

УДК 534.01:539.6

## ПОДЪЕМ ПОДВОДНОГО ТРУБОПРОВОДА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

© 2024 г. Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов<sup>1,2,3,\*</sup>

Поступило 28.03.2024 г.

После доработки 20.06.2024 г.

Принято к публикации 21.06.2024 г.

Рассматривается статический линейный изгиб трубопровода при его подъеме сосредоточенной силой. Учитываются собственные веса трубы и транспортируемой среды, подъемная сила воды. Предполагается большая длина поднятого участка трубопровода по сравнению с глубиной водоема. Дается параметрический анализ влияния весовых и жесткостных характеристик трубопровода на потребное значение подъемной силы.

*Ключевые слова:* трубопровод, подъем, сосредоточенная сила, длина поднятого участка

**DOI:** 10.31857/S2686740024040108, **EDN:** JONDQX

1. Мероприятия по укладке трубопроводов на морское дно, а также по профилактике, ремонту и восстановлению их работоспособности связаны с приложением внешних поперечных сосредоточенных сил для подъема их определенного участка. Под действием весов трубы и транспортируемой среды, выталкивающей силы воды, внутреннего и внешнего давлений, внешней сосредоточенной силы труба подвергается изгибу. Анализ возникающих вопросов в указанных направлениях посвящено большое количество работ.

Вопросы изгиба и устойчивости трубопроводов изучены, например, в работах [1–6]. Обзор исследований статики и динамики трубопроводов дается в [7]. В [8] рассматривается сильный изгиб трубопровода сосредоточенной силой. Изгиб в процессе укладки на морское дно с борта судна рассматривается в работе [9]. При этом учитываются влияние осевых сил, немалость угла поворота осевой линии трубы,

влияние собственного веса и выталкивающей силы воды.

Изгибом некоторой части подводного трубопровода сопровождается его всплытие. Может происходить всплытие даже при превышении веса трубопровода над выталкивающей силой воды, что объясняется одновременным проявлением таких факторов, как температурное расширение трубы, неблагоприятный начальный изгиб, сложный механизм влияния среднего давления воды и транспортируемого газа и т.д. Эти вопросы рассмотрены в статьях [5, 10, 11]. Указана роль нелинейных факторов, которые сильно осложняют анализ. В частности, трудно получить обозримое решение в случае действия не одной, а нескольких подъемных сил, что имеет место практически.

Приведенный в данном сообщении линейный подход позволяет получить обозримые результаты по влиянию на подъем большего числа входных параметров, например, нескольких сосредоточенных подъемных сил. Кроме того, устанавливаются явные зависимости между изгибной жесткостью, внешними силами, эффективным весом трубопровода и его длиной, подвергнутой подъему. Прямая задача состоит в определении изгиба трубопровода, в частности, подъема участка под сосредоточенной силой до поверхности водоема, при заданных весовых

<sup>1</sup>Институт машиноведения им А.А. Благонравова  
Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт механики и машиностроения  
Казанского научного центра  
Российской академии наук, Казань, Россия

<sup>3</sup>Институт механики  
Уфимского федерального исследовательского центра  
Российской академии наук, Уфа, Россия

\*E-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru)

и жесткостных характеристиках, условиях закрепления, заданных значениях сосредоточенных сил и длины поднятого участка. Под обратной задачей подразумевается определение длины поднятого участка и сосредоточенных сил при заданных других входных параметрах.

2. На рис. 1 приводится схема трубопровода с длиной поднятой части  $2L$ , находящегося в водоеме с горизонтальным дном и глубиной  $H$ . Предполагается, что подъем трубы сосредоточенной силой  $P$  не превышает глубины  $H$ , форма ее является пологой кривой, угол поворота осевой линии мал по сравнению с единицей, поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к осевой линии. Будем считать  $L/H > 10$ . Гидродинамические силы на трубу, возникающие в результате ее обтекания водой, а также скорость течения транспортируемой среды не учитываются.

Труба может состоять из одного слоя, двух и трех концентрических слоев. В последнем случае средним слоем является бетонный цилиндр, третьим – внешняя тонкостенная оболочка. В случае двухслойной трубы распределенная поперечная сила на единицу длины  $q$  и изгибная жесткость  $D$  равны:

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_g - q_f, \quad D = E_1 J_1 + E_2 J_2, \\ q_0 &= \pi \rho_1 \left[ (R_g + h_1)^2 - R_g^2 \right] + \pi \rho_2 \left[ R_f^2 - (R_f - h_2)^2 \right], \\ q_g &= \pi \rho_g R_g^2, \quad q_f = \pi \rho_f R_f^2, \\ J_1 &= \frac{\pi}{4} \left[ (R_g + h_1)^4 - R_g^4 \right], \quad J_2 = \frac{\pi}{4} \left[ R_f^4 - (R_f - h_2)^4 \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q_0$ ,  $q_g$ ,  $q_f$  – веса трубы и транспортируемой среды единицы длины, а также подъемная сила воды.  $R_g$ ,  $R_f$  – внутренний радиус внутренней трубы и внешний радиус внешней трубы,  $h_1$ ,  $\rho_1$ ,  $E_1$  и  $h_2$ ,  $\rho_2$ ,  $E_2$  – толщины стенок, удельные веса и модули упругости материалов внутренней и внешней труб,  $\rho_g$ ,  $\rho_f$  – удельные веса сред внутри и вне трубы.

Ввиду симметрии системы (рис. 1) граничные условия относительно прогиба  $w(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= 0, \quad D \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{P}{2} \quad (x=0), \\ w &= 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (x=L). \end{aligned} \quad (2)$$

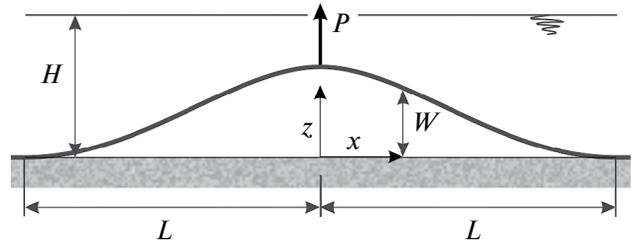


Рис. 1. Схема подъема участка длинного трубопровода, находящегося на дне водоема, сосредоточенной силой.

В линейном уравнении статического изгиба трубопровода [11]

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \pi (p_g R_g^2 - p_f R_f^2) \frac{d^2 w}{dx^2} = -q, \quad (3)$$

$p_g$ ,  $p_f$  – давления сред внутри и вне трубы на уровне осевой линии. Давление  $p_f = p_0 + \rho_f (H - w)$  меняется от значения  $p_0 + \rho_f H$  на дне водоема до атмосферного давления  $p_0$  на поверхности воды. Ввиду принятого отношения  $L/H > 10$  и глубины  $H \leq 10$  м изменение давления по всей длине поднятой части происходит плавно, а максимальное значение  $p_f \approx 0.2$  МПа. При этом внутреннее давление  $p_g$  может быть большим, например в газопроводах  $p_g \approx 12$  МПа. Однако при подъемных работах оно сбрасывается. Если в оценках функцию прогиба  $w(x)$  принять в виде  $\cos(\pi x/L) + 1$ , то отношение второго члена в уравнении (3) к первому имеет порядок  $(p_g R_g^2 - p_f R_f^2) L^2 (\pi D)^{-1}$  и мало по сравнению с единицей. Поэтому в дальнейшем анализе второй член в (3) опускаем. Исключим из рассмотрения случаи направления силы вниз ( $P < 0$ ) и превышение подъемной силы воды над весом трубы и транспортируемой среды ( $q < 0$ ). Значение  $q < 0$  соответствует всплыванию трубопровода без приложения подъемной силы.

Принятые выше допущения относительно глубины водоема и давлений позволяет более наглядно рассмотреть обратную задачу. Удовлетворяя решение уравнения (3) без второго члена в левой части

$$w = -\frac{qx^4}{24D} + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$$

условиям (2), получаем выражение для прогиба

$$w = \frac{PL^3}{24D} \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) - \frac{qL^4}{24D} \left( 1 - \frac{x^2}{L^2} \right)^2. \quad (4)$$

Однако из этого решения при заданных значениях веса  $q$ , жесткости  $D$ , силы  $P$  нельзя определить прогиб, так как неизвестна длина  $2L$  поднятой части трубопровода.

3. Для определения  $L$  можно исходить из выражения полной потенциальной энергии системы [12]

$$\Pi = \frac{D}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} W + q \int_0^L w dx,$$

где  $W = w(0)$  – прогиб трубопровода в месте приложения силы  $P$ . Ввиду симметрии задачи относительно  $x = 0$  и в соответствии со вторым условием (2) здесь учитывается работа силы  $P/2$ . С учетом (4) получаем

$$\Pi = \frac{L^3}{96D} \left( -P^2 + 2PqL - \frac{16}{15} q^2 L^2 \right).$$

Из условия экстремума  $\partial \Pi / \partial L = 0$  находим уравнение и его корень

$$L^2 - \frac{3P}{2q} L + \frac{9P^2}{16q^2} = 0, \quad L = \frac{3P}{4q}. \quad (5)$$

Более простым является условие равновесия трубопровода, когда участок его под силой  $P$  ( $x = 0$ ) поднят до уровня  $W$ , в частности, до поверхности водоема  $H - R_f \approx H$ . Из (4) получаем выражение

$$P = \frac{24DW}{L^3} + qL, \quad (6)$$

откуда следует, что часть силы  $P$  идет на преодоление реакции изгибной жесткости при поднятии до уровня  $W$ , а другая часть – на преодоление половины веса трубопровода длиной  $2L$  (не всего веса  $2qL$ ). Минимальное потребное значение силы  $P$  достигается при длине подъема  $2L$ , определяемой из условия  $\partial P / \partial L = 0$ . Подстановка сюда выражения (6) дает

$$L = \left( \frac{72DW}{q} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

Чем больше изгибная жесткость и высота подъема, меньше вес трубопровода (с учетом влияния жидкости), тем больше длина его поднятой части. Значение силы через исходные параметры и стрелу подъема получаем, исключив в (6) длину  $L$  по (7):

$$P = \frac{4}{3} (72Dq^3 W)^{\frac{1}{4}}. \quad (8)$$

Потребная сила для подъема участка трубопровода, в частности, до поверхности воды ( $W = H$ ), приближенно равна  $P \approx 4(Dq^3 H)^{1/4}$ . Таким образом, чем больше изгибная жесткость, вес трубопровода и высота подъема, тем больше потребная сила. Но имеется слабая зависимость  $P$  от  $DW$ . Например, при увеличении высоты подъема в два раза потребная подъемная сила увеличивается менее чем на 19%. Более сильная зависимость есть от веса. При увеличении его в два раза потребная подъемная сила возрастет на 68%.

Исключив  $DW$  в (7) и (8), получаем значение полудлины подъема через силовые факторы  $L = 3P/4q$ , что совпадает с (5). Длина поднятия трубопровода прямо пропорциональна подъемной силе и обратно пропорциональна весу трубопровода единичной длины.

Из (8) следует также зависимость  $W$  от  $P$ :

$$W = \frac{0.0044 P^4}{Dq^3}, \quad (9)$$

которая свидетельствует о сильной зависимости стрелы подъема от подъемной силы.

Возможен случай, когда заранее неизвестна не только длина  $L$ , но и глубина  $H$ . Для определения последней может быть использован способ догружения системы. Дополнительная малая подъемная сила  $\Delta P$  определяется динамометром, как и сила  $P$ . Соответствующий малый подъем  $\Delta H$  также определяется экспериментально (или деформации верхней линии на внешней поверхности). Подставляя вместо  $P$  и  $H$  в (9) суммы  $P + \Delta P$ ,  $H + \Delta H$ , получаем

$$H = \frac{(P + \Delta P)^4}{230Dq^3} - \Delta H.$$

4. По (4) изгибающий момент равен

$$M = -(P/4)(L - 2x) + (q/6)(L^2 - 3x^2). \quad (10)$$

В случае снижения веса трубы и внутренней среды до значения подъемной силы воды (в (1)  $q_0 + q_g \rightarrow q_f$ ,  $q \rightarrow 0$ ) прогиб и изгибающий момент являются кососимметричными относительно середин полудлин, т.е. точек перегиба  $x = \pm L/2$ . Максимальный момент  $M = \mp PL/4$  возникает в точках  $x = 0, \mp L$ . В этом анализе условия (2) сохраняются. В соответствии с (5) устойчивое равновесное положение может

быть только при сильном увеличении  $L$ . Тогда приходим к задаче всплытия трубопровода [11]. При  $q \neq 0$  в соответствии с (10) и (5) точки перегиба перемещаются в сторону приложения сосредоточенной силы  $P$  и имеют координаты  $x = \pm L/3$  (вместо  $\pm L/2$  в случае  $q = 0$ ). Максимальное значение момента находится в точках  $x = \pm 2L/3$ , а при  $x = L$  оно обращается в нуль. Таким образом, при  $x = L$  нулевыми являются не только прогиб и угол поворота (условия (2)), но и кривизна осевой линии. Перерезывающая сила равна  $Q = dM/dx = P/2 - qx$ . В соответствии с (5)  $Q(x = L) = -qL/3$ . Опорная реакция равна  $qL/3$ . Как видно из второго условия (2),  $Q(x = 0) = P/2 = 2qL/3$ .

Представляет интерес отношение половины длины подъема  $L$  к глубине водоема  $W = H - R_f \approx H$ . Определение его нужно и для обоснования принятого выше допущения  $L/H > 10$ . Рассмотрим однослойную стальную трубу с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа =  $2 \cdot 10^{11}$  кг/(м·с<sup>2</sup>), удельным весом  $\rho = 76\,520$  кг/(м·с<sup>2</sup>), внутренним радиусом  $R_g = 0.6$  м, толщиной стенки  $h = 0.03$  м. Примем значения удельных весов среды внутри трубы  $\rho_g = 8830$  кг/(м·с<sup>2</sup>), морской воды  $\rho_f = 10\,000$  кг/(м·с<sup>2</sup>), глубины водоема  $H = 10$  м. В соответствии с (1) и (7)  $q = 6400$  кг/с<sup>2</sup>,  $D = 44 \cdot 10^8$  кг·м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup> и  $L \approx 150$  м. Таким образом, отношение  $L/H = 15$  и допущение  $L/H > 10$  соблюдается. Соответствующая потребная подъемная сила по (8)  $P = 1.27 \cdot 10^6$  кг·м/с<sup>2</sup> = 1.27 МН. Наиболее неблагоприятная оценка имеет место в случае подъема трубы, находящейся на земной поверхности ( $\rho_f = 0$ ). Тогда  $q = 18\,880$  кг/с<sup>2</sup>,  $L = 114$  м.

5. Подъем трубопровода может осуществляться не одной, а несколькими сосредоточенными силами (рис. 2). Рассмотрим равновесие трубопровода под действием двух сосредоточенных сил  $P$  и  $P_1$  и силы веса  $q$ . Предполагаем, что расстояние  $l_1 > 0$  между  $P$  и  $P_1$  задано (определяется в соответствии с техническими нормами). Ввиду линейности задачи относительно  $w(x)$  общий подъем определяется суммой подъемов под действием сил  $P$  и  $P_1$  при полудлинах поднятой части  $L$  и  $L_1$ . Прогиб  $w_1(x)$  под действием силы  $P_1$  и соответствующая полудлина  $L_1$  даются выражением (4), где вместо  $P, L, w$  нужно подставить  $P_1, L_1, w_1$ . При этом оставим начало координаты ( $x = 0$ ) в точке под силой  $P$ ,

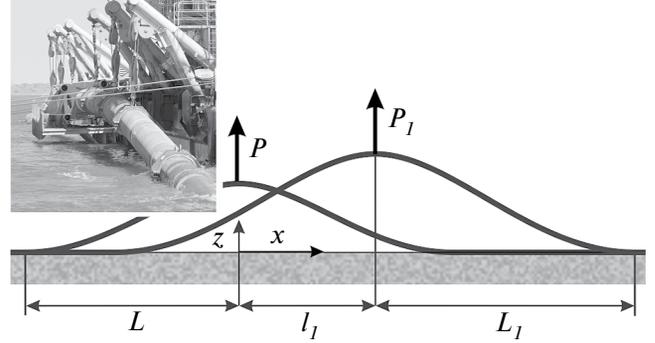


Рис. 2. Схема подъема участка длинного трубопровода двумя сосредоточенными силами.

поэтому  $l_1 > 0$  и в (4) вместо  $x$  нужно подставить  $x - l_1$ . Итак,

$$24D(w + w_1) = P \left[ L^3 - 3Lx^2 - 2x^3 \right]_{\alpha} + P \left[ L^3 - 3Lx^2 + 2x^3 \right]_{\beta} - q \left[ L^2 - x^2 \right]_{\gamma} + P_1 \left[ L_1^3 - 3L_1(x - l_1)^2 - 2(x - l_1)^3 \right]_{\alpha_1} + P_1 \left[ L_1^3 - 3L_1(x - l_1)^2 + 2(x - l_1)^3 \right]_{\beta_1},$$

$$L_1 = 3P_1/4q,$$

где индекс  $\alpha$  при квадратных скобках означает изменение  $x$  в пределах  $-L \leq x \leq 0$ , а индекс  $\beta$  — в пределах  $0 \leq x \leq L$ . Аналогично индексы  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  — в пределах  $-L_1 + l_1 \leq x \leq l_1$  и  $l_1 \leq x \leq L_1 + l_1$ . Индекс  $\gamma$  означает изменение  $x$  в области  $-L \leq x \leq L$ .

Простое решение (11) является сугубо приближенным, так как в нем  $L$  и  $L_1$  определены неточно. Точное решение можно получить, исходя из условий непрерывности функций прогиба, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил с учетом сосредоточенных сил при  $x = 0$  и  $x = l_1$ . Обозначая функции прогиба на трех участках через  $w_0, w_1, w_2$ , запишем указанные условия в виде

$$w_0 = w_1, \quad \frac{dw_0}{dx} = \frac{dw_1}{dx} \quad (x = 0),$$

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{d^2 w_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3 w_0}{dx^3} + \frac{P}{D} = \frac{d^3 w_1}{dx^3} \quad (x = 0),$$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx} \quad (x = l_1),$$

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2}, \quad \frac{d^3 w_1}{dx^3} + \frac{P_1}{D} = \frac{d^3 w_2}{dx^3} \quad (x = l_1).$$

При этом условия (4) на концах всего поднятого участка трубопровода сохраняются.

6. Анализ подъема участка трубопровода сосредоточенной силой на основе линейной теории изгиба позволяет выразить простыми зависимостями удельные веса материала трубы, транспортируемой среды и окружающей жидкости, характеристики упругости и поперечного сечения трубы, необходимую подъемную силу, длину подъема трубопровода. Возможно обобщение на случай произвольного числа сосредоточенных подъемных сил. Такой анализ является необходимым первым шагом в решении задачи с учетом нелинейностей, большой глубины водоема и других факторов, что возможно с помощью численных методов. Показано совпадение значений длины подъема трубопровода, определенных из минимизации полной потенциальной энергии системы и функции сосредоточенной подъемной силы от входных параметров. Длина поднятой части равна отношению подъемной силы к весу трубопровода, умноженному на  $4/3$ . Установлено, что две трети веса поднятого участка трубопровода воспринимается подъемной сосредоточенной силой, одна третья часть веса – на концах участка (на опорах). Приведенные здесь результаты справедливы в случае малого отношения глубины водоема к длине поднятого участка трубопровода.

В приведенной постановке задачи предполагается, что максимальный подъем не превышает уровня поверхности водоема. Если участок длиной  $l$  около места приложения подъемной силы  $P$  становится выше этого уровня, то в соответствующем уравнении (3) распределенную силу  $q$  по (1) нужно принимать без учета выталкивающей силы воды ( $\rho_f = 0$ ). В таком случае при  $x = l$  ставятся условия равенства прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил слева и справа от сечения  $x = l$ .

Как известно, в линейной теории упругости, в сопротивлении материалов, теории изгиба тонкостенных пластин и оболочек перемещения и деформации линейно зависят от поперечных сил. Особенность рассмотренной здесь задачи состоит в том, что под действием поперечной сосредоточенной силы длина поднятого участка балки, стержня, трубы

(находящихся на горизонтальной плоскости и подвергнутых изгибу) прямо пропорциональна этой силе и обратно пропорциональна их весу, а высота (стрела) подъема прямо пропорциональна четвертой степени сосредоточенной силы и обратно пропорциональна кубу веса единичной длины. Увеличение подъемной силы в два раза приводит к увеличению стрелы подъема в 16 раз. Такая сильная зависимость прогиба от сил выглядит необычной. Это объясняется зависимостью длины, подвергнутой подъему, от приложенных сил.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00106, <https://rscf.ru/project/24-21-00106/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Palmer A.C., King R.A.* Subsea Pipeline Engineering. Oklahoma: PWC, 2004. 570 p.
2. *Peek R., Yun H.* Flotation to trigger lateral buckles in pipelines on a flat seabed // *J. Engineering Mechanics*. 2007. V. 4. P. 442–451. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:4\(442\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:4(442))
3. *Chee J., Walker A., White D.* Controlling lateral buckling of subsea pipeline with sinusoidal shape pre-deformation // *Ocean Engineering*. 2018. V. 151. P. 170 – 190. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.01.024>
4. *Wang Z., Tang Y.* Study on symmetric buckling mode triggered by dual distributed buoyancy sections for subsea pipelines // *Ocean Engineering*. 2020. V. 216. P. 105–110. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108019>
5. *Заринов П.М., Масалимов П.Б.* Использование компенсаторов в подводном участке морского газопровода для предотвращения его всплытия // *Известия Томского политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов*. 2023. Т. 334. № 2. С. 196–205. <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/2/3761>
6. *Утяшев И.М., Шакирьянов М.М.* Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами // *Изв. РАН. МГТ*. 2023. № 4. С. 38–52. <https://doi.org/10.31857/S057232992260058X>
7. *Li S.J., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems – A review of the literature // *J. Fluids and Structures*. 2015. V. 57. P. 277–297. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020>
8. *Ильгамов М.А., Якунов Р.Г.* Сильный изгиб трубопровода // *Изв. РАН. МГТ*. 2003. № 6. С. 109–116.
9. *Елисеев В.В., Зиновьева Т.В.* Нелинейно-упругая деформация подводного трубопровода в

- процессе укладки // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. № 1. С. 70–78.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.1.9>
10. Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.  
<https://doi.org/10.31857/S2686740022030087>
11. Ильгамов М.А. Всплытие подводного газового трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 2. С. 147–159.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600487>
12. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. N.Y.: McGraw-Hill. 1959. 591 p.

## UNDERWATER PIPELINE LIFTING BY CONCENTRATED FORCE

Corresponding Member of the RAS **М. А. Илгамов**<sup>1,2,3,\*</sup>

<sup>1</sup>*Blagonravov Institute of Machine Science, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

<sup>3</sup>*Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

We consider a static linear bending of a pipeline when it is lifted by a concentrated force. The weights of the pipe, the transported medium and the lifting force of the water are taken into account. It is assumed that the length of the raised section of the pipeline is greater than the depth of the reservoir. A parametric analysis of the influence of the weight and rigidity characteristics of the pipeline on the required lifting force is given.

**Keywords:** pipeline, lift, concentrated force, length of the raised section