

ISSN 2686-7400

Том 518

Сентябрь–Октябрь 2024



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

ФИЗИКА,
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 518, 2024

ФИЗИКА

Уравнения движения, удовлетворяющие закону сохранения энергии	
<i>Н. А. Винокуров</i>	3
Резонансное возбуждение бегущих волн в нелинейной диссипативной среде	
<i>О. В. Руденко</i>	10
Усиление ударной волны в двухфазной смеси перегретого водяного пара и триэтилалюминия	
<i>С. М. Фролов, И. О. Шамшин, К. А. Бырдин, К. А. Авдеев, В. С. Аксенов, П. А. Стороженко, Ш. Л. Гусейнов</i>	17

МЕХАНИКА

К теории контактных задач для композитных сред с анизотропной структурой	
<i>В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко, В. С. Евдокимов</i>	23
Эффект турбулизации затухающей однородной изотропной турбулентности крупными частицами	
<i>А. Ю. Вараксин, А. А. Мочалов</i>	31
Периодические движения в жидкости тела, управляемого силой его взаимодействия с внутренней массой	
<i>Т. В. Глазков, Ф. Л. Черноусько</i>	35
Моделирование пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций	
<i>Д. А. Губайдуллин, А. В. Крысько, А. Д. Тебякин, Т. В. Яковлева, В. А. Крысько</i>	43
Упругая полоса с трещиной. Точное решение	
<i>М. Д. Коваленко, А. П. Кержаев, И. В. Меньшова, Д. А. Власов</i>	51
Асимптотическое строение спектра тонкой однотавровой балки Дирихле	
<i>С. А. Назаров</i>	57
Аналитическое доказательство законов подобия для технологии аддитивного лазерного выращивания	
<i>В. М. Фомин, А. А. Гольшев, А. Е. Медведев, А. Г. Маликов</i>	64

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Устройство для прецизионного позиционирования источников низкотемпературной плазмы	
<i>Е. М. Кончев, А. С. Конькова, А. В. Князев, А. П. Глинушкин, С. В. Гудков</i>	69
Высокоточное измерение групповой скорости ультразвука в конструкционных материалах на малой базе	
<i>Д. И. Макалкин, А. А. Карабутов, Е. В. Саватеева</i>	75

CONTENTS

Volume 518, 2024

PHYSICS

Energy Conservation Equations of Motion

N. A. Vinokurov 3

Resonant Excitation of Traveling Waves in a Nonlinear Dissipative Medium

O. V. Rudenko 10

Amplification of the Shock Wave in a Two-Phase Mixture of Superheated Steam and Triethylaluminum

S. M. Frolov, I. O. Shamshin, K. A. Byrdin, K. A. Avdeev, V. S. Aksenov, P. A. Storozhenko, Sh. L. Guseinov 17

MECHANICS

On the Theory of Contact Problems for Composite Media with Anisotropic Structure

V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, O. M. Babeshko, V. S. Evdokimov 23

On the Effect of Turbulization of Decaying Homogeneous Isotropic Turbulence by Large Particles

A. Yu. Varaksin, A. A. Mochalov 31

Periodic Movements in the Fluid of a Body Controlled by the Force of Its Interaction with the Internal Mass

T. V. Glazkov, F. L. Chernousko 35

Modelling of Plates Made from Bimodular Material Taking into Account Elastic-Plastic Deformations

D. A. Gubaidullin, A. V. Krysko, A. D. Tebyakin, T. V. Yakovleva, V. A. Krysko 43

An Elastic Strip with a Crack: An Exact Solution

M. D. Kovalenko, A. P. Kerzhaev, I. V. Menshova, D. A. Vlasov 51

Asymptotic Structure of the Spectrum of a Thin Dirichlet Single-Tee Beam

S. A. Nazarov 57

Analytical Proof of the Scaling Laws Applicability for Additive Manufacturing

V. M. Fomin, A. A. Golyshev, A. E. Medvedev, A. G. Malikov 64

TECHNICAL SCIENCES

Device for Precision Positioning of Low Temperature Plasma Sources

E. M. Konchekov, A. S. Konkova, A. V. Knyazev, A. P. Glinushkin, S. V. Gudkov 69

High-Precision Measurement of the Group Velocity of Ultrasound in Structural Materials on a Small Base

D. I. Makalkin, A. A. Karabutov, E. V. Savateeva 75

УДК 531.62, 531.011, 531.314.2

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ЗАКОНУ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Н. А. Винокуров^{1,*}

Поступило 15.04.2024 г.

После доработки 15.04.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Обычный вывод уравнений движения в механике и уравнений поля в теории поля основан на принципе наименьшего действия с подходящей функцией Лагранжа. При независимой от времени функции Лагранжа функция координат и скоростей, называемая энергией, постоянна. Данное сообщение представляет другой подход – вывод общей формы уравнений движения, которые обеспечивают постоянство энергии, заданной в виде функции обобщенных координат и соответствующих скоростей. Показано, что это – уравнения Лагранжа с добавочными гироскопическими силами. При выводе явно использовано то, что энергия задана как функция на касательном расслоении конфигурационного многообразия. По известной функции энергии находится функция Лагранжа. Обобщенные уравнения Лагранжа и Гамильтона выводятся без использования вариационных принципов. Новый метод вывода проиллюстрирован на примере некоторых уравнений.

Ключевые слова: сохранение энергии, уравнения Лагранжа, гироскопические силы

DOI: 10.31857/S2686740024050017, **EDN:** HYDNQA

Для широкого класса механических систем и полей уравнения движения выводятся из вариационных принципов (см., например, [1–5]). С одной стороны, этот факт отражает некоторые специальные свойства соответствующих дифференциальных уравнений и может рассматриваться как более компактная запись этих уравнений. С другой стороны, такие специальные свойства и вариационные принципы используются при переходе к квантовой теории этих систем. При таком способе вывода закон сохранения энергии следует из отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени. В данном сообщении предложен другой подход. По заданной сохраняющейся функции обобщенных координат и скоростей (энергии) находятся уравнения движения, обобщающие

уравнения Лагранжа. При выводе использовано, что энергия задана как функция на касательном расслоении конфигурационного пространства.

1. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Пусть $E(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \text{const}$ – энергия системы, зависящая от обобщенных координат q^i , $i = 1, \dots, N$, и обобщенных скоростей $v^i = dq^i/dt$, жирным шрифтом обозначены наборы переменных: $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^N)$. Для однозначного определения энергии обычно используют свойство аддитивности энергий невзаимодействующих подсистем. Состояние системы описывается точкой с координатами $(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ на касательном расслоении TQ N -мерного многообразия $Q = \{\mathbf{q}\}$ [5]. Сохранение энергии вдоль траектории движения может быть записано как

$$0 = \frac{dE(\mathbf{q}, \mathbf{v})}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial E}{\partial v^i} \dot{v}^i. \quad (1)$$

¹Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия
*E-mail: N.A.Vinokurov@inp.nsk.su

Мы попытаемся найти уравнения движения, сохраняющие энергию. Уравнение (1) должно удовлетворяться для любой скорости $\mathbf{v}$. Следовательно, оно является тождеством. Одно скалярное тождество $v^i f_i(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = 0$ на касательном расслоении $\mathbf{TQ}$ эквивалентно N тождествам $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) v^j$ для любого антисимметричного тензора C_{ij} .

Чтобы использовать это замечание, представим $\partial E / \partial v^i$ в виде

$$\frac{\partial E}{\partial v^i} = v^j F_{ij}. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) дает

$$0 = v^i \left(\frac{\partial E}{\partial q^i} + F_{ji} \dot{v}^j \right). \quad (3)$$

Из (3) следует N уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial q^i} + F_{ji} \dot{v}^j = C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) v^j, \quad (4)$$

где $C_{ij} = -C_{ji}$ — антисимметричный тензор. В аргументы тензора C_{ij} включены ускорение и время, так как это не нарушает равенства $C_{ij} v^j = 0$. Включение следующих производных координат по времени повысило бы порядок дифференциальных уравнений и нарушило бы предположение о том, что состояние системы описывается точкой касательного расслоения $\mathbf{TQ}$.

Будем искать решение уравнения (2) при помощи функции Лагранжа L , удовлетворяющей известному уравнению [1]

$$E = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L. \quad (5)$$

В учебниках по механике уравнение (5) используется для определения энергии E по заданной функции Лагранжа L . Чтобы найти функцию Лагранжа при заданной энергии, надо решить уравнение в частных производных (5). Так как в данной работе не используются вариационные принципы, (5) является определением (дифференциальным уравнением для отыскания) функции Лагранжа L . Его полное решение можно записать в виде [6]

$$L = \int_1^\infty \left[E\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{v}}{x}\right) - E(\mathbf{q}, 0) \right] dx - E(\mathbf{q}, 0) + a_i(\mathbf{q}) v^i. \quad (6)$$

Оно содержит N произвольных коэффициентов $a_i(\mathbf{q})$, описывающих гироскопические силы

(например, действие магнитного поля на движущийся точечный заряд).

Дифференцирование (5) дает

$$v^j F_{ij} = \frac{\partial E}{\partial v^i} = v^j \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} + v^k D_{ijk}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t), \quad (8)$$

где $D_{ijk} = -D_{ikj}$ — антисимметричный по последним индексам тензор. В аргументы тензора D_{ijk} включены ускорение и время, так как это не нарушает равенства $D_{ijk} v^j v^k = 0$. Включение следующих производных координат по времени повысило бы порядок дифференциальных уравнений и нарушило бы предположение о том, что состояние системы описывается точкой касательного расслоения $\mathbf{TQ}$.

Подставляя (8) в (4), получим

$$\frac{\partial E}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \dot{v}^j = \left[C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) - D_{ikj}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \dot{v}^k \right] v^j. \quad (9)$$

Используя определение функции Лагранжа (5), можно исключить энергию из правой части (9):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \dot{v}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \\ & = \left[C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) - D_{ikj}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \dot{v}^k \right] v^j. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) можно записать в стандартной форме уравнений Лагранжа с дополнительными гироскопическими силами

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = G_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) v^j, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) = & C_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) - D_{ikj}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \dot{v}^k + \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} \end{aligned} \quad (12)$$

есть произвольный антисимметричный тензор. Появление правой части в обобщенных уравнениях Лагранжа (11) не удивительно, так как они выведены только из закона сохранения энергии, который является более слабым ограничением, чем вариационные принципы.

Обобщенные уравнения Лагранжа (11) дают общий вид уравнений движения, удовлетворяющих закону сохранения энергии с заданной функцией $E(\mathbf{q}, \mathbf{v})$. Правая часть (11) описывает гироскопические силы, которые не меняют энергию системы. Если форма гироскопических сил G_{ij} не зависит от скоростей и ускорений и точна, то, как видно из (6) и (12), такие гироскопические силы можно учесть, добавив в функцию Лагранжа слагаемое $a_i v^i$ с “векторным потенциалом” a_i , зануляющим правую часть (12). В общем случае форма гироскопических сил G_{ij} не точна. Следовательно, закон сохранения энергии допускает “нелагранжевы” (не описываемые соответствующими членами в функции Лагранжа) взаимодействия. Отметим, что обобщенные уравнения Лагранжа получены без использования вариационных принципов и в общем случае их решения не удовлетворяют какому-либо интегральному вариационному принципу. Уравнения (11) были приведены без вывода в статье [6], чтобы показать, что стандартные уравнения Лагранжа не являются наиболее общим видом уравнений движения, сохраняющих энергию. Связь обобщенных уравнений Лагранжа (11) с принципом Даламбера отмечена в работе [7].

С точки зрения теории дифференциальных уравнений решенную выше задачу о нахождении уравнений движения, удовлетворяющих закону сохранения энергии, можно сформулировать следующим образом: найти общий вид системы N дифференциальных уравнений второго порядка с заданным первым интегралом $E(y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N) = \text{const}$, не содержащим независимой переменной. Ответ, полученный в предположении дифференцируемости всех функций, естественно, содержит произвольные функции, но нетривиален.

2. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

В разделе 1 по заданной энергии $E(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ была определена функция Лагранжа (6). Преобразование Лежандра

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) + H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = p_i v^i \quad (13)$$

переводит обобщенные уравнения Лагранжа (11) в обобщенные уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \\ &+ G_{ij} \left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial p_k}, t \right) \frac{\partial H}{\partial p_j} = \\ &= \{p_i, H\}, \\ \frac{d}{dt} q^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q^i, H\} \end{aligned} \quad (14)$$

с обобщенными импульсами $p_i = \partial L / \partial v^i$, гамильтонианом $H = v^i \partial L / \partial v^i - L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = E[\mathbf{q}, \mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)]$ и скобками

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + G_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j}. \quad (15)$$

Как видно из (14) и (15), $(2N \times 2N)$ -матрица этих скобок имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \|G_{ij}\| & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\mathbf{E}$ — $(N \times N)$ единичная матрица. Скобки (15) являются скобками Пуассона, если для них выполнено тождество Якоби [8]

$$\sum_{\delta=1}^{2N} \left(J^{\alpha\delta} \frac{\partial J^{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + J^{\gamma\delta} \frac{\partial J^{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} + J^{\beta\delta} \frac{\partial J^{\gamma\alpha}}{\partial x^\delta} \right) = 0, \quad (17)$$

где греческие индексы меняются от 1 до $2N$ и $x_i = p_i$; $x_{N+i} = q^i$. В рассматриваемом случае эти условия дают

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial p_k} = 0 \quad (18)$$

и

$$\frac{\partial G_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial G_{ki}}{\partial q^j} = 0. \quad (19)$$

Последнее означает, что форма $\mathbf{C}$ замкнута на многообразии $\mathbf{Q}$. Тогда она локально точна, т.е. может быть сведена к нулю выбором подходящих a_i в (6). Таким образом, выполнение тождеств Якоби обеспечивает возможность сведения уравнений движения к соответствующей вариационной задаче.

Интересно потребовать только сохранения фазовой плотности:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^j} = \\
&= \frac{\partial}{\partial p_i} \left[G_{ij} \left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial p_k}, t \right) \frac{\partial H}{\partial p_j} \right] = \\
&= \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial p_i} G_{ij} \left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial p_k}, t \right). \quad (20)
\end{aligned}$$

Это равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p_j} G_{ij} \left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial p_k}, t \right) = \\
&= \frac{\partial H}{\partial p_j} d_{ij} \left(\mathbf{q}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial q^k} - \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \partial p_k}, t \right) \quad (21)
\end{aligned}$$

с произвольным антисимметричным тензором d_{ij} . Одним из простейших решений (20) является

$$G_{ij} = K_{ij} [H(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{q}, t] = K_{ij} [E(\mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{q}, t] \quad (22)$$

с произвольным антисимметричным тензором K_{ij} . Обобщенные уравнения движения (11), (14) с гироскопическими силами, удовлетворяющими условию (22), не противоречат основным законам статистической механики.

В трехмерном пространстве при помощи символа Леви–Чивиты e_{ijk} можно выразить форму $\mathbf{G}$ через вектор:

$$G_{ij} = e_{ijk} B^k. \quad (23)$$

Тогда (18) дает независимость $\mathbf{B}$ от импульсов, а (19) эквивалентно $\text{div } \mathbf{B} = 0$, что по теореме Гельмгольца позволяет ввести “векторный потенциал” $\mathbf{A}$, такой, что $B^i = e^{ijk} \partial A_k / \partial q^j$ и

$$G_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j}, \quad (24)$$

т.е. форма $\mathbf{G}$ точна и, согласно (6), может быть сведена к нулю добавкой члена $\mathbf{vA}$ к функции Лагранжа. Если же требовать только сохранения (21) фазовой плотности, то поле $\mathbf{B}[E(\mathbf{q}, \mathbf{v}), \mathbf{q}, t]$

произвольно. В частности, это может быть поле $\mathbf{B}(\mathbf{q}, t)$ с ненулевой дивергенцией.

3. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И ШРЁДИНГЕРА

В этом и следующем разделах мы выведем из закона сохранения энергии некоторые известные уравнения, применяя обобщенные уравнения Лагранжа, описанные в разд. 1. Рассмотрим случай $E(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q})$, когда энергия не зависит от скоростей. Тогда (6) дает $L = -U(\mathbf{q})$, и обобщенные уравнения Лагранжа (11) принимают вид

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q^i} = G_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) v^j. \quad (25)$$

Случай, когда G_{ij} не зависит от ускорения, требует отдельного изучения, так как начальные условия для системы дифференциальных уравнений первого порядка задаются в виде точки с координатами $\mathbf{q}$ на многообразии $\mathbf{Q}$. В этом случае, как следует из (1), вектор $\mathbf{v}$ ортогонален градиенту энергии:

$$\frac{dq^i}{dt} = J^{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, t) \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q^j}, \quad (26)$$

где J^{ij} — произвольный антисимметричный тензор. Эти уравнения являются уравнениями Гамильтона, если J^{ij} зависит только от координат $\mathbf{q}$ и для него выполнено тождество Якоби, похожее на (17), но с суммированием от 1 до N . Следует заметить, что размерность N конфигурационного пространства здесь может быть и нечетной.

В частном случае квадратичной зависимости $U(\mathbf{q}) = h_{ij} q^i q^j$ ($h_{ij} = h_{ji}$) и постоянного J^{ij} уравнение (26) линейно:

$$\frac{dq^i}{dt} = 2J^{ij} h_{jk} q^k. \quad (27)$$

Потребуем, чтобы кроме энергии $U(\mathbf{q})$ уравнение (24) сохраняло еще одну квадратичную форму — квадрат нормы $g_{ij} q^i q^j = 1$ вектора $\mathbf{q}$ с постоянным метрическим тензором $\mathbf{g}$:

$$0 = \frac{d}{dt} g_{ij} q^i q^j = 4g_{ij} J^{jk} h_{kl} q^i q^l. \quad (28)$$

Это значит, что тензор $\mathbf{gJh}$ в правой части (28) должен быть антисимметричным. Будем далее

считать матрицу тензора $\mathbf{g}$ единичной, т.е. норму вектора — евклидовой. Это значит, что мы требуем, чтобы траектория движения, описываемого уравнением (27), лежала на сфере единичного радиуса. Тогда $\mathbf{Jh} = -(\mathbf{Jh})^T = \mathbf{hJ}$.

Для четной размерности $N = 2M$ ортогональным преобразованием координат можно привести неособенную антисимметричную матрицу $\mathbf{J}$ к виду

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (29)$$

с неособенной диагональной квадратной матрицей $\mathbf{D}$. Выражая симметричную матрицу $\mathbf{h}$ через четыре блока, можно записать условие коммутации как

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2^T \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{DH}_2 & \mathbf{DH}_3 \\ -\mathbf{DH}_1 & -\mathbf{DH}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2^T \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{H}_2^T \mathbf{D} & \mathbf{H}_1 \mathbf{D} \\ -\mathbf{H}_3 \mathbf{D} & \mathbf{H}_2 \mathbf{D} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Следовательно, $\mathbf{H}_1 \mathbf{D} = \mathbf{DH}_3$, $\mathbf{DH}_2 = -(\mathbf{DH}_2)^T$ и $\mathbf{H}_2 \mathbf{D} = -(\mathbf{H}_2 \mathbf{D})^T$. Из двух последних равенств следует, что $\mathbf{D}^2 \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{D}^2$. Чтобы это условие выполнялось при произвольной $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{D}^2$ должно быть пропорционально единичной матрице. Тогда $D_{ij} = \pm \kappa \delta_{ij}$. Перестановкой координат q^j и q^{M+j} можно добиться одинаковых знаков: $D_{ij} = \kappa \delta_{ij}$. Тогда $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_2 = -\mathbf{H}_2^T$, и матрица $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2$ — эрмитова. Определив комплексный вектор $\psi^j = q^j + iq^{M+j}$ для $j = 1, \dots, M$, можно привести уравнение (27) к виду

$$i \frac{d\psi}{dt} = \kappa \mathbf{H} \psi. \quad (31)$$

Это — уравнение Шрёдингера, полученное из сохранения нормы (полной вероятности) $\psi^\dagger \psi = 1$ и энергии $U(\mathbf{q}) = h_{ij} q^i q^j = \psi^\dagger \mathbf{H} \psi$. Здесь $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^M)^T$ — столбец, а $\psi^\dagger = (\psi^{1*}, \dots, \psi^{M*})$ — строка комплексно сопряженных чисел.

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Вышеизложенный метод может быть применен и к полям. В этом случае номер степени свободы i заменяется непрерывными координатами $\mathbf{r}$. Пусть, например, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — скалярное поле в трехмерном пространстве и

$$E\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + c^2 (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (32)$$

Производные по φ и $\partial \varphi / \partial t$, используемые при выводе уравнений движения, должны быть вариационными. В соответствии с уравнением (6)

$$L\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - c^2 (\nabla \varphi)^2 - m^2 \varphi^2 \right] d^3 \mathbf{r}. \quad (33)$$

Тогда из (11) следует

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi + m^2 \varphi = \\ & = \int G\left(\{\varphi\}, \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', t\right) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t)}{\partial t} d^3 \mathbf{r}', \end{aligned} \quad (34)$$

где фигурными скобками обозначена функциональная зависимость, а $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -G(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$. При локальном взаимодействии

$$\begin{aligned} & G\left(\{\varphi\}, \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\}, \mathbf{r} - \mathbf{r}', t\right) = \\ & = f_i\left(\{\varphi\}, \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\}, \mathbf{r}\right) \frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \\ & + g_{ijk}\left(\{\varphi\}, \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\}, \mathbf{r}\right) \frac{\partial^3}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь и далее латинские индексы меняются от 1 до 3. Удерживая только первый член разложения (35), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi + m^2 \varphi = \\ & = \mathbf{f}\left(\{\varphi\}, \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\}, \mathbf{r}\right) \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{f}\left(\{\varphi\}, \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}, \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\}, \mathbf{r}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

В простейшем случае $\mathbf{f} = 2\nabla \varphi$ и

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi + m^2 \varphi = 2\nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi. \quad (37)$$

Легко проверить, что правая часть (37) может быть получена добавкой $-(\nabla \varphi)^2 \partial \varphi / \partial t$ в подынтегральное выражение (33). Если же $\mathbf{f} = 2\partial \nabla \varphi / \partial t$, то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi + m^2 \varphi = 2 \left(\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (38)$$

Уравнение (38) дает пример скалярного поля с “нелагранжевым” самодействием.

Для

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 - \frac{u_x^2}{2} \right) dx \quad (39)$$

получим

$$-\frac{\delta E}{\delta u} = 3u^2 + u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} G(u, x, x', t) u_t(x', t) dx'. \quad (40)$$

При $G = \text{sgn}(x' - x)/2$ (40) после дифференцирования по x переходит в уравнение Кортевега—де Вриза:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (41)$$

При $G = \delta'(x' - x)$ (40) дает

$$u_{xt} + 3u^2 + u_{xx} = 0. \quad (42)$$

В калибровке $\varphi = 0$ энергия частиц и электромагнитного поля может быть записана как

$$E = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d^3 \mathbf{r} + \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}}, \quad (43)$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, m_{α} , Q_{α} , $\mathbf{r}_{\alpha}$ и $\mathbf{v}_{\alpha}$ — масса, заряд, положение и скорость частицы с номером α , а c — скорость света.

С помощью уравнения (6) получим

$$L_0 = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] d^3 \mathbf{r} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} c^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}. \quad (44)$$

Так как

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \frac{\partial \delta \mathbf{A}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{A} \text{ rot } \delta \mathbf{A} \right] d^3 \mathbf{r} + \dots = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \frac{\partial \delta \mathbf{A}}{\partial t} - \delta \mathbf{A} \text{ rot}(\text{rot } \mathbf{A}) \right] d^3 \mathbf{r} + \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

уравнение (11) дает

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i + \partial_i \text{div } \mathbf{A} \right) =$$

$$\begin{aligned} &\int G_{ij} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}, \dot{\mathbf{v}}_{\alpha}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', t \right) \frac{\partial A_j(\mathbf{r}', t)}{\partial t} d^3 \mathbf{r}' + \\ &+ \sum_{\beta} G_{i\beta k} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}, \dot{\mathbf{v}}_{\alpha}, \mathbf{r}, t \right) v_{k\beta} \end{aligned} \quad (46)$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{m_{\alpha} v_{\alpha i}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}} = \\ &= - \int G_{k\alpha i} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\gamma}, \mathbf{v}_{\gamma}, \dot{\mathbf{v}}_{\gamma}, \mathbf{r}', t \right) \frac{\partial A_k(\mathbf{r}', t)}{\partial t} d^3 \mathbf{r}' + \\ &+ \sum_{\beta} G_{\alpha i \beta j} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\gamma}, \mathbf{v}_{\gamma}, \dot{\mathbf{v}}_{\gamma}, t \right) v_{\beta j} \end{aligned} \quad (47)$$

с условиями симметрии

$$\begin{aligned} &G_{ij} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}, \dot{\mathbf{v}}_{\alpha}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', t \right) = \\ &= -G_{ji} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}, \dot{\mathbf{v}}_{\alpha}, \mathbf{r}', \mathbf{r}, t \right), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &G_{\alpha i \beta j} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\gamma}, \mathbf{v}_{\gamma}, \dot{\mathbf{v}}_{\gamma}, t \right) = \\ &= -G_{\beta j \alpha i} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \mathbf{r}_{\gamma}, \mathbf{v}_{\gamma}, \dot{\mathbf{v}}_{\gamma}, t \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Простейший случай $G_{ij} = 0$, $G_{\alpha i \beta j} = Q_{\alpha} \delta_{\alpha \beta} (\partial_i A^j - \partial_j A^i)(\mathbf{r}_{\alpha})/c$ и $G_{k\alpha i} = \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha}) Q_{\alpha}/c$, т.е.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i + \partial_i \text{div } \mathbf{A} \right) = \\ &= \sum_{\beta} \frac{Q_{\beta}}{c} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta}) v_{i\beta}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{m_{\alpha} v_{\alpha i}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2/c^2}} = - \frac{Q_{\alpha}}{c} \frac{\partial A_i(\mathbf{r}_{\alpha}, t)}{\partial t} + \\ &+ Q_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^j}{c} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \Big|_{\mathbf{r}_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (51)$$

соответствует обычной электродинамике. Эти уравнения могут быть получены из функции Лагранжа

$$L = L_0 + \sum_{\alpha} \frac{Q_{\alpha}}{c} \mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha}), \quad (52)$$

которая является одним из решений (6) уравнения (5).

Примером “нелагранжевой” модификации уравнений электродинамики может быть $G_{ij} = e_{ijk} f_k(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, когда в (50) появляется дополнительный “ток”:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i + \partial_i \operatorname{div} \mathbf{A} \right) = \\ = \sum_{\beta} \frac{Q_{\beta}}{c} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta}) v_{i\beta} + \left(\mathbf{f} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_i. \end{aligned} \quad (53)$$

В простейших случаях вектор $\mathbf{f}$ может быть выбран пропорциональным $\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2$ или току, создаваемому частицами $\sum Q_{\beta} \mathbf{v}_{\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\beta})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведены уравнения, сохраняющие заданную энергию $E(\mathbf{q}, \mathbf{v})$. Это уравнения Лагранжа с добавочными гироскопическими силами. При этом форма гироскопических сил может не быть точной, т.е. гироскопические силы не описываются функцией Лагранжа. Уравнения (5) и (6) дают явное выражение функции Лагранжа через энергию. Обобщенные импульсы и гамильтониан находятся из функции

Лагранжа. В описанном подходе не используются вариационные принципы, что позволяет получить обобщение уравнений аналитической механики и теории поля. Эта альтернативная аксиоматика аналитической механики и теории поля близка к аксиоматике термодинамики, в основе которой тоже лежит закон сохранения энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. 4-е изд. М.: Наука, 1988.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002.
3. Зоммерфельд А. Механика. Ижевск: РХД, 2001.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
5. José J.V., Saletan E.J. Classical dynamics: a contemporary approach. Cambridge University Press, 1998.
6. Винокуров Н.А. Вывод уравнений аналитической механики и теории поля из закона сохранения энергии // УФН. 2014. Т. 184. Вып. 6. С. 641–644.
7. Винокуров Н.А. Связь закона сохранения энергии и уравнений движения // УФН. 2015. Т. 185. Вып. 3. С. 335–336.
8. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т. II. Геометрия и топология многообразий. 4-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 1998.

ENERGY CONSERVATION EQUATIONS OF MOTION

Corresponding Member of the RAS N. A. Vinokurov^a

^aBudker Institute of Nuclear Physics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

A conventional derivation of motion equations in mechanics and field equations in field theory is based on the principle of least action with a proper Lagrangian. With a time-independent Lagrangian, a function of coordinates and velocities that is called energy is constant. This paper presents an alternative approach, namely derivation of a general form of equations of motion that keep the system energy, expressed as a function of generalized coordinates and corresponding velocities, constant. These are Lagrange's equations with addition of gyroscopic forces. The important fact, that the energy is defined as the function on the tangent bundle of configuration manifold, is used explicitly for the derivation. The Lagrangian is derived from a known energy function. A development of generalized Hamilton's and Lagrange's equations without the use of variational principles is proposed. The use of new technique is applied to derivation of some equations.

Keywords: energy conservation, Lagrange's equations, gyroscopic forces

УДК 534.222

РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ© 2024 г. Академик РАН О. В. Руденко^{1,2,3,*}

Поступило 20.06.2024 г.

После доработки 25.06.2024 г.

Принято к публикации 28.06.2024 г.

Описаны процессы генерации вынужденной волны полем источников, бегущих со скоростью, близкой к скорости распространения собственных возмущений в среде. Проведена аналогия с обычным резонансом в сосредоточенной колебательной системе. Обсуждены причины, ограничивающие рост амплитуды — диссипация, расстройка скоростей и нелинейность. Построены профили вынужденных волн при гармоническом возбуждении. Рассчитаны нелинейные резонансные характеристики. Приведены выражения для добротности.

Ключевые слова: волновой резонанс, ударный фронт, профиль волны, стационарная волна, резонансная характеристика

DOI: 10.31857/S2686740024050023, EDN: HXXNOV

Расчет свободно бегущих волн конечной амплитуды требует решения однородных нелинейных уравнений с граничными условиями на излучающей поверхности. Однако часто источники следует считать объемными. Такая постановка используется в задачах лазерного возбуждения звука, распространения волн в активных средах, при генерации волн внешними полями [1–5]. Базовые модели при этом имеют вид неоднородных уравнений. Например, в акустике это модифицированные нелинейные уравнения типа Бюргерса или Хопфа (для римановых волн [3, 4]). Особенно интересно резонансное возбуждение, при котором источники перемещаются в пространстве со скоростью, близкой к скорости собственных волн [6].

Обычный резонанс в колебательной системе с одной степенью свободы удастся наблюдать,

когда частота “вынуждающей силы” приближается к собственной частоте системы. Уравнение и его нужное частное решение имеют вид [1]

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = A \cos \omega t, \quad (1)$$

$$X = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t].$$

Решение (1) при $\omega \rightarrow \omega_0$ содержит неопределенность. Раскрывая ее, получим

$$X = t \frac{A}{2\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (2)$$

Амплитуда вынужденных колебаний (2) при резонансе линейно нарастает со временем. Рост может быть ограничен затуханием, а в случае слабой диссипации — нелинейными эффектами, которые становятся существенными при больших амплитудах.

Вблизи резонанса важна добротность, одно из определений которой — отношение амплитуд возвращающей и внешней силы. В модели осциллятора (1) с добавлением диссипативного члена $2\delta dX/dt$ добротность равна $Q = \omega_0/2\delta$.

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия

³Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Такой механизм затухания характерен для тел, колеблющихся в вязкой жидкости или газе. При этом потери пропорциональны скорости тела, а уравнение движения остается линейным. При больших значениях Q амплитуда вынужденных колебаний гораздо больше амплитуды внешней силы, а частотная характеристика имеет узкий и высокий пик.

О ВОЛНОВОМ РЕЗОНАНСЕ

Волновой резонанс похож на колебательный. Однако он возникает не при $\omega \rightarrow \omega_0$, а при совпадении скорости c перемещения в пространстве “внешних источников” со скоростью c_0 собственной волновой моды. В простейшем случае сплошной среды эта мода – акустическая, а c_0 – скорость звука. Аналогом (1) для распределенной системы будет неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - ct). \quad (3)$$

Функция f описывает распределение источников. Они движутся вдоль оси x со скоростью c , которая может отличаться от скорости c_0 собственной волны в среде. Нужно частное решение уравнения (3) (по смыслу аналогичное (1)) имеет вид

$$p' = \frac{f(x - ct) - f(x - c_0 t)}{c^2 - c_0^2}. \quad (4)$$

Решение (4) содержит неопределенность при ($c \rightarrow c_0$). Раскрывая ее, найдем

$$p' = -\frac{t}{2c_0} \frac{\partial}{\partial x} f(x - c_0 t). \quad (5)$$

Видим, что при волновом резонансе ($c \rightarrow c_0$) “вынужденная волна” линейно нарастает со временем. Такой рост наблюдается при любой форме “внешних источников”, не обязательно гармонической.

Обратим внимание, что резонансной может быть только одна из двух собственных волн $p(x \pm c_0 t)$, которая бежит в ту же сторону, что и “внешние источники”. Поэтому удобно ввести “бегущую” координату – переменную $\zeta = x - c_0 t$, малую расстройку скоростей $\Delta = c - c_0$, $|\Delta| \ll c_0$ и записать формулы (4), (5) так:

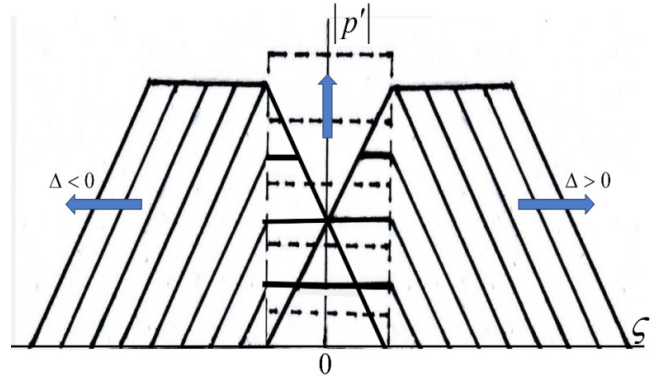


Рис. 1. Возбуждение волн (6) бегущими источниками для различных расстроек скоростей. Направления движения фронтов показаны стрелками.

$$p' = \frac{1}{2c_0 \Delta} [f(\zeta - \Delta t) - f(\zeta)], \quad p' = -\frac{t}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta). \quad (6)$$

Процесс возбуждения волн (6) бегущими источниками иллюстрирован на рис. 1. Источники для наглядности выбраны локализованными в конечной области переменной ζ . Форма их распределения – равномерная (“прямоугольная”).

При точном резонансе ($\Delta = 0$) происходит неограниченный рост волны с увеличением времени t (штриховые линии). Возбуждаемая волна повторяет форму производной от функции $f(\zeta)$.

Если же имеется расстройка ($\Delta \neq 0$), то картина изменяется. Энергия вносится источниками в область, где производная $f'(\zeta) \neq 0$. Здесь энергия накапливается, а затем “вытекает” в левую ($\Delta < 0$) или в правую ($\Delta > 0$) сторону оси ζ . Это происходит из-за того, что собственная волна бежит по среде с другой (по сравнению с источниками) скоростью. Максимальное значение возмущения при этом оказывается конечным.

Как и в случае колебательного резонанса, ограничить рост волны при $\Delta = 0$ могут диссипативное поглощение и нелинейность. Когда они есть, неоднородное уравнение (3) следует обобщить [1]:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^3 p'}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - ct). \quad (7)$$

Здесь b — диссипативный коэффициент (он выражается через объемную и сдвиговую вязкости и теплопроводность среды [6]), ε — нелинейный параметр [1]. Уравнение (7) удобно упростить, используя метод медленно изменяющегося профиля [1].

Под действием слабой диссипации и слабых внешних источников бегущая волна должна нарастать и искажаться медленно. В отсутствие этих факторов “порождающее” решение волнового уравнения (3) выберем в виде $p'(t, x) = \Phi(x - c_0 t)$. Это выражение (при наличии источников, нелинейности и диссипации) следует обобщить. Наряду с “быстрой” зависимостью формы волны от координаты $\zeta = x - c_0 t$ должна появиться “медленная” зависимость от времени t . Иными словами, “возмущенное” решение следует искать, положив в (7)

$$p'(\zeta, t) = \Phi(\zeta, \mu t). \quad (8)$$

Здесь μ — малый параметр, учитывающий медленную зависимость от времени t . Использование переменной ζ означает, что “сопровождающий” наблюдатель находится в системе координат, движущейся со скоростью звука c_0 , и видит только медленные искажения профиля, в то время как неподвижный наблюдатель основным движением считает перемещение бегущей волны.

Переходя в (7) к новым переменным $\zeta, \mu t$ и интегрируя по ζ , получим уравнение

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c_0 \rho_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \zeta} - \frac{b}{2\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial \zeta^2} = -\frac{1}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\zeta - \Delta t). \quad (9)$$

Члены нулевого порядка малости μ^0 здесь взаимно уничтожились, поскольку порождающее решение было выбрано правильно. Члены порядка μ^2 отброшены. Оставшиеся члены имеют один и тот же — первый порядок малости μ^1 . Они образуют уравнение (9).

Рассмотрим вначале ограничения, накладываемые расстройкой и диссипацией, а нелинейные эффекты учитывать не будем ($\Delta \neq 0, b \neq 0, \varepsilon = 0$). Положим для примера $f(\zeta) = (A/k) \cos k\zeta$. Решая неоднородное уравнение (9), найдем выражение для вынужденной волны:

$$p' = \frac{A}{2kc_0} \left[\Delta^2 + \left(\frac{bk}{2\rho_0} \right)^2 \right]^{-1/2} \sin[k(\zeta - \Delta t) + \varphi],$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\rho_0 \Delta}{bk}. \quad (10)$$

Искомое решение получится, если к (10) прибавить выражение, описывающее свободную бегущую волну:

$$p' = C \exp \left(-\frac{bk^2}{2\rho_0} t \right) \sin(k\zeta + \varphi). \quad (11)$$

Требуя, чтобы сумма (10) и (11) при $t = 0$ обращалась в ноль, найдем константу C . Однако при больших значениях $t \rightarrow \infty$ выражение (11) обращается в ноль и максимальное значение амплитуды находится из формулы (10):

$$|p'_{MAX}|_{t \rightarrow \infty} = \frac{A}{2kc_0} \left[\Delta^2 + \left(\frac{bk}{2\rho_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (12)$$

Видим, что резонансная особенность может быть ликвидирована как за счет ненулевой расстройки, так и благодаря диссипации.

По аналогии с колебательным резонансом можно ввести добротность для волнового резонанса, определив ее как отношение амплитуд бегущей волны и внешних источников. Пользуясь формулами (9) и (12), найдем

$$Q = \frac{c_0}{2} \left[\Delta^2 + \left(\frac{bk}{2\rho_0} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

При $\Delta = 0$ получаем $Q = \rho_0 c_0 / bk$. Оценки, например, для волны с частотой в мегагерцевом диапазоне в воде дают величину порядка $10^4 - 10^5$.

Еще одним “сглаживающим” резонансный “пик” фактором может быть нелинейность. Чтобы это показать, найдем стационарное решение уравнения (9) для распределения источников $f(\zeta) = -(A/k) \cos k\zeta$, положив $\partial/\partial t = 0, \Delta = 0, b = 0$. При этом (9) сведется к выражению

$$\frac{\varepsilon}{\rho_0} p'^2 = \frac{A}{k} \cos k\zeta + C. \quad (13)$$

Определяя константу C из условия $p'(k\zeta = \pm\pi) = 0$, получим решение:

$$p' = -\sqrt{\frac{2\rho_0}{\varepsilon k}} A \cos \frac{k\zeta}{2} \operatorname{sgn} \zeta. \quad (14)$$

При $\zeta = 0$ в профиле формируется разрыв со скачком давления конечной величины. Таким образом, нелинейность не только уничтожает резонансную особенность, но и приводит к более медленной зависимости p' от “амплитуды” внешней силы: $\sim \sqrt{A}$ вместо зависимости $\sim A$ в линейных задачах. Заметим, что сам факт существования стационарного решения (14) связан с балансом энергии, вносимой в среду источниками и теряемой на образовавшемся ударном фронте.

Интересно проследить за процессом установления максимального значения при резонансе. Поскольку при $f(\zeta) = -(A/k)\cos k\zeta$ нестационарный процесс рассчитать не просто, изучим его для периодической пилообразной формы распределения источников, положив на одном периоде $-\pi < k\zeta < \pi$:

$$\frac{d}{d\zeta} f(\zeta) = -\frac{k\zeta}{\pi} A, \quad p' = P(t) \frac{k\zeta}{\pi}. \quad (15)$$

Формулы (15) позволяют превратить (9) в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dP}{d\zeta} + \frac{\epsilon k}{\pi \rho_0 c_0} P^2 = \frac{A}{2c_0}. \quad (16)$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию $P(t=0) = 0$, таково:

$$P = \sqrt{\frac{\pi \rho_0}{2 \epsilon k}} A \cdot \tanh \left(t \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon k}{\rho_0 c_0^2}} A \right). \quad (17)$$

Как видим, максимальное на периоде значение давления растет с характерным временем $t \sim A^{-1/2}$, приближаясь к наибольшей величине $P \sim A^{1/2}$. Это такая же нелинейная зависимость, как и в формуле (14).

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ГАРМОНИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Приведем для простоты уравнение (9) к компактной форме. Воспользуемся безразмерными переменными

$$T = \frac{t}{t_{DIS}}, \quad \xi = k\zeta, \quad V = \frac{p'}{p_0}. \quad (18)$$

Здесь $p_0 = bc_0 k / 2\epsilon$ — нормировочное значение “амплитуды” давления, k — пространственная частота, t_{DIS} — характерное время поглощения

волны. Оно дается формулой $t_{DIS} = 2\rho_0 / bk^2$. Уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = -A \sin(\xi - \delta T). \quad (19)$$

Здесь число A — безразмерная амплитуда волны источников, $\delta = 2\rho_0 \Delta / bk$ — нормированная расстройка.

Профили нелинейных волн в диссипативной среде описываются уравнением (19). Стационарная волна ($\partial V / \partial T \equiv 0$) при резонансе ($\delta = 0$) подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dV}{d\xi} - \frac{1}{2}(V^2 - C^2) = -A \cos \xi. \quad (20)$$

Поскольку среднее по периоду должно равняться нулю ($\overline{V} = 0$), постоянная интегрирования $C^2 = \overline{V^2}$ имеет важный физический смысл: она пропорциональна плотности энергии.

Замена переменной

$$V = -2 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln W \quad (21)$$

превращает (20) в линейное уравнение Матье:

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{1}{4}(-C^2 - 2A \cos \xi)W = 0. \quad (22)$$

Таким образом, стационарное решение выражается через функцию Матье нулевого порядка:

$$V = -2 \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \text{ce}_0 \left(\frac{\xi}{2}, A \right), \quad (23)$$

а энергия пропорциональна собственному значению λ_0 функции ce_0 :

$$C^2 = \overline{V^2} = -\lambda_0(A). \quad (24)$$

При слабом возбуждении ($A \ll 1$) имеем $|\lambda_0| = A^2/2$. Это, очевидно, линейный режим генерации. При сильном возбуждении ($A \gg 1$), используя асимптотику для собственного числа функции Матье, получаем более слабую зависимость: $|\lambda_0| \approx 2A$.

Форма профиля возбужденной волны в условиях волнового резонанса изображена на рис. 2 для различных значений A амплитуды волны источников. Видно, что при конечных

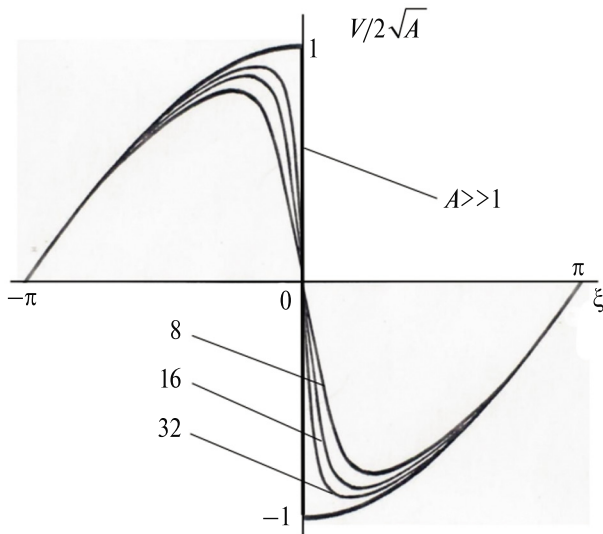


Рис. 2. Период стационарной волны, возбуждаемой в диссипативной среде гармоническими колебаниями резонансного источника с различной амплитудой A .

значениях A фронт имеет ненулевую ширину из-за диссипативного сглаживания. При $A \rightarrow \infty$ фронт превращается в крутую ударную волну, описываемую формулой (14).

РЕЗОНАНСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для расчета резонансной характеристики нужно рассмотреть процесс возбуждения волны при ненулевой расстройке скоростей. В этом случае соотношение (20), следующее из (19), будет иметь вид

$$\frac{dV}{d\eta} - \frac{1}{2}(V^2 - C^2) + \delta V = -A \cos \eta. \quad (25)$$

Здесь $\eta = \xi - \delta T$. Когда линейная диссипация слабая, производной в уравнении (25) можно пренебречь и получить

$$V = \delta \pm \sqrt{\delta^2 + C^2 + 2A \cos \eta}. \quad (26)$$

Если амплитуда A возбуждающих источников мала, отсюда следует линейное решение $V = -(A/\delta) \cos \eta$.

При росте A профиль волны искажается (см. рис. 3, построенный для положительной расстройки $\delta = 0.1$). Вначале он описывается одной ветвью формулы (26). Кривые 1, 2, 3 на рис. 3 соответствуют растущей амплитуде: $10^3(\pi A) = 5.6, 9.1, 12.3$.

Для кривых на рис. 3 константа C^2 находилась из решения алгебраической задачи на собственные значения:

$$\delta = \frac{2}{\pi} g \cdot E\left(\frac{4A}{g}\right), \quad g = \sqrt{\delta^2 + C^2 + 2A}. \quad (27)$$

Здесь E — полный эллиптический интеграл 2-го рода. Решение удобно искать, записав (27) в параметрической форме:

$$C^2 = 2A \left[\frac{2}{m} - 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{E^2(m)}{m} \right],$$

$$\delta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{2A} \frac{E(m)}{\sqrt{m}}. \quad (28)$$

Здесь m — параметр. Аргумент функции $E(m)$ определен в области $0 \leq m \leq 1$. Из (27) следует, что соответствующая область изменения расстройки дается неравенствами $A < 4\delta^2 \equiv A_*$. При $A = A_*$ происходит бифуркация и стационарная волна становится разрывной. Скачок появляется в каждом периоде профиля, связывая две ветви решения (26). Для разрывной волны

$$C^2 = 2A - \delta^2. \quad (29)$$

При собственном значении (29) решение (26) принимает вид

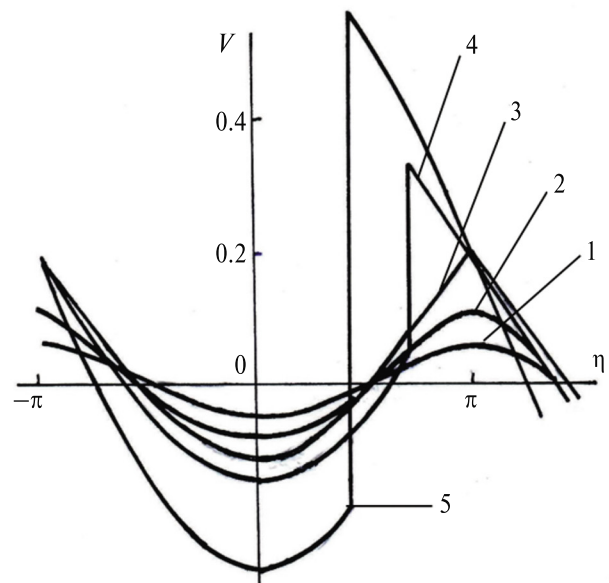


Рис. 3. Период волны, возбуждаемой гармоническими колебаниями источника с различной амплитудой A при наличии расстройки скоростей $\delta = 0.1$.

$$V = \delta \pm \sqrt{4A} \left| \cos \frac{\eta}{2} \right|. \quad (30)$$

Положение фронта находится из условия $\bar{V} = 0$ и определяется уравнением

$$\sin \frac{\eta_{SH}}{2} = \frac{\pi}{4} \frac{\delta}{\sqrt{A}}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что условие $|\sin(\eta_{SH}/2)| \leq 1$ эквивалентно условию $A \geq A_*$.

Решение (30), (31) изображено на рис. 3, кривые 4, 5. С ростом числа A в области $A \geq A_*$ разрыв, появившийся в точке профиля $\eta = \pi$ (для $\delta > 0$), стремится к положению $\eta = 0$, достигаемому при $A \rightarrow \infty$. Сплошные кривые 4, 5 построены для значений $10^2(\pi A) = 1.5, 3$. Для отрицательной расстройки разрыв появится при $A = A_*$ в точке $\eta = -\pi$ и будет смещаться с ростом числа A в положение $\eta = 0$.

На рис. 4 изображена нелинейная резонансная характеристика для гармонического возбуждения. Она дает зависимость среднеквадратичной скорости $C = \sqrt{V^2}$ от расстройки. Кривая построена для значения $10^2(\pi A) = 25$. Прямые линии

$$\sqrt{V^2} = \pm \delta \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \quad (32)$$

являются сепаратрисами. Ниже этих линий кривая построена с помощью решения для профилей, не содержащих разрывов. В точности на прямых (32) $A = A_*$. Выше этих линий

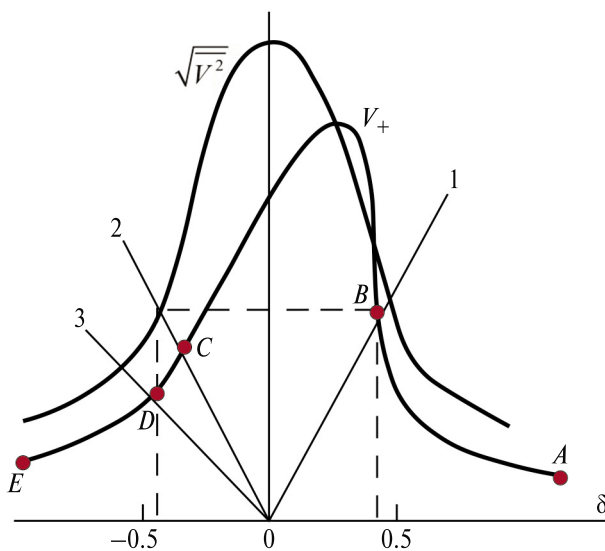


Рис. 4. Резонансные характеристики.

для нелинейного частотного отклика системы использовано другое решение (30), (31).

Добротность может быть оценена как отношение амплитуды колебаний поля волны к амплитуде колебаний источников (при $\delta = 0$):

$$Q_{NL} = \frac{c_0}{A} \sqrt{V^2} \Big|_{\delta=0} = \frac{1}{\sqrt{2A}}. \quad (33)$$

В нелинейной задаче возможны иные определения для резонансной характеристики, например, как зависимость $V_+(\delta)$, где V_+ есть положительное пиковое значение амплитуды колебаний в волне. Зависимость показана на рис. 4 для $(\pi A) = 0.25$. Аналитическое описание участков AB , BC , CD , DE дается соответственно формулами

$$\begin{aligned} &\delta - \sqrt{\delta^2 + C^2 - 2A}, \quad \delta + \sqrt{2A - \frac{\pi^2}{8}\delta^2}, \\ &-|\delta| + \sqrt{2A}, \quad -|\delta| + \sqrt{\delta^2 + C^2 + 2A}. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь собственное значение C^2 определяется уравнением (28). Линия 3, разделяющая участки CD и DE , дается формулой

$$V_+ = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \delta. \quad (35)$$

Заметим, что пиковое положительное значение V_+ достигается в вершине ударного фронта только для участка BC . Для других трех участков характеристики значение V_+ лежит на гладком профиле волны. В отличие от кривой $\sqrt{V^2}$ на рис. 4, максимальное значение V_+ соответствует не $\delta = 0$, а некоторой положительной расстройке:

$$\begin{aligned} (V_+)_{\max} &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \right) \sqrt{2A}, \\ \delta_{\max} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{1 + \pi^2/4}} \sqrt{2A}. \end{aligned} \quad (36)$$

Это явление (сдвиг максимума) имеет место, например, при полете в атмосфере на транзвуковых скоростях $c \approx c_0$. Здесь максимальное давление в волне звукового удара и сопротивление движению наблюдаются не в условиях

линейного волнового резонанса $c = c_0$, а при некоторой сверхзвуковой скорости полета $c > c_0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренное явление широко распространено в природе и технике, хотя сам термин “волновой резонанс” вряд ли можно считать устоявшимся. Такой резонанс удобно наблюдать в лабораторных условиях, используя движущийся оптоакустический источник в виде лазерного луча, сканируемого вдоль поверхности поглощающей свет среды [8, 9]. Это явление тесно связано с переходным излучением [10], которое реализуется, в частности, в неоднородной среде. В последние годы возродился интерес к волновому резонансу в связи с проблемой создания сверхзвуковых пассажирских самолетов [7, 11]. Интересные особенности явления возникают при генерации волн движущимися источниками в диспергирующих средах [6, 12]. Источники, приводящие к резонансному возбуждению, могут иметь нелинейную природу (см. [6, гл. 8, разд. 4]). В этих случаях принято говорить не о “резонансном”, а о “синхронном” возбуждении волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. Нелинейная акустика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2024.
2. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2006.
3. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
4. Руденко О.В., Хедберг К.М. Волновой резонанс в диссипативной среде с модульной, квадратичной или квадратично-кубичной нелинейностью // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 4. С. 3–13.
5. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. 2-е изд. М.: Наука, 1990; 3-е изд. М.: Ленанд, 2015.
7. Руденко О.В., Маков Ю.Н. Звуковой удар: от физики нелинейных волн до акустической экологии. (Обзор) // Акуст. журн., 2021. Т. 67. № 1. С. 3–30.
8. Лямшев Л.М. Радиационная акустика. М.: Наука, 1996.
9. Лямшев М.Л. Лазерная термооптическая генерация в жидкости со свободной поверхностью. Автореферат диссертации. М.: ИОФ АН СССР, 1985.
10. Божков А.И., Бункин Ф.В., Коломенский Ал.А., Лямшев М.Л., Маляровский А.И., Михалевич В.Г., Родин А.М. Переходное излучение звука термооптическим источником, реализуемым сканирующим лазерным лучом // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 4. С. 461–469.
11. Чернышев С.Л. Звуковой удар. М.: Наука, 2011.
12. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. N.Y.: Wiley, 1974.

RESONANT EXCITATION OF TRAVELING WAVES IN A NONLINEAR DISSIPATIVE MEDIUM

Academician of the RAS O. V. Rudenko^{a,b,c}

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^bProkhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^cInstitute of the Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The processes of a forced wave generation by a field of sources traveling at a speed close to the speed of propagation of eigenmode disturbances in the medium are described. An analogy is drawn with common resonance in a concentrated oscillatory system. The factors limiting the increase in amplitude are discussed: dissipation, velocity detuning, and nonlinearity. The profiles of forced waves under harmonic excitation are constructed. Nonlinear resonant characteristics are calculated. Expressions for quality factor are given.

Keywords: wave resonance, shock front, wave profile, stationary wave, resonant characteristic

УДК 534.222.2

УСИЛЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ ПЕРЕГРЕТОГО ВОДЯНОГО ПАРА И ТРИЭТИЛАЛЮМИНИЯ

© 2024 г. С. М. Фролов^{1,*}, И. О. Шамшин¹, К. А. Бырдин¹, К. А. Авдеев^{1,**},
В. С. Аксенов¹, академик РАН П. А. Стороженко², Ш. Л. Гусейнов²

Поступило 19.04.2024 г.

После доработки 19.04.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Впервые экспериментально продемонстрирована возможность усиления ударной волны в двухфазной смеси перегретого водяного пара и жидкого триэтилалюминия (ТЭА, $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$). Показано, что тонкая синхронизация момента впрыска ТЭА в поток перегретого водяного пара с моментом прихода затухающей ударной волны позволяет обеспечить незатухающий характер распространения ударной волны в двухфазной среде перегретый водяной пар–ТЭА со скоростью на уровне 1500 м/с.

Ключевые слова: перегретый водяной пар, триэтилалюминий, ударная волна, детонация, импульсно-детонационный двигатель, непрерывно-детонационный двигатель

DOI: 10.31857/S2686740024050034, EDN: HXUDGX

Импульсно-детонационные двигатели (ИДД) и непрерывно-детонационные двигатели (НДД) рассматриваются как перспективные силовые установки для космических и воздушных летательных аппаратов [1, 2], а также для надводных [3] и подводных [4] транспортных средств. В отличие от традиционных двигателей на химическом топливе, основанных на относительно медленном (дозвуковом) управляемом горении топлива в камере сгорания, рабочий процесс в ИДД и НДД основан на быстром (сверхзвуковом) управляемом горении топлива в импульсных и непрерывных детонационных волнах соответственно. Один из важнейших вопросов для таких двигателей — выбор топлива с требуемыми реакционной способностью в паре

с заданным окислителем и экзотермичностью, обеспечивающими устойчивый и энергоэффективный рабочий процесс. Общеизвестно, что использование энергонасыщенных топлив и активных окислителей позволяет получить высокий удельный импульс, особенно если в качестве окислителя используется окружающая среда (воздух или вода).

За исключением нашей работы [5] вопрос об использовании воды в качестве окислителя для ИДД и НДД в литературе никогда ранее не рассматривался. В работе [5] представлены результаты термодинамических расчетов параметров детонации некоторых бор- и алюминий-содержащих соединений в воздухе, воде и диоксиде углерода, которые демонстрируют потенциальную возможность их использования в качестве топлив для перспективных транспортных средств с ИДД и НДД, работающих в атмосфере Земли и в воде. Детонационная способность соединений, содержащих В и Al, изучена недостаточно. Так, в работах [6, 7] измерена скорость детонации смеси диборана с воздухом. В работе

¹Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова
Российской академии наук, Москва, Россия

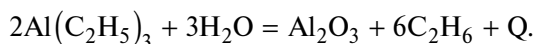
²Государственный научно-исследовательский институт химии и технологии элементоорганических соединений, Москва, Россия

*E-mail: smfrol@chph.ras.ru

**E-mail: kaavdeev@mail.ru

[8] исследовалась детонация смеси диборана и бензола с воздухом. В экспериментах измерены низкие скорости распространения волны (менее 1000 м/с), что свидетельствовало о нестационарном режиме детонации. В работах [9–11] определены концентрационные пределы взрыва смесей диборана и пентаборана с кислородом. Одно из соединений, рассмотренных в работе [5], – ТЭА – предмет исследования в настоящей работе. Это пирофорное соединение в смеси с триэтилбором (ТЭБ) используется на практике в качестве компонента пускового топлива жидкостных ракетных двигателей [12]. Возможность использования ТЭА в качестве топлива для прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ПВРД) изучалась в работе [13], где проведены испытания модели ПВРД, работающей на ТЭА, а также на смеси ТЭА с гидридом диэтилалюминия.

Суммарная реакция ТЭА с водяным паром выглядит так:



Учитывая, что стандартные энтальпии образования ТЭА, H_2O (пар), Al_2O_3 и C_2H_6 равны -217.6 , -241.8 , -1676 и -84.67 кДж/моль, тепловой эффект этой реакции составит 511.7 кДж/моль ТЭА или 4.48 МДж/кг ТЭА. Тепловой эффект реакции на 1 кг смеси водяной пар–ТЭА равен 3.63 МДж/кг.

В нашей работе [14] экспериментально исследовались условия самовоспламенения смеси ТЭА+ТЭБ в перегретом водяном паре. Самовоспламенение с последующим распространением пламени происходило при температуре пара 330–340 °С, причем очаг самовоспламенения возникал в месте контакта жидкой струи ТЭА–ТЭБ с поверхностью, нагретой до 500–600 °С.

В работе [5] показано, что термодинамическая скорость детонации в смесях жидкого ТЭА с перегретым водяным паром при начальных температурах до 900 К и давлении 1 бар может достигать 2400 м/с, что близко к скорости детонации стехиометрической метановоздушной смеси при нормальных начальных условиях.

Данная работа рассматривается как продолжение исследования, представленного в работах [5, 14], а ее цель – экспериментально продемонстрировать возможность усиления ударной волны в двухфазной смеси перегретого водяного пара с жидким ТЭА. Постановка эксперимента во многом похожа на постановку эксперимента в [15], где экспериментально изучались условия усиления ударной волны при прохождении зоны форкамерно-факельного зажигания.

Основной элемент экспериментальной установки – обогреваемая (термостатированная) ударная труба (рис. 1) с камерой низкого (атмосферного) давления (КНД) длиной 2.82 м и камерой высокого давления (КВД) длиной 0.6 м, разделенными медной мембраной. Левый конец КНД (см. рис. 1) сообщается с атмосферой, а КВД заполняется метанокислородной взрывчатой смесью при начальном давлении от 0.2 до 0.6 МПа. Через КНД непрерывно прокачивается перегретый водяной пар с температурой от 140 до 180 °С. Чтобы предотвратить конденсацию водяного пара, температура стенок КНД поддерживается на уровне 115–125 °С.

В КНД на расстоянии 1.3 м от мембранного узла размещен распылитель рабочей жидкости с пороховым генератором давления. В качестве рабочей жидкости используются ТЭА, дистиллированная вода, керосин ТС-1 или н-додекан при комнатной температуре (табл. 1). В отличие от ТЭА, который реагирует с водяным

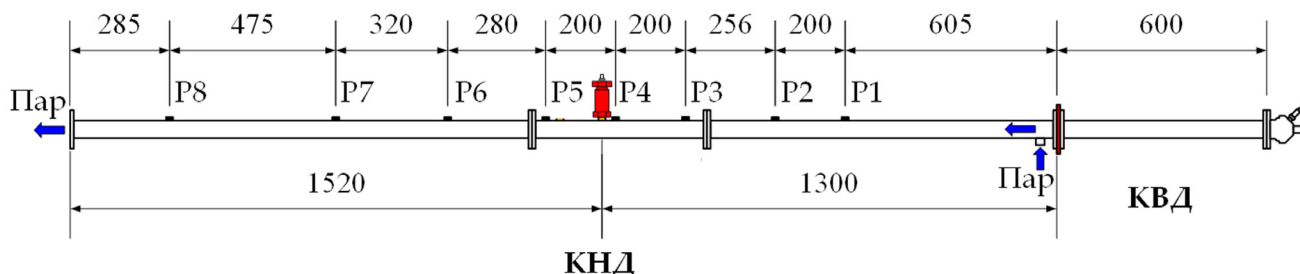


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Таблица 1. Свойства рабочих жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м ³	Температура кипения, К	Теплота испарения, Дж/г	Коэффициент поверхностного натяжения, Н/м	Вязкость, Па · с
Вода	1000	373	2300	72.7×10^{-3}	1.0×10^{-3}
Керосин ТС-1	780	423–523	267	27.0×10^{-3}	1.5×10^{-3}
н-додекан	745	489	358	25.5×10^{-3}	1.3×10^{-3}
ТЭА	832	459–466	536–641	26.1×10^{-3}	2.5×10^{-3}

паром, другие используемые рабочие жидкости (вода, керосин и н-додекан) с водяным паром не реагируют.

Система регистрации включает 8 высокочастотных датчиков давления Р1–Р8. Погрешность измерения скорости ударной волны по показаниям датчиков давления оценивается в 2%. Эксперимент управляется цифровым блоком управления, а получаемые данные записываются в память персонального компьютера через АЦП QMS20 фирмы R-Technology (Москва, Россия).

Установка обеспечивает генерацию сильной ударной волны (со скоростью до 2.5 км/с) в КНД путем зажигания взрывчатой смеси в КВД и разрыва мембраны, вызванного повышением давления до некоторого критического значения. Высоковольтный импульс на свечу зажигания формируется автомобильной катушкой зажигания при разряде конденсатора емкостью 68 мкФ, заряженного до напряжения 320 ± 10 В, на ее первичную обмотку.

Распылитель рабочей жидкости состоит из медицинского шприца, заполняемого рабочей жидкостью, диафрагмы, порохового заряда и взрывающейся проволоочки. В отличие от других используемых рабочих жидкостей заправка ТЭА в шприц производится в герметичном боксе в инертной среде аргона. Для подрыва проволоочки в распылителе используется электролитический конденсатор номинальной емкостью 6800 мкФ, заряженный до напряжения 220 ± 20 В. Под действием давления пороховых газов распылитель образует две струи, направленные в разные стороны: по направлению к мембране и по направлению к открытому концу КНД. Диаметр отверстий – 2 мм. Объем впрыскиваемой дозы – 2.5 мл. Время полного распыления объема шприца с водой приблизительно равно 3.0 мс, а с керосином и н-додеканом – 4.4 мс. Средние скорости передних границ струй приблизительно равны

170 м/с для воды и 110 м/с для керосина и н-додекана, причем начальные скорости струй всех используемых жидкостей составляют 200–250 м/с. После распыления всего объема рабочей жидкости образуется облако с продольной протяженностью 0.8–1 м.

Эксперименты без впрыска и с впрыском рабочей жидкости проводятся при одинаковых начальных условиях. Единственный варьируемый параметр – это интервал времени между началом впрыска рабочей жидкости и моментом прихода ударной волны в сечение распылителя. Этот интервал времени в дальнейшем называется задержкой прихода ударной волны τ_S . Чтобы обеспечить полное распыление рабочих жидкостей до прихода ударной волны, минимальное значение задержки прихода ударной волны выбиралось равным $\tau_{S,min} = 4$ мс. Максимальное значение задержки прихода ударной волны в экспериментах достигало $\tau_{S,min} = 50$ мс.

На рис. 2 показаны осредненные результаты измерений скорости ударной волны по мере ее распространения в водяном паре без впрыска рабочей жидкости (кривая “Пар”), а также с впрыском воды (кривая “Н₂О”), керосина (кривая “ТС-1”), н-додекана (кривая “С₁₂Н₂₆”) и ТЭА (кривая “ТЭА”). Каждой кривой с впрыском рабочей жидкости соответствует некоторое значение задержки прихода ударной волны в миллисекундах, например, “Н₂О, 5 мс” или “ТЭА, 7 мс”. Для каждой кривой осреднение проведено по 4–5 опытам. Положение распылителя рабочей жидкости в КНД показано вертикальной штрихпунктирной линией.

Налицо существенное отличие в поведении ударной волны в водяном паре без впрыска и с впрыском рабочей жидкости. В водяном паре без впрыска рабочей жидкости (кривая “Пар”) скорость ударной волны на измерительном участке длиной 1.6 м монотонно снижается от 1740 до 1170 м/с. Такое снижение скорости

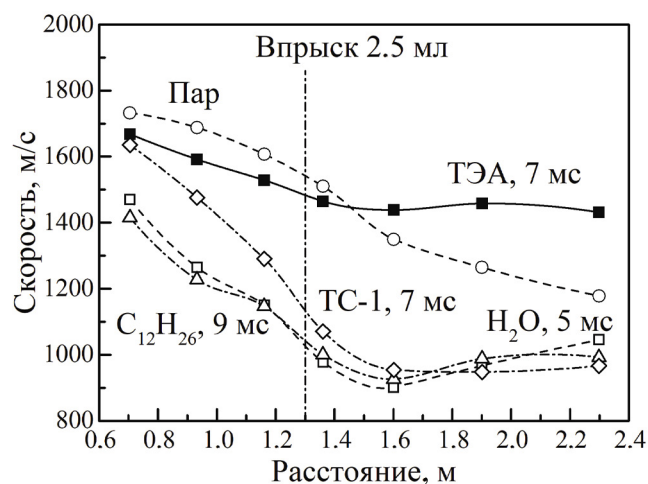


Рис. 2. Измеренные зависимости скорости ударной волны от пройденного расстояния в опытах с одинаковыми начальными условиями. Рабочая среда – водяной пар ($T = 415 \pm 5$ K). Рабочая жидкость – ТЭА, керосин ТС-1, н-додекан, вода. Задержка прихода ударной волны от 5 до 9 мс.

ударной волны в основном вызвано волной разрезания, отраженной от закрытого конца КВД.

При впрыске воды (кривая “ H_2O , 5 мс”), керосина (кривая “ТС-1, 7 мс”) или н-додекана (кривая “ $C_{12}H_{26}$, 9 мс”) ударная волна ослабляется значительно быстрее и до меньшей скорости, чем в водяном паре без впрыска рабочей жидкости. По-видимому, это вызвано дополнительным влиянием двухфазных потерь количества движения и энергии, а также конденсацией водяного пара на холодных каплях этих жидкостей.

При впрыске ТЭА (кривая “ТЭА, 7 мс”) ударная волна на участке КНД до распылителя несколько ослабляется, а затем распространяется по трубе с приблизительно постоянной скоростью 1500 м/с, которая на 500–600 м/с выше, чем при впрыске других жидкостей. Такое поведение кривой для ТЭА однозначно свидетельствует о вкладе энерговыделения в реакции между ТЭА и ударно-сжатым перегретым водяным паром.

На рис. 3 показано сравнение результатов четырех экспериментов с измерением скорости ударной волны в водяном паре с впрыском ТЭА (символы с заливкой) с задержкой прихода ударной волны $\tau_s = 10$ мс с результатами семи экспериментов без впрыска рабочей жидкости (символы без заливки). При такой задержке прихода ударной волны в экспериментах с впрыском ТЭА наблюдается рост скорости ударной волны

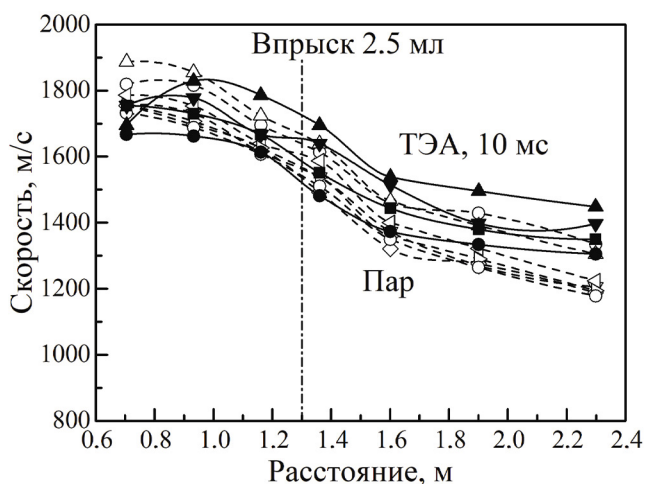


Рис. 3. Измеренные зависимости скорости ударной волны от пройденного расстояния в опытах с одинаковыми начальными условиями. Рабочая среда – водяной пар ($T = 415 \pm 5$ K). В четырех опытах рабочая жидкость – ТЭА (символы с заливкой). Задержка прихода ударной волны 10 мс. В семи опытах (символы без заливки) ударная волна распространяется по перегретому водяному пару без впрыска рабочей жидкости.

на участке до распылителя, а на участке за распылителем ударная волна постепенно замедляется до скорости 1300–1500 м/с.

Наконец, на рис. 4 показаны осредненные результаты измерений скорости ударной волны в водяном паре без впрыска рабочей жидкости и с впрыском ТЭА и воды при задержках

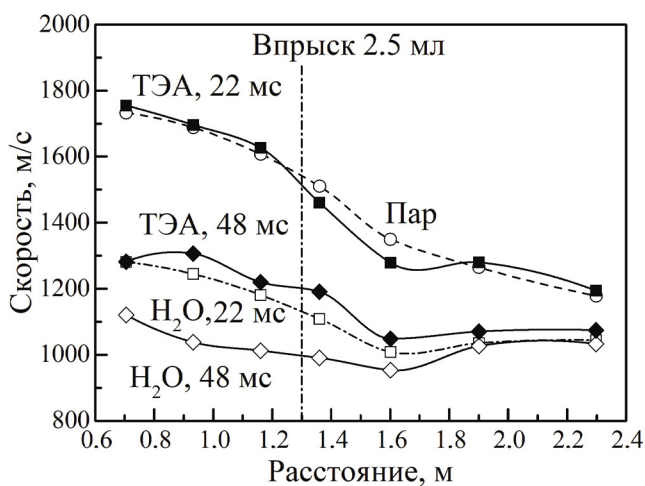


Рис. 4. Измеренные зависимости скорости ударной волны от пройденного расстояния в опытах с одинаковыми начальными условиями. Рабочая среда – водяной пар ($T = 415 \pm 5$ K). Рабочая жидкость – ТЭА или H_2O . Задержка прихода ударной волны 22 и 48 мс.

прихода ударной волны $\tau_s = 22$ и 48 мс. Здесь максимальное превышение скорости ударной волны на кривой “ТЭА, 22 мс” над скоростью на кривой “Н₂O, 22 мс” еще достигает 400–500 м/с, тогда как максимальное превышение скорости ударной волны на кривой “ТЭА, 48 мс” над кривой “Н₂O, 48 мс” уже сокращается до 200 м/с.

Совместное рассмотрение кривых “ТЭА” на рис. 2–4 показывает, что задержка прихода ударной волны играет ключевую роль в явлении усиления ударной волны при прохождении через облако капель ТЭА. Тот факт, что при $\tau_s = 7$ мс ударная волна ослабляется до распылителя и распространяется с постоянной скоростью после распылителя (см. рис. 2), а при $\tau_s = 10$ мс ускоряется до распылителя и постепенно ослабляется после распылителя (см. рис. 3), означает, что значение $\tau_s \approx 7$ мс близко к оптимальному значению, при котором вклад энерговыделения в реакции между ТЭА и ударно-сжатым перегретым водяным паром в интенсивность ударной волны максимален. С увеличением задержки прихода ударной волны возрастает доля ТЭА, прореагировавшего с низкотемпературным водяным паром и, следовательно, вклад энерговыделения в указанной реакции уменьшается.

Таким образом, чтобы обеспечить незатухающий характер распространения ударной волны в двухфазной среде перегретый водяной пар–ТЭА со скоростью на уровне 1500 м/с, необходима тонкая синхронизация момента впрыска ТЭА в поток перегретого водяного пара с моментом прихода затухающей ударной волны. Дальнейшая работа будет направлена на определение условий для перехода ударной волны в детонацию в двухфазной среде перегретый водяной пар–ТЭА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bussing T., Pappas G.* An introduction to pulse detonation engines // AIAA Paper 94-0263, 1994 (Proc. 32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 10–13 January 1994, Reno, NV, U.S.A. <https://doi.org/10.2514/6.1994-263>
2. *Bykovskii F.A., Zhdan S.A., Vedernikov E.F.* Continuous spin detonations // J. Propuls. Power 2006. V. 22(6). P. 1204–1216. <https://doi.org/10.2514/1.17656>
3. *Frolov S.M., Platonov S.V., Avdeev K.A., Aksenov V.S., Ivanov V.S., Zangiev A.E., Sadykov I.A., Tukhvatullina R.R., Frolov F.S., Shamshin I.O.* Pulsed combustion of fuel–air mixture in a cavity under the boat bottom: modeling and experiments // Shock Waves. 2022. V. 32(1). P. 11–24. <https://doi.org/10.1007/s00193-021-01046-2>
4. *Frolov S.M., Avdeev K.A., Aksenov V.S., Frolov F.S., Sadykov I.A., Shamshin I.O.* Pulsed detonation hydramjet: Design optimization // J. Marine Sci. Eng. 2022. V. 10. № 1171. <https://doi.org/10.3390/jmse10091171>
5. *Быркин К.А., Фролов С.М., Стороженко П.А., Гусейнов Ш.Л.* Детонационная способность бор- и алюминий-содержащих соединений в воздухе, воде и диоксиде углерода // Горение и взрыв. 2023. Т. 16. № 2. С. 50–70. <https://doi.org/10.30826/CE23160205>
6. *Poling E., Simons H.P.* Explosive reaction of diborane in dry and water-saturated air // Ind. Eng. Chem. 1958. V. 50. № 11. P. 1695–1698. <https://doi.org/10.1021/ie50587a051>
7. *Martin F.J., Kydd P.H., Browne W.G.* Condensation of products in diborane–air detonations // Proc. Symp. (Int.) Combust. 1961. V. 8. № 1. P. 633–644. [https://doi.org/10.1016/s0082-0784\(06\)80555-2](https://doi.org/10.1016/s0082-0784(06)80555-2)
8. *Sample P., Simons H.P.* Explosive reactions of diborane in benzene-saturated air // Ind. Eng. Chem. 1958. V. 50. № 11. 1699–1702. <https://doi.org/10.1021/ie50587a052>
9. *Whatley A.T., Pease R.N.* Observations on thermal explosions of diborane–oxygen mixtures // J. Am. Chem. Soc. 1954. V. 76. No. 7. P. 1997–1999. <https://doi.org/10.1021/ja01636a089>
10. *Baden H.C., Bauer W.H., Wiberley S.E.* The explosive oxidation of pentaborane // J. Phys. Chem. 1958. V. 62. № 3. P. 331–334. <https://doi.org/10.1021/j150561a021>
11. *Bauer W.H., Wiberley S.E.* Explosive oxidation of boranes. In: Borax to Boranes. American Chemical Society, Washington, DC, 1961. P. 115–126. (Advances in Chemistry, 32).
12. *Seedhouse E.* SpaceX: Starship to Mars — The First 20 Years. Cham: Springer, 2022.
13. *Billig F.S.* A study of combustion in supersonic streams. Doctoral dissertation, Univ. of Maryland, MD, USA, 1964.
14. *Кузнецов Н.М., Фролов С.М., Шамшин И.О., Стороженко П.А.* Кинетика взаимодействия капель триэтилалюминия с перегретым водяным паром: эксперимент, физико-химическая модель и схема химических реакций // Горение и взрыв. 2020. Т. 13. № 3. С. 76–81. <https://doi.org/10.30826/CE20130307>
15. *Фролов С.М., Аксенов В.С., Басевич В.Я.* Иницирование детонации при взаимодействии ударной волны с зоной форкамерно-факельного зажигания // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 70–74.

AMPLIFICATION OF THE SHOCK WAVE IN A TWO-PHASE MIXTURE OF SUPERHEATED STEAM AND TRIETHYLALUMINUM

S. M. Frolov^a, I. O. Shamshin^a, K. A. Byrdin^a, K. A. Avdeev^a, V. S. Aksenov^a,
Academician of the RAS P. A. Storozhenko^b, Sh. L. Guseinov^b

^a*N.N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*State Research Center "State Scientific Research Institute of Chemistry and Technology
of Organo-Element Compounds", Moscow, Russia*

The possibility of shock wave amplification in a two-phase mixture of superheated steam and liquid triethylaluminum (TEA, $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$) has been experimentally demonstrated for the first time. Fine synchronization of TEA injection of TEA into a flow of superheated steam with the arrival of an attenuating shock wave is shown to ensure the self-sustaining propagation of the shock wave in the two-phase medium at a speed of about 1500 m/s.

Keywords: superheated steam, triethylaluminum, shock wave, detonation, pulse detonation engine, continuous detonation engine

УДК 539.3

К ТЕОРИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД С АНИЗОТРОПНОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2024 г. Академик РАН В. А. Бабешко^{1,2,*}, О. В. Евдокимова²,
О. М. Бабешко¹, В. С. Евдокимов¹

Поступило 12.04.2024 г.

После доработки 12.04.2024 г.

Принято к публикации 18.06.2024 г.

Впервые строится точное решение контактной задачи о действии полосового жесткого штампа конечной ширины на композитный слоистый материал, имеющий анизотропную структуру. Задачи такого рода изучены достаточно глубоко для изотропных материалов. Контактные задачи для штампов неклассической формы, действующих на композитные материалы, изучены слабо. Применяемые численные методы для композитных материалов не учитывают возникающие на границе концентрации контактные напряжения, свойственные контактными задачам, не выявляют в полной мере податливость внедрения штампа в анизотропную среду при изменении размера штампа, сложны для анализа в динамических случаях. В отличие от изотропного случая, когда символ ядра интегрального уравнения описывается мероморфной функцией, в анизотропном случае приходится встречаться с аналитической функцией двух комплексных переменных сложного строения. Контактные задачи для анизотропных материалов возникают во многих областях при создании различных инженерных технических средств и изделий, в строительстве, при создании элементной базы электроники, а также в механике природных процессов. В работе на примере воздействия полосового жесткого штампа конечной ширины на композитный слоистый материал методом блочного элемента построено точное решение статической задачи для одного типа анизотропии. Практика построения точных решений граничных задач показывает, что с их помощью удастся улавливать и выявлять свойства решений, изучение которых недоступно численным методам. Примерами являются выявления новых типов землетрясений, стартовых, нового типа трещин, ранее не описанных, новых типов предвестников землетрясений и резонансов конструкций. На основе точных решений удастся строить высокоточные приближенные, применение к которым численных методов уже оказывается более эффективным, чем в результате прямого обращения объемных и граничных дифференциальных операторов граничных задач. Результат настоящего сообщения может быть полезен как в инженерной практике, так и в геофизике при описании поведения горной гряды на анизотропной коренной породе. Кроме того, метод открывает возможность исследовать анизотропные случаи в динамической постановке с помощью контурных интегралов в представлении решений.

Ключевые слова: контактная задача, композитный материал, анизотропная среда, интегральное уравнение, метод блочного элемента

DOI: 10.31857/S2686740024050047, **EDN:** HXSKDL

¹Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

²Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия

*E-mail: babeshko41@mail.ru

Теории анизотропных сред, описывающих композитные материалы, посвящено большое количество работ, в связи с их важностью в различных областях инженерной практики [1–15]. Анизотропные структуры имеют природное и техногенное происхождение. Они встречаются как природные образования в коре Земли, а также как результат создания новых композитных материалов. Сложно охватить весь комплекс анизотропных структур. Некоторые анизотропные структуры изучены достаточно глубоко, в связи с важностью их применения в отраслях ответственного назначения. Особенно это относится к кристаллам и полупроводниковым материалам, применяемым при создании элементной базы электроники. Важными, и одновременно сложными, являются исследования анизотропных граничных задач в пространственной постановке. Задачи рассматриваются в статическом и динамическом вариантах. Сложность решения пространственных анизотропных задач зачастую вынуждает исследователей ограничиваться случаями рассмотрения их плоских постановок. Они практически нивелируют пространственную анизотропию, поэтому рассмотрено лишь ограниченное количество контактных задач о действии полностью пространственных штампов на анизотропную среду. В большинстве своем это приближенные аналитические либо численные решения задач, в которых пренебрегают учетом концентраций контактных напряжений под штампами. В настоящей работе развитый в [16] метод обобщается на случай анизотропных структур и позволяет получить точное решение контактной задачи для полосового штампа произвольной ширины, действующего на композитную анизотропную среду для всего диапазона входных параметров.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Методом, описанным в работе [17], контактная задача о действии полосового конечной ширины жесткого штампа на анизотропную

слоистую среду сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2),$$

$$-a \leq x_1 \leq a, |x_2| \leq \infty,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u_1, u_2) e^{-i(u_1 x_1 + u_2 x_2)} du_1 du_2,$$

$$K(u_1, u_2) > 0, \quad -\infty < u_1, u_2 < \infty. \quad (1)$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ — контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ — перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ — ядро интегрального уравнения, функция $K(u_1, u_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения.

Считаем, что функция $K(u_1, u_2)$ является аналитической, зависящей от двух комплексных переменных, не обращающейся в ноль на вещественной оси по обоим параметрам. Двумерное интегральное уравнение (1) сводится к одномерному с вещественным параметром u_2 применением преобразования Фурье по координате x_2 .

В результате интегральное уравнение (1) оказывается представимо в виде

$$\int_{-a}^a k(x_1 - \xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 = f(x_1),$$

$$q(\xi_1) = q(\xi_1, u_2), \quad k(x_1) = k(x_1, u_2),$$

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(u_1) e^{-iu_1 x_1} du_1,$$

$$K(u_1) = K(u_1, u_2), \quad f(x_1) = f(x_1, u_2). \quad (2)$$

Ради краткости вещественный параметр u_2 временно опускается и возврат к нему будет осуществлен в конце сообщения. Считаем, что непрерывная аналитическая функция $K(u_1)$ на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K(u_1) = O(u_1^{-1})$, $\text{Im } u_1 = 0$. Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для статических смешанных задач на многослойной анизотропной среде [18]. Например, в случае термоэлектроупругого слоя уравнения состояния среды имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_y &= c_{ykl}^{E,\theta} s_{kl} - e_{yk}^\theta E_k - \lambda_y^E \theta, \\ d_i &= e_{ikl}^\theta s_{kl} + \varepsilon_{ij}^{s,\theta} E_j + \rho_i^S \theta, \\ \eta &= \lambda_{ij}^E s_{ij} + \rho_i^S E_i + \alpha \theta.\end{aligned}$$

Здесь σ — тензор напряжений; $c_{ijkl}^{E,\theta}$ — тензор упругих постоянных; s_{ij} — тензор деформаций упругой среды; E_i — компоненты вектора напряженности электрического поля; $\theta = T - T_0$; θ , T и T_0 — относительная, абсолютная и начальная температуры соответственно; η — плотность энтропии; d_i — компоненты вектора электрической индукции; e_{kij}^θ — тензор пьезомодулей; $\varepsilon_{ij}^{s,\theta}$ — тензор диэлектрических проницаемостей; ρ_i^S — пирозлектрические коэффициенты; $\alpha = \rho c_\varepsilon^E T_0^{-1}$; c_ε^E — удельная теплоемкость при постоянной деформации; ρ — плотность материала.

Система дифференциальных уравнений, описывающая такой материал, после сокращения и введения потенциалов принимает вид

$$\begin{aligned}c_{ijkl} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} - \lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + F_i &= \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \\ e_{ik} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} + \rho_i \frac{\partial \theta}{\partial x_j} &= 0, \\ k_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + W &= T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \rho_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \alpha \theta \right), \\ i, j, k, l &= 1, 2, 3, \\ S_{kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_l} + \frac{\partial w_l}{\partial x_k} \right), \quad g_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \\ E_k &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_k}.\end{aligned}$$

Применением преобразований Фурье в слоистой среде строится система интегральных уравнений для вектора неизвестных. Упростив постановку контактной задачи путем выделения отличной от нуля одной компоненты вектора, получаем отдельное интегральное уравнение относительно неизвестной компоненты.

Ниже развивается один из методов изучения и решения интегрального уравнения контактной задачи о действии полосового штампа на анизотропную слоистую среду. Для этого строится обобщенное решение интегрального уравнения.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение (2) с тремя типами ядер K_m , удовлетворяющими приведенным ниже свойствам.

Выберем положительные числа γ_1, γ_3 таким образом, чтобы имело место неравенство

$$0 < K_1(u_1) < K_2(u_1) < K_3(u_1). \quad (3)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}K_1(u_1) &= \gamma_1(u_1)^{-1} \text{th} u_1, \quad K_2(u_1) = K(u_1, u_2), \\ K_3(u_1) &= \gamma_3(u_1)^{-1} \text{th} u_1, \\ 0 < \gamma_1 < \gamma_3, \quad \text{Im} u_2 &= 0, \quad |u_2| \leq \infty.\end{aligned} \quad (4)$$

Функция $K_2(u_1) = K(u_1, u_2)$, зависящая от параметра u_2 , очевидно, представляет семейство функций при любом фиксированном u_2 на вещественной оси.

Введем в рассмотрение три комплексных гильбертовых пространства $H_m(-a, a)$, $m = 1, 2, 3$, для функций, заданных на отрезке $[-a, a]$ со скалярным произведением и нормой [17] вида

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi)_m &= (\sqrt{K_m(u_1)} \Phi(u_1) e^{iu_1}, \sqrt{K_m(u_1)} \Psi^*(u_1) e^{-iu_1})_m = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{K_m(u_1)} \Phi(u_1) \sqrt{K_m(u_1)} \Psi^*(u_1) du_1, \\ \|\varphi\|_m^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |K_m(u_1) \Phi^2(u_1)| du_1, \quad \Phi(u_1) = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{iu_1 x} dx, \\ \Psi^*(u_1) &= \int_{-a}^a \psi^*(x) e^{-iu_1 x} dx.\end{aligned} \quad (5)$$

Звездочка означает переход к комплексно сопряженному выражению.

В результате порождается семейство гильбертовых пространств для каждого фиксированного вещественного u_2 . Очевидно, все введенные пространства эквивалентны, причем гильбертовы пространства являются негативными, сохраняющими, наряду с классическими, также и некоторые обобщенные функции. Построим обобщенные решения для интегральных уравнений [17]:

$$\begin{aligned} K_m q_m &\equiv \int_{-a}^a k_m(x - \xi) q_m(\xi) d\xi = f(x), \\ |x| \leq a, \quad k_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m(u) e^{-iux} du, \\ \operatorname{Re} K_m(u) &> 0 \end{aligned} \quad (6)$$

с ядрами $k_m(x)$.

Рассматривая их в пространствах $H_m(-a, a)$, взяв произвольные функции ψ из этих пространств, умножив на них уравнения (6) и проинтегрировав на отрезке $[-a, a]$, получим соотношения

$$\begin{aligned} (q_m, \psi)_m &= (f, \psi), \\ (f, \psi) &= \int_{-a}^a f(x) \psi^*(x) dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1) \Psi^*(u_1) du_1. \end{aligned}$$

Приведем выражение справа к виду скалярных произведений (5) во введенных гильбертовых пространствах за счет дополнительных требований свойств у функции $f(x)$ правой части интегрального уравнения (6) с учетом принадлежности функции $\psi(x)$ этим пространствам. Имеем

$$\begin{aligned} (f, \psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1) \Psi^*(u_1) du_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{K_m(u_1)} F_m(u_1) \sqrt{K_m(u_1)} \Psi^*(u_1) du_1 = (f_m, \psi)_m, \\ F_m(u_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_m^{-1}(u_1) F(u_1) du_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) получаем равенство функционалов, справедливое для любой функции ψ из гильбертова пространства $(q_m, \psi)_m = (f_m, \psi)_m$. В результате из теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала [16] следует доказательство существования и единственности решений интегральных уравнений (6) в каждом из введенных гильбертовых пространств. При этом $\|q_m\| = \|f_m\|$. Как следствие, из (4) получаем важные соотношения $\|q_3\|_3 < \|q_2\|_2 < \|q_1\|_1$, свидетельствующие о разрешимости интегрального уравнений (6) для любого вещественного u_2 в гильбертовых пространствах. Это относится ко всем классическим решениям,

вложенным во введенные гильбертовы. Для получения существующего классического решения, вложенного в гильбертово, как доказано, единственного, необходимо построить оператор вложения в гильбертовы пространства. Это достигается использованием аппарата блочного элемента и факторизационных методов.

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать интегральные уравнения (6) с ядрами $K_m(u_1)$, $m = 1, 2, 3$. Применим к ним метод блочного элемента, опирающийся на факторизационный подход [19]. Они приводятся к решению эквивалентной операторам интегральных уравнений (6) системы двух интегральных уравнений. Их построение детально описано в работе [19] и ниже не повторяется.

$$\begin{aligned} X_m(\zeta, \pm) &= \mp \mathbf{M}_m(\zeta, a) X_m(u_1, \pm) + \alpha_m(\zeta, \pm), \\ \mathbf{M}_m(\zeta, a) X_m(u_1, \pm) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{K_{m-}(u_1) e^{-2aiu}}{K_{m+}(u_1)(u_1 + \zeta)} X_m(u_1, \pm) du_1, \\ \alpha_m(\zeta, \pm) &= \\ &= \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left[\frac{F_+(u_1)}{K_{m-}(u_1)(u_1 - \zeta)} \mp \frac{F_-(u_1)}{K_{m+}(u_1)(u_1 + \zeta)} \right] du_1, \\ F_+(u_1) &= \int_{-a}^a f(x) e^{iu_1(x+a)} dx, \\ F_-(u_1) &= \int_{-a}^a f(x) e^{iu_1(x-a)} dx, \\ \Phi_{m-}(u_1) &= \int_{-\infty}^{-a} \varphi_{m-}(x) e^{iu_1(x+a)} dx, \\ \Phi_{m+}(u_1) &= \int_a^{\infty} \varphi_{m+}(x) e^{iu_1(x-a)} dx, \\ X_m(\zeta, \pm) &= [\Phi_{m+}(-\zeta) \pm \Phi_{m-}(\zeta)] K_{m-}^{-1}(\zeta), \end{aligned} \quad (8)$$

$K_{m\pm}(u_1)$ — результат факторизации функции $K_m(u_1)$, $m = 1, 3$, относительно вещественной оси [19]. Здесь непрерывный контур σ расположен в нижней комплексной полуплоскости, асимптотически уходит на бесконечность так, что содержит часть отрицательной мнимой

полуоси, пересекая ее в одной точке. Главным его свойством является огибание сверху находящихся в нижней комплексной полуплоскости комплексных особенностей всех аналитических функций $K_m(u_1)$. Считаем, что контур расположен строго ниже вещественной оси, т.е. $0 > -c > \max \operatorname{Im} u_1$, $u_1 \in \sigma$, $c > 0$.

После обращения уравнений (8) представления решений интегральных уравнений (6) даются формулами [19]

$$q_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{F(u_1)}{K_m(u_1)} - \frac{X_{0m}^-(u_1)e^{-iau_1}}{K_{m+}(u_1)} - \frac{X_{2m}^+(u_1)e^{iau_1}}{K_{m-}(u_1)} \right\} e^{-ixu_1} du_1, \\ m = 1, 2, 3, \\ 2X_{2m}^+(-u_1) = X_m(u_1, -) + X_m(u_1, +), \\ 2X_{0m}^-(u_1) = X_m(u_1, -) - X_m(u_1, +). \quad (9)$$

В работе [19] доказано, что операторы $\mathbf{M}_m(\zeta, a)$ в правой части (8), если рассматривать их на контуре σ , являются вполне непрерывными в пространстве $C(\lambda)$, $0 \leq \lambda < 1$, вводимом нормой $\|f\| = \max |u_1^\lambda f(u_1)|$, $u_1 \in \sigma$.

Методами, детально описанными в работе [19], осуществим факторизацию в виде произведения каждой функции $K_m(u)$. Примем во внимание представление функций $K_m(u)$, $m = 1, 3$, в виде

$$K_m(u) = \gamma_m \frac{\pi \Gamma(\frac{1}{2} + iu\pi^{-1}) \Gamma(\frac{1}{2} - iu\pi^{-1})}{\Gamma(1 + iu\pi^{-1}) \Gamma(1 - iu\pi^{-1})}, \quad m = 1, 3,$$

$\Gamma(u)$ — гамма-функция. В результате будем иметь

$$K_m(u_1) = K_{m+}(u_1) K_{m-}(u_1), \\ K_{m\pm}(u_1) = \sqrt{\gamma_m} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} \mp iu_1\pi^{-1})}{\Gamma(1 \mp iu_1\pi^{-1})}, \quad m = 1, 3, \\ K_{2\pm}(u_1) = \exp(\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K_2(\xi)}{\xi - u_1} d\xi), \quad u_1 \in \Pi_{\pm}. \quad (10)$$

Здесь Π_+ , Π_- — верхняя и нижняя комплексные полуплоскости. Из (10) для факторизованных функций следует свойство

$$K_{m-}(u_1) K_{m+}^{-1}(u_1) \rightarrow O(1), \quad |u_1| \rightarrow \infty, \quad u_1 \in \sigma.$$

Будем считать, что левая и правая ветви контура σ асимптотически, при $\tau_2 \rightarrow \infty$,

сближаются с границами клина, описываемого прямыми

$$u_1 = (\pm\delta - i)\tau_2, \quad 0 < \delta < 1, \quad 0 < \tau_2 \leq \infty, \quad u_1 = \tau_1 + i\tau_2.$$

Внутри него расположены все особенности нижней полуплоскости функций $K_m^{\pm 1}(u_1)$.

Справедлива

Л е м м а . Оператор $\mathbf{M}(\zeta, a)$ является аналитической функцией параметра a , регулярной в области $\operatorname{Re} a > 0$. Существует такое $a_0 \geq 0$, что имеет место неравенство $\|\mathbf{M}_m(\zeta, a)\|_{C(\lambda)} < 1$, $\operatorname{Re} a > a_0$.

Первое доказывается на основании наличия убывающей экспоненциальной функции под интегралом, представляющим оператор, вычисляемым по контуру σ , что позволяет его дифференцировать произвольное количество раз. Последнее возможно, поскольку функции $K_m(u_1)$ являются регулярными, не имеющими особенностей в зоне между вещественной осью и контуром σ . Второе следует из оценки нормы оператора, на основании учета поведения подынтегральной функции на всем контуре σ , т.е. $\|\mathbf{M}_m(\zeta, a)\|_{C(\lambda)} = O(e^{-ca})$, $c > 0$, $a \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а . Решение (9), основанное на использовании уравнений (8), справедливо для всех значений параметра $0 < a \leq \infty$.

Для доказательства рассмотрим интегральные уравнения (6) для случая $f(x) = 1$ и построим решения $q_{m0}(x_1)$ [20]. Вычислив правые части в уравнениях (8), рассмотрим область значений параметра $a > a_0$. В этом случае оператор будет сжимающим и уравнение можно решить методом последовательных приближений [16]. В результате решение представимо в виде

$$\mathbf{X}_m = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{M}_m(\zeta, a)]^n \mathbf{A}_m. \quad (11)$$

В этом случае, используя метод Ньютона–Канторовича [21], решение можно представить в виде

$$\mathbf{X}_m = [1 - \mathbf{M}_m(\zeta, a)]^{-1} \mathbf{A}_m. \quad (12)$$

В работе [16] показано, что в изотропном случае слоистой среды, т.е. для $m = 1, 3$, соотношение (12) справедливо во всем диапазоне $0 < a \leq \infty$. Покажем, что это свойство имеет

место также и в рассматриваемом анизотропном случае.

Рассмотрим интегральные уравнения (6) при $m = 1, 3$. В этих случаях для рассматриваемых интегральных уравнений ряд (11) сходится в интервале $0 < a \leq \infty$ и дает точное решение уравнения в форме (9), которое после преобразований имеет вид [20]

$$q_{m0}(x_1) = \frac{1}{\gamma_m \pi Q_{-\frac{1}{2}}(cha) \sqrt{2cha - 2chx_1}}, \quad m = 1, 3.$$

Здесь $Q_{-\frac{1}{2}}(cha)$ — функция Лежандра с отрицательным дробным индексом. При $a \rightarrow 0$ она имеет поведение

$$Q_{-\frac{1}{2}}(cha) \sim \ln a + r, \quad r = \text{const}. \quad (13)$$

Покажем, что подобным свойством обладает и решение интегрального уравнения при $m = 2$. Действительно, исследуя оператор $\mathbf{M}_m(\zeta, a)$ при $a \rightarrow 0$ в формуле (12), используя асимптотические разложения входящего в него интеграла на контуре σ , получаем соотношение

$$\|\mathbf{M}(\zeta, a)\| = \max \left| e^{-2ai\tau_1} \int_{\sigma} \frac{K_-(\tau_1 - i\tau_2) e^{-2a\tau_2} d\tau_2}{K_+(\tau_1 - i\tau_2)(\tau_1 - i\tau_2 + \zeta)} \right| \sim \\ \sim \delta Ei(-2a\tau_{20}) \sim \delta(\ln a + c_0), \quad a \rightarrow 0, \quad \delta, c_0 = \text{const},$$

где $Ei(-2a\tau_{20})$ — интегральная экспонента. Оно приводит в формуле (9) к аналогичной зависимости от параметра $a \rightarrow 0$, как и (12). В работах [16, 19] доказано, что построенное с использованием уравнений (8) решение q_{20} интегрального уравнения в форме (9) по краям штампа обладает концентрацией контактных напряжений вида $(a^2 - x_1^2)^{-1/2}$. Это значение совпадает с концентрацией контактных напряжений, даваемых точным решением $q_{m0}(x_1)$, $m = 1, 3$. Решения, построенные для интегральных уравнений в гильбертовых пространствах, остаются в силе во всех пространствах, в них вложенных.

Выведенные выражения решений интегральных уравнений для единичной правой части, $f(x_1) = 1$, позволяют по формулам [20]

$$q_m(x_1) = \frac{1}{2M'(a)} \left[\frac{d}{da} \int_{-a}^a q_{m0}(s, a) f(s) ds \right] q_{m0}(x_1, a) - \\ - \frac{1}{2} \int_{|x_1|}^a q_{m0}(x_1, \xi) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{M'(\xi)} \times \right. \\ \times \left. \frac{d}{d\xi} \int_{-\xi}^{\xi} q_{m0}(s, \xi) f(s) ds \right] d\xi - \\ - \frac{1}{2} \frac{d}{dx_1} \int_{|x_1|}^a \frac{q_{m0}(x_1, \xi)}{M'(\xi)} \left[\int_{-\xi}^{\xi} q_{m0}(s, \xi) df(s) \right] d\xi, \\ |x_1| < a$$

построить решения $q_m(x_1)$ интегрального уравнения для произвольной правой части $f(x_1)$. Для построенных классических решений остаются справедливыми неравенства $\|q_3\|_3 < \|q_2\|_2 < \|q_1\|_1$, как для элементов, вложенных в гильбертовы пространства. Учтем, что решение интегрального уравнения $q_2(x_1)$ содержит скрытый вещественный параметр u_2 , являющийся преобразованием Фурье по параметру x_2 интегрального уравнения (1). Тогда, в соответствии с соотношением $q_2(x_1) \equiv q_2(x_1, u_2)$ из (2), имеет место представление решения интегрального уравнения (1) в полосе в виде

$$q_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_2(x_1, u_2) e^{-u_2 x_2} du_2.$$

Оно является точным решением интегрального уравнения (1) во всем диапазоне $0 < a \leq \infty$ изменения параметра a в контактной задаче о действии полосового штампа на композитный материал анизотропной слоистой среды.

ВЫВОД

Выполненное исследование представляет строго обоснованный метод решения контактных задач для полосового штампа конечной ширины, действующего на слой из композитного материала, имеющего анизотропную структуру. Такого рода задачи возникают при исследовании состояния сейсмичности территории, имеющей протяженную горную гряду. В инженерной практике подобные задачи возникают при конструировании изделий с применением композитных материалов анизотропной структуры. Метод допускает дальнейшее развитие,

направленное на решение контактных задач для штампов иной неклассической формы.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект Краснодарского края № 24-11-20006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
2. *Кристensen Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
3. *Kushch V.I.* Micromechanics of composites: multipole expansion approach. Oxford; Waltham: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 489 p.
4. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite materials // *International Journal of Engineering Science*. 1977. V. 15. P. 237–244.
5. *Garces G. Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // *Acta Materialia*. 2007. V. 55. P. 5389–5400.
6. *Levandovskiy A., Melnikov B.* Finite element modeling of porous material structure represented by a uniform cubic mesh // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. V. 725. P. 928–936.
7. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
8. *Бребия К.* Методы граничных элементов / К. Бребия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
10. *Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A.* Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // *Materials Physics and Mechanics*. 2020. № 3. P. 17–27.
11. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Кренив Л.И., Трубчик И.С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
12. *Ватуляян А.О.* Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // *ПММ*. 1977. Т. 40. Вып. 4. С. 727–734.
13. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
14. *Гуз А.Н., Томашевский А.Т., Шульга Н.А., Яковлев В.С.* Технологические напряжения и деформации в композитных материалах. Киев: Вища шк., 1988. 270 с.
15. *Акбаров А.Н., Гузь А.Н., Мовсумов Э.А., Мустафеев С.М.* Механика материалов с искривленными структурами. Киев: Наукова Думка, 1995. 320 с.
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Евдокимов В.С.* Точное решение уравнения Винера–Хопфа на отрезке для контактных задач теории трещин в слоистой среде // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 509. С. 39–44.
17. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
18. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Прякина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
19. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
20. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
21. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

ON THE THEORY OF CONTACT PROBLEMS FOR COMPOSITE MEDIA WITH ANISOTROPIC STRUCTURE

Academician of the RAS V. A. Babeshko^{a,b}, O. V. Evdokimova^b, O. M. Babeshko^a, V. S. Evdokimov^a

^a*Kuban State University, Krasnodar, Russia*

^b*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

For the first time, an exact solution to the contact problem of the action of a strip rigid stamp of finite width on a composite layered material having an anisotropic structure is constructed. Problems of this kind have been studied in sufficient depth for isotropic materials. Contact problems for non-classical shaped stamps acting on composite materials have been poorly studied. The applied numerical methods for composite materials do not take into account the contact stress concentrations occurring at the boundary, which are characteristic of contact problems, do not fully reveal the malleability of the stamp insertion into an anisotropic medium when the stamp size changes, and are difficult to analyze in dynamic cases. In contrast to the isotropic case, when the symbol of the kernel of the integral equation is described by a meromorphic function, in the anisotropic case one has to meet with an analytical function of two complex variables of complex structure. Contact problems for anisotropic materials arise in many areas when creating various engineering equipment and products, in construction, when creating an electronic element base, as well as in the mechanics of natural processes. In this paper, using the example of the effect of a strip rigid stamp of finite width on a composite laminated material, an exact solution of a static problem for one type of anisotropy is constructed using the block element method. The practice of constructing exact solutions to boundary value problems shows that with their help it is possible to capture and identify properties of solutions, the study of which is inaccessible to numerical methods. Examples are the identification of new types of earthquakes, starting ones, a new type of cracks not previously described, new types of earthquake precursors and resonances of structures. On the basis of exact solutions, it is possible to build high-precision approximations, the application of numerical methods to which already turns out to be more effective than as a result of direct inversion of volumetric and boundary differential operators of boundary problems. The result of this article can be useful both in engineering practice and in geophysics in describing the behavior of a mountain range on an anisotropic bedrock. In addition, the method opens up the possibility to investigate anisotropic cases in a dynamic formulation using contour integrals in the representation of solutions.

Keywords: contact problem, composite material, anisotropic medium, integral equation, block element method

УДК 532.529

ЭФФЕКТ ТУРБУЛИЗАЦИИ ЗАТУХАЮЩЕЙ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КРУПНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН А. Ю. Вараксин^{1,2,*}, А. А. Мочалов^{1,2}

Поступило 19.04.2024 г.

После доработки 19.04.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

На основе двухпараметрической модели турбулентности для двухфазного потока впервые изучено влияние присутствия крупных частиц на затухающую однородную изотропную турбулентность. Показано, что обнаруженный эффект турбулизации возрастает с ростом объемной концентрации частиц и их размера.

Ключевые слова: однородная изотропная турбулентность, влияние крупных частиц, турбулизация

DOI: 10.31857/S2686740024050053, **EDN:** HXMNVG

Однофазные и двухфазные турбулентные течения широко распространены в природе и находят свое применение в технике [1–6]. Установление влияния дисперсной примеси в виде частиц (капель) на характеристики турбулентности несущего потока газа — одна из главных проблем теории двухфазных турбулентных течений [7–10].

На сегодняшний день известны несколько основных механизмов влияния частиц на энергию турбулентности газа. Одним из них является генерация турбулентности несущей фазы в турбулентных следах за движущимися крупными частицами [9, 10]. Этот механизм реализуется при высоких значениях числа Рейнольдса частицы Re_p , вычисляемого по диаметру частиц и относительной скорости движения частиц и газа.

Целью настоящей работы является анализ эффекта наличия в потоке крупных

частиц на процесс дополнительной генерации турбулентности для классического случая вырождающейся однородной изотропной турбулентности.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим движение несжимаемого вязкого газа, несущего тяжелые частицы (физическая плотность частиц ρ_p намного превышает плотность газа ρ , т.е. $\rho_p \gg \rho$). Примем допущение, что объемная концентрация дисперсной фазы предполагается малой ($\Phi \ll 1$). В этом случае можно пренебречь столкновениями частиц между собой. Необходимо отметить, что массовая концентрация $M = \rho_p \Phi / \rho$ может быть достаточно большой. Также сделаем допущение, что основными силами, определяющими поведение частиц в турбулентном потоке и их обратное влияние на его характеристики, являются силы аэродинамического сопротивления и сила тяжести.

Для выполнения анализа влияния частиц различной инерционности привлечем двухпараметрическую ($k - \varepsilon$) модель турбулентности, модифицированную для случая двухфазного потока. Указанная модель содержит два

¹Объединенный институт высоких температур
Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: varaksin_a@mail.ru

основных уравнения переноса — турбулентной энергии и скорости ее диссипации.

Уравнение переноса энергии турбулентности газа в присутствии частиц в сжатой форме имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + \sum_j U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = D + P - \varepsilon + P_p - \varepsilon_p. \quad (1)$$

Здесь $k = \frac{1}{2} \sum_i \overline{u_i'^2}$ — энергия турбулентности газа (u_i' — i -я составляющая пульсационной скорости несущего газа); U_j — j -я составляющая осредненной скорости газа; τ — время.

Члены, стоящие в левой части уравнения (1), описывают соответственно изменение во времени и конвективный перенос энергии турбулентности. Члены в правой части (1) описывают соответственно диффузию D , генерацию турбулентности за счет градиентов осредненной скорости P , диссипацию энергии турбулентности вследствие вязкости ε , дополнительную генерацию турбулентности из-за присутствия частиц P_p , дополнительную диссипацию энергии турбулентности вследствие наличия частиц ε_p .

Уравнение переноса диссипации турбулентности газа в присутствии частиц с использованием общепринятых градиентных представлений в сжатой форме имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \sum_j U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = D_\varepsilon + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_p. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon = \nu \sum_j \sum_i \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$ — скорость диссипации турбулентности газа (ν — кинематическая вязкость несущего газа); $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, $C_{\varepsilon 3}$ — постоянные.

Дополнительную (по сравнению с однофазным потоком) константу $C_{\varepsilon 3}$ чаще всего полагают равной $C_{\varepsilon 2}$, что следует из требования невливания на деструкцию диссипации турбулентности безынерционных частиц.

Члены, стоящие в левой части уравнения (2), описывают, соответственно, изменение во времени и конвективный перенос диссипации энергии турбулентности. Члены в правой части описывают, соответственно, диффузию диссипации энергии турбулентности D_ε , генерацию диссипации за счет энергии осредненного

движения $C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P$, подавление диссипации вследствие вязкости $C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$ и эффект влияния частиц на диссипацию турбулентности $C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_p$.

Из уравнений (1) и (2) следует вывод, что учет модификации турбулентности в двухфазных потоках предполагает корректное описание членов уравнения, отвечающих за дополнительные генерацию P_p и диссипацию ε_p вследствие присутствия частиц.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Изотропная однородная турбулентность представляет собой простейший класс турбулентных течений. Рассмотрим нестационарную вырождающуюся турбулентность за решеткой. В этом случае конвективный перенос, диффузия и порождение турбулентности отсутствуют [11]. Присутствие крупных инерционных частиц предполагает отсутствие их влияния на дополнительную диссипацию энергии турбулентности вследствие вовлечения в пульсационное движение несущего газа, т.е. $\varepsilon_p = 0$.

С учетом вышесказанного уравнения (1) и (2) значительно упрощаются и принимают вид

$$\frac{dk}{d\tau} = -\varepsilon + P_p, \quad (3)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что для учета модификации турбулентности в рассматриваемом случае необходимо описание единственного члена уравнения, отвечающего за дополнительную генерацию турбулентности P_p вследствие присутствия крупных частиц.

В работе [12] на основе решения для автомобильного осесимметричного турбулентного следа получено следующее выражение для определения дополнительной генерации турбулентности в уравнении баланса пульсационной энергии:

$$P_p = a \left(\frac{C_D}{\beta} \right)^{4/3} \Phi \frac{W^3}{d_p}, \quad (5)$$

где постоянные $a = 0.027$, $\beta = 0.2$; C_D — коэффициент сопротивления частицы; Φ — объемная концентрация частиц; $W = |\mathbf{U} - \mathbf{V}|$ — модуль

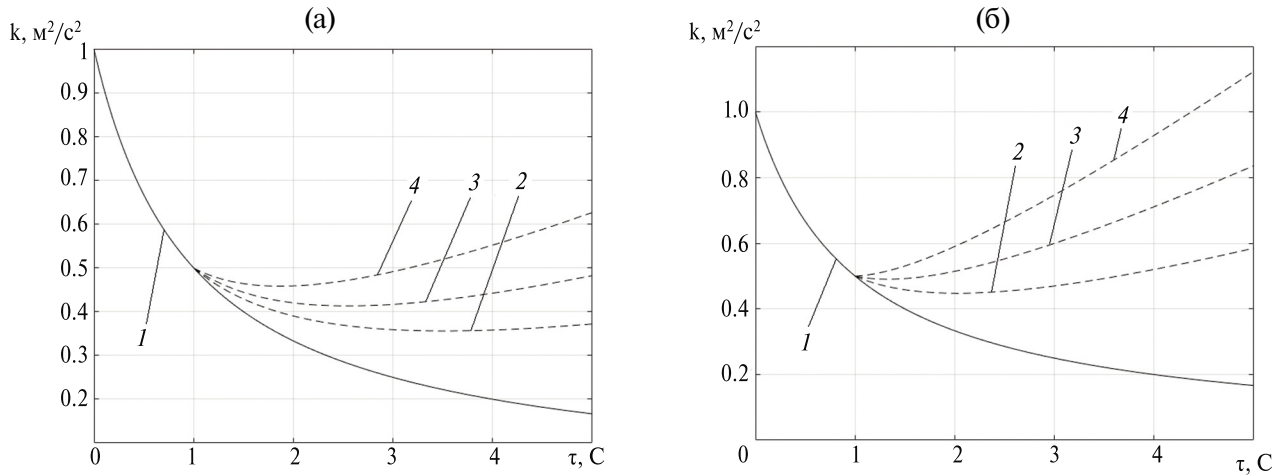


Рис. 1. Влияние присутствия крупных частиц на вырождающуюся однородную изотропную турбулентность: $\Phi = 5 \cdot 10^{-6}$ (а), $\Phi = 10^{-5}$ (б). Цифрами обозначены: 1 – однофазное течение; 2 – двухфазное течение, $d_p = 2 \cdot 10^{-3}$ м; двухфазное течение, 3 – двухфазное течение, $d_p = 5 \cdot 10^{-3}$ м; 4 – двухфазное течение, $d_p = 10^{-2}$ м.

относительной осредненной скорости несущего газа и частиц; d_p – диаметр частицы.

Далее в предположении о равенстве относительной скорости между фазами скорости витания (максимальная скорость осаждения) крупных частиц из уравнения их движения было получено выражение

$$W = \sqrt{3\rho_p d_p g / \rho}, \quad (6)$$

где g – ускорение силы тяжести.

При выводе (6) учитывалось отличие закона сопротивления частиц от закона Стокса, т.е.

$$\tau_p = \tau_{p0} / C(\text{Re}_p) = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu C(\text{Re}_p)}, \quad (7)$$

где τ_{p0} – время динамической релаксации стоксовой частицы, μ – динамическая вязкость, $C(\text{Re}_p) = 0.11\text{Re}_p / 6$ – поправочная функция, учитывающая влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы при $\text{Re}_p > 1000$.

Решение системы уравнений (3) и (4) производилось численным методом с учетом соотношений (5)–(7). Первые (“пристрелочные”) расчеты были выполнены при следующих начальных условиях: $k(0) = 1 \text{ м}^2/\text{с}^2$, $\varepsilon(0) = 1 \text{ м}^2/\text{с}^3$ при $\tau = 0$. Частицы вводились в поток в момент времени $\tau = 1 \text{ с}$. Некоторые результаты вычислений для $\rho_p = 1.2$ и 1000 кг/м^3 приведены на рис. 1.

Из приведенных данных видно, что турбулизирующий эффект вследствие генерации турбулентности в следах за крупными частицами возрастает с увеличением объемной концентрации и размера последних.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-19-00734.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Перенос вещества капли при формировании первичной каверны // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 508. С. 42–52.
2. Чувахов П.В., Егоров И.В. Турбулизация сверхзвукового пограничного слоя на прямом крыле из-за акустического шума // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. С. 63–66.
3. Губайдуллин Д.А., Шайдуллин Л.Р., Фадеев С.А. Вынужденные продольные колебания газа и аэрозоля в открытой трубе со скачком сечения // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 510. С. 59–63.
4. Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Макарова М.С. Турбулентный пограничный слой на проницаемой пластине с положительным градиентом давления при вдуве инородного газа // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 510. С. 64–69.
5. Лапшин В.Б., Скубачевский А.А., Бугаев А.С. Пондемоторные силы при взаимодействии заряженной частицы с неоднородной электромагнитной

- волной // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 512. С. 32–35.
6. Уткин А.В., Фомин В.М. Молекулярно-динамическое исследование процесса кратерообразования при высокоскоростном взаимодействии металлических кластеров с подложкой // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 513. С. 76–80.
 7. Letournel R., Laurent F., Massot M., Vie A. Modulation of Homogeneous and Isotropic Turbulence by Sub-Kolmogorov Particles: Impact of Particle Field Heterogeneity // *Int. J. Multiphase Flow*. 2020. V. 125. № 103233.
 8. Rosa B., Copec S., Ababaei A., Pozorski J. Collision Statistics and Settling Velocity of Inertial Particles in Homogeneous Turbulence from High-Resolution DNS under Two-Way Momentum Coupling // *Int. J. Multiphase Flow*. 2022. V. 48. № 103906.
 9. Varaksin A.Y., Ryzhkov S.V. Turbulence in Two-Phase Flows with Macro-, Micro- and Nanoparticles: A Review // *Symmetry*. 2022. V. 14. № 2433.
 10. Varaksin A.Y., Ryzhkov S.V. Mathematical Modeling of Gas-Solid Two-Phase Flows: Problems, Achievements and Perspectives (A Review) // *Mathematics*. 2023. V. 11. № 3290.
 11. Зайчик Л.И., Алипченков В.М., Козлов И.М. Моделирование влияния мелкодисперсных частиц на турбулентность // *ТВТ*. 2010. Т. 48. № 2. С. 224–233.
 12. Зайчик Л.И., Вараксин А.Ю. Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока // *ТВТ*. 1999. Т. 37. № 4. С. 683–687.

ON THE EFFECT OF TURBULIZATION OF DECAYING HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENCE BY LARGE PARTICLES

Corresponding Member of the RAS A. Yu. Varaksin^{a,b}, A. A. Mochalov^{a,b}

^a*Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

By using of a two-parameter turbulence model for two-phase flow the effect of the presence of large particles on decaying homogeneous isotropic turbulence was studied for the first time. It is shown that the detected effect increases with increasing volume concentration of particles and their size.

Keywords: homogeneous isotropic turbulence, effect of large particles, turbulization

УДК 517.977

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО СИЛОЙ ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ВНУТРЕННЕЙ МАССОЙ

© 2024 г. Т. В. Глазков^{1,*}, академик РАН Ф. Л. Черноусько^{1,**}

Поступило 25.06.2024 г.

После доработки 25.06.2024 г.

Принято к публикации 07.08.2024 г.

Рассматривается поступательное движение в жидкости тела (корпуса) с внутренней подвижной массой. Внешнее сопротивление пропорционально квадрату скорости тела и зависит от направления движения. Управление осуществляется при помощи силы взаимодействия внутреннего тела с корпусом. Построены и проанализированы движения с периодическим изменением скоростей. Оценена средняя скорость перемещения системы.

Ключевые слова: мобильные роботы, нелинейная динамика, квадратичное сопротивление, периодическое движение

DOI: 10.31857/S2686740024050062, **EDN:** HXMDFC

Динамика мобильных систем, управляемых при помощи внутренних подвижных масс, привлекает в последние годы значительное внимание. Роботы, движение которых основано на целенаправленном перемещении внутренних масс, часто называются капсульными роботами или вибророботами. Эти роботы не имеют внешних подвижных элементов, могут иметь гладкие и герметичные корпуса и способны перемещаться в трубах и различных средах, выполняя операции измерения и мониторинга. Миниатюрные капсульные роботы нашли применение в медицине для диагностики и доставки медикаментов.

Периодические движения виброробота в среде с квадратичным сопротивлением изучались в работах [1–3]. Динамика мобильных систем с внутренними подвижными массами в средах с сопротивлением, включая оптимизацию таких движений, исследовалась в работах [3–11].

В работе рассматривается поступательное прямолинейное движение в жидкости твердого тела (корпуса), управляемое при помощи внутренней подвижной массы. Сила внешнего сопротивления жидкости, действующая на корпус, предполагается зависящей от направления движения и пропорциональной квадрату скорости движения корпуса.

В отличие от работ [8–11], где рассматривается кинематическое управление, при котором управляющим воздействием служит скорость движения внутренней массы относительно корпуса, в данной работе рассматривается динамическое управление. Здесь в качестве управляющего воздействия выступает сила взаимодействия внутренней массы с корпусом. При этом все скорости изменяются непрерывно и отсутствуют ударные взаимодействия тел.

Построены и проанализированы управляемые движения с периодическим изменением скоростей. Оценена средняя скорость перемещения системы.

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: t.glazkov@bk.ru

**E-mail: chern@ipmnet.ru

УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА

Рассматривается управляемая механическая система, способная передвигаться прямолинейно и поступательно в жидкости. Система состоит из двух тел: корпуса массы M и внутренней массы m , которая снабжена двигателем (актюатором) и может перемещаться относительно корпуса внутри некоторой полости длины l (рис. 1). Обозначим через R силу сопротивления жидкости, приложенную к корпусу, а через F — управляющую силу, приложенную к массе m и развиваемую актюатором; следовательно, к корпусу приложена сила $-F$.

Обозначим через x смещение корпуса относительно некоторой инерциальной системы координат, через v — скорость корпуса, через ξ — смещение внутренней массы относительно корпуса, а через η — скорость этой массы относительно корпуса. Кинематические соотношения имеют вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{\xi} = \eta, \quad (1)$$

динамические уравнения представим в виде

$$M\dot{v} = R - F, \quad m(\dot{v} + \dot{\eta}) = F. \quad (2)$$

Предполагаем, что сила сопротивления при движении корпуса вперед, т.е. при $v > 0$, направлена против скорости и квадратичным образом зависит от скорости. Имеем

$$R = -Mc v^2 \text{ при } v \geq 0, \quad (3)$$

где $c > 0$ — коэффициент сопротивления. Управляющую силу F представим в виде

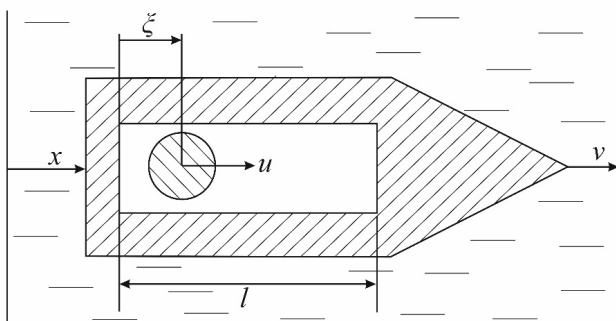


Рис. 1. Механическая система.

$$F = M F_0 u, \quad |u| \leq 1, \quad (4)$$

где F_0 — величина управляющей силы на единицу массы корпуса, u — управление, которое будем принимать равным ± 1 .

Для пояснения смысла введенных соотношений и последующего перехода к безразмерным переменным рассмотрим сначала пассивное движение корпуса по инерции. Положим $F = 0$ и получим из уравнений (1)–(3)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -c v^2.$$

Разделив второе из этих уравнений на первое, получим

$$\frac{dv}{dx} = -c v.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v = 0$ при $x = 0$, найдем

$$v = v_0 e^{-cx}.$$

Отсюда следует, что коэффициент сопротивления c имеет размерность, обратную длине, и можно положить

$$c = L^{-1}, \quad (5)$$

где L — длина пути, на котором скорость движения по инерции уменьшается в e раз.

Рассмотрим теперь движение при максимальной по величине управляющей силе, приложенной к корпусу и направленной вдоль скорости v . Положим $u = -1$ и подставим равенства (4) и (5) в первое уравнение (2). Получим

$$\dot{v} = -c v^2 + F_0. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6) при начальном условии $v(0) = 0$, находим

$$v(t) = v_* \frac{e^{2c v_* t} - 1}{e^{2c v_* t} + 1},$$

где введено обозначение

$$v_* = \sqrt{F_0/c}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что $v(t) \rightarrow v_*$ при $t \rightarrow \infty$, где v_* — скорость, при которой правая часть уравнения (6)

обращается в нуль, т.е. предельная скорость, до которой может разогнаться корпус.

Для перехода к безразмерным переменным выберем в качестве единицы длины величину L из (5) и в качестве единицы скорости величину v_* из (7). В качестве единицы времени возьмем

$$T_0 = \frac{L}{v_*} = \sqrt{\frac{L}{F_0}}. \quad (8)$$

Введем безразмерные переменные соотношениями

$$t = T_0 t', \quad x = L x', \quad \xi = L \xi', \quad v = v_* v', \quad \eta = v_* \eta'. \quad (9)$$

В дальнейшем новые (безразмерные) переменные обозначаем теми же буквами, что и размерные, штрихи опускаем. Используя принятые единицы длины L и времени T_0 , введем безразмерные длину полости и период движения соотношениями, аналогичными (9):

$$l' = l/L, \quad T' = T/T_0.$$

Штрихи здесь также будем опускать.

Кинематические соотношения после замены (9) сохраняются в виде (1). Динамические уравнения (2) после перехода к безразмерным переменным с учетом соотношений (3)–(5), (7) примут вид

$$\dot{v} = -v^2 - u \quad \text{при } v \geq 0, \quad (10)$$

$$\kappa(\dot{v} + \dot{\eta}) = u, \quad \kappa = m/M. \quad (11)$$

При движении корпуса назад, т.е. при $v < 0$, сила сопротивления снова определяется формулой (3), в которой вместо коэффициента сопротивления c должен фигурировать другой коэффициент c_- . Так как форму корпуса естественно выбирать обтекаемой, имеем $c_- > c$. Положим

$$c_- = c/r, \quad r < 1. \quad (12)$$

После перехода к безразмерным переменным (9) первое уравнение (2) при $v < 0$ примет вид, аналогичный (10):

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r} - u \quad \text{при } v < 0. \quad (13)$$

Таким образом, динамика рассматриваемой системы описывается соотношениями (1), (10), (11), (13).

Ранее динамика подобной системы, управляемой при помощи внутренней массы, рассматривалась в ряде работ [8, 10, 11] в предположении, что управление задается кинематическим образом, т.е. путем выбора скорости движения внутренней массы относительно корпуса. При резком изменении относительной скорости внутренней массы в системе происходят удары, в частности, при достижении подвижной массой концов полости. Рассматриваемая в данной работе математическая модель, в которой управление осуществляется силой взаимодействия внутренней массы с корпусом, свободна от этого недостатка — здесь все скорости изменяются непрерывно.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассматриваем движения, при которых скорость корпуса $v(t)$ и относительная скорость внутренней массы $\eta(t)$, а также смещение внутренней массы относительно корпуса $\xi(t)$ изменяются периодически с периодом T . Так как движение корпуса в сопротивляющейся среде со скоростью, сохраняющей постоянное направление, невозможно, то обязательно есть моменты времени, в которых скорость $v(t)$ обращается в нуль. Один из таких моментов примем за начало отсчета времени. Условия периодичности скоростей примут вид

$$v(0) = v(T) = 0, \quad \eta(0) = \eta(T) = \eta_0, \quad (14)$$

где η_0 — пока неизвестная начальная скорость внутренней массы относительно корпуса.

Обозначим через ξ_0 начальное смещение внутренней массы относительно корпуса. Условие периодичности смещения запишем в виде

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \xi(T) = \xi_0. \quad (15)$$

Будем рассматривать движения, при которых управление $u(t)$ всегда максимально по величине и принимает одно из крайних значений

$u = \pm 1$. Без нарушения общности полагаем, что $u = 1$ на начальном участке, и при этом $v < 0$. Периодическое изменение скорости $v(t)$ будет построено в соответствии со схемой, представленной на рис. 2, где моменты времени τ_1, τ_2, τ_3 , удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < T, \quad (16)$$

являются границами участков, на которых сохраняются знаки скорости и управления.

Имеем соотношения:

$$\begin{aligned} t \in (0, \tau_1): & \quad v < 0, u = 1, \\ t \in (\tau_1, \tau_2): & \quad v < 0, u = -1, \\ t \in (\tau_2, \tau_3): & \quad v > 0, u = -1, \\ t \in (\tau_3, T): & \quad v > 0, u = 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Сначала будут построены зависимости $v(t)$ и $\eta(t)$ для скоростей, а затем для смещений $x(t)$ и $\xi(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

На интервале $t \in (0, \tau_1)$, в соответствии с соотношениями (17), имеем в силу уравнения (13)

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r} - 1. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (18) и удовлетворяя начальному условию $v(0) = 0$ из (14), получим

$$v(t) = -\sqrt{r} \frac{1 - e_1(t)}{1 + e_1(t)}, \quad e_1(t) = e^{-\frac{2t}{\sqrt{r}}} \quad \text{при } t \in [0, \tau_1]. \quad (19)$$

При $t = \tau_1$ имеем соотношения

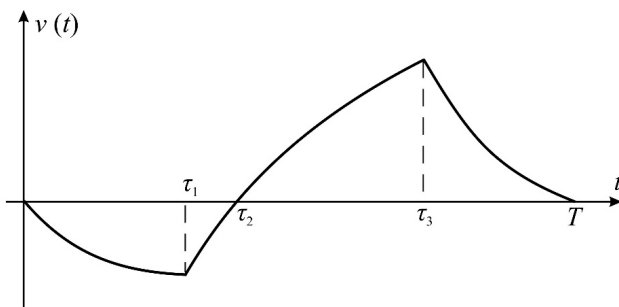


Рис. 2. Периодическое движение.

$$v(\tau_1) = -\sqrt{r} \frac{1 - e_{11}}{1 + e_{11}}, \quad e_{11} = e^{-\frac{2\tau_1}{\sqrt{r}}}. \quad (20)$$

На интервале $t \in (\tau_1, \tau_2)$, в соответствии с соотношениями (17), получим, согласно уравнению (13),

$$\dot{v} = \frac{v^2}{r} + 1. \quad (21)$$

Проинтегрируем уравнение (21) и найдем

$$\sqrt{r} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{r}} = t + c_1 \quad \text{при } t \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (22)$$

Для определения произвольной постоянной воспользуемся условием (20) при $t = \tau_1$ и получим

$$c_1 = \sqrt{r} \operatorname{arctg} \frac{v(\tau_1)}{\sqrt{r}} - \tau_1. \quad (23)$$

На основании равенств (22) и (23) находим

$$v(t) = \frac{v(\tau_1) + \sqrt{r} \operatorname{tg}[(t - \tau_1)/\sqrt{r}]}{1 - [v(\tau_1)/\sqrt{r}] \operatorname{tg}[(t - \tau_1)/\sqrt{r}]} \quad \text{при } t \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (24)$$

В момент $t = \tau_2$ происходит смена знака $v(t)$ (см. рис. 2), так что $v(\tau_2) = 0$. Подставляя это условие в соотношение (24), получим равенство

$$\tau_2 = \tau_1 + \sqrt{r} \operatorname{arctg} \frac{1 - e_{11}}{1 + e_{11}}, \quad (25)$$

где e_{11} определено в соотношениях (20).

Докажем неравенство, полезное для некоторых оценок:

$$\tau_2 < 2\tau_1. \quad (26)$$

Введем обозначение

$$z = \tau_1/\sqrt{r}. \quad (27)$$

Тогда неравенство (26), как следует из равенств (25) и (20), эквивалентно неравенству

$$\operatorname{tg} z > f(z) = \frac{1 - e^{-2z}}{1 + e^{-2z}} \quad \text{при } z > 0. \quad (28)$$

Дифференцируя функцию $f(z)$, находим

$$f'(z) = \frac{4e^{-2z}}{(1 + e^{-2z})^2}, \quad f''(z) = \frac{8e^{-2z}(e^{-2z} - 1)}{(1 + e^{-2z})^3} < 0. \quad (29)$$

При $z = 0$ обе части неравенства (28) равны 0, а их производные также совпадают и равны 1. В силу второго неравенства (29) производная $f'(z)$ убывает при $z > 0$ и меньше производной левой части неравенства (28). Отсюда вытекает справедливость неравенства (28) и, следовательно, неравенства (26).

На интервале $t \in (\tau_2, \tau_3)$, согласно соотношениям (17), имеем уравнение (10) для v в виде

$$\dot{v} = -v^2 + 1. \quad (30)$$

Интегрируя уравнение (30) при начальном условии $v(\tau_2) = 0$, получим

$$v(t) = \frac{e_2 - 1}{e_2 + 1}, \quad e_2 = e^{2(t-\tau_2)} \quad \text{при } t \in [\tau_2, \tau_3]. \quad (31)$$

В конце интервала $[\tau_2, \tau_3]$ имеем

$$v(\tau_3) = \frac{e_{21} - 1}{e_{21} + 1}, \quad e_{21} = e^{2(\tau_3-\tau_2)}. \quad (32)$$

На последнем интервале $t \in [\tau_3, T]$, в силу соотношений (17), уравнение (10) представим в виде

$$\dot{v} = -v^2 - 1. \quad (33)$$

Проинтегрируем уравнение (11) при начальном условии (32) и получим, аналогично равенству (24), выражение для скорости в виде

$$v(t) = \frac{v(\tau_3) - \operatorname{tg}(t - \tau_3)}{1 + v(\tau_3) \operatorname{tg}(t - \tau_3)} \quad \text{при } t \in [\tau_3, T]. \quad (34)$$

В силу условия периодичности (14) для v имеем $v(T) = 0$. Тогда из соотношений (34) и (32) получим при $t = T$

$$T = \tau_3 + \operatorname{arctg} \frac{e_{21} - 1}{e_{21} + 1}, \quad (35)$$

где e_{21} определено в соотношениях (32).

Проинтегрируем уравнение (10) с учетом начальных условий (14) при $t = 0$. Получим

$$\kappa[v(t) + \eta(t)] = \kappa\eta_0 + \int_0^t u(t_1) dt_1. \quad (36)$$

Кусочно-постоянная функция $u(t)$ задана соотношениями (17). Вычисляя интеграл в (36), найдем

$$\kappa[v(t) + \eta(t) - \eta_0] = \varphi(t), \quad (37)$$

где функция $\varphi(t)$ определена формулами

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [0, \tau_1], \\ 2\tau_1 - t & \text{при } t \in [\tau_1, \tau_3], \\ 2\tau_1 - 2\tau_3 + t & \text{при } t \in [\tau_3, T]. \end{cases} \quad (38)$$

В силу условий (14) при $t = T$ из (37) вытекает равенство $\varphi(T) = 0$. Следовательно, согласно (38) имеем

$$T = 2(\tau_3 - \tau_1). \quad (39)$$

Таким образом, скорость корпуса $v(t)$ задана на всем интервале $[0, T]$ соотношениями (19), (24), (31) и (34), а относительная скорость внутренней массы $\eta(t)$ определена равенством (37).

Полученные соотношения содержат три неизвестных параметра — границы интервалов τ_1, τ_2 и τ_3 , для которых имеем три уравнения (25), (35) и (39). Эти параметры могут быть определены численно.

Использовался следующий алгоритм вычисления этих параметров. При помощи равенства (39) выразим τ_1 через τ_3 в виде

$$\tau_1 = \tau_3 - T/2, \quad (40)$$

а при помощи равенств (25) и (40) выразим τ_2 как функцию τ_3 . Тогда уравнение (35) будет представлять собой трансцендентное уравнение относительно одного неизвестного параметра τ_3 . Решая его численно, найдем все параметры τ_1, τ_2 и τ_3 . Некоторые результаты расчетов представлены ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Проинтегрируем равенство (37), принимая во внимание второе уравнение (1) и начальные условия (14). Получим

$$\kappa[x(t) + \xi(t) - \xi_0 - \eta_0 t] = \Phi(t), \quad (41)$$

где введено обозначение

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t_1) dt_1. \quad (42)$$

Вычисляя интеграл (42) от кусочно-линейной функции $\Phi(t)$, заданной соотношениями (38), получим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{при } t \in [0, \tau_1], \\ 2\tau_1 t - \frac{t^2}{2} - \tau_1^2 & \text{при } t \in [\tau_1, \tau_3], \\ 2(\tau_1 - \tau_3)t + \frac{t^2}{2} - \tau_1^2 - \tau_3^2 & \text{при } t \in [\tau_3, T]. \end{cases} \quad (43)$$

Определим $\Phi(T)$, используя соотношения (43) и равенство (39). Получим

$$\Phi(T) = 4\tau_1\tau_3 - \tau_3^2 - 3\tau_1^2 = (\tau_3 - \tau_1)(3\tau_1 - \tau_3). \quad (44)$$

Подставим $t = T$ в соотношение (41) и примем во внимание условие $\xi(T) = \xi_0$ из (15) и равенство (44). В результате получим

$$\kappa[x(T) - \eta_0 T] = (\tau_3 - \tau_1)(3\tau_1 - \tau_3). \quad (45)$$

Обозначим через θ_1 и θ_2 моменты времени, в которых достигаются наименьшее и наибольшее значения функции $\xi(t)$ на интервале $[0, T]$ соответственно:

$$\theta_1 = \operatorname{argmin} \xi(t), \quad \theta_2 = \operatorname{argmax} \xi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (46)$$

В эти моменты времени имеем

$$\eta(\theta_1) = 0, \quad \eta(\theta_2) = 0,$$

а подвижная масса достигает, соответственно, левого и правого концов полости, внутри которой она перемещается:

$$\xi(\theta_1) = 0, \quad \xi(\theta_2) = l. \quad (47)$$

Здесь l – безразмерная длина полости. Подставляя $t = \theta_1$ и $t = \theta_2$ в уравнение (41) и используя равенства (47), получим соотношения

$$\kappa[x(\theta_1) - \xi_0 - \eta_0\theta_1] = \Phi(\theta_1), \quad (48)$$

$$\kappa[x(\theta_2) + l - \xi_0 - \eta_0\theta_2] = \Phi(\theta_2). \quad (49)$$

В результате полный расчет искомого периодического движения на интервале $[0, T]$ состоит из следующих операций.

1. Определение трех параметров τ_1, τ_2 и τ_3 при помощи уравнений (25), (35) и (39), как описано выше.

2. Расчет скорости корпуса $v(t)$ по формулам (19), (24), (31) и (34).

3. Расчет перемещения корпуса $x(t)$ путем интегрирования скорости $v(t)$ согласно равенству

$$x(t) = \int_0^t v(t_1) dt_1, \quad t \in [0, T]. \quad (50)$$

4. Вычисление начальной скорости η_0 внутренней массы относительно корпуса при помощи равенства (45).

5. Определение относительной скорости $\eta(t)$ на интервале $[0, T]$ на основе соотношения (37).

6. Определение моментов времени θ_1 и θ_2 согласно соотношениям (46).

7. Вычисление начального перемещения внутренней массы ξ_0 на основе соотношения (48).

8. Определение перемещения внутренней массы $\xi(t)$ на интервале $[0, T]$ в соответствии с равенством (41).

Второе равенство (47) дает возможность вычислить максимальное перемещение внутренней массы, равное необходимой длине полости. Все эти вычисления зависят от безразмерных параметров κ , r и T . Если же период T не фиксирован, а длина полости l задана, то потребуются провести пересчет указанных выше операций с различными T и подобрать такое значение T , при котором выполняется второе условие (47).

Средняя скорость перемещения корпуса при построенном периодическом движении определяется соотношением

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T}.$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем некоторые численные результаты построенного периодического движения. Для этого положим:

$$m = 10 \text{ кг}, \quad M = 100 \text{ кг}, \quad c = 0.2 \text{ м}^{-1}, \quad c_- = 1 \text{ м}^{-1}, \\ F = 50 \text{ Н}.$$

Для данных значений параметров имеем, согласно равенствам (5), (4) и (8),

$$L = 5 \text{ м}, F_0 = 0.5 \text{ м/с}^2, T_0 = 3.16 \text{ с}.$$

Выберем период T в размерных переменных равный 13.75 с. Тогда имеем следующие значения безразмерных параметров:

$$\kappa = m/M = 0.1, r = c/c_- = 0.2, T = 4.35.$$

Из уравнений (25), (35) и (39) были определены моменты времени τ_1 , τ_2 и τ_3 (в безразмерных переменных):

$$\tau_1 = 1.42, \tau_2 = 1.77, \tau_3 = 3.59.$$

Графики функций $v(t)$ и $x(t)$ в безразмерных переменных изображены на рис. 3, 4.

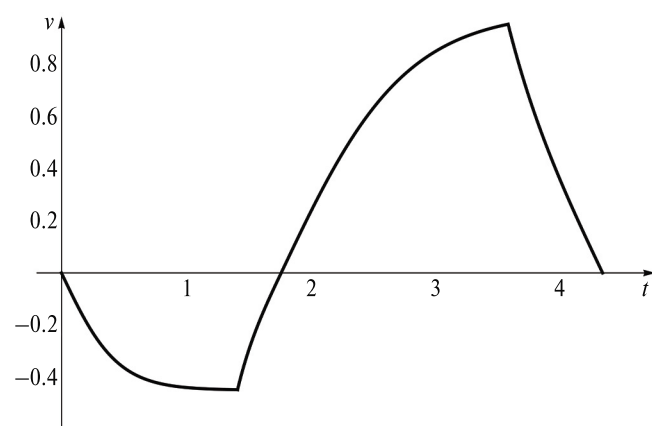


Рис. 3. Скорость корпуса.

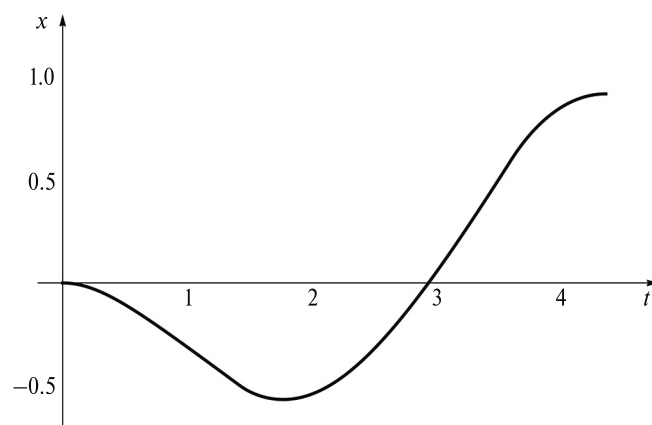


Рис. 4. Перемещение корпуса.

Полное перемещение корпуса за период $x(T)$ и средняя скорость перемещения корпуса $\bar{v}$ в безразмерных переменных равны

$$x(T) = 0.91, \bar{v} = 0.21.$$

На основе равенств (45) и (48) были определены начальная скорость внутренней массы η_0 и начальное смещение внутренней массы относительно левой границы полости ξ_0 . В рассматриваемом числовом примере они равны

$$\eta_0 = -3.07, \xi_0 = 0.43.$$

Графики функций $\eta(t)$ и $\xi(t)$ в безразмерных переменных изображены на рис. 5, 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано поступательное движение в жидкости твердого тела, управляемого силой его взаимодействия с внутренней массой.

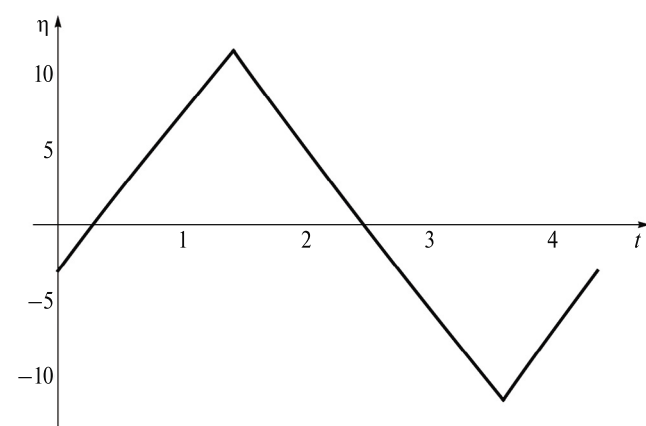


Рис. 5. Скорость внутренней массы.

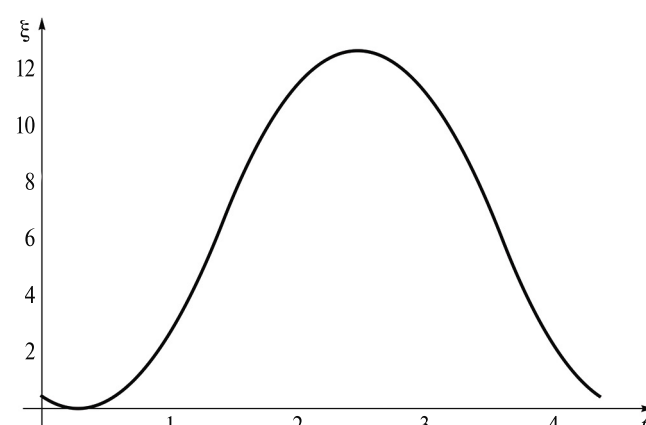


Рис. 6. Перемещение внутренней массы.

Построены движения с периодическим изменением скоростей движущихся тел. Дана оценка средней скорости перемещения. Полученные результаты могут представлять интерес для управления движением аппаратов, перемещающихся в жидкой среде.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128, <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // *Машиноведение*. 1980. № 4. С. 3–8.
2. Герасимов С.А. О вибрационном полете симметричной системы // *Известия вузов. Машиностроение*. 2005. № 8. С. 3–7.
3. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // *Известия вузов. Математика*. 2012. № 2. С. 57–64.
4. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 62. P. 430–439.
5. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. V. 330. P. 4002–4018.
6. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 98. P. 2651–2669.
7. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 104. P. 2201–2217.
8. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // *Прикладная математика и механика*. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
9. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
10. Черноусько Ф.Л. Оптимизация движения тела с внутренней массой при квадратичном сопротивлении // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2023. Т. 513. С. 80–86.
11. Глазков Т.В., Черноусько Ф.Л. Оптимальное движение тела, управляемого посредством внутренней массы, в среде с сопротивлением // *Прикладная математика и механика*. 2024. Т. 88. № 1. С. 53–66.

PERIODIC MOVEMENTS IN THE FLUID OF A BODY CONTROLLED BY THE FORCE OF ITS INTERACTION WITH THE INTERNAL MASS

T. V. Glazkov^a, Academician of the RAS F. L. Chernousko^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Progressive motion in the fluid of a body (housing) with an internal movable mass is considered. The external resistance is proportional to the squared velocity of the body and depends on the direction of motion. The control is implemented by the force of interaction of the internal body with the housing. Motions with periodic change of the velocities are obtained and analyzed. The average speed of the motion of the system is evaluated.

Keywords: mobile robots, nonlinear dynamics, quadratic resistance, periodic motion

УДК 534.16

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИНОК ИЗ БИМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН Д. А. Губайдуллин^{1,*}, А. В. Крысько^{1,**},
А. Д. Тебякин², Т. В. Яковлева², В. А. Крысько^{2,***}

Поступило 27.04.2024 г.

После доработки 27.04.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Построена математическая модель напряженно-деформированного состояния пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности. Напряженно-деформированное состояние пластинок исследовали методом вариационных итераций – расширенным методом Канторовича. Полученные численным методом решения близки к точным. Выявлено, что нейтральная плоскость является поверхностью разделения зон сжатия и растяжения для прямоугольных в плане пластинок при действии равномерно распределенной нагрузки.

Ключевые слова: бимодульный материал, метод вариационных итераций, метод переменных параметров упругости, нейтральная поверхность

DOI: 10.31857/S2686740024050073, EDN: NXJWMW

Большинство материалов, например керамика, бетон, резина, графит и некоторые биомедицинские материалы, характеризуются существенным различием пределов прочности материала при действии растягивающих и сжимающих напряжений одинаковой величины. Материал, характеризующийся существенным расхождением значения модуля упругости и коэффициента Пуассона при растяжении и при сжатии, называется бимодульным материалом. В целом в теоретическом анализе инженерных профессий широко используются

несколько моделей. Первая модель предложена Bert [1] и основана на критерии положительных/отрицательных знаков продольной деформации волокон. Модель Bert широко используется при анализе ортотропных материалов и слоистых композитов. Вторая модель – модель Амбарцумяна [2], созданная на основе критерия положительных/отрицательных знаков главных напряжений, применима к изотропным материалам. Модель Амбарцумяна имеет особое значение в структурном анализе, поскольку именно этот критерий определяет, является ли определенная точка конструкции растяжением или сжатием. Аналитические решения доступны в нескольких простых случаях, хотя они касаются только отдельных компонентов, например балок и пластинок [3–5]. Существует еще третья упрощенная модель, где определение сжатия и растяжения опирается на знак и величину интенсивности деформации в каждой точке исследуемого объекта. Данный подход реализуется с помощью метода переменных параметров упругости И.А. Биргера [6, 7], доказательство

¹Федеральный исследовательский центр
“Казанский научный центр Российской академии наук”,
Институт механики и машиностроения –
структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН,
Казань, Россия

²Саратовский государственный технический
университет имени Ю.А. Гагарина, Саратов, Россия

*E-mail: gubaidullin@imm.knc.ru

**E-mail: kryskoav@sstu.ru

***E-mail: tak@san.ru

сходимости которого приведено в работе [8]. За счет изменения интенсивности деформации пересчитываются физические константы, такие как модуль Юнга и коэффициент Пуассона, определяющие дальнейшее поведение материала. В этой же работе предлагается учесть смещение нейтральной поверхности [9, 10]. Данные методы просты, но при этом позволяют показать влияние бимодульности и учета смещения нейтральной поверхности на поведение материала. Поэтому они будут рассмотрены в данной работе.

Для нахождения решения, как известно, используются численные и численно-аналитические методы. В работе [11] представлен обширный обзор методов упрощения нелинейных дифференциальных уравнений в системы разрешимых уравнений с упором на их надежность, обоснованность, точность и вычислительную эффективность. В обзор включены различные методы, в том числе методы Фурье, методы типа Бубнова–Галёркина (МБГ), вариационные и другие. Количественная оценка и сравнение этих методов были проведены на основе модифицированного конечно-разностного уравнения Жермен–Лагранжа [12], статики пластинок и сопоставлены с точными результатами, полученными с помощью метода Навье. Обоснование вариационных итерационных методов для класса уравнений, описываемых положительно определенными операторами, приведено в работе [11].

В отличие от всех известных подходов в данной работе исследуется влияние бимодульности материала и учета смещения нейтральной поверхности при анализе упругопластических деформаций пластинки под действием равномерно распределенных нагрузок. Задача решается методом вариационных итераций (МВИ) – расширенным методом Канторвича.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим изотропную прямоугольную в плане пластинку с размерами a , b , $2h_0$ вдоль осей x , y , z соответственно. Начало координат расположено в левом верхнем углу пластинки в ее срединной поверхности, оси x , y параллельны сторонам пластинки, ось z направлена вниз (рис. 1).

В указанной системе координат пластинка как трехмерная область Ω определяется $\Omega = \{x, y, z / (x, y, z) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h_0, h_0]\}$. Срединная поверхность при этом обозначена как $\Gamma = \{x, y / (x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$. В основу построенной математической модели положены следующие гипотезы:

1. Кинематическая модель первого приближения Кирхгофа.

2. Материал, из которого изготовлена пластинка, считается изотропным, но неоднородным; физические константы: модуль Юнга $E(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, модуль сдвига $G(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, коэффициент объемной деформации $K(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, коэффициент Пуассона $\nu(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, $\sigma_s(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$, $e_s(x, y, z, \epsilon_0, \epsilon_i)$ – зависят от пространственных координат, интенсивности деформации и объемной деформации.

3. Используется критерий пластичности Мизеса.

4. Учитывается степень свободы перехода от растяжений к сжатию, т.е. учитывается смещение нейтральной поверхности Γ .

Из вариации энергии деформации и энергии внешних сил получено уравнение упругопластической пластинки:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H + \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_y = q(x, y), \quad (1)$$

$$\text{где } D_j(x, y) = \int_{-h_0}^{h_0} E \left(\frac{z^2 \nu^{j-1}}{1 - \nu^2} \right) dz, \quad i = 1, 2,$$

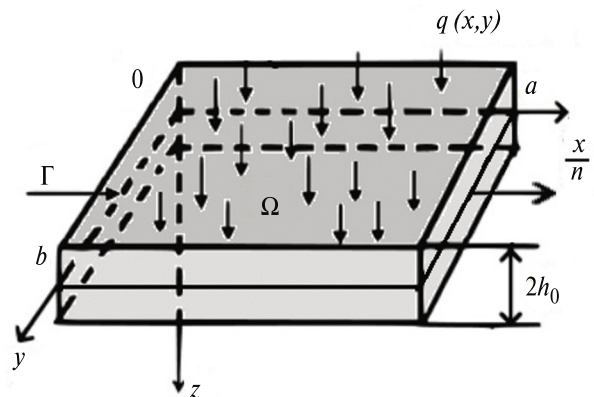


Рис. 1. Расчетная схема.

$$D_{20}(x, y) = \int_{-h_0}^{h_0} \frac{E}{1+\nu} z^2 dz, \quad H = D_{20}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$M_x = D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$M_y = D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Полученное уравнение является обобщением уравнения Жермен–Лагранжа.

С помощью безразмерных параметров

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{2h_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{2h_0}, \quad \lambda_1 = \frac{a}{2h_0},$$

$$\lambda_2 = \frac{b}{2h_0}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad q(x, y) = \frac{G_0}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad \varepsilon_{xx} = \lambda_1^{-2} \bar{\varepsilon}_{xx},$$

$$\varepsilon_{yy} = \lambda_2^{-2} \bar{\varepsilon}_{yy}, \quad \varepsilon_{xy} = \lambda \lambda_1^{-2} \bar{\varepsilon}_{xy}, \quad e_i = \lambda_1^{-2} \bar{e}_i,$$

$$\bar{\sigma}_{si} = \sigma_{si} G_0^{-1} \lambda_1^{-2}, \quad e_{si} = \lambda_1^{-2} \bar{e}_{si}, \quad G = G_0 \bar{G}, \quad K = G_0 \bar{K},$$

$$E = G_0 \bar{E}, \quad D_i = G_0 8h_0^3 \bar{D}_i, \quad D_{20} = G_0 8h_0^3 \bar{D}_{20}$$

уравнение (1) записано в безразмерном виде:

$$\lambda^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda^2 D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\lambda^{-2} D_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D_{20}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = q(x, y). \quad (2)$$

К уравнению (2) следует присоединить одно из краевых условий: 1) защемление по контуру $w|_{\Gamma} = \partial w / \partial n|_{\Gamma} = 0$; 2) шарнирное опирание по контуру $w|_{\Gamma} = \partial^2 w / \partial n^2|_{\Gamma} = 0$. Возможны другие краевые условия, как однородные, так и неоднородные.

ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЯ

Для решения системы нелинейных уравнений в частных производных (2) применялся МВИ. Эффективность этого метода описана и обсуждена в работах [13–16]. Этот метод является обобщением метода Канторовича–Власова.

Основное внимание исследователей направлено на сравнение и учет смещения нейтральной поверхности и ее искривления [3–5]. С этой целью применялось изменение границ

интегрирования в (2) для каждой точки пластинки по x и y . Верхний (h_p) и нижний (h_n) пределы интегрирования определены по формулам

$$h_p = \frac{\sqrt{E_n}}{\sqrt{E_n} + \sqrt{E_p}} 2h_0, \quad h_n = \frac{\sqrt{E_p}}{\sqrt{E_n} + \sqrt{E_p}} 2h_0,$$

где $2h_0$ – толщина пластины.

При решении уравнения пластинки как трехмерного тела пространство пластинки разбивалось на трехмерную сетку. В узлах сетки определялся модуль Юнга. Модуль Юнга индивидуален в каждой точке пространства за счет пересчета физических параметров с опорой на значения интенсивности деформации, получаемые при решении. После применения МВИ и пересчета физических параметров модуль Юнга не являлся константой по толщине пластинки. В этом случае находился E_p – среднеарифметический модуль Юнга по толщине в точках, где интенсивность деформации принимала положительные значения. Соответственно, E_n – модуль, в котором принимались отрицательные значения. Так как $h_p + h_n = 2h_0$, нахождение новых пределов задавало смещение нейтральной поверхности Γ , что для всех точек пластинки по x и y индивидуально, т.е. $\Gamma(x, y)$ – функция от x и y и она является поверхностью. После смены пределов интегрирования пересчитывались E , ν , G .

На рис. 2 представлены графики нагрузка–прогиб в центре пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки.

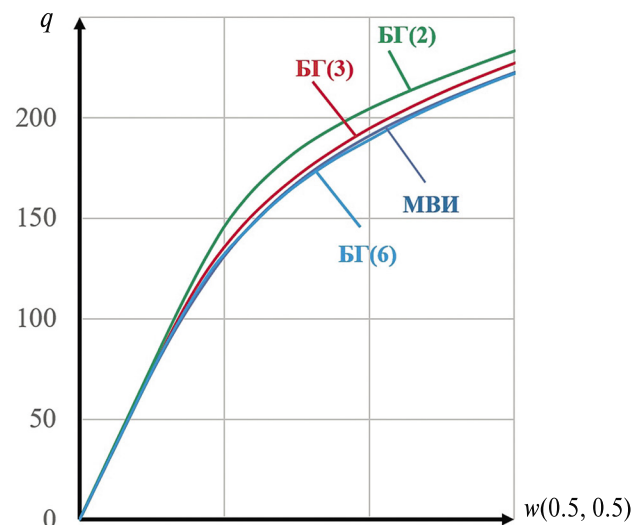


Рис. 2. Зависимость $q[w(0.5, 0.5)]$ для пластинки, полученная методами МВИ и МБГ в различных приближениях.

Задача решалась двумя методами: методом Бубнова–Галёркина (МБГ) во втором ($N = 2$), третьем ($N = 3$) и шестом ($N = 6$) приближениях и МВИ во втором приближении, тем самым снималась гипотеза Фурье о разделении переменных. Приближение N для МБГ указывает на количество членов ряда N^2 , которые определяют найденное решение. Можно видеть, что решение МБГ при увеличении количества членов ряда сходится к решению найденного МВИ. Также сравнение методов показало, что для расчета поведения пластинки под действием больших нагрузок МБГ сильно уступает в затратах по времени. Например, для нагрузки $q = 200$ решение МБГ ($N = 6$) потребовало 147 с, а для МВИ – 20 с. Для дополнительного подтверждения значимости данного метода ранее был представлен ряд сравнений МВИ с другими численными методами [11].

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численное исследование проведено для пластинки из серого железа, шарнирно опертой по контуру, при действии равномерно распределенной нагрузки $q(x, y) = q$. Для моделирования упругопластического изгиба применялись диаграммы $\sigma_i(e_i)$ для бимодульного материала, где e_i – интенсивность деформации. На рис. 3 изображены две аппроксимации зависимости

интенсивности напряжений от интенсивности деформации $\sigma_i(e_i)$ для серого железа. Модель 2 взята из работы [17], она построена по точкам с использованием кубической интерполяции. Модель 1 представляет собой аппроксимацию модели 2 в виде ломаных линий, описывающие физические данные аппроксимации представлены в табл. 1. Красными точками обозначен переход от линейной задачи к физически нелинейной (предел деформаций e_{si}^+ – при растяжении, e_{si}^- – при сжатии).

На рис. 4 представлены результаты численного эксперимента в виде графиков нагрузка – прогиб в центре. Тип кривой (сплошная линия – модель 1, штриховая – модель 2) определяет используемый тип аппроксимации, соответствующий рис. 3.

На рис. 4 цвет кривой указывает учет типа бимодульности. Синий цвет соответствует решению задачи для пластинки из одномодульного материала, красный и зеленый

Таблица 1. Физические константы для аппроксимации зависимости напряжения от деформаций модели 1 [17]

Серое железо	E , МПа	ν^+	G , МПа	G_1 , МПа	e_{si}
+ (растяжение)	114000	0.29	44186	4364	3.21×10^{-3}
– (сжатие)	114000	0.29	44186	2181	1.636×10^{-3}

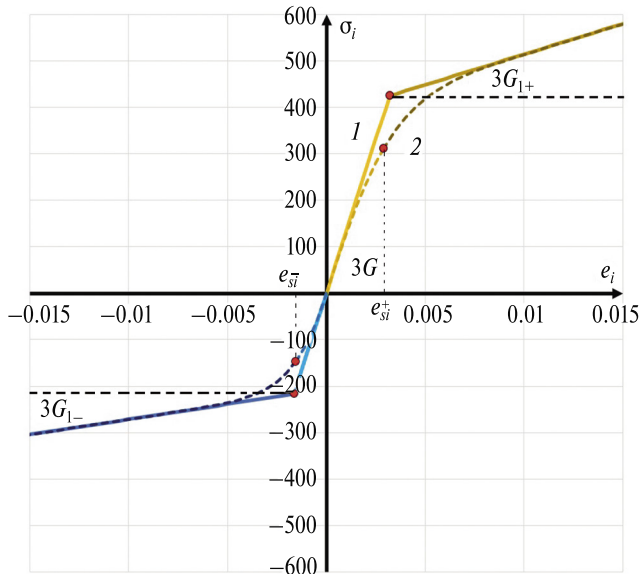


Рис. 3. Зависимость $\sigma_i(e_i)$ для серого железа для аппроксимации моделей 1 и 2.

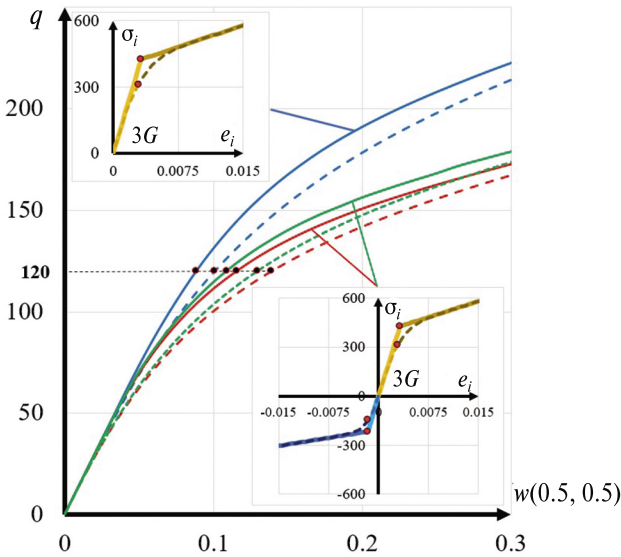


Рис. 4. Зависимость $q[w(0.5, 0.5)]$ для пластинки из одномодульного и бимодульного материалов и смещения нейтральной поверхности.

цвета — решению для пластинки из бимодульного материала без учета смещения нейтральной поверхности и с учетом соответственно. Решение задачи для пластинки из одномодульного материала значительно отличается от решений задачи для пластинки из бимодульного материала. Также видно, что присутствует влияние учета смещения нейтральной поверхности. В табл. 2 представлены данные для нагрузки 120, показывающие это влияние.

С увеличением нагрузки учет физической нелинейности приводит к смещению нейтральной поверхности.

На рис. 5–8 представлены распределения интенсивности деформации e_i по всей пластинке для значения нагрузки $q = 120$, указанного на рис. 4. На всех рисунках слева изображена пластинка с аппроксимацией, соответствующей сплошной линии графика, а справа — соответствующей штриховой. На рис. 5 представлены распределения e_i в пластинке

из одномодульного материала, а на рис. 6–8 показаны распределения e_i в пластинке из бимодульного материала. На рис. 7 и 8 показаны распределения e_i в пластинке из бимодульного материала и с учетом смещения нейтральной поверхности в разной проекции.

Для визуализации представлены 4 цвета интенсивности деформации e_i , указывающие на величину деформации, превышающую или не превышающую предел деформации. Коричневый цвет обозначает превышение предела прочности при растяжении, оранжевый — интенсивность деформации ниже предела прочности. Для синего и голубого цветов обозначения аналогичны, но только для сжатия. Красная линия обозначает нейтральную поверхность пластинки.

На рис. 8 показано смещение нейтральной поверхности и всех линий интенсивности деформации. За счет физической нелинейности

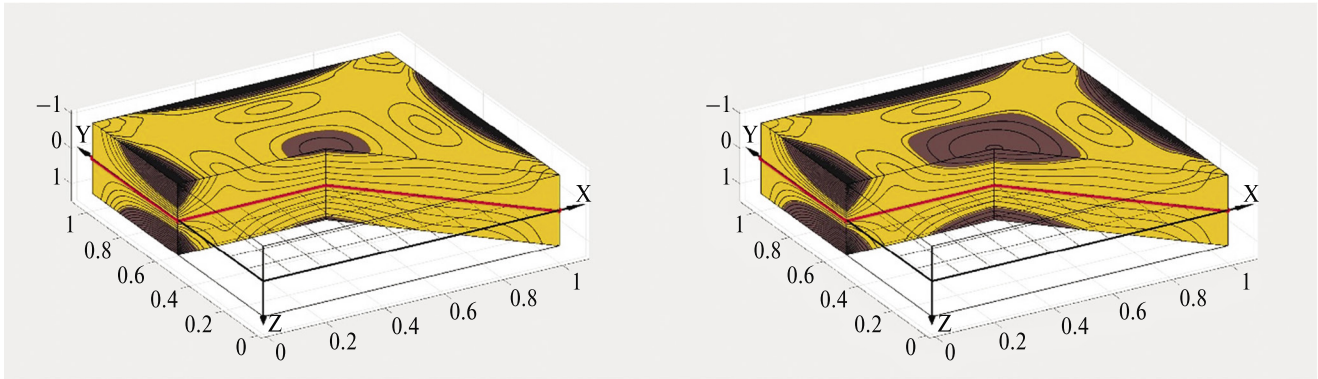


Рис. 5. Распределение e_i в пластинке из одномодульного материала при $q = 120$ для аппроксимации моделей 1 и 2.

Таблица 2. Сравнение значений $w(0.5, 0.5)$ между различными аппроксимациями с учетом и без учета смещения нейтральной поверхности при $q = 120$

Сравниваемые величины	Модель 1		Модель 2	
	С учетом смещения нейтральной поверхности	Без учета смещения нейтральной поверхности	С учетом смещения нейтральной поверхности	Без учета смещения нейтральной поверхности
$w(0.5, 0.5)$	0.108840	0.115695	0.129583	0.139040
%	0	6.29	0	7.29
$e_i(0, 0.5, 1)$	7.52627975	7.88271314	8.71190737	9.14242645
%	0	4.73	0	4.94
$e_i(0, 0.5, -1)$	-7.20807024	-8.28402154	-8.34977758	-9.57423535
%	0	14.92	0	14.66
$e_i(0.5, 0.5, 1)$	2.23155298	2.27738092	2.83854833	2.91208290
%	0	2.05%	0	2.59
$e_i(0.5, 0.5, -1)$	-2.32552900	-2.68600785	-2.86449363	-3.33031129
%	0	15.5	0	16.26

нейтральная поверхность здесь является криволинейной.

ВЫВОДЫ

В работе построена математическая модель напряженно-деформированного состояния пластинок из бимодульного материала с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности.

Предложена общая итерационная процедура решения указанных задач, основанная на МВИ, методе переменных параметров упругости И.А. Биргера, методе Ньютона–Рафсона. Итерационные процедуры вложены одна в другую, для каждой из которых доказана их сходимость. Это дает возможность утверждать, что получены решения, близкие к точным.

Предложенная методология является эффективной с точки зрения точности и быстро-

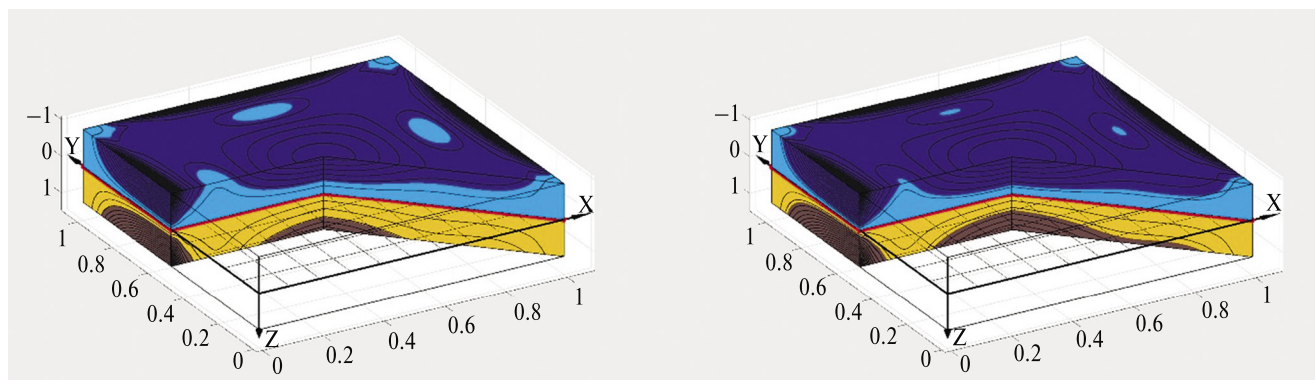


Рис. 6. Распределение e_z в пластинке из бимодульного материала при $q = 120$ для аппроксимации моделей 1 и 2.

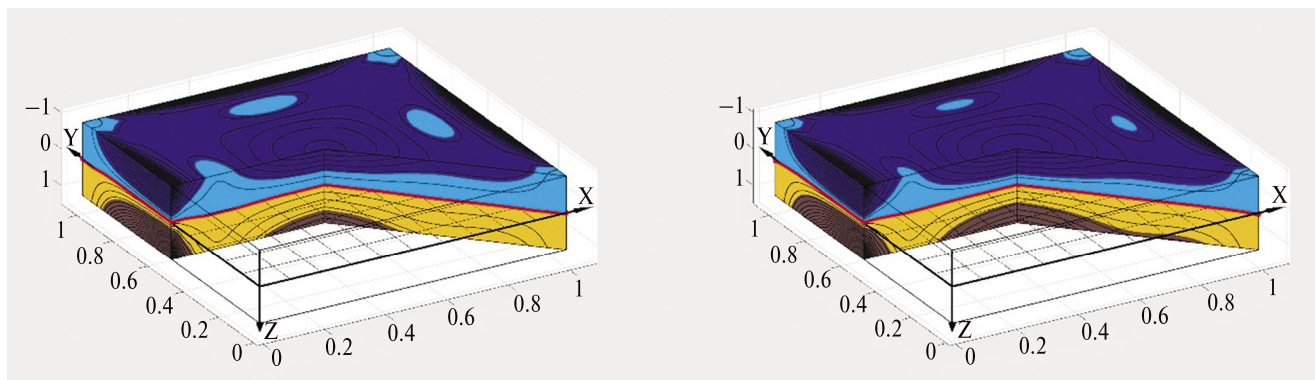


Рис. 7. Распределение e_z в пластинке при $q = 120$ с учетом бимодульности и смещения нейтральной поверхности для аппроксимации моделей 1 и 2.

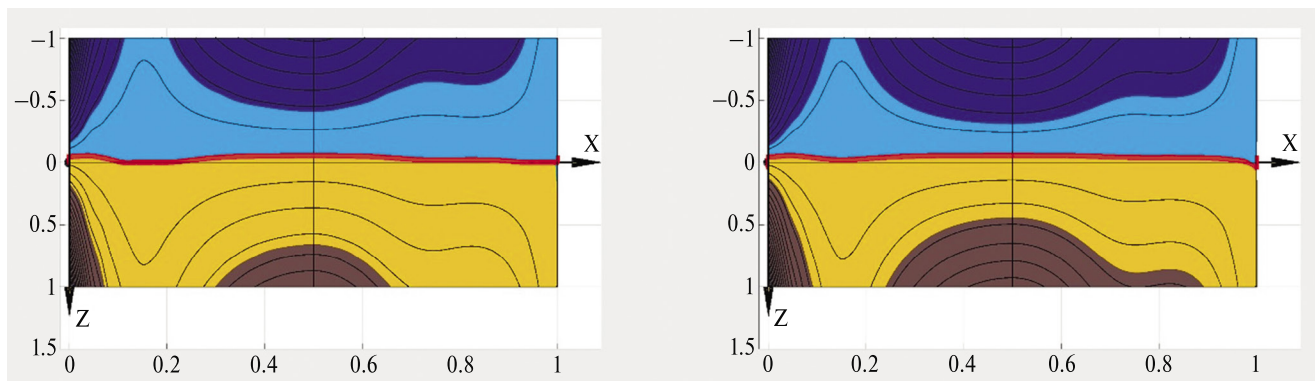


Рис. 8. Смещение нейтральной поверхности.

действия расчета прямоугольных в плане пластинок при действии поперечной нагрузки.

Выявлено, что нейтральная плоскость является поверхностью разделения зон сжатия и растяжения для прямоугольных в плане пластинок при действии равномерно распределенной нагрузки.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (№ 22-71-10083, https://rscf.ru/prjcard_int?22-71-10083/) в части построения математической модели, методологии, визуализации полученных результатов (Т.В. Яковлева), в части создания программного обеспечения и валидации результатов (А.Д. Тебякин), в рамках госзадания ФИЦ КазНЦ РАН в части концепции исследования, анализа и визуализации полученных результатов (Д.А. Губайдуллин), в части подхода к исследованию, анализа полученных результатов, написания оригинального текста (А.В. Крысько) и при поддержке Саратовского государственного технического университета в части концепции итерационной процедуры, методологии, анализа полученных результатов (В.А. Крысько).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bert C.W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression // ASME J. Eng. Mater. Technol. 1977. V. 99. P. 344–349. <https://doi.org/10.1115/1.3443550>
2. Ambartsumyan S.A. Elasticity Theory of Different Modulus. Beijing (China): China Railway Publishing House, 1986.
3. Li X., Sun J.-Y., Dong J., He X.-T. One-dimensional and two-dimensional analytical solutions for functionally graded beams with different moduli in tension and compression // Materials. 2018. V. 11. P. 830. <https://doi.org/10.3390/ma11050830>
4. He X.-T., Li W.-M., Sun J.-Y., Wang Z.-X. An elasticity solution of functionally graded beams with different moduli in tension and compression // Mech. Adv. Mater. Struct. 2018. V. 25. P. 143–154. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255808>
5. He X.-T., Pei X.-X., Sun J.-Y., Zheng Z.-L. Simplified theory and analytical solution for functionally graded thin plates with different moduli in tension and compression // Mech. Res. Commun. 2016. V. 74. P. 72–80. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.04.006>
6. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
7. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.
8. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // ДАН СССР. 1959. Т. 126. № 4. С. 740–743.
9. Kropiowska D., Mikulski L., Szeptyński P. Optimal design of a Kirchhoff-Love plate of variable thickness by application of the minimum principle // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. V. 59(5). P. 1581–1598. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2148-3>
10. Xue X.-Y., Du D.-W., Sun J.-Y., He X.-T. Application of Variational Method to Stability Analysis of Cantilever Vertical Plates with Bimodular Effect // Materials. 2021. V. 14. 6129. <https://doi.org/10.3390/ma14206129>
11. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V.A., Kalutsky L.A., et al. Review of the Methods of Transition from Partial to Ordinary Differential Equations: From Macro to Nano-structural Dynamics // Arch. Computat. Methods Eng. 2021. V. 28. P. 4781–4813. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09550-5>
12. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Труды МИАН СССР им. В.А. Стеклова. 1949. Т. 28. С. 104–144.
13. Tebyakin A.D., Kalutsky L.A., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Application of Variational Iterations Method for Studying Physically and Geometrically Nonlinear Kirchhoff Nanoplates: A Mathematical Justification // Axioms. 2023. V. 12(4). P. 355. <https://doi.org/10.3390/axioms12040355>
14. Tebyakin A.D., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method) // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatic. 2022. V. 22(4). P. 494–505. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>
15. Krysko-jr V.A., Tebyakin A.D., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Awrejcewicz J. Mathematical model of physically non-linear Kirchhoff plates: Investigation and analysis of effective computational iterative methods // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2023. V. 150. 104346. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104346>
16. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Elastic and thermoelastic problems in nonlinear dynamics of structural members. Applications of the Bubnov–Galerkin and Finite Difference Methods. 2nd ed. Cham: Springer, 2020. XX. 602 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-37663-5>
17. Tamarin Y. Atlas of Stress-Strain Curves. Asm Intl. 2nd ed. 2002. 816 p.

MODELLING OF PLATES MADE FROM BIMODULAR MATERIAL TAKING INTO ACCOUNT ELASTIC-PLASTIC DEFORMATIONS

Corresponding Member of the RAS D. A. Gubaidullin^a, A. V. Krysko^a, A. D. Tebyakin^b,
T. V. Yakovleva^b, V. A. Krysko^b

^a*Institute of Mechanics and Engineering, FRC "Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences", Kazan, Russia*

^b*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

A mathematical model of the stress-strain state of plates made of bimodular material with elastic-plastic deformations according to the deformation theory of plasticity is constructed. The stress-strain state of plates is studied by the variational iterations method or the extended Kantorovich method. The solutions obtained are close to exact. For rectangular plates subjected to a uniformly distributed load, the neutral plane is found to be the interface between the compression and tension zones.

Keywords: bimodular material, variational iteration method, Birger's variable parameter method, neutral surface, exact solutions

УДК 539.3

УПРУГАЯ ПОЛОСА С ТРЕЩИНОЙ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

© 2024 г. М. Д. Коваленко^{1,*}, А. П. Кержаев², И. В. Меньшова^{2,3}, Д. А. Власов⁴

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 11.04.2024 г.

Поступило 11.04.2024 г.

После доработки 11.04.2024 г.

Принято к публикации 18.06.2024 г.

Предложен метод решения задачи для бесконечной упругой полосы с поперечной трещиной, расположенной на вертикальной оси симметрии. Решение ищется в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются в явном виде. Метод решения не зависит от вида однородных граничных условий на сторонах полосы. Для решения задачи из собственных функций Папковича–Фадля конструируется функция, допускающая аналитическое продолжение вне трещины во всю полосу. Аналитическое продолжение строится с помощью преобразования Бореля. Последовательность решения показана на примере четно-симметричной задачи для свободной полосы с центральной трещиной, на берегах которой заданы нормальные напряжения.

Ключевые слова: упругая полоса, трещина, преобразование Бореля, собственные функции Папковича–Фадля, соотношение ортогональности Папковича, точные решения

DOI: 10.31857/S2686740024050089, EDN: HXJMCZ

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ.
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим четно-симметричную относительно центральных координатных осей (x, y) деформацию бесконечной полосы $\{P: |x| < \infty, |y| \leq 1\}$ со свободными сторонами, т.е.

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad (1)$$

в центре которой имеется симметричный поперечный разрез $\{\gamma: x = 0, |y| \leq \alpha, 0 < \alpha < 1\}$.

На сторонах разреза заданы одинаковые по величине нормальные напряжения

$$\sigma_x(+0, y) = \sigma_x(-0, y) = p(y) \quad (y \in \gamma), \quad (2)$$

а вне разреза — равные нулю (направленные вдоль оси x) продольные перемещения. Касательные напряжения при $x = 0$ отсутствуют. Четная функция $p(y)$ может быть непрерывной на всем отрезке $[-\alpha, \alpha]$ или иметь конечные разрывы, в том числе и в точках $\pm \alpha$. Она может содержать δ -функции или их производные во всех внутренних точках отрезка $[-\alpha, \alpha]$, кроме его концов.

Задача была предметом многочисленных исследований приближенно-аналитическими и численными методами (см., например, работы [1–4]).

Решение задачи в полосе P с нулевыми касательными напряжениями и заданным разрывом продольных перемещений на стыке правой

¹Институт прикладной механики

Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики

Российской академии наук, Москва, Россия

³Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия⁴ООО «СИГМА ТАУ», Москва, Россия

*E-mail: kov08@inbox.ru

и левой полуполос можно представить в виде рядов [5] ($\operatorname{Re} \lambda_k < 0$)

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[A_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right], \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[A_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right], \\ \tau_{xy}(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[A_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right], \\ U(x, y) &= \operatorname{sign} x \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[A_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right], \\ V(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[A_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k |x|} \right] \quad (3)\end{aligned}$$

по собственным функциям Папковича–Фадля, соответствующим тем или иным однородным граничным условиям на сторонах полосы. Для полосы со свободными сторонами собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned}s_x(\lambda_k, y) &= (1 + v) \lambda_k \{ (\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \\ s_y(\lambda_k, y) &= (1 + v) \lambda_k \{ (\sin \lambda_k + \lambda_k \cos \lambda_k) \cos \lambda_k y + \\ &\quad + \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y \}, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= (1 + v) \lambda_k^2 (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - \\ &\quad - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\ \xi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 - v}{2} \sin \lambda_k - \frac{1 + v}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1 + v}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1 + v}{2} \lambda_k \cos \lambda_k + \sin \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \\ &\quad - \frac{1 + v}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y. \quad (4)\end{aligned}$$

В формулах (3) и (4) $U(x, y)$, $V(x, y)$ — умноженные на модуль сдвига продольное и поперечное перемещения соответственно; v — коэффициент Пуассона; A_k — неизвестные коэффициенты; $\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) — все комплексные нули целой функции экспоненциального типа [6, 7]

$$L(\lambda) = \lambda + \sin \lambda \cos \lambda. \quad (5)$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОРЕЛЯ И ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ

Приведем для удобства краткие сведения по преобразованию Бореля. Пусть

$$G(\lambda) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(y) e^{i \lambda y} dy \quad (\lambda = \xi + i \zeta) \quad (6)$$

есть целая функция экспоненциального типа, суммируемая с квадратом на вещественной оси. По теореме Пэли–Винера [6–8] $g(y)$ равна нулю вне отрезка $[-\alpha, \alpha]$ и суммируема с квадратом на этом отрезке. Интеграл

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-\xi \omega} d\xi \quad (\omega = x + iy, \operatorname{Re} \omega > 0) \quad (7)$$

называется преобразованием Бореля функции $G(\xi)$, а функция $g(\omega)$ называется ассоциированной по Борелю с целой функцией экспоненциального типа $G(\lambda)$. Подставим (6) в (7) и поменяем порядки интегрирования. Тогда получим

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-\xi \omega} d\xi = -\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{g(y)}{iy - \omega} dy. \quad (8)$$

Интеграл типа Коши, стоящий справа в (8), представляет собой функцию, аналитическую во всей плоскости комплексной переменной ω , кроме точек отрезка γ [9], и является аналитическим продолжением преобразования Бореля во всю плоскость комплексной переменной ω , разрезанную по отрезку мнимой оси γ .

Функцию $G(\xi)$ можно представить в другом виде [6]:

$$G(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_S g(z) e^{\xi z} dz. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_S g(z) e^{\xi z} dz \right) e^{-\xi \omega} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \oint_S \frac{g(z)}{z - \omega} dz. \quad (10)$$

S — произвольный контур, охватывающий разрез γ и проходимый в положительном направлении. Контур S можно как угодно близко прижать к мнимой оси [6]. При этом конечные точки $y = \pm \alpha$ разреза γ должны обходиться по некоторым окружностям малого радиуса в том случае, когда в этих точках заданы δ -функции или их производные. Предполагая, что

сосредоточенных факторов в вершинах разреза нет, получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \oint_S \frac{g(z)}{z-\omega} dz = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\alpha}^{i\alpha} \frac{g(iy+0) - g(iy-0)}{iy-\omega} d(iy) = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{[g(iy+0) - g(iy-0)]}{iy-\omega} dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Это выражение совпадет с (8), если принять, что

$$g(y) = \frac{1}{2}[g(iy+0) - g(iy-0)]. \quad (12)$$

Функция $g(y)$ представляет собой скачок функции $g(\omega)$ на разрезе γ .

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Введем функцию

$$\begin{aligned} F(\lambda_k, y) = i \left[-(1+\nu) \frac{d\xi(\lambda_k, y)}{dy} - \frac{1-\nu}{2} t_{xy}(\lambda_k, y) \right] + \\ + s_x(\lambda_k, y). \end{aligned} \quad (13)$$

Она сконструирована так, что, подставляя сюда выражения для соответствующих собственных функций Папковича–Фадля, получим функцию экспоненциального вида

$$\begin{aligned} F(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k \times \\ \times [(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) + iy\lambda_k \sin \lambda_k] e^{i\lambda_k y}, \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} F(\lambda_k, y) = (1+\nu)\lambda_k \times \\ \times \left[(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) + \lambda_k \sin \lambda_k \frac{d}{d\lambda_k} \right] e^{i\lambda_k y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что известны перемещения $u(y)$ на торце правой полуполосы. С помощью соотношения ортогональности Папковича [10–13] и пользуясь работой [5], найдем коэффициенты в формулах (3):

$$A_k = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} s_x(\lambda_k, y) u(y) dy. \quad (16)$$

Составим ряд

$$\Phi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k F(\lambda_k, y) + \bar{A}_k F(\bar{\lambda}_k, y)]. \quad (17)$$

Так как касательные напряжения $\tau_{xy}(0, y) = 0$, то, согласно (3) и (13), сумма ряда (17) на торцах правой и левой полуполос соответственно будет равна

$$\Phi(y) = \pm \left[-i(1+\nu) \frac{du(y)}{dy} \right] + p(y). \quad (18)$$

Найдем преобразование Бореля функций $F(\lambda_k, y)$ и $F(\bar{\lambda}_k, y)$, воспользовавшись формулой (7). Обозначим

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k F(\lambda_k, \omega) + \bar{A}_k F(\bar{\lambda}_k, \omega)] \quad (\omega = x + iy). \quad (19)$$

Функция $\Phi(\omega)$ аналитична в полосе Π , кроме отрезка γ , на котором она, согласно (18), имеет скачок (12), равный

$$\frac{1}{2} [\Phi(iy+0) - \Phi(iy-0)] = -i(1+\nu) \frac{du(y)}{dy}. \quad (20)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\omega) = \Phi(\omega) \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (21)$$

где [14]

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} \pm \sqrt{\alpha^2 - y^2} & (|y| \leq \alpha, x = \pm 0), \\ -i\sqrt{y^2 - \alpha^2} \operatorname{sign} y & (\alpha < |y| \leq 1, x = 0). \end{cases} \quad (22)$$

Мнимая часть функции $g(\omega)$ не будет иметь скачка на γ , так как в этом случае, согласно (18) и (22),

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g(iy+0) = \operatorname{Im} g(iy-0) = \\ = -(1+\nu) \frac{du(y)}{dy} \sqrt{\alpha^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Однако скачок ее вещественной части на γ не будет равен нулю:

$$\begin{aligned} g^*(y) = \frac{1}{2} [\operatorname{Re} g(iy+0) - \operatorname{Re} g(iy-0)] = \\ = p(y) \sqrt{\alpha^2 - y^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

По известному скачку (24) с помощью преобразования Бореля найдем функцию $g^*(\omega)$ и

подставим ее в (21) вместо $g(\omega)$. Тогда, учитывая (22), при $\omega = iy + 0$ получим

$$g^*(iy + 0) = [\operatorname{Re} \Phi(iy + 0) + i \operatorname{Im} \Phi(iy + 0)] \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - y^2} & (|y| \leq \alpha), \\ -i\sqrt{y^2 - \alpha^2} \operatorname{sign} y & (|y| > \alpha). \end{cases} \quad (25)$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{Im} \Phi(iy + 0) = -(1 + \nu) \frac{du(y)}{dy} = \frac{\operatorname{Im} g^*(iy + 0)}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \quad (|y| \leq \alpha). \quad (26)$$

Следовательно,

$$u(y) = -\frac{1}{1 + \nu} \int \frac{\operatorname{Im} g^*(iy + 0)}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} dy. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (16), найдем коэффициенты A_k .

Пример. Пусть $p(y) = \alpha^2 - y^2$.

1. Тогда, согласно (24),

$$g^*(y) = (\alpha^2 - y^2)\sqrt{\alpha^2 - y^2}. \quad (28)$$

2. Ее преобразование Фурье равно

$$G(\xi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g^*(y) e^{i\xi y} dy = 3\pi\alpha^4 \frac{J_2(\alpha\xi)}{(\alpha\xi)^2}. \quad (29)$$

3. По формуле (8) определим функцию

$$g^*(\omega) = (\alpha^2 + \omega^2)^{3/2} - \frac{\omega(3\alpha^2 + 2\omega^2)}{2}. \quad (30)$$

4. Найдем ее мнимую часть:

$$\operatorname{Im} g^*(iy + 0) = -\frac{1}{2} y(3\alpha^2 - 2y^2). \quad (31)$$

5. Согласно формуле (27),

$$u(y) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - y^2}(5\alpha^2 - 2y^2)}{6(1 + \nu)}. \quad (32)$$

6. Подставив (32) в (16), получим коэффициенты разложений:

$$A_k = \frac{1}{2\lambda_k^2} \times [(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) I_1(\lambda_k) + \lambda_k \sin \lambda_k I_2(\lambda_k)]. \quad (33)$$

$$I_1(\lambda_k) = -\frac{\pi\alpha}{(1 + \nu)\lambda_k} \times \left[\frac{\alpha^2 J_1(\alpha\lambda_k)}{2} - \frac{\alpha J_0(\alpha\lambda_k)}{\lambda_k} + \frac{2J_1(\alpha\lambda_k)}{\lambda_k^2} \right],$$

$$I_2(\lambda_k) = -\frac{\pi\alpha}{(1 + \nu)\lambda_k} \times \left[\frac{4\alpha J_0(\alpha\lambda_k)}{\lambda_k^2} + \frac{\alpha^3 J_0(\alpha\lambda_k)}{2} - \frac{8J_1(\alpha\lambda_k)}{\lambda_k^3} \right]. \quad (34)$$

В формулах (29), (34) $J_2(\alpha\xi)$, $J_1(\alpha\xi)$, $J_0(\alpha\xi)$ — функции Бесселя первого рода второго, первого и нулевого порядков соответственно [15, 16].

На рис. 1 показаны кривые распределения нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в полосе и в упругой неограниченной плоскости в сечении $x = 0.001$ на отрезке $0 \leq y \leq 1$. На рис. 2 показаны изменения поперечных перемещений $V(x, y)$ в сечении $y = 1$ на отрезке $0 \leq x \leq 2$. Сплошным кривым соответствует решение в полосе, штриховым — в неограниченной плоскости. Решение для плоскости строилось с помощью метода начальных функций в пространстве преобразований Фурье [17]. Считалось, что $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. При $x = \pm 0$ ряды (3) по собственным функциям Папковича—Фадля с коэффициентами (33) равносходятся с тригонометрическими рядами $\{\cos k\pi y\}_{k=0}^{\infty}$ (для четных функций) и $\{\sin k\pi y\}_{k=1}^{\infty}$ (для нечетных), что является следствием асимптотического равенства [5]

$$\lambda_k \approx \pm(k\pi - \frac{\pi}{4}) \pm \frac{i}{2} \ln(4k\pi - \pi).$$

Это обстоятельство не раз отмечалось в работах, посвященных решению краевых задач теории упругости в виде рядов по собственным функциям Папковича—Фадля (например, [5, 18]).

2. Точно так же можно построить решение четно-симметричной задачи для полосы с жестко заземленными сторонами. Для этого нужно воспользоваться соответствующими собственными функциями Папковича—Фадля [18].

3. Имеющиеся в литературе соотношения ортогональности Папковича в декартовой системе координат справедливы только в тех случаях, когда стороны полосы свободны или

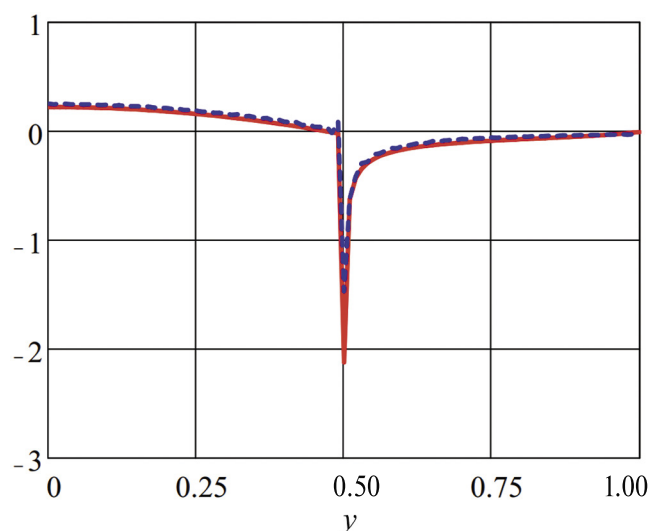


Рис. 1. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ в сечении $x = 0.001$ в полосе (сплошная кривая) и в плоскости (штриховая).

жестко защемлены. Для других однородных граничных условий, например, отвечающих подкреплению сторон полосы ребрами жесткости, соотношения ортогональности Папковича не получены. Это не означает, что они принципиально невозможны. Причина заключается в том, что те математические приемы, которые использовались при построении известных соотношений ортогональности Папковича, не позволяли этого сделать.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование М.Д. Коваленко выполнено в рамках государственного задания ИПРИМ РАН. Исследование А.П. Кержаева и И.В. Меньшовой выполнено в рамках государственного задания ИТПЗ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р.В., Рысков И.Н., Салганик Р.Л. Центральная поперечная трещина в упругой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 97–104.
2. Civelek M.B., Erdogan F. Crack problems for a rectangular plate and an infinite strip // Int. J. Fract. 1982. V. 19. P. 139–159.
3. Antipov Y.A., Schiavone P. Integro-differential equation for a finite crack in a strip with surface effects // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2011. V. 64. № 1. P. 87–106.
4. Reut V., Vaysfeld N., Zhuravlova Z. Investigation of the stress state of the elastic semi-strip with a transverse

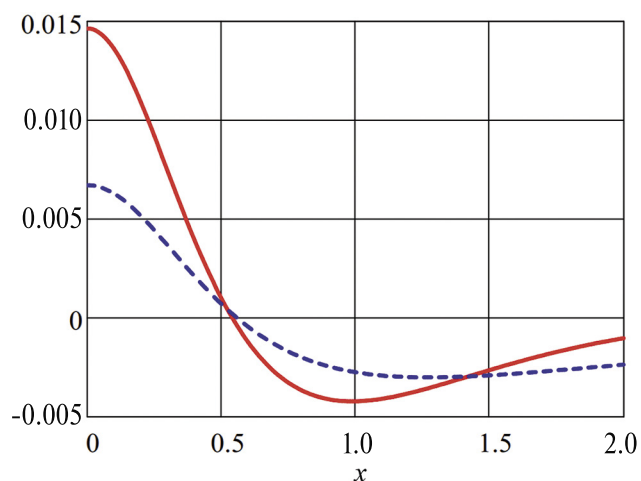


Рис. 2. Распределение поперечных перемещений $V(x, y)$ в сечении $y = 1$ в полосе (сплошная кривая) и в плоскости (штриховая).

- crack // Theor. Appl. Fract. Mech. 2019. V. 100. P. 105–109.
5. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 78–98.
6. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
7. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
8. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 268 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 335–339.
11. Гринберг Г.А. О методе, предложенном П.Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях // ПММ. 1953. Т. 17. № 2. С. 211–228.
12. Прокопов В.К. О соотношении обобщенной ортогональности П.Ф. Папковича для прямоугольной пластинки // ПММ. 1964. Т. 28. № 2. С. 351–355.
13. Little R.W., Childs S.B. Elastostatic boundary region problem in solid cylinders // Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. № 3. P. 261–274.
14. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 480 с.
15. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.–Л.: ГИФМЛ, 1963. 359 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.

17. Matrosov A.V., Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. Method of initial functions and integral Fourier transform in some problems of the theory of elasticity // *Z. Angew. Math. Phys.* 2020. V. 71. № 1. Art. 24. 19 p.
18. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. Exact solutions of the theory of elasticity for a clamped rectangle // *Math. Mech. Solids*. 2022. V. 27. № 12. P. 2551–2566.

AN ELASTIC STRIP WITH A CRACK: AN EXACT SOLUTION

M. D. Kovalenko^a, A. P. Kerzhaev^b, I. V. Menshova^{b,c}, and D. A. Vlasov^d

^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^c*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

^d*ООО “SIGMA TAU”, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A method of solving the problem for an infinite elastic strip with a transverse crack located on the vertical axis of symmetry is proposed. The solution is sought in the form of series in Papkovich–Fadle eigenfunctions, the coefficients of which are determined explicitly. The solution method does not depend on the type of homogeneous boundary conditions on the sides of the strip. To solve the problem, a function is constructed from the Papkovich–Fadle eigenfunctions that allows an analytical continuation outside the crack into the entire strip. The analytic continuation is constructed using the Borel transform. The solution sequence is shown using the example of an even-symmetric problem for a free strip with a central crack, on the sides of which normal stresses are specified.

Keywords: elastic strip, crack, Borel transform, Papkovich–Fadle eigenfunctions, Papkovich orthogonality relation, exact solutions

УДК 517.958:539.3(5):517.956.227

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ СПЕКТРА
ТОНКОЙ ОДНОТАВРОВОЙ БАЛКИ ДИРИХЛЕ© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 25.05.2023 г.

Поступило 07.01.2024 г.

После доработки 07.01.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

Исследуется асимптотическое поведение собственных чисел и функций задачи Дирихле для системы Ламе и оператора Лапласа в тавровом сочленении двух тонких пластин-параллелепипедов. Обнаружен эффект сугубой локализации собственных функций около зоны соединения пластин. При сравнении с асимптотическими результатами для аналогичной задачи Неймана обнаружено существенное различие в асимптотическом строении спектров.

Ключевые слова: спектр задач Дирихле и Неймана на сочленении тонких пластин, асимптотика собственных чисел, локализация собственных функций

DOI: 10.31857/S2686740024050094, EDN: HXJICG

1. МОТИВИРОВКА
И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящее сообщение инициировано работой [1] и имеет своей целью показать колоссальное различие в поведении собственных чисел и функций задач Неймана и Дирихле в тонких областях и их сочленениях, часто игнорируемое в обзорных статьях при сравнении спектров сеток квантовых и акустических (или упругих) волноводов. В упомянутой работе изучена смешанная краевая спектральная задача для оператора Лапласа в сочленении $\Omega^h = \Omega_3^h \cup \Omega_2^h$ двух тонких ($h \ll 1$), горизонтального и вертикального, параллелепипедов

$$\Omega_3^h = \{x = (x_1, x_2, x_3): |x_i| < a_i, i = 1, 2, x_3 \in (0, h)\},$$

(1)

$$\Omega_2^h = \{x: |x_1| < a_1, |x_2| < hH/2, x_3 \in (0, a_3)\},$$

которое в инженерии именуется однотоавровой балкой (см. рис. 1а и справочник [2]). Здесь $a_j > 0$ — фиксированные размеры, $j = 1, 2, 3$, причем масштабированием полудлина a_1 нескольких ребер сведена к единице, т.е. сделаны безразмерными декартова система координат x и все геометрические размеры, в частности малый $h > 0$ и варьируемый $H > 0$.

В сообщении в основном рассматривается задача Дирихле

$$-\Delta_x u^h(x) = \lambda u^h(x), x \in \Omega^h, \quad (2)$$

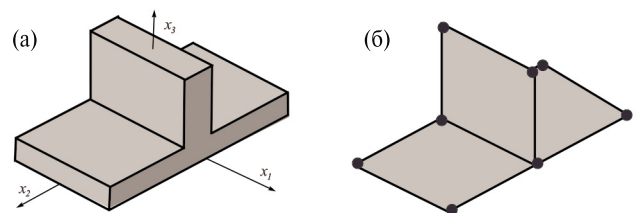


Рис. 1. Трехмерное (а) и двумерное (б) сочленения.

¹Институт проблем машиноведения
Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^h, \quad (3) \quad \text{на трех } (\alpha = 0, \pm) \text{ прямоугольниках}$$

а также обсуждается уравнение (2) с краевыми условиями Неймана

$$\partial_\nu u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^h \setminus \Upsilon^h. \quad (4)$$

Вместе с тем все результаты без особых изменений приспособляются к пространственной системе уравнений Ламе, которая описывает изотропную тавровую балку с фиксированной поверхностью. Впрочем, переход к векторной задаче вызывает существенное загромождение формул, которые по этой причине не приводятся (см. разд. 6).

В формулах (2)–(4) и далее Δ_x — оператор Лапласа, ∂_ν — производная вдоль внешней нормали, а Υ^h — объединение ребер многогранника Ω^h . Все задачи обладают дискретным спектром

$$\lambda_1^h < \lambda_2^h \leq \lambda_3^h \leq \dots \leq \lambda_m^h \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

а соответствующие собственные функции можно подчинить условиям ортогональности и нормировки:

$$(u_m^h, u_n^h)_{\Omega^h} = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

При этом $(\cdot, \cdot)_{\Omega^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, а $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера.

2. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В спектральной задаче из работы [1] на широких гранях многогранника Ω^h поставлены условия Неймана, но для простоты на узких гранях (T -образная глубоко тонирована на рис. 1а) — условия Дирихле, однако асимптотические формулы в целом такие же, как и в задаче (2), (4). Один из результатов [1] состоит в том, что при любом зафиксированном параметре H собственные пары $\{\lambda_m^h; u_m^h\}$ сходятся при $h \rightarrow +0$ по некоторой метрике к собственным парам уравнений

$$-\Delta_{y^\alpha} v(y^\alpha) = \mu v(y^\alpha), \quad y^\alpha \in \varpi^\alpha \quad (6)$$

$$\varpi^\pm = \{y^\pm = (x_1, x_2): |x_1| < a_1, \pm x_2 \in (0, a_2)\}, \quad (7)$$

$$\varpi^0 = \{y^0 = (x_1, x_3): |x_1| < a_1, \pm x_3 \in (0, a_3)\},$$

причем их одиночные стороны снабжены условиями Неймана, а на общей стороне

$$v = \{x: |x_1| < a_1, x_2 = x_3 = 0\} \quad (8)$$

выставлены весовые условия сопряжения Кирхгофа [4, 5]

$$H \frac{\partial v^0}{\partial x_3}(x_1, 0) + \frac{\partial v^+}{\partial x_2}(x_1, 0) - \frac{\partial v^-}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0, \quad (9)$$

$$v^0(x_1, 0) = v^+(x_1, 0) = v^-(x_1, 0), \quad x_1 \in (-a_1, a_1).$$

Иными словами, предельной для задачи Неймана (2), (4) служит задача на двумерном сочленении $\omega^\perp = \varpi^0 \cup v \cup \varpi^+ \cup \varpi^-$ (рис. 1б), собственные числа (5) остаются ограниченными при $h \rightarrow +0$, а собственные функции u_m^h распределены по всей трехмерной конструкции Ω^h .

В сообщении показано, что собственные пары задачи Дирихле (2), (3) обладают совершенно иными свойствами. Именно, обнаружены такие величины

$$H_* \in (1, 2) \text{ и } H_\# \in (1, H_*], \quad (10)$$

что при $H \in (0, H_\#)$ предельной задачей служит задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке (8):

$$-\frac{d^2 w}{dx_1^2}(x_1) = \beta w(x_1), \quad x_1 \in (-a_1, a_1), \quad (11)$$

$$w(\pm a_1) = 0, \quad (12)$$

а собственные функции u_m^h , локализованные вблизи отрезка (8), изменяются как $\sin\left(\frac{\pi m}{2a_1}(x_1 + a_1)\right)$ вдоль него и затухают со скоростью $O(e^{-\delta_m \text{dist}(x, v)/h})$, $\delta_m > 0$, на остальной части сочленения Ω^h . Если же множитель H в формуле (2) выбран на луче $(H_*, +\infty)$, то предельной служит задача Дирихле для уравнения (6) на изолированном вертикальном

прямоугольнике $\mathfrak{w}^0$, и концентрация собственных функций происходит на вертикальной пластине $\Omega_2^h \setminus \Omega_3^h$. Случай $H \in [H_*, H_*)$ остался неизученным из-за изъянов спектрального анализа в разд. 3 (даже в скалярной задаче; см. обсуждение в разд. 3, 4).

В статье [1] также рассмотрена ситуация, в которой скорости утончения множеств (2) разнятся, — смоделируем ее соотношением

$$H = H_0 h^\theta \text{ при } \theta \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}. \quad (13)$$

В случае $\theta \in (-1, 0)$ вертикальная пластина толще горизонтальной и предельный спектр $\{\lambda_m^0\}_{m \in \mathbb{N}}$ получается в результате объединения спектров трех разрозненных задач на прямоугольниках (7), причем уравнения (6) снабжаются условиями Неймана на всех сторонах прямоугольников, кроме сторон $v \subset \mathfrak{w}^\pm$, где появляются условия Дирихле. Если же $\theta \in (0, +\infty)$, т.е. более толстой оказывается горизонтальная пластина, в пределе прямоугольники $\mathfrak{w}^\pm$ сливаются в больший прямоугольник $\mathfrak{w}^\square = (-a_1, a_1) \times (-a_2, a_2)$, а условия Дирихле появляются только на стороне $v \subset \partial \mathfrak{w}^0$. В итоге концентрация собственных функций u_m^h задачи Неймана в Ω^h , отвечающих ее упорядоченным собственным числам (5), чередуется, т.е. происходит то в одной, то в другой частях сочленения Ω^h . Отметим еще, что собственное число $\lambda_1^h = 0$ исходной задачи (2), (4) обязательно появляется у одной из предельных задач.

Для задачи Дирихле (2), (3) в ситуации (13) собственные числа из низкочастотного диапазона спектра приобретают асимптотику

$$\lambda_m^h = h^{-2}\pi^2 + \mu_m^\square + O(h^{\delta_\square})$$

в случае $\theta \in (-1, 0)$, т.е. $H \ll H_*$,

$$\lambda_m^h = h^{-2(1+\theta)} \frac{\pi^2}{h_0^2} + \mu_m^0 + O(h^{\delta_0})$$

в случае $\theta \in (0, +\infty)$, т.е. $H \gg H_*$,

где δ_α — положительные показатели, а $\{\mu_m^\alpha\}_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательности собственных чисел задачи Дирихле для уравнения (6) на прямоугольнике $\mathfrak{w}^\alpha$ при $\alpha = \square, 0$. Кроме того, собственные функции концентрируются

на параллелепипедах $\Omega_\square^h = \Omega_3^h \setminus \overline{\Omega_2^h}$ и $\Omega_2^h \setminus \overline{\Omega_3^h}$ соответственно, однако в отличие от случая $H \in (0, H_*)$ скорость затухания на множествах $\Omega^h \setminus \Omega_\square^h$ и $\Omega^h \setminus \Omega_2^h$ становится степенной, а не экспоненциальной.

3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В Т-ОБРАЗНОМ КВАНТОВОМ ВОЛНОВОДЕ

Сообщим извлеченные из работы [3] сведения о спектре задачи Дирихле

$$-\Delta_\xi W(\xi) = MW(\xi), \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^H = \Pi_1 \cup \Pi_2^H, \quad (14)$$

$$W(\xi) = 0, \xi \in \partial \mathbb{T}, \quad (15)$$

на объединении единичной полосы $\Pi_1 = \{\xi: \xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ и полубесконечной полосы $\Pi_2^H = \{\xi: |\xi_1| < H/2, \xi_2 > 0\}$ шириной $H > 0$ (рис. 2а). Непрерывный спектр $\wp_c^H$ задачи (14), (15) занимает луч $[M_\dagger^H, +\infty)$ с точкой отсечки

$$M_\dagger^H = \pi^2 \min\{1, H^{-2}\}. \quad (16)$$

В силу неравенства Пуанкаре–Фридрихса на прямоугольнике $\mathfrak{w}_H = (0, H) \times (0, 1)$

$$\|\nabla_\xi W; L^2(\mathfrak{w}_H)\|^2 \geq \frac{\pi^2}{4} \|W; L^2(\mathfrak{w}_H)\|^2$$

при $W \in H^1(\mathfrak{w}_H)$, $W(\xi_1, 0) = 0$ при $|\xi_1| < \frac{H}{2}$

и формулы (16) для точки отсечки дискретный спектр $\wp_d^H$ заведомо пуст при $H \geq 2$. Вместе с тем в статье [3] проверено, что при $H \leq 1$ существует единственное собственное число $M_1^H \in (0, \pi^2)$ задачи (14), (15), которое как функция параметра H является строго монотонно

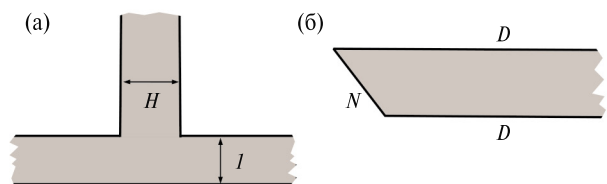


Рис. 2. Т-образный волновод (а). Полуполоса со скошенным торцом (б) — литеры D и N указывают тип краевого условия на боковых сторонах и торце.

убывающей. Таким образом, найдутся такие величины (10), что в случае $H \geq H_*$ дискретный спектр пустой, а в случае $H < H_*$ его кратность равна единице. Отвечающую M_1^H собственную функцию $W_1^H \in H_0^1(\mathbb{T}^H)$ нормируем в пространстве Лебега $L^2(\mathbb{T}^H)$.

При $H = H_*$ наблюдается пороговый резонанс [6–9], т.е. у задачи (14), (15) с пороговым значением спектрального параметра $M = M_1^{H*}$ имеется нетривиальное ограниченное решение

$$W_1^{H*}(\xi) = \widetilde{W}_1^{H*}(\xi) + \chi(\xi_2)K \cos\left(\frac{\pi\xi_1}{H}\right) \quad (17)$$

с экспоненциально затухающим при $|\xi| \rightarrow +\infty$ остатком $\widetilde{W}_1^{H*}(\xi)$, коэффициентом $K \in \mathbb{R}$ и срезающей функцией $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, равной единице при $\xi_2 > 3$ и нулю при $\xi_2 < 2$. К сожалению, остается неизвестным качество этого порогового резонанса, а именно значение коэффициента K : в случае $K = 0$ функция (14) попадает в пространство Соболева $H_0^1(\mathbb{T}^H)$ и вместе с M_1^{H*} образуют истинную собственную пару задачи (14), но при $K \neq 0$ функция W_1^{H*} — почти стоячая волна, а пороговый резонанс правильный (терминология [9]). При $H \in (0, H_*) \cup (H_*, +\infty)$ феномен резонанса отсутствует.

Классификация пороговых резонансов имеет принципиальное значения для постановки краевых условий в процедуре понижения размерности для эллиптических задач в тонких областях (см. публикации [10, 7] и др.). Так, именно наличие простого правильного порогового резонанса в задаче Неймана для уравнения (14) в T -образном акустическом волноводе $\mathbb{T}^H$ (постоянные функции и только они являются ограниченными решениями этой задачи при $M = 0$) привело к возникновению условий сопряжения Кирхгофа (9), а исчезновение резонанса в ситуациях (13) обеспечило условие Дирихле на стороне (8) некоторых прямоугольников. Далее предельные задачи замыкаются условиями Дирихле потому, что пограничные слои около точек, помеченных значком $\bullet$ на рис. 1б, описываются решениями спектральных задач в полуполосе с прямым торцом, четверти слоя и ее сочленении с перпендикулярной половиной слоя, в которых (задачах) нетрудно проверить отсутствие пороговых резонансов при помощи классического приема [11]. Исключение составляет задача (14),

(15) при $H = H_*$, так как автору не удалось аналитическими методами выявить качество порогового резонанса — оказалось бесполезным достаточное условие [8] его отсутствия (ср. разд. 6, 4), и поэтому в разд. 5 приходится обсуждать две ситуации.

4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОКОЛО ОТРЕЗКА ν

При $H \in (0, H_*)$ асимптотику собственных пар задачи (2), (3) ищем в виде

$$\lambda_m^h = h^{-2}M_1^H + \beta_m + \dots, \quad (18)$$

$$u_m^h(x) = \chi_\perp(x_2, x_3)w(x_1)W_1^H(h^{-1}x_2, h^{-1}x_3) + \dots, \quad (19)$$

где $\{M_1^H; W_1^H\}$ — собственная пара задачи (14), (15), многоточие замещает младшие асимптотические члены, а $\chi_\perp \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — срезающая функция, равная единице в случае $|x_j| \leq a_j/3$ при $j = 2, 3$ и нулю, если $|x_j| \geq 2a_j/3$ для какого-нибудь j . Предельная задача (11), (12) для определения собственной пары $\{\beta_m; w_m\}$ получается подстановкой анзацев (18) и (19) в дифференциальное уравнение (3) и выделения слагаемых порядка h^{-2} , причем условия Дирихле в точках $x_2 = \pm a_2$ назначены по причине, указанной в конце разд. 3.

При помощи приема из работы [12] можно убедиться в экспоненциальном затухании собственных функций, отвечающих собственным числам $\lambda_m^h \leq h^{-2}(\pi^2 - d)$ с положительной величиной d . Поскольку асимптотическая конструкция (18) удовлетворяет этому ограничению, классическая лемма о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [13] и спектральное разложение резольвенты в книге [14, гл. 6]) и легкодоступное утверждение о сходимости нормированных собственных пар позволяют доказать оценку погрешности

$$|\lambda_m^h - h^{-2}M_1^H - \beta_m| \leq c_m h^{-2} e^{-\delta_m/h} \quad \text{при } h \in (0, h_m] \quad (20)$$

с некоторыми зависящими от номера $m \in \mathbb{N}$ положительными числами c_m , δ_m и h_m .

5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

В случае $H > H_*$ асимптотические анзацы на параллелепипеде $\Xi_2^h \setminus \Xi_3^h$ для собственных пар задачи (2), (3) выглядят так:

$$\lambda_m^h = h^{-2}\pi^2 H^{-2} + \mu_m + \dots, \quad (21)$$

$$u_m^h(x) = \cos\left(\frac{\pi x_2}{hH}\right)v(x_1, x_3) + \dots \quad (22)$$

Как обычно, подстановка анзацев (21) и (22) в соотношение (2) приводит к дифференциальному уравнению (6). Условия Дирихле на границе $\omega^0 \setminus \bar{\nu}$ вытекают, например, из формулы (3), но то же условие на стороне ν предопределено отсутствием порогового резонанса в квантовом волноводе $\mathbb{T}^H$ для $H > H_*$.

Если $M_1^{H*} = \pi^2 H_*^{-2}$ — собственное число задачи (14), (15) и W_1^{H*} — соответствующая экспоненциально затухающая на бесконечности собственная функция, в окрестности точки $h^{-2}M_1^{H*}$ появляются две асимптотические серии собственных чисел исходной задачи (2), (3) в Ω^h , описываемые анзацами (21) и (18), а сомножители v и w из главных членов асимптотик (22) и (19) находятся соответственно из задач Дирихле для уравнений (11) и (6), $\alpha = 0$. Если же в точке $M = \pi^2 H_*^{-2}$ реализуется правильный пороговый резонанс и у задачи (14), (15) есть ограниченное незатухающее ($K \neq 0$) решение (17), то сохраняются только анзацы (21) и (22) для собственных пар $\{\lambda_m^h, u_m^h\}$, однако определяющие их “предельные” пары $\{\mu_m; v_m\}$ находятся из смешанной краевой задачи для уравнения (6), $\alpha = 0$, а именно, на стороне (8) ставится условие Неймана

$$-\frac{\partial v}{\partial x_3}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (-a_1, a_1), \quad (23)$$

а на остальной части границы прямоугольника $\omega^0 = (-a_1, a_1) \times (0, a_3)$ — условие Дирихле.

При помощи метода сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [15, 16] и др.) поясним, как качество порогового резонанса влияет на тип предельного краевого условия на отрезке ν . Согласно процедуре

сращивания нужно согласовать старший член формулы Тейлора

$$v(x_1, x_3) = v(x_1, 0) + x_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}(x_1, 0) + \dots, \quad (24)$$

умноженный на $\cos\left(\frac{\pi x_2}{hH}\right)$, с каким-либо решением задачи (14), (15), параметрически зависящим от переменной x_1 . В случае правильного порогового резонанса искомый главный член внутреннего разложения принимает вид

$$K^{-1}v(x_1, 0)W_{\dagger}^{H*}(h^{-1}x_2, h^{-1}x_3). \quad (25)$$

Вместе с тем при исчезновении резонанса нет решения, стабилизирующегося при $\xi_2 = h^{-1}x_3 \rightarrow +\infty$, и приходится принять условие Дирихле

$$v(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in (-a_1, a_1), \quad (26)$$

аннулирующее первое слагаемое в правой части (24) и делающее возможным сращивание разнородных разложений в главном. Напротив, незатухающий главный член (25) внутреннего разложения оставляет след $v(x_1, 0)$ произвольным и вместо (26) требуется назначить на отрезке ν парное (в смысле формулы Грина) краевое условие (23).

Если $H > H_*$, то по стандартной схеме выводится аналогичная (20) оценка погрешности:

$$|\lambda_m^h - h^{-2}H^{-2} - \beta_m| \leq c_m h^{1/2} \quad \text{при } h \in (0, h_m]. \quad (27)$$

Она же верна в случае правильного порогового резонанса, однако при его отсутствии первая асимптотическая серия собственных чисел описывается формулами (18) и (20), а асимптотический анзац (21) порождает вторую, расположенную выше первой, асимптотическую серию $\{\lambda_{N^h(m)}^h\}_{m \in \mathbb{N}}$, члены которой удовлетворяют оценке вида (27), но их номера $N^h(m)$ в упорядоченной последовательности (5) неограниченно возрастают при $h \rightarrow +0$, так как ниже $\lambda_{N^h(m)}^h$ располагаются собственные числа (18) и их количество неограниченно возрастает при утончении пластин (1).

6. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ

1. В работе [1] доказано лишь утверждение о сходимости $\lambda_m^h \rightarrow \lambda_m^0$ собственных чисел (5) задачи (2), (4), однако с некоторыми упрощениями асимптотические процедуры, разработанные для условий Дирихле, позволяют установить асимптотические разложения собственных пар задачи Неймана и тем самым выяснить скорость сходимости.

2. Полученные результаты без особого труда приспособляются к задаче Дирихле (2), (3) для косой однотавровой и прямой двутавровой балок на рис. 3.

3. Если на узких гранях (часть их глубоко тонированы на рис. 1а и рис. 3б) многогранников Ω^h заменить условие Дирихле условием Неймана, то в целом полученные асимптотические результаты сохраняются, однако для скошенной конструкции на рис. 3а, возникают и другие предельные задачи, порождающие эффект локализации собственных функций около глубоко тонированной и симметричной ей граней, поскольку, как и в задаче (14), (15), дискретный спектр смешанной краевой задачи на скошенной полуполосе (рис. 2б) содержит по крайней мере одно изолированное собственное число (см. публикацию [17]).

4. Вопрос об асимптотическом строении спектра задачи (2), (3) при $H \in (H_\#, H_*)$ остался открытым исключительно из-за отсутствия исчерпывающей информации о спектре задачи (14), (15) в бесконечной области, в частности о пороговом резонансе. Для восполнения сведений о спектре φ^H нужны численные эксперименты — вычислительные методы, позволяющие строго доказать отсутствие захваченных и почти стоячих волн, известны.

5. Рассуждения и выводы с понятными изменениями сохраняются для однородных

изотропных тавровых упругих балок с полностью зафиксированной поверхностью (фрагмент шовной прослойки кирпичной кладки на рис. 1а и 3б), однако из-за векторного характера задачи Дирихле для системы уравнений Ламе выкладки усложняются существенно. Обратим внимание лишь на одно обстоятельство: задача теории упругости о пограничном слое в T -образном изотропном волноводе T^h распадается на две, плоскую и антиплоскую. При этом собственное число последней — скалярной задачи Дирихле (14), (15) для депланации — заведомо строго меньше собственного числа аналогичной двумерной упругой задачи, а значит, при тонкой стенке асимптотические анзацы из разд. 4 остаются без каких-либо изменений, но в нижнечастотном диапазоне пространственной задачи для упругого сочленения Ω^h возникает еще одна асимптотическая серия собственных чисел, порожденная плоской задачей в T^h .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124041500009-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaudiello A., Gomez D., Perez-Martinez M.-E. A spectral problem for the Laplacian in joined thin films // *Calc. Var.* 2023. V. 62. 129.
2. Штейнберг Б.И. Справочник молодого инженера-конструктора. М.: ЕЕ Медиа, 2012.
3. Назаров С.А. Ограниченные решения в T -образном волноводе и спектральные свойства лестницы Дирихле // *ЖВМФ.* 2014. Т. 54. № 8. С. 1299–1318.
4. Kirchhoff G.R. Ueber der Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige // *Annalen der Physik und Chemie.* 1845. B. 64. S. 32.
5. Pauling L. The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules // *J. Chem. Phys.* 1936. V. 4. P. 672–678.
6. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // *Comm. Math. Phys.* 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
7. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // *Proc. London Math. Soc.* 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.

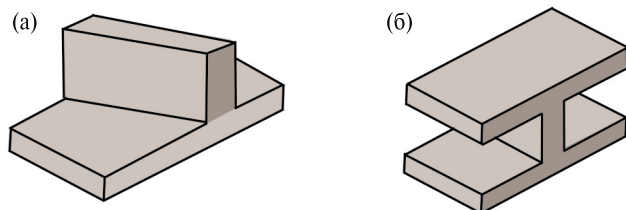


Рис. 3. Скошенная однотавровая (а) и прямая двутавровая (б) балки.

8. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
9. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // *Известия РАН. Серия матем.* 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
10. *Назаров С.А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // *Вестник ЛГУ. Серия 1.* 1982. Вып. 2(7). С. 65–68.
11. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebiete // *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
12. *Назаров С.А.* Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // *Дифференциальные уравнения.* 2022. Т. 58. № 6. С. 738–755.
13. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи матем. наук.* 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
14. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
15. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
16. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
17. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых, разветвляющихся и периодических волноводов // *Алгебра и анализ.* 2011. Т. 23. № 2. С. 206–247.

ASYMPTOTIC STRUCTURE OF THE SPECTRUM OF A THIN DIRICHLET SINGLE-TEE BEAM

S. A. Nazarov^a

^a*Institute of Mechanical Engineering Problems of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia*

Presented by Academician of RAS N.F. Morozov

The asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a tee-type junction of two thin parallelepiped plates is examined. The effect of a strong localization is observed for eigenfunctions near junction zones. Comparing with asymptotic results for analogous Neumann problem, the crucial difference between asymptotic behaviour of their spectra is observed.

Keywords: spectra of the Dirichlet and Neumann problems on junctions of thin plates, asymptotics of eigenvalues, localization of eigenfunctions

УДК 536.24.021

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАКОНОВ ПОДОБИЯ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИИ АДДИТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ВЫРАЩИВАНИЯ

© 2024 г. Академик РАН В. М. Фомин^{1,*}, А. А. Голышев^{1,**}, А. Е. Медведев^{1,***},
А. Г. Маликов^{1,****}

Поступило 23.04.2024 г.

После доработки 23.04.2024 г.

Принято к публикации 01.08.2024 г.

Показано, что задачу описания технологии аддитивного лазерного выращивания можно рассматривать в рамках автомодельного уравнения теплопроводности. Показано, что при некоторых ограничениях глубина проплава подложки хорошо описывается автомодельным решением. На основе полученного автомодельного решения получены двухпараметрическая зависимость глубины проплава от числа Пекле (отношения скорости сканирования к скорости изменения температуры в материале) и безразмерной энтальпии (отношение удельной энергии, поглощенной материалом, и энергии, необходимой для плавления). Показано, что полученная аналитическая зависимость хорошо описывает экспериментальные данные.

Ключевые слова: законы подобия, аддитивные технологии, автомодельное решение

DOI: 10.31857/S2686740024050104, EDN: HXGZBX

При разработке новых материалов с помощью аддитивных технологий необходимо иметь возможность быстро оценить глубину и ширину проплава подложки для многочисленных комбинаций мощности лазерного излучения, скорости сканирования и размера лазерного пучка [1, 2]. Это позволит существенно уменьшить количество экспериментов и сэкономить время. Численное моделирование позволяет уменьшить количество натурных экспериментов, но тем не менее требует проведения сотен численных расчетов для различных параметров процесса лазерной наплавки.

Для уменьшения количества натурных и численных экспериментов исследуются законы подобия (или, как их еще называют, законы масштабирования) процессов лазерной наплавки [3–6]. В этих работах показано, что параметры зоны проплавления зависят от двух безразмерных параметров – нормализованной энтальпии B и числа Пекле Pe (отношения скорости сканирования к скорости изменения температуры в материале). В работе [4] на основе простой тепловой модели [7] были получены интерполяционные формулы в виде степенных функций от двух параметров (числа Пекле и нормализованной энтальпии), описывающих форму “ванны” расплава (ширину и глубину). В работе [5] показано, что независимо от объемной доли керамики безразмерные геометрические параметры единичного трека (глубина, ширина и высота) зависят от числа Пекле и нормализованной энтальпии. Эти зависимости были аппроксимированы алгебраическими выражениями.

¹Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения
Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: fomin@itam.nsc.ru

**E-mail: alexgol@itam.nsc.ru

***E-mail: medvedev@itam.nsc.ru

****E-mail: smalik707@yandex.ru

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЛАЗЕРНОГО НАГРЕВА

Рассмотрим тепловой процесс образования “ванны” расплава, не учитывая слой порошка, движение расплава и испарение материала. Некоторые обоснования такого упрощения задачи лазерной наплавки приведены в работе [4]: 1) теплопроводность порошка намного меньше, чем подложки; 2) порошок имеет более высокую абсорбционную способность, чем расплавленная поверхность; 3) параметры лазерной обработки будут в основном определяться на поздней стадии процесса, а влияние порошка в основном сказывается на начальном этапе. Не будет учитываться теплота плавления подложки, поскольку для металлов она мала по сравнению с энергией, необходимой для нагрева материала до температуры плавления.

Рассмотрим лазерный луч, сканирующий подложку со скоростью V вдоль прямой линии по поверхности. Поверхность при этом нагревается. Рассмотрим одномерную задачу теплопроводности вглубь поверхности (координата r). Одномерное уравнение теплопроводности в эйлеровых координатах для случаев плоской ($v = 0$), осевой ($v = 1$) и сферической ($v = 2$) симметрии имеет вид

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r^v} \frac{\partial}{\partial r} (r^v W), \quad W = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (1)$$

где c — удельная теплоемкость, W — плотность теплового потока, ρ — постоянная плотность среды, λ — коэффициент теплопроводности, T — температура.

Перейдем к массовым переменным Лагранжа:

$$m = \frac{\rho}{v+1} r^{v+1}. \quad (2)$$

Тогда одномерное уравнение теплопроводности в массовых переменных Лагранжа координатах запишется в виде

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial m}, \quad \tilde{W} = -2\lambda m \frac{\partial T}{\partial m}. \quad (3)$$

В процессе лазерной наплавки луч движется по прямой вдоль поверхности. Число Пекле процесса обычно больше единицы — луч движется быстрее, чем изменяется температура в подложке, поэтому для описания процесса

теплообмена в подложке лучше всего подходит одномерное приближение с осевой симметрией ($v = 1$). В этом случае уравнения (2) и (3) станут следующими:

$$m = \frac{\rho}{2} r^2, \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial m}, \quad \tilde{W} = -2\lambda m \frac{\partial T}{\partial m}. \quad (4)$$

ПОСТАНОВКА АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Будем рассматривать процесс теплообмена при лазерной наплавке в автомодельной постановке. Пусть в момент времени $t = 0$ вдоль оси симметрии ($m = 0$) $r = 0$ выделяется энергия $E_0 = \text{const}$. В последующие моменты времени $t > 0$ тепло распространяется от оси симметрии. В начальный момент времени $t = 0$ среда является холодной:

$$T(m, 0) = 0. \quad (5)$$

Если начальная температура $T(m, 0) = T_0 > 0$, то замена переменной $\tilde{T}(m, t) = T(m, t) - T_0$ возвращает граничное условие к условию $\tilde{T}(m, 0) = 0$ с холодной средой.

В данной постановке автомодельная задача для уравнений (4) с условием (5) была решена в работе [8]. Автомодельное решение [8] имеет вид

$$s = \frac{cm}{2\lambda t}, \quad f(s) = \frac{2\lambda t}{E_0} T(m, t), \quad \omega(s) = \tilde{W} \frac{t}{E_0}. \quad (6)$$

Переходя к размерным переменным Эйлера из решения (6) и первого уравнения системы (4) найдем распределение температуры в среде:

$$T(r, t) = \frac{E_0}{4\pi\lambda t} \exp\left(-\frac{1}{4\alpha} \frac{r^2}{t}\right), \quad (7)$$

где $\alpha = \lambda/c\rho$ — коэффициент температуропроводности.

СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Рассмотрим эксперименты по прямому лазерному выращиванию металлокерамических трекров [5].

Для описания термодинамических процессов введем число Пекле [9]:

$$Pe = VD/\alpha, \quad (8)$$

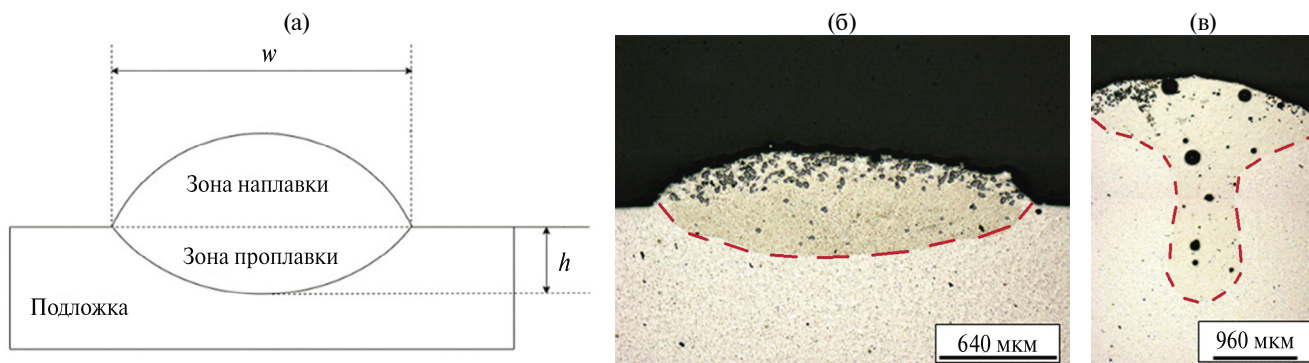


Рис. 1. Схема (а) и фотографии поперечных сечений единичных треков при лазерной наплавке порошковой смеси ВТ-6 + 10% масс. SiC: режим теплопроводности ($B = 1.46$, $Pe = 17.51$) (б); режим “кинжального” проплавления ($B = 14.21$, $Pe = 2.93$) (в).

где V — скорость сканирования, D — диаметр лазерного пучка. Число Пекле представляет собой отношение скорости сканирования к скорости изменения температуры в материале и не учитывает процесс поглощения лазерного излучения и плавление материала.

Введем безразмерный энергетический параметр процесса лазерной наплавки — безразмерную энтальпию B . Она представляет собой отношение удельной энергии, поглощенной материалом, к энергии, необходимой для плавления:

$$B = \frac{\Delta H}{h_s} = \frac{AW}{h_s \sqrt{\alpha \pi V D^3}} = \frac{A}{T_m \sqrt{\pi c \rho \lambda}} \frac{W}{\sqrt{V D^3}}, \quad (9)$$

где ΔH — изменение энтальпии, $h_s = \rho c T_m$ — энтальпия плавления [3], T_m — температура плавления, A — интегральный коэффициент поглощения, W — мощность лазерного излучения.

Время действия лазерного излучения на подложку зависит от скорости сканирования V и диаметра лазерного пучка D с некоторым коэффициентом n : $t_* = nD/V$. За это время глубина проплава достигнет значения r_* . На границе проплава температура станет равной температуре плавления: $T(r_*, t_*) = T_m$. Энергия, которая выделяется при сканировании подложки лазером, равна $E_0 = AW/V$. Подставляя значения времени t_* и энергии E_0 в уравнение (7) и используя безразмерные параметры (8) и (9), получим формулу для радиуса проплава:

$$\frac{r_*}{D} = k \sqrt{\frac{2n}{Pe} \ln \left(\frac{Pe \cdot B^2}{16\pi n^2} \right)}, \quad (10)$$

где n — параметр, $k = w/2h$ — коэффициент формы проплава [5], w — ширина проплава, h — глубина проплава.

Формула предполагает, что “ванна” проплава имеет полукруглую форму, т.е. коэффициент $k = 1$. Это связано с одномерным решением с осевой симметрией. В реальности “ванна” проплава не всегда имеет полукруглую форму. На рис. 1 приведены схема и фотографии поперечных сечений единичных треков, показывающие переход от режима теплопроводности к режиму “кинжального” проплавления с характерными значениями безразмерной энтальпии B и безразмерного числа Пекле Pe . Поэтому для расчета некруглой формы проплава в формулу введен коэффициент k .

Экспериментальные данные работы [5] обчислены по формуле (10). Результаты сравнения экспериментов и теоретической формулы приведены на рис. 2 и 3.

Из рис. 2, 3 видно, что формула (10) хорошо описывает экспериментальные данные, за исключением больших чисел безразмерной энтальпии. Это может объясняться тем, что происходит переход от режима теплопроводности к режиму “кинжального” проплавления, для которого характерно наличие парогазового канала и глубокое проникновение излучения внутрь подложки с существенным ее проплавлением. Как результат, происходит изменение коэффициента поглощения лазерного излучения материалом A , который учитывается в расчетах безразмерной энтальпии.

На рис. 4 показано сравнение экспериментальных [5] и расчетных по формуле данных

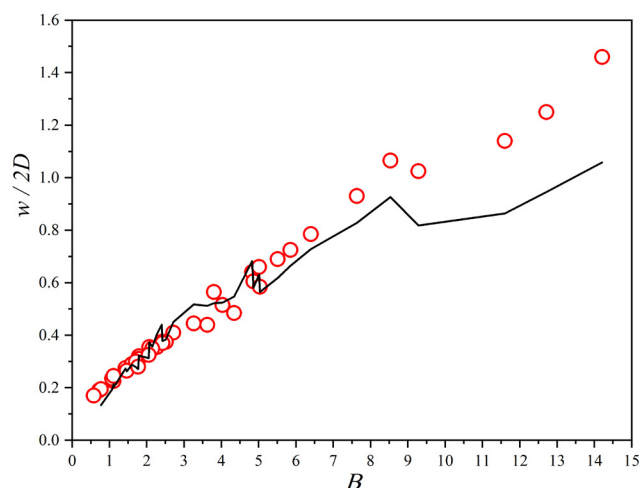


Рис. 2. Безразмерная полуширина проплава $w/2D$ в зависимости от безразмерной энтальпии B . Сравнение экспериментальных результатов (кружки) с расчетами (линия) по формуле (10) при $n = 0.35$, $k = 1$.

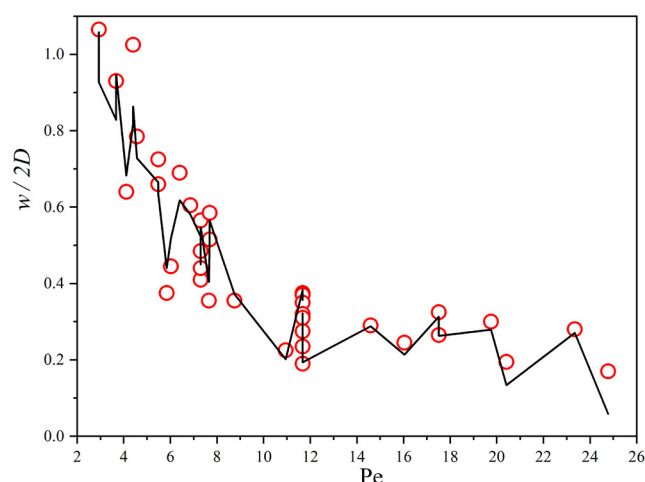


Рис. 3. Безразмерная полуширина проплава $w/2D$ в зависимости от числа Пекле Pe . Сравнение экспериментальных результатов (кружки) с расчетами (линия) по формуле (10) при $n = 0.35$, $k = 1$.

по глубине проплавления. Видно, что формула (10) хорошо описывает эксперименты с зоной теплопроводности, но не описывает зону “кинжального” проплавления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача описания технологии аддитивного лазерного выращивания рассмотрена в рамках автомодельного уравнения теплопроводности. Показано, что решение автомодельной задачи для уравнения теплопроводности с осевой

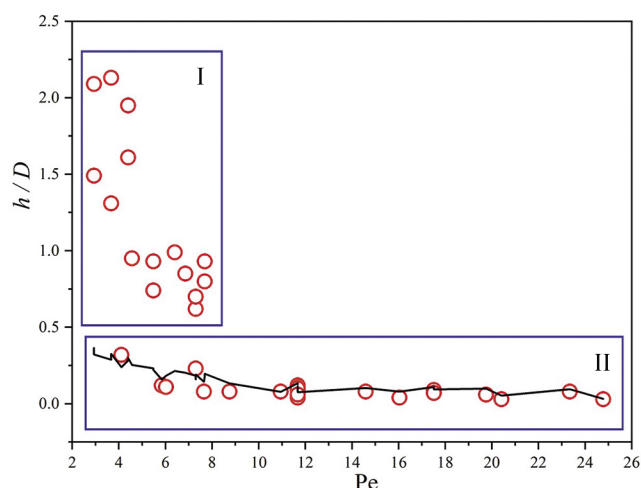


Рис. 4. Безразмерная глубина проплава h/D в зависимости от числа Пекле Pe . Сравнение экспериментальных результатов (кружки) с расчетами (линия) по формуле (10) при $n = 0.35$, $k = 1$. Выделены области: I – зона “кинжального” проплавления, II – зона теплопроводности.

симметрией хорошо описывает параметры “ванны” расплава. Получена двухпараметрическая зависимость ширины и глубины проплава от числа Пекле и безразмерной энтальпии. Проведено сравнение с экспериментальными данными [5]. Показано, что полученная аналитическая зависимость хорошо описывает экспериментальные данные с режимом теплопроводности, но не описывает “кинжальный” режим проплавления.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mukherjee T., DebRoy T. Control of asymmetric track geometry in printed parts of stainless steels, nickel, titanium and aluminum alloys // Computational Materials Science. 2020. V. 182. 109791. <https://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2020.109791>
2. Громов В.Е., Иванов Ю.Ф., Ефимов М.О., Шлярова Ю.А. Структура и свойства высокоэнтальпийного сплава ALCRFECONI после электронно-ионно-плазменной обработки // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 511. № 1. С. 5–9. <https://doi.org/10.31857/S2686740023040041>
3. Weaver J.S., Heigel J.C., Lane B.M. Laser spot size and scaling laws for laser beam additive

- manufacturing // J. Manufacturing Processes. 2022. V. 73. № August 2021. P. 26–39.
<https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.10.053>
4. Rubenchik A.M., King W.E., Wu S.S. Scaling laws for the additive manufacturing // J. Materials Processing Technology. 2018. V. 257. P. 234–243.
<https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2018.02.034>
 5. Golyshev A.A., Malikov A.G. Scaling laws for the additive manufacturing of the AISI 316 L deposited by laser surface cladding and direct metal deposition methods // Optik. 2023. V. 295. August. № 171506.
<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.171506>
 6. Голышев А.А., Сибирякова Н.А. Законы подобия при прямом лазерном выращивании металлокерамических треков // Прикладная механика и техническая физика. 2023. V. 64. № 5. P. 102–107.
<https://doi.org/10.15372/PMTF202315287>
 7. Eagar T.W., Tsai N.S. Temperature Fields Produced By Traveling Distributed Heat Sources // Welding Journal (Miami, Fla). 1983. V. 62. № 12. P. 346–355.
 8. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 240 с.
 9. Mukherjee T., Manvatkar V., De A., DebRoy T. Dimensionless numbers in additive manufacturing // Journal of Applied Physics. 2017. V. 121. № 064904.
<https://doi.org/10.1063/1.4976006>

ANALYTICAL PROOF OF THE SCALING LAWS APPLICABILITY FOR ADDITIVE MANUFACTURING

Academician of the RAS V. M. Fomin^a, A. A. Golyshev^a, A. E. Medvedev^a, A. G. Malikov^a

^a*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

It is shown that the problem of describing the technology of additive laser deposition can be considered within the framework of a self-similar thermal conductivity equation. It is shown that, under certain conditions, the depth of substrate penetration is well described by a self-similar solution. Based on the obtained self-similar solution, a two-parameter dependence of the penetration depth on the Peclet number (the ratio of the scanning speed to the rate of temperature change in the material) and dimensionless enthalpy (the ratio of the specific energy absorbed by the material and the energy required for melting) was obtained. It is shown that the obtained analytical dependence describes the experimental data quite accurately.

Keywords: scaling laws, additive manufacturing, self-similar solution

УДК 53.084.42

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ПРЕЦИЗИОННОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ИСТОЧНИКОВ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2024 г. Е. М. Кончев^{1,*}, А. С. Конькова¹, А. В. Князев¹,
академик РАН А. П. Глинушкин¹, С. В. Гудков^{1,**}

Поступило 20.06.2024 г.

После доработки 20.06.2024 г.

Принято к публикации 07.08.2024 г.

В последние годы применение низкотемпературной плазмы в биомедицинских и сельскохозяйственных исследованиях вызывает значительный интерес благодаря способности плазмы эффективно стерилизовать, модифицировать поверхности и генерировать активные формы кислорода и азота. Точное позиционирование источников плазмы и характеристика режимов работы источников являются первоочередными задачами при внедрении в реальную практику. В работе представлено универсальное устройство для позиционирования источников плазмы и измерительной аппаратуры. Устройство изготовлено методом послойного наплавления (3D-печать), обладает относительно высокой прочностью конструкции при отсутствии металлосодержащих элементов. Разработанное устройство позволяет с высокой точностью позиционировать активные элементы источников плазмы над объектами различных размеров и состава, а также позволяет имплементировать чувствительные методы диагностики характеристик плазмы и изменения параметров обрабатываемых объектов.

Ключевые слова: низкотемпературная плазма, источники плазмы, измерительный стенд, 3D-печать

DOI: 10.31857/S2686740024050118, **EDN:** НХСРАВ

Применение плазменных технологий в последние годы вызывает большой интерес и широко освещается в научной литературе [1–3]. Это прежде всего связано с развитием технологической базы, поспособствовавшей появлению энергоэффективных компактных решений [4], и получением перспективных результатов исследований в области взаимодействия низкотемпературной плазмы с биологическими объектами. Наиболее активно развивающимися областями являются плазменная медицина и плазменное сельское хозяйство, в которых источники такой плазмы используются для угнетения или стимуляции жизнеспособности

клеток, обработки поверхности материалов с целью стерилизации или изменения адгезионных свойств, генерации в жидкостях биологически активных соединений [5–7]. В таких исследованиях низкотемпературную плазму (НТП) зачастую называют нетермальной или холодной.

Как показывают многочисленные исследования, результаты взаимодействия НТП с биологическими объектами и жидкостями могут вызывать разнообразные отклики и варьироваться в самых широких пределах, что зависит от большого числа параметров как источников НТП, так и условий проведения обработки [8, 9]. Одними из ключевых факторов, определяющих результат прямого взаимодействия НТП с клетками или биотканями и его воспроизводимость, являются энергетические характеристики НТП (вкладываемая в разряд энергия, мощность и длительность микропериодов),

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: konchekov@fpl.gpi.ru

**E-mail: s_makariy@rambler.ru

дистанция между активным электродом, задающим плазменное воздействие, и обрабатываемым объектом. Таким образом, на стадии разработки методик и протоколов обработки критически важным является прецизионное позиционирование рабочего устройства источника НТП, а также регистрация характеристик плазменного образования: спектры свечения плазмы и спектры поглощения УФ-излучения в обрабатываемой среде для определения скорости наработки биологически активных соединений; распределение электрического поля; величина и длительность тока в разрядных каналах и т.п. [10–16]. Для решения данного ряда задач нами было разработано и изготовлено универсальное устройство, позволяющее как позиционировать электроды различных типов источников НТП относительно объекта обработки, так и размещать вблизи них компоненты измерительной аппаратуры.

ОПИСАНИЕ УСТРОЙСТВА

Поставленные задачи обуславливают основные требования при разработке модели и изготовлении устройства:

1) изготовление элементов из диэлектрических материалов для минимизации систематической ошибки регистрации распределения электрических полей;

2) возможность точного позиционирования рабочего устройства источника НТП в цилиндрической системе координат (степень свободы по высоте и углу поворота);

3) возможность прецизионного и независимого перемещения в двух плоскостях предметных столиков-держателей, на которых размещаются образец и измерительные элементы;

4) возможность работы с объектами размером от 1 см³ до 1 дм³;

5) жесткость конструкции и возможность юстировки в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Общий вид модели устройства представлен на рис. 1. Все элементы, за исключением штока, утяжелителя основания и ряда крепежных элементов, изготовлены методом послойного наплавления (FDM). Для изготовления использовался 3D-принтер VolgoBot A4 PRO.

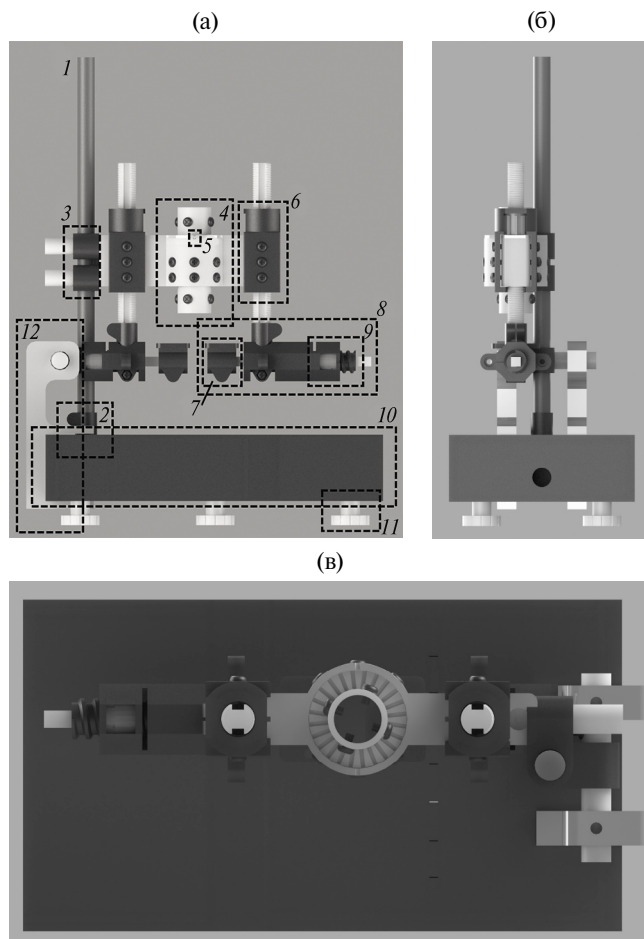


Рис. 1. Модель устройства: вид спереди (а), вид сбоку (б), вид сверху (в); 1 – шток; 2 – крепежный элемент; 3 – фиксатор; 4 – втулка для крепления исследуемого объекта (электрода); 5 – канавка для выставления угла поворота; 6 – муфта для вертикального перемещения предметных столиков; 7 – предметный столик; 8 – механизм горизонтальной юстировки; 9 – муфта для горизонтального перемещения предметных столиков; 10 – платформа; 11 – юстировочные ножки; 12 – компенсационный элемент.

Особенностями данного принтера являются высокая точность при печати (минимальная толщина слоя – 0.03 мм), а также наличие термостатированной и конвекционной камеры, в которой производится построение моделей, что обеспечивает улучшение когезии и противодействие межслоевым деформациям.

В качестве основного материала был выбран ABS-пластик. Данный вид материала является распространенным при 3D-FDM-печати благодаря его свойствам и стоимости. Отличительной особенностью ABS-пластика является его растворимость в ацетоне, что позволяет

изготавливать крупногабаритные элементы по частям.

Основание станда состоит из: утяжелителя; штока, на который устанавливается основная часть станда; кожуха и крепежного элемента штока. В качестве утяжелителя основания используется плита из оргстекла массой 5 кг. Плита помещена в кожух. Предварительно в плите было выполнено сквозное отверстие, через которое проходит шток.

В верхней панели кожуха предусмотрено отверстие, в которое установлен шток и крепежный элемент для его фиксации. Также в боковой панели кожуха предусмотрены отверстия для установки дополнительного подиума. Подиум выполняет две функции: продление верхней плоскости для размещения крупных объектов (например, мешалки), которые необходимы в процессе исследований, и хранение сопутствующих предметов.

В качестве штока 1 используется стержень диаметром 18 мм. Выбор обусловлен применением стандартного крепежного элемента для дополнительной фиксации стержня в основании и требованием к повышенной прочности, чтобы избежать рисков, связанных с деформацией штока под нагрузкой, вызванной весом основной части станда. Крепежный элемент 2 имеет более высокую прочность, так как выполнен с применением литейных форм в промышленных условиях.

Для повышения прочности и обеспечения точности позиционирования основной части вдоль штока был изготовлен набор колец разной высоты. На каждое кольцо нанесено значение его высоты. К штоку с помощью дополнительных элементов крепится основная часть станда через два боковых стержня. Вдоль штока производится перемещение в вертикальной плоскости основной части, для этого фиксаторы 3 снабжены винтами.

В основной части предусмотрено отверстие, в котором размещается втулка для установки рабочего устройства НТП (электрода) и угла его поворота относительно предметных столиков. Корпус рабочего устройства фиксируется во втулке нейлоновыми винтами. Сама втулка также может быть зафиксирована в основной части с помощью нейлоновых винтов.

Втулка 4 имеет радиально расположенные канавки с шагом в 15 градусов. На корпусе выполнены две симметричные канавки 5. Это позволяет осуществлять поворот втулки с рабочим устройством с точностью 7.5 градусов (половина цены деления).

В основной части также располагаются отверстия, симметричные относительно отверстия для втулки, через которые проходят штоки для вертикального перемещения предметных столиков. Механизм вертикального перемещения состоит из штока, муфты и дополнительного фиксатора. Вращательное движение муфты 6 превращается в вертикальное поступательное движение штока. Величина поворота определяется шагом резьбы. На муфте сделаны выступы, чтобы облегчить вращение и определять величину поворота с точностью до 15 градусов (половина цены деления). На штоках выполнены пазы, чтобы осуществлять при необходимости дополнительную фиксацию (винты закручиваются и осуществляют прижим балки с двух сторон); кроме того, винты в пазе выступают в роли направляющих при перемещении штока. Для предотвращения прокручивания штока вдоль их цилиндрической поверхности сделаны срезы. Отверстия в корпусе, через которые проходят эти штоки, также имеют такую форму. Дополнительный фиксатор удерживает муфту, блокируя перемещения в горизонтальной плоскости. Также фиксатор в нижней части имеет выступы, которые служат в качестве направляющих в пазах штока.

В нижней части штока отсутствует резьба, так как в этом месте устанавливается стандартный фиксатор. Через фиксатор пропускается балка квадратного сечения. Балка имеет квадратное сечение, чтобы предотвратить вращение. На конце балки размещается предметный столик 7. Перемещение предметного столика с балкой осуществляется либо через механизм горизонтального перемещения 8, либо ручную. В случае ручного перемещения зажимной винт ослабляется, балка проталкивается, после чего винт затягивается (на балке присутствует шкала, чтобы контролировать величину перемещения). Механизм горизонтального перемещения аналогичен механизму вертикального перемещения: вращение муфты 9 превращается в поступательное движение квадратной балки

и, следовательно, перемещение предметных столиков. На квадратной балке жестко фиксируется переходная деталь: внутри деталь имеет квадратное отверстие, а снаружи — резьбу. Для повышения надежности крепления системы дополнительно изготовлены полые детали, которые установлены вокруг стандартных фиксаторов.

На одном из предметных столиков 7 устанавливается измерительный элемент, на другом — объект плазменной обработки. Если объект имеет значительные размеры, он может быть расположен непосредственно на платформе 10.

В основную часть станда вмонтирован пузырьковый уровень. В ножках станда 11 установлены регулировочные винты. С помощью уровня и регулировочных винтов осуществляется выравнивание корпуса в горизонтальной плоскости. Компенсационный элемент 12 является противовесом и минимизирует влияние моментов сил, возникающих в ходе эксплуатации устройства.

На рис. 2 представлен пример использования разработанного устройства. Источник НТП в режиме генерации аргоновой плазменной струи производит обработку водосодержащего объекта в чашке Петри. Одновременно с обработкой производится регистрация спектров свечения плазмы. Объект обработки и линза

световода размещаются на разных предметных столиках, каждый из которых позволяет независимо позиционировать закрепленный объект в двух плоскостях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Источники холодной плазмы атмосферного давления быстро приобретают все большее значение, поскольку они удобны в использовании, технологически просты и экологически чисты в задачах генерации активных форм кислорода и азота. Применение НТП может включать: модификацию поверхности, обеззараживание, стерилизацию и заживление ран. Рабочие режимы источника плазмы, особенно в медико-биологических приложениях, должны быть установлены в согласии с нормативными требованиями. По этой причине первоочередной задачей является характеристика и контроль параметров плазмы. В последнее время были разработаны и опробованы новые методы диагностики НТП, позволяющие получить характеристики, важные с точки зрения медицинских приложений. Одна из них — измерение электрического поля с помощью электрооптических кристаллов (эффект Поккельса) [17]. Несмотря на сложность такой диагностики, полученные данные важны для безопасного биомедицинского применения с потенциальным прямым воздействием плазмы. Разработанное в настоящей работе устройство позволяет с достаточной точностью получить, в том числе, информацию об электрических полях вокруг мишени на различных расстояниях, при этом минимизация воздействия полей на измерительную аппаратуру осуществляется путем перемещения станда в клетку Фарадея.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят сотрудников отдела физики плазмы и теоретического отдела ИОФ РАН за консультацию в процессе выполнения работы, в частности Л.В. Колика, Д.В. Малахова, Н.Г. Гусейн-заде.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00856.

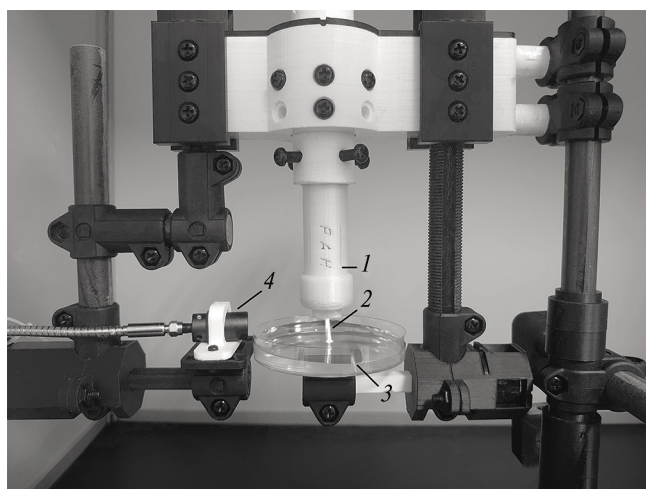


Рис. 2. Применение устройства позиционирования для регистрации спектров свечения плазмы при одновременной обработке водосодержащего объекта. 1 — Активный элемент источника плазмы, 2 — плазменная струя, 3 — объект обработки, 4 — линза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gudkov S.V., Sarimov R.M., Astashev M.E. et al.* Modern Physical Methods and Technologies in Agriculture // *Phys. Usp.* 2024. V. 67. № 2. P. 194. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2023.09.039577>
2. *Konchekov E.M., Gusein-zade N., Burmistrov D.E. et al.* Advancements in Plasma Agriculture: A Review of Recent Studies // *IJMS.* 2023. V. 24. P. 15093. <https://doi.org/10.3390/ijms242015093>
3. *Adamovich I., Agarwal S., Ahedo E. et al.* The 2022 Plasma Roadmap: Low Temperature Plasma Science and Technology // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2022. V. 55. № 373001. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac5e1c>
4. *Konchekov E.M., Gudkova V.V., Burmistrov D.E. et al.* Bacterial Decontamination of Water-Containing Objects Using Piezoelectric Direct Discharge Plasma and Plasma Jet // *Biomolecules.* 2024. V. 14. P. 181. <https://doi.org/10.3390/biom14020181>
5. *Bruggeman P.J., Bogaerts A., Pouvesle J.M. et al.* Plasma–Liquid Interactions // *J. Applied Physics.* 2021. V. 130. P. 200401. <https://doi.org/10.1063/5.0078076>
6. *Gudkova V.V., Razvolayaeva D.A., Borzosekov V.D., Konchekov E.M.* Features of the FOX and Griess Method for Assessing the Biological Activity of Plasma Treated Solutions // *Plasma Chem. Plasma Process.* 2024. V. 44. P. 305. <https://doi.org/10.1007/s11090-023-10418-8>
7. *Konchekov E.M., Kolik L.V., Danilejko Y.K. et al.* Enhancement of the Plant Grafting Technique with Dielectric Barrier Discharge Cold Atmospheric Plasma and Plasma-Treated Solution // *Plants.* 2022. V. 11. P. 1373. <https://doi.org/10.3390/plants11101373>
8. *Korzec D., Hoffmann M., Nettesheim S.* Application of Plasma Bridge for Grounding of Conductive Substrates Treated by Transferred Pulsed Atmospheric Arc // *Plasma.* 2023. V. 6. P. 139. <https://doi.org/10.3390/plasma6010012>
9. *Korzec D., Hoppenthaler F., Andres T., Guentner S., Lerach S.* Application of Nitrogen Piezoelectric Direct Discharge for Increase in Surface Free Energy of Polymers // *Plasma.* 2022. V. 5. P. 111. <https://doi.org/10.3390/plasma5010009>
10. *Hofmans M., Sobota A.* Influence of a Target on the Electric Field Profile in a kHz Atmospheric Pressure Plasma Jet with the Full Calculation of the Stark Shifts // *J. Applied Physics.* 2019. V. 125. № 043303. <https://doi.org/10.1063/1.5075544>
11. *Goldberg B.M., Hoder T., Brandenburg R.* Electric Field Determination in Transient Plasmas: In Situ & Non-Invasive Methods // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2022. V. 31. № 073001. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/ac6e03>
12. *Orr K., Tang Y., Simeni Simeni M. et al.* Measurements of Electric Field in an Atmospheric Pressure Helium Plasma Jet by the E-FISH Method // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2020. V. 29. № 035019. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/ab6e5b>
13. *Yang J., Barnat E.V., Im S., Go D.B.* Spatiotemporally Resolved Measurements of Electric Field around a Piezoelectric Transformer Using Electric-Field Induced Second Harmonic (E-FISH) Generation // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2022. V. 55. № 225203. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac406a>
14. *Li X., Jin S., Song K. et al.* Temporal Electric Field of a Helium Plasma Jet by Electric Field Induced Second Harmonic (E-FISH) Method. // *Plasma Sci. Technol.* 2023. V. 25. № 015402. <https://doi.org/10.1088/2058-6272/ac8419>
15. *Robert E., Sarron V., Riès D. et al.* Characterization of Pulsed Atmospheric-Pressure Plasma Streams (PAPS) Generated by a Plasma Gun // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2012. V. 21. № 034017. <https://doi.org/10.1088/0963-0252/21/3/034017>
16. *Mat Saman N., Ahmad M.H., Buntat Z.* Experimental Analysis of Cold Plasma With Glow Discharge Mechanism Under a Variety of Input Parameters // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2022. V. 50. P. 2110. <https://doi.org/10.1109/TPS.2022.3176455>
17. *Nishiura M., Yoshida Z., Mushiaki T. et al.* Electro-Optic Probe Measurements of Electric Fields in Plasmas // *Rev. Sci. Instrum.* 2017. V. 88. № 023501. <https://doi.org/10.1063/1.4974740>

DEVICE FOR PRECISION POSITIONING OF LOW TEMPERATURE PLASMA SOURCES

**E. M. Konchekov^{a,*}, A. S. Konkova^a, A. V. Knyazev^a,
Academician of the RAS A. P. Glinushkin^a, S. V. Gudkov^{a,**}**

^aProkhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

In recent years, the application of low-temperature plasma in biomedical and agricultural research has attracted significant interest due to the plasma's ability to effectively sterilize, modify surfaces, and generate reactive oxygen and nitrogen species. Accurate positioning of plasma sources and characterization of source operating modes are primary tasks when implemented in real practice. This paper presents a universal device for positioning of plasma sources and measuring equipment. The device is manufactured by FDM 3D printing and has a relatively high structural strength in the absence of metal-containing elements. The developed device allows the active elements of plasma sources to be positioned with high accuracy over objects of various sizes and compositions, and also allows the implementation of sensitive methods for diagnosing plasma characteristics and parameters of processed objects.

Keywords: low-temperature plasma, plasma sources, measuring stand, 3D printing

УДК 534.6, 534.8, 531.7

ВЫСОКОТОЧНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ УЛЬТРАЗВУКА В КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ НА МАЛОЙ БАЗЕ

© 2024 г. Д. И. Макалкин^{1,2,*}, А. А. Карабутов¹, Е. В. Саватеева¹

Представлено академиком РАН О. В. Руденко 27.06.2024 г.

Поступило 24.06.2024 г.

После доработки 01.07.2024 г.

Принято к публикации 04.07.2024 г.

Рассматривается метод высокоточного измерения групповой скорости ультразвука в металлических пластинах миллиметровой толщины с помощью лазерного термооптического источника ультразвуковых импульсов. В качестве образцов используются калиброванные по толщине плитки Иогансона. Учитываются влияние эффекта дифракции ультразвукового пучка и другие технические факторы. Экспериментально показано, что деконволюция сигнала с импульсной характеристикой приемного преобразователя совместно с цифровой фильтрацией способствует уменьшению дисперсии измерений групповой скорости — она составляет менее 0.2% для образцов с толщинами 1–2 мм.

Ключевые слова: лазерный ультразвук, групповая скорость ультразвука, фотоакустика, эталон скорости ультразвука

DOI: 10.31857/S2686740024050121, EDN: HWVPJO

Развитие техники в значительной мере определяется повышением энергонасыщенности деталей и механизмов и ужесточением условий их функционирования, что требует разработки и совершенствования методов неразрушающего контроля [1]. При этом, в частности, возрастает влияние действующих и остаточных механических напряжений на надежность и стойкость системы. Поэтому неразрушающий оперативный контроль напряженного состояния деталей становится все более актуальным.

Основными методами неразрушающего контроля внутренних напряжений являются рентгеновская дифрактометрия и ультразвуковая тензометрия. Рентгеновская дифрактометрия основана на изменении угла дифракции

рентгеновского пучка при деформации кристаллической решетки под действием внутренних напряжений, что делает ее применимостью для контроля не демонтированных деталей и узлов весьма ограниченной. Ультразвуковая тензометрия использует акустоупругий эффект зависимости скорости ультразвука от механических напряжений на трассе распространения акустического пучка по контролируемому объекту [2], что позволяет производить контроль без разборки механизма. Величина эффекта, однако, мала и даже на пороге текучести практически не превышает нескольких процентов. Поэтому для практического использования эффекта акустоупругости в задачах тензометрии необходимо измерять скорость ультразвука с повторяемостью лучше долей процента на масштабе, ограниченном размером области локализации напряжений (малая база). Это требует уменьшения длительности импульса акустической волны и размеров “прозвучиваемой” области. Такому условию в наибольшей степени удовлетворяют

¹Институт общей физики им. А.М. Прохорова

Российской академии наук, Москва, Россия

²МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

*E-mail: dmitrymakalkin@yandex.ru

лазерные термооптические источники субмикросекундных ультразвуковых импульсов [3].

В актуальном государственном первичном эталоне единиц скоростей распространения и коэффициента затухания ультразвуковых волн в твердых средах (ГЭТ 189-2014) [4] используется бесконтактный УЗ-метод измерения скорости в теневом режиме, который развивался в 70-е и 80-е годы прошлого века [5]: лазерное излучение возбуждает УЗ-волну непосредственно на поверхности образца, а затем оптическим способом, с помощью лазерной интерферометрии, происходит детектирование УЗ-колебаний противоположной поверхности, в результате чего измеряется скорость распространения УЗ. Хотя заявленная в эталоне систематическая погрешность измерения скорости продольных волн составляет менее 0.014% (диапазон скоростей 5000–6500 м/с, полосу частот 0.5–25 МГц, диапазон толщин образцов от 2 до 100 мм из стали 40Х13, Д16Т и кварцевого стекла К8), для более тонких образцов данные не приводятся. Отметим, что при облучении лазером непосредственно поверхности образца, во-первых, возрастает риск абляции [6], приводящей к порче поверхности образца и, во-вторых, возникает нагрев подповерхностного слоя образца, влияющий на модуль Юнга материала образца и, как следствие, на скорость звука [7] и, соответственно, на точность измерений. Кроме того, теневой режим измерения скорости ультразвука имеет существенные ограничения в практических применениях, поскольку при нем необходим доступ к обеим сторонам образца с плоскопараллельными поверхностями и известной с высокой точностью толщиной.

Альтернативой этому может стать метод [8, 9], где короткие УЗ-импульсы возбуждаются наносекундным лазером термооптически с помощью специального оптико-акустического (ОАП), примыкающего к образцу, а прием УЗ-волн осуществляется в эхо-режиме. При этом необходим доступ только к одной стороне образца, а лазерное излучение не может повредить поверхность образца или нагреть его напрямую. Прежде мы осуществляли компенсацию дифракции УЗ-волн в образце благодаря расчету специальных поправок для групповой скорости, которые были получены при моделировании трансформации гауссовского импульса [9]. В данной работе мы обсуждаем возможное улучшение точности этого метода для применения в плоскопараллельных стальных образцах толщиной меньше 2 мм,

а также проверяем эффективность компенсации дифракции с помощью деконволюции записанного сигнала с импульсной характеристикой приемного преобразователя и учитываем иные ограничения технического характера.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Измерения проводились на образцах, которыми были стальные плитки Иогансона из стандартного набора концевых мер длины. Мы провели измерения с плитками толщиной до 10.00 мм, но поскольку в данной работе нас интересует лишь толщины до 2 мм, то мы приводим результаты только для толщин 1.000, 1.500 и 1.900 мм.

Для термооптического возбуждения ультразвука в широкой полосе и его приема в эхо-режиме использовался дефектоскоп УДЛ-2М. Дефектоскоп состоит из возбуждающей и принимающей УЗ-частей, изображенных на рис. 1 вместе в сокращенном виде. Возбуждение звука осуществляется с помощью лазера с диодной накачкой с длиной волны 1053 нм, излучающего импульс длительностью 10 нс по полувысоте и с максимальной энергией 300 мкДж. Через оптоволоконно 1 лазерный импульс подводится внутрь звукопровода 2 на оптико-акустический преобразователь 3, который преобразует импульсы лазерного излучения в импульсы ультразвука, распространяющиеся в звукопроводе и вне его в виде пучков с гауссовским поперечным распределением (начальный диаметр УЗ-пучков по уровню $1/e$ составлял 5.5 мм). Ушедший в звукопровод УЗ-импульс (темная стрелка) попадает на широкополосный пьезопреобразователь 4 первым — это зондирующий УЗ-импульс. Прошедший через водную иммерсию 5 в образец 6 УЗ-импульс (светлая стрелка) будет многократно переотражаться от его параллельных торцов (ревербировать), частично проходя в звукопровод и на пьезопреобразователь. Термином “приемный преобразователь” далее мы будем называть пару звукопровод–пьезопреобразователь. Напряжение с пьезопреобразователя обрабатывается АЦП, вследствие чего формируется дискретный сигнал.

Исходный (необработанный) сигнал приведен на рис. 2. В нем можно выделить зондирующий импульс, состоящий из фазы сжатия длительностью ~60 нс по уровню $1/e$ и следующей за ней более длительной фазы разрежения, появляющейся за счет дифракции низкочастотных составляющих импульса при его распространении

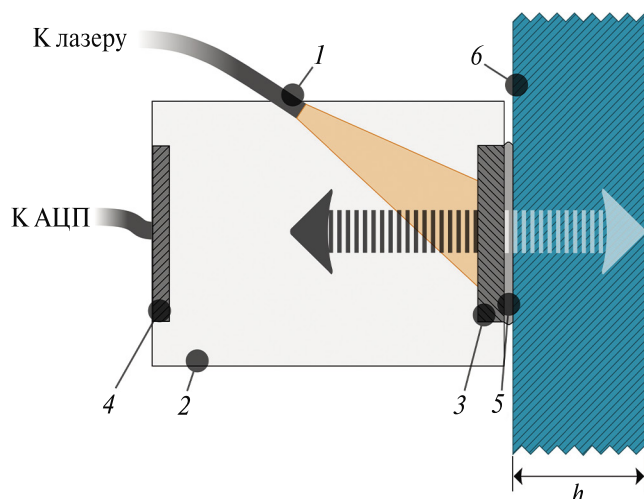


Рис. 1. Экспериментальная установка (фрагмент).

внутри преобразователя. Далее следует импульс отражения от лицевой поверхности образца и импульсы многократных отражений внутри образца (реверберации). Кроме импульсов продольных волн, в сигнале возникают импульсы сдвиговых волн. Причиной их появления является ограниченность акустического пучка, который отражается от свободной донной поверхности образца.

Групповая скорость продольных УЗ-волн определялась времяпролетным методом, а временной интервал брался между экстремумами отражений. Импульс отражения от лицевой поверхности образца не использовался в расчетах по причине различия влияния на его форму и форму последующих импульсов отражения от иммерсионного слоя, из-за чего истинное время его экстремума может содержать дополнительные погрешности.

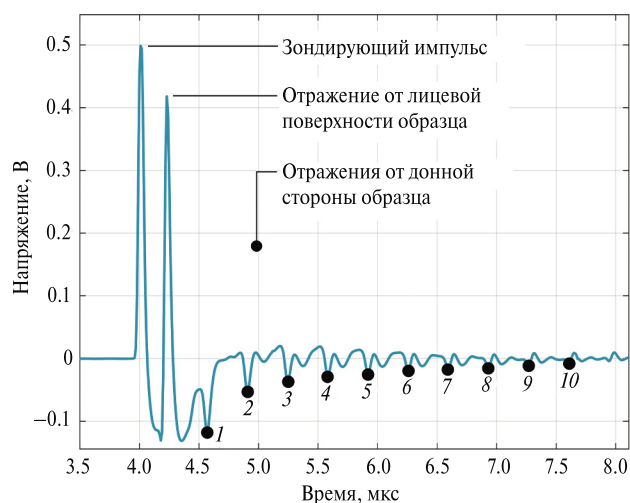


Рис. 2. Необработанный сигнал при образце толщиной 1 мм.

При измерении групповой скорости предстояло учесть некоторые особенности распространения звука в образцах и установке, которые условно можно разделить на технические и физические факторы. Одним из технических факторов является ограниченность спектра сигнала. Существует временное наложение низкочастотных гармоник импульсов соседних отражений, из-за чего их следует отфильтровать из сигнала, и область фильтрации определяется неравенством

$$f \leq \frac{v}{2h}, \quad (1)$$

где v и h — групповая скорость продольных волн в данном образце и его толщина соответственно. Нетрудно оценить, что для самого тонкого образца стали с толщиной 1.00 мм и средним значением групповой скорости продольных волн $6 \cdot 10^3$ м/с из сигнала нужно отфильтровать гармоники с частотами < 3 МГц. Кроме того, в ВЧ-части спектра присутствуют технические шумы, превышающие уровень полезного сигнала. Для осуществления фильтрации, нивелирующей описанные проблемы, использовался гипергауссовский фильтр с полосой 5–24 МГц. Другим техническим фактором является уменьшение амплитуды последовательных отражений. Многократные отражения обладают малой амплитудой и поэтому становятся трудноразличимыми с шумами и посторонними сигналами, что в итоге искажает положение их экстремумов и влияет на точность измерения групповой скорости. Поэтому мы брали для расчетов лишь первые десять отражений. Среди физических факторов можно выделить дифракцию УЗ-пучка, распространяющегося внутри образца и звукопровода, что будет обсуждаться ниже.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы измерили групповые скорости по разнице времен для каждой возможной комбинации отражений (1–2, 1–3...1–10, 2–3, 2–4... и т.д.), а затем распределили полученные результаты по группам, значение скорости в которых отличаются друг от друга не более чем на 1 м/с. На рис. 4 показаны гистограммы частоты выпадения значения групповой скорости, соответствующего указанному диапазону скоростей, без применения деконволюции. Разброс групповых скоростей для образцов с толщинами 1.000, 1.500 и 1.900 мм относительно средних значений составляет ± 0.14 , ± 0.4 и $\pm 0.3\%$ соответственно. Хотя такие гистограммы построены по одному сигналу, содержащему 10 отражений, каждое из которых хранит

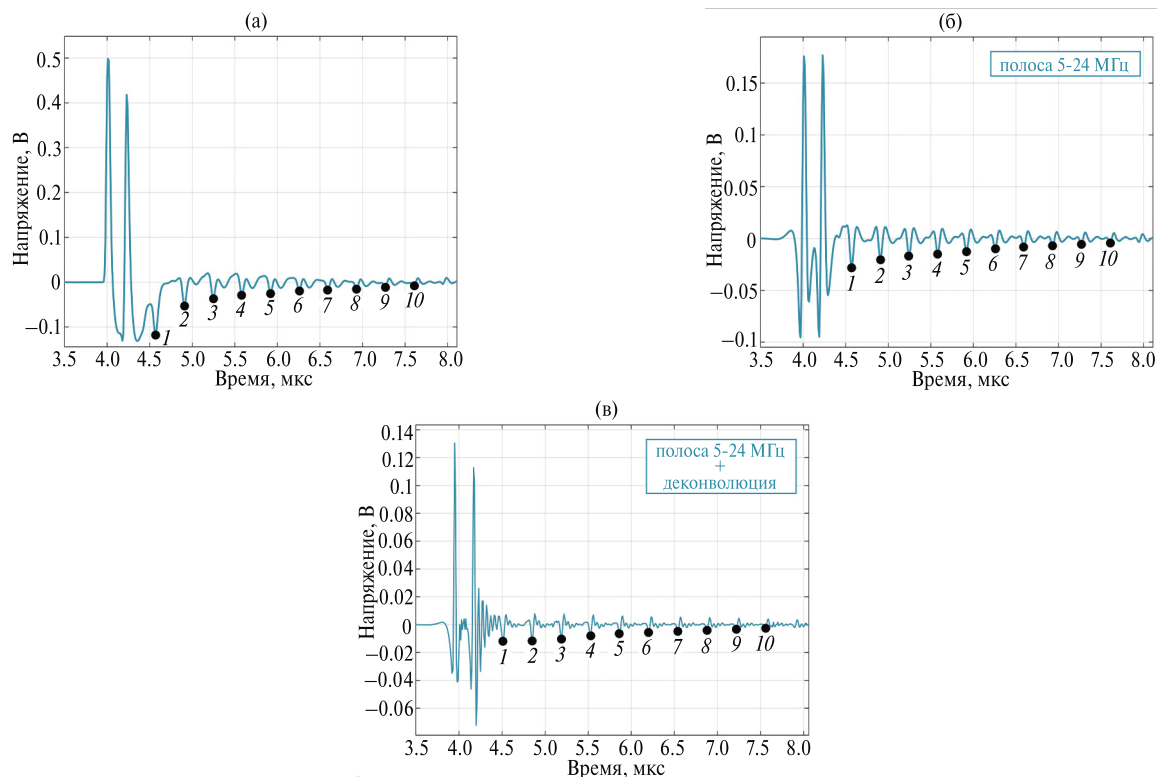


Рис. 3. Этапы обработки сигнала с отраженными УЗ-импульсами для образца толщиной 1 мм: без обработки (а), после цифровой фильтрации (б), после цифровой фильтрации и деконволюции (в).

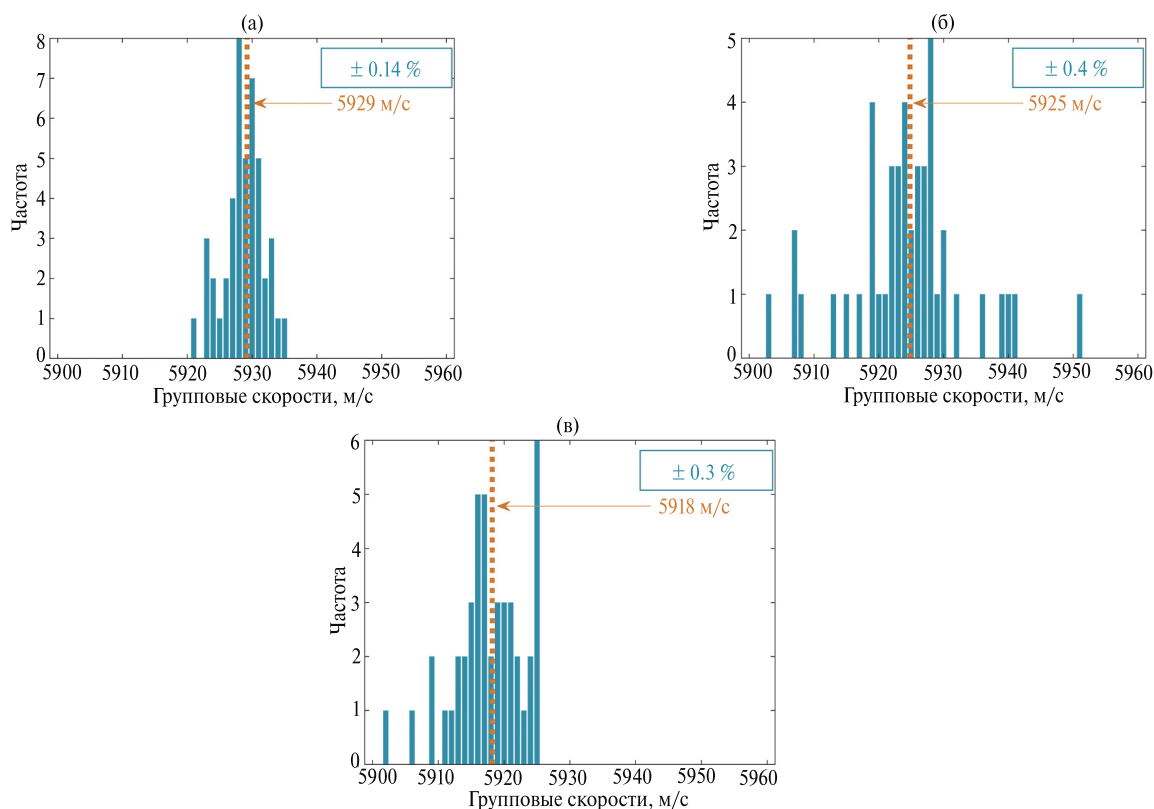


Рис. 4. Гистограммы частоты выпадения значения групповой скорости для образцов 1.000 (а), 1.500 (б) и 1.900 мм (в) без применения деконволюции. Оранжевым цветом указано среднее значение скорости в данном распределении, а число в синей рамке — наибольшее относительное отклонение от среднего.

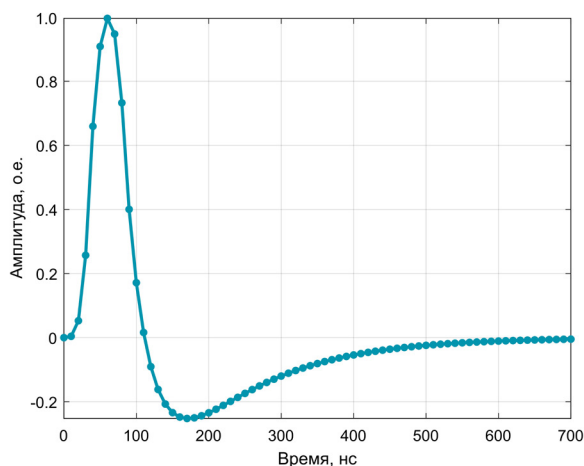


Рис. 5. Импульсная характеристика приемного преобразователя (фрагмент).

в себе информацию о предыдущих, эти распределения скорости не являются в полной мере распределением зависимой величины. Измеренный сигнал кроме отражений вмещает в себя и другие возмущения, как относящиеся к данному образцу (например, сдвиговые УЗ-волны), так и относящиеся к измерительному тракту (электрические шумы). Наложение этих возмущений

на отражения сообщает положению их экстремумов дополнительный случайный характер, что способствует приданию гистограммам вида нормальных распределений. Первые две гистограммы это явно демонстрируют, а у третьей есть детерминированное влияние на распределение измерений в области больших скоростей. Безотносительно природы случайных или закономерных причин, все три распределения по итогу обладают довольно ограниченным разбросом, что является положительным следствием используемой экспериментальной установки и примененной цифровой фильтрации. Кроме того, заметно, как с ростом толщины уменьшается среднее значение групповой скорости звука. И это может быть связано с усилением фактора дифракции, обусловленной ограниченностью УЗ-пучка, при переходе пучка из ближней дифракционной зоны преобразователя в дальнюю, что приводит к большему искажению профиля УЗ-импульса отражения и большему смещению его экстремума. Такое явление было обосновано теоретически в работе [9].

“Компенсация” дифракции в приемном преобразователе производилась с помощью процедуры

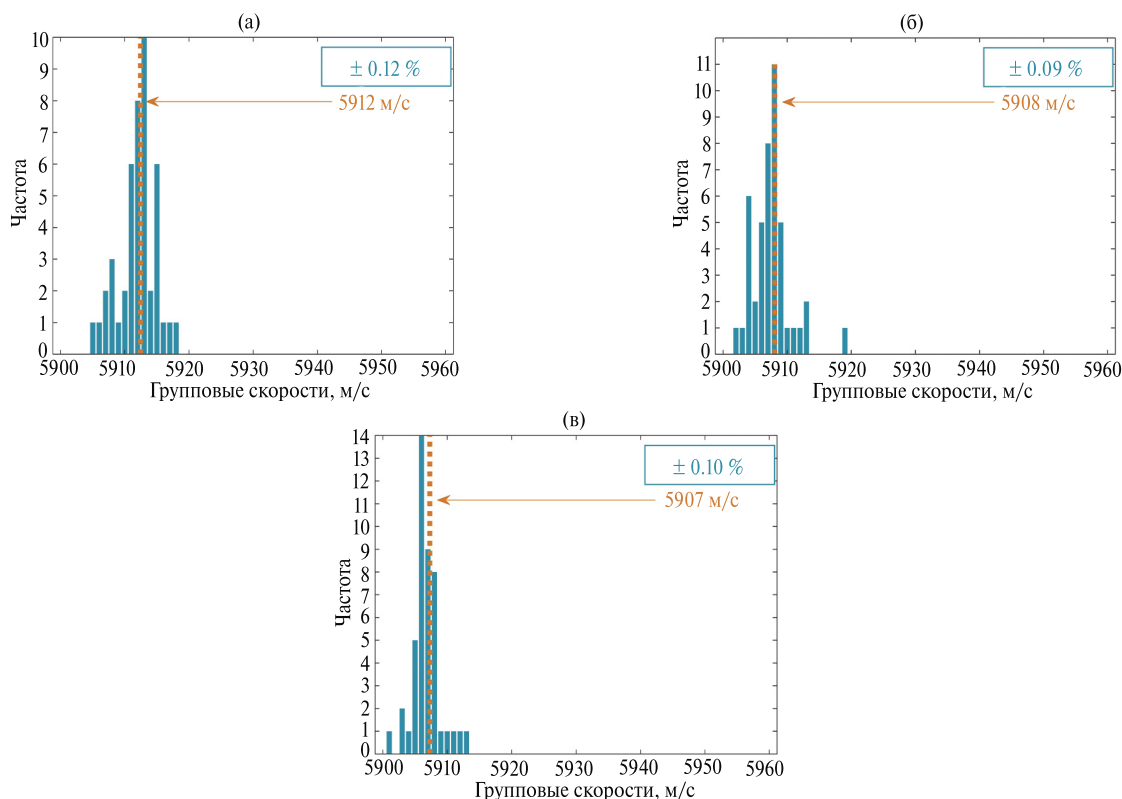


Рис. 6. Гистограммы частоты выпадения значения групповой скорости для образцов с толщинами 1.000 (а), 1.500 (б) и 1.900 мм (в) с применением деконволюции.

деконволюции отфильтрованного сигнала с импульсной характеристикой приемного преобразователя (см. рис. 5). После деконволюции (рис. 6) дисперсия составляет ± 0.12 , ± 0.09 и $\pm 0.10\%$ соответственно, что в разы меньше результатов без деконволюции для образцов толщиной 1.500 и 1.900 мм. Рассчитанные средние скорости после деконволюции заметно уменьшились, где-то на десяток, а где-то и на два десятка м/с. Действительно, дифракция должна повышать значение групповой скорости, а компенсация дифракции — снижает [9]. Заметим, что для совсем тонких образцов не следует ожидать существенных улучшений в любой подобной методике измерения групповой скорости, поскольку погрешность, связанная с производственной неравномерностью толщины образца, может оказаться выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Усовершенствован метод измерения групповой скорости ультразвука в широкой полосе частот 5–24 МГц с помощью лазерного термооптического источника. Использование расчетных методов снижения влияния дифракции и технических факторов позволяет измерять групповую скорость продольных УЗ-волн в тонких плоскопараллельных стальных образцах толщиной меньше 2 мм с дисперсией менее 0.2%. Следует отметить, что полученные результаты дают среднюю скорость ультразвука в широкой полосе частот, а их пересчет при узкополосной фильтрации сигнала позволит получить дисперсию фазовой скорости ультразвука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аleshin Н.П., Могильнер Л.Ю. Рассеяние упругой волны на плоской трещине: применение для дефектоскопии // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2023. Т. 509. № 1. С. 67–75. <https://doi.org/10.31857/S2686740023020013>
2. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела / Пер. с англ.; под ред. И.Г. Михайлова и В.В. Леманова. М.: Мир, 1972. 302 с.
3. Гусев В.Э., Карабутов А.А. Лазерная оптоакустика. М.: Наука, 1991. 304 с.
4. Базылев П.В., Доронин И.С., Кондратьев А.И., Крумгольц И.Я., Луговой В.А., Окишев К.Н. Государственный первичный эталон единиц скоростей распространения и коэффициента затухания ультразвуковых волн в твердых средах ГЭТ 189-2014 // Измерительная техника. 2016. № 5. С. 5–10. <https://www.elibrary.ru/wydcnp>
5. Архипов В.И., Бондаренко А.Н., Кондратьев А.И. Влияние длины волны излучения на форму упругих импульсов при лазерном возбуждении // Акустический журнал. 1984. Т. 30. № 1. С. 5–9.
6. Aussel J.-D., Monchalin J.-P. Precision laser-ultrasonic velocity measurement and elastic constant determination // Ultrasonics. 1989. V. 27. № 3. P. 165–177. [https://doi.org/10.1016/0041-624X\(89\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0041-624X(89)90059-0)
7. Мэзон У. Физическая акустика. Т. 1. Ч. А: Методы и приборы ультразвуковых исследований / Пер. с англ.; под ред. Л.Д. Розенберга. М.: Мир, 1966. 592 с.
8. Макалкин Д.И., Карабутов А.А., Саватеева Е.В., Симонова В.А. Измерение локальных модулей упругости конструкционных материалов с использованием лазерных источников ультразвука // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 502. № 1. С. 63–66. <https://doi.org/10.31857/S2686740022010126>
9. Макалкин Д.И., Карабутов А.А., Саватеева Е.В. Прецизионное измерение групповой скорости ультразвука твердых сред в образцах миллиметровой толщины // Акустический журнал. 2023. Т. 69. № 6. С. 1–10. <https://doi.org/10.31857/S0320791923600622>

HIGH-PRECISION MEASUREMENT OF THE GROUP VELOCITY OF ULTRASOUND IN STRUCTURAL MATERIALS ON A SMALL BASE

D. I. Makalkin^{a,b}, A. A. Karabutov^a, E. V. Savateeva^a

^aProkhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^bMIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS O.V. Rudenko

A method for high-precision measurement of the group velocity of ultrasound in millimeter-thick metal plates using a laser thermo-optical source of ultrasonic pulses is considered. Thickness-calibrated Gauge blocks are used as samples. The influence of the ultrasonic beam diffraction effect and other technical factors are taken into account. It has been experimentally shown that deconvolution of a signal with a pulse characteristic of a receiving converter, together with digital filtering, helps to reduce the dispersion of group velocity measurements — it is less than 0.2% for samples with thicknesses of 1–2 mm.

Keywords: laser ultrasound, group velocity of ultrasound, photoacoustics, the standard of ultrasound speed