальную высоту, на которой возможно выполнение критерия (6), а также условия выполнения критерия (11). На рис. 3 представлены зависимости требуемого удельного импульса двигателя $I_{\text{sp}} = c/g_0$ (g_0 – ускорение свободного падения) от высоты полета h и n_{adm} . Здесь было принято $k = 1$ и традиционное для оценки сопротивления КА значение $C_{\text{xa}} = 2.2$ [18]. Полученные результаты позволяют оценить возможность применения в ВЭРД различных типов систем ионизации и разгона (технологий ЭРД) и определить максимальную высоту, на которой возможна компенсация сопротивления.

Третье необходимое условие существования КА на замкнутых УНО обусловлено энергетическим балансом. Мощность W_T , необходимая для работы ВЭРД:

$$W_T = \mu_{\text{out}} \frac{c^2}{2\eta_T} = A_{\text{in}} \rho V \eta_c \frac{c^2}{2\eta_T},$$

где ρ – плотность атмосферы, η_T – полный КПД двигателя [9]. С учетом (11) можно определить требование к располагаемой мощности электропитания КА W из условия $W \geq W_T$,

$$W \geq A_{\text{ref}} \rho V^3 \frac{C_{\text{xa}}^2}{8k\eta_{c\text{max}}\eta_T},$$

откуда получаем третий критерий:

$$\Phi_W = \frac{W \cdot 8k\eta_{c\text{max}}\eta_T}{A_{\text{ref}} C_{\text{xa}}^2 \rho V^3} \geq 1. \quad (12)$$

Используя результаты, приведенные на рис. 2, можно на основе (12) построить зависимость требуемой удельной энерговооруженности КА W/A_{ref} от высоты. На рис. 4 приведены зависимости $W/A_{\text{ref}}(h)$ для серии значений n_{adm} при $\eta_T = 0.6$ и указанных выше C_{xa} и k . На рис. 5 представлены области высот орбит h для длительного существования КА с ВЭРД в зависимости от располагаемой удельной энерговооруженности W/A_{ref} для нескольких значений η_T (у ПИД ЦАГИ $\eta_T > 0.6$) при $n_{\text{adm}} = 10^{18} \text{ м}^{-3}$. Анализ результатов показывает, что при заданном W/A_{ref} критерий (12) удовлетворяется в некотором диапазоне высот. На нижнюю границу диапазона в наибольшей степени влияет зависимость $\rho(h)$, на верхнюю границу – зависимость $\eta_{c\text{max}}(h)$. Существует высота с наименьшим требуемым значением W/A_{ref} , которое практически пропорционально n_{adm} и составляет 0.45 кВт/м^2 при $n_{\text{adm}} = 1 \times 10^{18} \text{ м}^{-3}$ и 0.9 кВт/м^2 при $n_{\text{adm}} = 2 \times 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

Таким образом, возможность существования КА с ВЭРД на замкнутых УНО определяется совокупностью взаимосвязанных условий (6), (11), (12), которые зависят от характеристик двигателя,

системы энергообеспечения, аэродинамической формы и траектории полета КА.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимые условия стабилизации КА с ВЭРД на замкнутых ультранизких орбитах позволяют определить наилучшие параметры орбит КА и требования к характеристикам систем КА для реализации длительного существования КА на таких орбитах, дающих колоссальные преимущества в экономичности доставки, эффективности наблюдения и связи, снижении естественного радиационного фона и др.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, проект № 20-69-46034.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crisp N.H., et al.* The benefits of very low earth orbit for earth observation missions // *Progress in Aerospace Sciences*. 2020. V. 117. № 100169. P. 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100619>
2. *Tisaev M., Ferrato E., Giannetti V., Paissoni C., Baresi N., Lucca Fabris A., Andreussi T.* Air-breathing electric propulsion: Flight envelope identification and development of control for long-term orbital stability // *Acta Astronautica*. 2022. V. 191. P. 374–393. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.11.011>
3. *Romano F., et al.* Intake design for an Atmosphere-Breathing Electric Propulsion System (ABEP) // *Acta Astronautica*. 2021. V. 187. P. 225–235. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.06.033>
4. *Golikov A.A., Filatyev A.S.* Integrated optimization of trajectories and layout parameters of spacecraft with air-breathing electric propulsion // *Acta Astronautica*. 2022. V. 193. P. 644–652. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.06.052>
5. *Bertolucci G., Barato F., Toson E., Pavarin D.* Impact of propulsion system characteristics on the potential for cost reduction of earth observation missions at very low altitudes // *Acta Astronautica*. 2020. V. 176. P. 173–191. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.06.018>
6. *Somma G.L., Lewis H.G., Colombo C.* Sensitivity analysis of launch activities in Low Earth Orbit // *Acta Astronautica*. 2019. V. 158. P. 129–139. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.05.043>
7. *Чернышев С.Л., Локтионов Е.Ю., Сагалаков А.Э., Скворцов В.В., Филатьев А.С., Успенский А.А.* О перспективах инфракрасных лазеров в воздушных электрореактивных двигателях // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2021. Т. 501. С. 19–22. <https://doi.org/10.31857/S2686740021060079>
8. *Romano F., et al.* RF Helicon-based Inductive Plasma Thruster (IPT) Design for an Atmosphere-Breathing Electric Propulsion system (ABEP) // *Acta Astronautica*. 2020. V. 176. P. 476–483. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.07.008>
9. *Goebel D.M., Katz I.* Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2008. <https://doi.org/10.1002/9780470436448>
10. *Filatyev A.S., Golikov A.A., Nosachev L.V., Padalitsa D.I., Skvortsov V.V.* Spacecraft with air-breathing electric propulsion as the future ultra-speed aircraft / 71th International Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 01–05 October 2020. IAC-20-C4.6.8.
11. *Fujita K.* Air intake performance of air breathing ion engines // *J. of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*. 2004. V. 52. № 610. P. 514–521. <https://doi.org/10.2322/jjsass.52.514>
12. *Barral S., Cifali G., Albertoni R., Andrenucci M., Walpot L.* Conceptual Design of an Air-Breathing Electric Propulsion System / Joint Conference of 30th International Symposium on Space Technology and Science, 34th International Electric Propulsion Conference and 6th Nano-satellite Symposium. Hyogo-Kobe, Japan. July 4–10. 2015. IEPC-2015-271/ISTS-2015-b-271.
13. *Space environment (natural and artificial) – Earth upper atmosphere.* ISO/FDIS 14222. International Organisation for Standardization. Geneva, Switzerland. 2013. 38 p.
14. *Маров М.Я., Филатьев А.С.* Комплексные исследования электрореактивных двигателей при полетах в ионосфере Земли: К 50-летию Государственной программы “Янтарь” // *Космические исследования*. 2018. Т. 56. № 2. С. 137–144. <https://doi.org/10.7868/S0023420618020061>
15. *Binder T., Boldini P., Romano F., Herdrich G., Fasoulas S.* Transmission probabilities of rarefied flows in the application of atmosphere-breathing electric propulsion / AIP Conference Proc. 2016. V. 1786. № 190011. <https://doi.org/10.1063/1.4967689>
16. *Romano F., Binder T., Herdrich G., Fasoulas S., Schönherr T.* Air-Intake Design Investigation for an Air-Breathing Electric Propulsion System / Joint Conference of 30th International Symposium on Space Technology and Science, 34th International Electric Propulsion Conference and 6th Nano-satellite Symposium. Hyogo-Kobe, Japan. July 4–10. 2015. IEPC-2015-269/ISTS-2015-b-269.
17. *Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P., Golikov A.A., Yanova O.V.* Comparative evaluation of the applicability of electrical ramjets / The 58th Israel Annual Conference on Aerospace Science. WeLIT4.3. Tel-Aviv & Haifa. Israel. 14–15 March 2018. P. 503–519.
18. *Prieto D.M., Graziano B.P., Roberts P.C.E.* Spacecraft drag modelling // *Progress in Aerospace Sciences*. 2014. V. 64. P. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.09.001>

NECESSARY CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF SPACECRAFT IN CLOSED ULTRA-LOW ORBITS

A. S. Filatyev^{a,b} and A. A. Golikov^{a,c}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

^c *Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Moscow Region, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.L. Chernyshev

The problem of spacecraft stabilization in ultra-low (120–250 km for the Earth) orbits with the help of air-breathing electric propulsion (ABEP), which uses the gases of the surrounding atmosphere as a propellant, is considered. Qualitative differences of ABEP from traditional electric propulsion are emphasized and, on the basis of the fundamental laws of mechanics and electrodynamics, the necessary conditions for the existence of spacecraft with ABEP in closed ultra-low orbits are substantiated.

Keywords: spacecraft, ultra-low orbits, air-breathing electric propulsion, electric propulsion, orbit stabilization