

УДК 62-50

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОСРЕДСТВОМ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ СИЛ, ЗАДАННЫХ КАК ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

© 2024 г. А. М. Шматков^{1,*}

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 29.02.2024 г.

Поступило 01.03.2024 г.

После доработки 01.03.2024 г.

Принято к публикации 09.04.2024 г.

Исследовано пространственное движение механической системы, состоящей из твердого тела и подвижной точечной массы, взаимодействующих друг с другом посредством незаданных внутренних сил. Задача состоит в построении такой траектории для точечной массы, при движении по которой твердое тело под действием силы взаимодействия с этой массой меняет свою ориентацию в пространстве по известной программе. Предполагается наличие действующих на оба объекта внешних сил, заданных как функции времени. Получена разрешенная относительно производных система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, позволяющая решить задачу. Эти соотношения можно использовать для управления космическими аппаратами и робототехническими системами.

Ключевые слова: переориентация твердого тела, подвижная точечная масса, пространственное движение

DOI: 10.31857/S2686740024040098, **EDN:** JOPINN

1. Способ перемещения технического устройства зависит от способа, которым оно взаимодействует с окружающей средой. Как правило, применяют внешние по отношению к корпусу движители: колеса, пропеллеры, ноги и т.п. Это создает проблемы, если окружающая среда агрессивна, поскольку трудно обеспечить герметичность корпуса. Если же среда ранима, что имеет место, например, при движении внутри человеческого организма, то традиционные движители могут ее повредить. Для управления пространственной ориентацией космических аппаратов широко используют реактивные двигатели, однако они расходуют рабочее тело, которое необходимо доставлять с Земли.

Менее распространенный способ перемещения заключается в применении подвижных масс, внутренних по отношению к корпусу [1, 2].

Этот метод используют в микророботах [3–5] и в капсульных роботах, перемещающихся внутри трубопроводов [6]. Одномерные поступательные движения в системах с внутренними подвижными массами широко описаны в научной литературе, например, [7, 8]. Рассмотрены различные виды сопротивлений со стороны внешних сред, в том числе вязкое и сухое трение, а также трение с зависящими от скорости движения линейным, квадратичным и более общими законами сопротивления. Найдена средняя скорость перемещения таких систем, получены оптимальные законы управления, обеспечивающие наибольшую среднюю скорость, и оптимальные значения механических и геометрических параметров. Была проведена экспериментальная проверка указанных результатов [9], подтвердившая их.

По сравнению с одномерным случаем двумерные и трехмерные движения систем с внутренними управляемыми подвижными массами

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия
*E-mail: shmatkov@ipmnet.ru

гораздо сложнее [10]. Плоское движение таких систем при наличии сухого трения описано в [11], где рассмотрен в основном случай отсутствия внешних сил. В случае, когда внутренняя масса мала по сравнению с массой твердого тела, найдено двумерное движение, обеспечивающее максимально быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной оси [12]. Случай произвольного соотношения масс рассмотрен в [13]. Движение по плоскости было также изучено в [14, 15]. Частные случаи трехмерного движения были исследованы в [16]. Трехмерная задача о пространственном развороте твердого тела при помощи подвижной массы в отсутствии внешних сил была рассмотрена в [17], где маневр осуществляется с помощью серии последовательных поворотов. Возможности применения нескольких масс для решения той же задачи исследованы в [18]. В случае замкнутой механической системы для изменения ориентации твердого тела по произвольной заданной программе при помощи одной подвижной массы было найдено точное аналитическое решение и условия, при которых оно существует [19].

Важный частный случай управления пространственной ориентацией твердого тела с помощью подвижной точечной массы возникает при исследовании систем, в которых зависимость внешних сил от времени известна заранее, до начала маневра. В качестве примера рассмотрим движение искусственного спутника Земли на низкой (от 400 до 1000 км) околоземной круговой орбите. В общем случае основными действующими на него моментами внешних сил являются гравитационный, аэродинамический и магнитный [20]. Эти моменты существенно зависят от ориентации спутника в пространстве, но меняются незначительно при изменении радиуса орбиты спутника, скажем, в пределах 100 м. Теперь возьмем дополнительное устройство, действием моментов внешних сил на которое можно пренебречь. Следовательно, его можно рассматривать как материальную точку. Предположим, что это устройство взаимодействует при помощи неких сил с указанным выше космическим аппаратом, не удаляясь от него более чем на десятки метров, и пусть программа изменения пространственной ориентации космического аппарата задана. Тогда при сделанных допущениях можно полагать, что внешние силы, действующие на

систему, состоящую из спутника и дополнительного устройства, известны заранее как функции времени и не зависят от маневров этих двух объектов, вызванных силами взаимодействия между ними.

Основываясь на подходе, изложенном в [21], получим векторное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной неизвестной функции и описывающее движение рассматриваемой механической системы.

2. Следуя [21], рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела и взаимодействующей с ним подвижной материальной точки. Пусть тело имеет массу m_b и тензор инерции $\mathbf{J}$ относительно своего центра масс, заданного в неподвижной системе координат вектором $\mathbf{r}_b$. Масса материальной точки равна m_p , а ее положение определено вектором $\mathbf{r}_p$ в той же системе координат. Предположим, что на систему действуют внешние силы, описанные как известные функции времени. Необходимо найти такое движение материальной точки, чтобы ориентация твердого тела в пространстве изменялась по заранее заданной программе.

Поскольку центр масс тела в общем случае не остается в покое, то переориентацию будем рассматривать в кёниговых осях [22], т.е. в поступательно перемещающейся системе координат с началом в центре масс тела.

Заданную последовательность положений твердого тела в пространстве относительно кёниговой системы координат будем описывать с помощью ортогональной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$. Тогда [22] компонентами вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в связанной с телом системе координат являются элементы кососимметрической матрицы $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}$, причем точка над символом обозначает производную по времени. Это позволяет найти вектор относительного кинетического момента тела вокруг его центра масс в связанной с телом системе координат, равный произведению $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, и построить его проекции в кёниговой системе координат, получив вектор $\mathbf{K}_b = \mathbf{A}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$.

3. По известным внешним силам можно получить главный вектор этих сил $\mathbf{F}$, определяющий изменение вектора $\mathbf{r}_c$ центра масс всей системы [22] согласно уравнению

$$(m_b + m_p)\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{F}, \quad \mathbf{r}_c = \frac{m_b \mathbf{r}_b + m_p \mathbf{r}_p}{m_b + m_p}. \quad (1)$$

Заметим, что вектор $\mathbf{r}_c$ не зависит от выбора движения материальной точки, а потому может быть найден заранее по начальным условиям для тела и подвижной точки в момент времени t_0 , которые будем полагать известными:

$$\mathbf{r}_b(t_0) = \mathbf{r}_{b0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_b(t_0) = \mathbf{v}_{b0}, \quad \mathbf{r}_p(t_0) = \mathbf{r}_{p0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_p(t_0) = \mathbf{v}_{p0}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{b0}$, $\mathbf{v}_{b0}$, $\mathbf{r}_{p0}$ и $\mathbf{v}_{p0}$ — заданные постоянные векторы. Кроме того, можно вычислить действующий на тело относительный момент внешних сил $\mathbf{M}_b$ относительно центра масс тела, так как соответствующее движение тела тоже задано.

Для подвижной материальной точки вектор $\mathbf{K}_p$ относительного кинетического момента вокруг центра масс тела и вектор $\mathbf{M}_p$ относительного момента внешних сил в неподвижной системе координат определяются уравнениями

$$\mathbf{K}_p = m_p (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times \frac{d(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b)}{dt}, \quad \mathbf{M}_p = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_p. \quad (3)$$

Тогда с учетом соотношений (3) для всей системы в целом справедлива теорема об изменении относительного момента количеств движения [23]

$$\frac{d\mathbf{K}_b}{dt} + \frac{d\mathbf{K}_p}{dt} = \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_p - (m_b + m_p)(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b) \times \frac{d^2 \mathbf{r}_b}{dt^2}. \quad (4)$$

Воспользуемся первым соотношением из формул (3) и непосредственным дифференцированием получим

$$\dot{\mathbf{K}}_p = m_p (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times \frac{d^2 (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b)}{dt^2}. \quad (5)$$

Из второго соотношения в формулах (1) следует, что

$$\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_b = \frac{m_p}{m_b + m_p} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b). \quad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в уравнение (4). Получим

$$(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b) \times (m_p \ddot{\mathbf{r}}_p - \mathbf{F}_p) = \mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b. \quad (7)$$

Выразим из второго соотношения в формулах (1) вектор

$$\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_b = \frac{m_b + m_p}{m_b} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c). \quad (8)$$

С помощью равенства (8) преобразуем уравнение (7) к виду

$$\frac{m_p (m_b + m_p)}{m_b} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c) \times (\ddot{\mathbf{r}}_p - \ddot{\mathbf{a}}_p) = \mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b, \quad \ddot{\mathbf{a}}_p = \frac{\mathbf{F}_p}{m_p}. \quad (9)$$

Заметим, что согласно принципу относительности Галилея к вектору $\mathbf{a}_p$ можно добавить вектор $(t - t_0)\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0$, где $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_0$ — произвольные постоянные векторы. Теперь введем величины

$$\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_p - \mathbf{a}_p, \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_c - \mathbf{a}_p. \quad (10)$$

Векторы (10) позволяют записать уравнение (9) в виде

$$\frac{m_p (m_b + m_p)}{m_b} (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_d = \mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b. \quad (11)$$

Для сокращения формул введем [21] вектор

$$\mathbf{f} = \frac{m_b}{m_p (m_b + m_p)} (\mathbf{M}_b - \dot{\mathbf{K}}_b). \quad (12)$$

Заметим, что в общем случае этот вектор может зависеть не только от времени, но и от координат твердого тела и подвижной материальной точки, если от них зависят действующие на рассматриваемые объекты внешние силы. Однако далее этот случай рассмотрен не будет.

С помощью обозначения (12) можно представить уравнение (11) в форме [21]

$$(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_d = \mathbf{f}, \quad (13)$$

где вектор $\mathbf{r}_s$ известен, а вектор $\mathbf{r}_d$ необходимо найти с использованием начальных условий (2).

Введем вектор

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times (\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s) \quad (14)$$

и запишем уравнение (13) в виде

$$(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times (\ddot{\mathbf{r}}_d - \ddot{\mathbf{r}}_s) + (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}. \quad (15)$$

Тогда с помощью вектора (14) можно представить соотношение (15) в форме

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}. \quad (16)$$

Будем обозначать скалярное произведение произвольных векторов $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\chi}$ как $(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\chi})$.

Поскольку из равенства (13) следует, что $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \mathbf{f}) = 0$, а из равенства (14) вытекает, что $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \boldsymbol{\eta}) = 0$, то можно искать вектор $\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s$ в форме

$$\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s = k \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \quad (17)$$

где k — неизвестная скалярная функция. Подставим выражение (17) в формулу (14) и раскроем двойное векторное произведение. Получаем

$$-k(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) \boldsymbol{\eta} + k(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{f} = \boldsymbol{\eta}. \quad (18)$$

Продифференцируем по времени тождество $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \mathbf{f}) = 0$, вытекающее из равенства (13). Имеем

$$(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) + (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}}) = 0. \quad (19)$$

Так как из соотношения (14) следует равенство $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \boldsymbol{\eta}) = 0$, то из уравнения (18) получаем

$$(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = -\frac{1}{k}. \quad (20)$$

Подставим выражение (20) в формулу (19), учтя соотношения (17). Тогда $-1/k + k(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = 0$, откуда

$$k^2 = \frac{1}{(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})}. \quad (21)$$

Заметим, что если подставить выражение (14) для вектора $\boldsymbol{\eta}$ в равенство (21) и раскрыть двойное векторное произведение с учетом формулы $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \mathbf{f}) = 0$, то получим $(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = -(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}})$, откуда с помощью тождества (19) имеем $(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) = (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}})^2$, т.е. $(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}) \geq 0$. Из формулы (20) следует, что знак величины k противоположен знаку скалярного произведения $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})$ и что значение k может быть найдено всегда, когда это скалярное произведение не равно нулю. На основании соотношений (2), (14), (17) и (21) запишем уравнение (16) и начальные условия для его решения на том интервале времени, на котором $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) \neq 0$, в форме

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{\text{sign}((\mathbf{v}_{p0} - \mathbf{v}_{c0}, \mathbf{f}(t_0)))}{\sqrt{(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})}} (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{f}) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_0) = (\mathbf{r}_{p0} - \mathbf{r}_{c0}) \times (\mathbf{v}_{p0} - \mathbf{v}_{c0}),$$

где согласно формуле для вектора $\mathbf{r}_c$ из соотношений (1) имеем

$$\mathbf{r}_{c0} = \frac{m_b \mathbf{r}_{b0} + m_p \mathbf{r}_{p0}}{m_b + m_p}, \quad \mathbf{v}_{c0} = \frac{m_b \mathbf{v}_{b0} + m_p \mathbf{v}_{p0}}{m_b + m_p}.$$

4. В точках, где $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = 0$, уравнение (22) применять нельзя. Поскольку из равенства (14) следует, что $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \boldsymbol{\eta}) = 0$, то из формулы (18) вытекает, что в исследуемых точках $\boldsymbol{\eta} = 0$. В работе [21] показано, что

$$\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s = k_2 \mathbf{f}_\perp + k_3 \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{f}_\perp = \dot{\mathbf{f}} - \frac{(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})}{f^2} \mathbf{f}, \quad (23)$$

$$f^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}), \quad (\mathbf{f}_\perp, \mathbf{f}) = 0,$$

где k_2 и k_3 — неизвестные функции времени. Из соотношения (19) при условии $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = 0$ получаем, что $(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s, \dot{\mathbf{f}}) = 0$. Тогда из формул (23) при неколлинеарности векторов $\mathbf{f}$ и $\dot{\mathbf{f}}$ следует, что $k_2 = 0$. В общем случае условие $\boldsymbol{\eta} = 0$ имеет вид

$$(k_2 \mathbf{f}_\perp + k_3 \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}) \times (\dot{k}_2 \mathbf{f}_\perp + k_2 \dot{\mathbf{f}}_\perp + \dot{k}_3 \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}} + k_3 \mathbf{f} \times \ddot{\mathbf{f}}) = 0. \quad (24)$$

Упростим выражение (24), взяв нулевое значение k_2 и полагая величину k_3 ненулевой. Получим

$$-\dot{k}_2 f_\perp^2 \mathbf{f} + k_3 (\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}}) \mathbf{f} = 0. \quad (25)$$

Полагая векторы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}_\perp$ ненулевыми, имеем

$$\dot{k}_2 = k_3 \frac{(\mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \ddot{\mathbf{f}})}{f_\perp^2}. \quad (26)$$

Для общего случая в работе [21] выведено соотношение

$$k_3 = -\eta_{11} - 2\dot{k}_2 \eta_{12} - k_2 \eta_{13},$$

$$\eta_{11} = \frac{(\ddot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f})}{(\dot{\mathbf{f}} \times \ddot{\mathbf{f}}, \mathbf{f})}, \quad \eta_{12} = \frac{(\dot{\mathbf{f}}_\perp, \mathbf{f})}{(\dot{\mathbf{f}} \times \ddot{\mathbf{f}}, \mathbf{f})}, \quad (27)$$

$$\eta_{13} = \frac{(\ddot{\mathbf{f}}_\perp, \mathbf{f})}{(\dot{\mathbf{f}} \times \ddot{\mathbf{f}}, \mathbf{f})}.$$

Взяв $k_2 = 0$ в формулах (27) и подставив в них выражение (26) для величины k_2 , получим линейное уравнение относительно функции k_3 . Найдя последнюю и применив определение (23), имеем для тех моментов времени t^* , когда $(\dot{\mathbf{r}}_d - \dot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) = 0$, формулу

$$\mathbf{r}_p(t^*) = \mathbf{r}_c - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}_s, \mathbf{f}) f_{\perp}^2}{(f_{\perp}^2 + 2(\dot{\mathbf{f}}_{\perp}, \mathbf{f}))(\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} \times \dot{\mathbf{f}})} \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{f}}, \quad (28)$$

где правая часть должна быть вычислена при $t = t^*$. Тогда в момент t^* вместо соотношения (22) следует использовать уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} - (\mathbf{r}_p(t^*) - \mathbf{r}_c) \times \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\eta}(t^*) = 0. \quad (29)$$

Заметим, что формулы (28) и (29), в свою очередь, можно применять не всегда. Кроме того, из равенства нулю вектора $\boldsymbol{\eta}$ не следует существование производной по времени от вектора $\mathbf{r}_p$ в тот же момент. Соответствующие особые случаи требуют отдельного анализа с применением результатов, полученных в статье [21].

5. Рассмотрим пример использования полученных выше формул. Далее все размерные величины представлены в системе единиц СИ, а потому не будем указывать размерность.

Предположим, что масса подвижной материальной точки $m_p = 0.1$, и пусть твердое тело общей массой $m_b = 9/2$ представляет собой восемь одинаковых материальных точек, связанных между собой абсолютно жесткими невесомыми стержнями и расположенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, имеющего размеры $2b_x = 0.25$, $2b_y = 0.12$ и $2b_z = 0.065$. Тогда главные центральные моменты инерции можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} J_x &= m_b(b_y^2 + b_z^2), \quad J_y = m_b(b_z^2 + b_x^2), \\ J_z &= m_b(b_x^2 + b_y^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно соотношениям (30) можно получить вектор $\mathbf{K}_b$.

Пусть в момент времени t_0 твердое тело покоится. Выберем неподвижную систему координат так, чтобы в этот момент ее начало находилось на пересечении осей симметрии указанного прямоугольного параллелепипеда, а оси координат были параллельны осям симметрии. Пусть внешние силы, действующие на все материальные точки системы, направлены вдоль положительного направления оси абсцисс, не зависят от времени и имеют проекции $F_{px} = 2$ для подвижной точки и $F_{bix} = 8/i$, $i = 1, \dots, 8$, для точек, входящих в состав тела. Из формул (1) и (2) можно найти параметры движения центра масс всей системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= \mathbf{r}_c(t_0) + \mathbf{v}_c(t_0)(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2(m_b + m_p)} \mathbf{F}, \\ \mathbf{r}_c(t_0) &= \frac{m_b \mathbf{r}_{b0} + m_p \mathbf{r}_{p0}}{m_b + m_p}, \\ \mathbf{v}_c(t_0) &= \frac{m_b \mathbf{v}_{b0} + m_p \mathbf{v}_{p0}}{m_b + m_p}. \end{aligned} \quad (31)$$

Пусть в начальный момент времени положение и скорость подвижной материальной точки заданы следующими векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{p0} &= (-1.742, -0.3529, -0.8313), \\ \mathbf{v}_{p0} &= (-0.3427; -0.4481; 0.6470). \end{aligned} \quad (32)$$

Вычисления с учетом формул (31) и начальных условий (32) были проведены для случая, когда нужно обеспечить вращение вокруг постоянного единичного вектора $\boldsymbol{\rho} = (0.6000; 0.1000; 0.7937)$ с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ в течение $1/4$ с. На рис. 1 показана траектория подвижной материальной точки в системе отсчета, жестко связанной с твердым телом. Положения материальной точки показаны с шагом 0.002 по времени. Она движется справа налево.

Таким образом, полученные выше соотношения можно применять для вычисления параметров такого движения материальной точки, которое обеспечивает заданное изменение ориентации твердого тела в пространстве при наличии внешних сил, определенных как известные функции времени.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 23-11-00128).

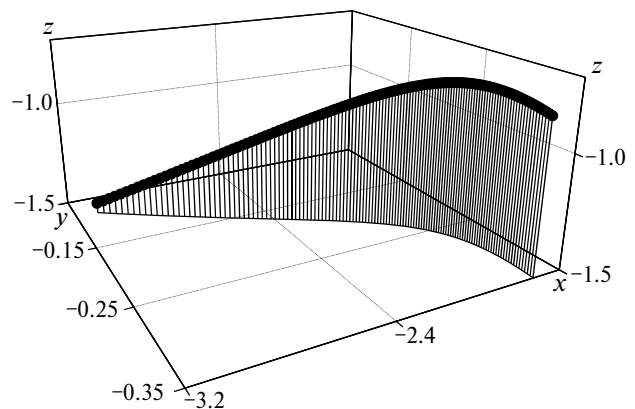


Рис. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // *Non-linear Dyn.*, 2019. V. 98. N 4. P. 2651–2669.
2. Liu Y., Chernousko F.L., Terry B.S., Chávez J.P. Special issue on self-propelled robots: from theory to applications // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 317–319.
3. Schmoedel F., Worn H. Remotely controllable mobile microrobots acting as nano positioners and intelligent tweezers in scanning electron microscopes (SEMs) / *Proc. Intern. Conference Robotics and Automation*. 2001. IEEE, N.Y. P. 3903–3913.
4. Lampert P., Vakebtutu A., Lagrange B., De Lit P., Delchambre A. Design and performances of a one-degree-of-freedom guided nano-actuator // *Robot. Comput. Integr. Manuf.* 2003. V. 19. N 1/2. P. 89–98.
5. Vartholomeos P., Papadopoulos E. Dynamics, design and simulation of a novel micro-robotic platform employing vibration microactuators // *J. Dyn. Syst. Meas. Control*. 2006. V. 128. N 1. P. 122–133.
6. Gradetsky V., Solovtsov V., Kniazkov M., Rizzotto G.G., Amato P. Modular design of electromagnetic mechatronic microrobots / *Proc. of 6th Intern. Conference Climbing and Walking Robots (CLAWAR)*. 2003. Catania, Italy. P. 651–658.
7. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // *ДАН*. 2005. Т. 405. № 1. С. 56–60.
8. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernousko F.L. Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2012. V. 76. N 1. P. 1–14.
9. Li H., Furuta K., Chernousko F.L. Motion generation of the Capsbot using internal force and static friction / *Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control*. 2006. San Diego, USA. P. 6575–6580.
10. Zimmerman K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // *Multibody Syst. Dyn.* 2009. V. 22. N 2. P. 199–219.
11. Chernousko F.L. Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // *Meccanica*. 2016. V. 51, N 12. P. 3203–3209.
12. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы // *ДАН*. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
13. Шматков А.М. Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // *ДАН*. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.
14. Bolotnik N., Figurina T. Controllability of a two-body crawling system on an inclined plane // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 321–336.
15. Figurina T., Knyazkov D. Periodic regimes of motion of capsule system on rough plane // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 493–507.
16. Chernousko F.L. Controlling the orientation of a solid using the internal mass // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60. N 2. P. 278–283.
17. Naumov N.Yu., Chernousko F.L. Reorientation of a rigid body controlled by a movable internal mass // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2019. V. 58. N 2. P. 252–259.
18. Chernousko F. Reorientation of a rigid body by means of auxiliary masses // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 387–395.
19. Shmatkov A.M. Objects changing the spatial orientation of a solid body by using mobile mass // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2020. V. 59. N 4. P. 622–629.
20. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 187 с.
21. Shmatkov A.M. Changing the spatial orientation of a rigid body using one moving mass in the presence of external forces // *Meccanica*. 2023. V. 58. P. 441–450.
22. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
23. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.

SPATIAL REORIENTATION OF A SOLID BODY USING A MOVING MASS IN THE PRESENCE OF EXTERNAL FORCES SPECIFIED AS THE FUNCTIONS OF TIME

A. M. Shmatkov^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko

The spatial motion of a mechanical system consisting of a rigid body and a moving point mass, interacting with each other by means of unspecified internal forces, has been studied. The task is to construct such a trajectory for a point mass, when moving along which a rigid body, under the influence of the force of interaction with this mass, changes its orientation in space according to a known program. It is assumed that there are external forces acting on both objects, specified as functions of time. A system of three first-order ordinary differential equations, resolved with respect to derivatives, is obtained, which allows solving the problem. These relationships can be used to control spacecraft and robotic systems.

Keywords: reorientation of a rigid body, moving point mass, spatial motion