

УДК 532.135, 523.4, 550.3

## РАЗРАБОТКА НОВОГО, БОЛЕЕ ТОЧНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИЛИВНЫХ ЧИСЕЛ ЛЯВА

© 2024 г. Д. О. Аморим<sup>1,\*</sup>, Т. В. Гудкова<sup>2,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Л.М. Зеленым 26.09.2023 г.

Поступило 27.09.2023 г.

После доработки 27.09.2023 г.

Принято к публикации 13.11.2023 г.

Приливные числа Лява часто используются для изучения внутреннего строения планет и спутников Солнечной системы. Измерение деформации планеты в ответ на приливное воздействие является одним из методов изучения недр. Алгоритм вычисления приливной деформации зависит от ряда предположений и аппроксимаций и поэтому может отличаться у разных авторов. Авторы сравнивают уже существующие подходы и на их основе предлагают новый и более точный алгоритм для вычисления приливных чисел Лява Земли и других тел с похожей внутренней структурой.

**Ключевые слова:** алгоритм, приливные числа Лява, полусуточный лунный прилив, Земля, планеты

**DOI:** 10.31857/S2686740024010117, **EDN:** OJHRUS

Земля находится под постоянным приливым воздействием со стороны Солнца и Луны. Приливные силы вызывают деформацию фигуры и возмущение гравитационного поля планеты, величины которых могут быть измерены с помощью спутников. В [1] предложены безразмерные геофизические параметры, называемые числами Лява, которые описывают эти изменения: число  $k$  пропорционально возмущению гравитационного поля, а числа  $h$  и  $l$  пропорциональны соответственно радиальному и тангенциальному смещениям поверхности планеты. Эти числа являются интегральными величинами, зависящими от распределения плотности, модуля сдвига и модуля сжатия в недрах планеты.

Приливные числа Лява особенно важны при исследовании тел, для которых еще не проведены

сейсмические эксперименты. Вычисляя числа Лява для различных моделей некоторой планеты и сравнивая модельные значения с измеренными, можно получить ценную информацию об ее недрах. С их помощью изучают, например, внутреннее строение Венеры [2, 3], Меркурия [4] и Марса [5].

Для корректного применения чисел Лява в исследовании недр разных тел необходимо уметь их вычислить с высокой точностью для всех рассмотренных моделей. В литературе встречаются различные подходы вычислений, каждый со своими недостатками. В данной работе обсуждаются существующие алгоритмы, на их основе мы разработали и подробно описали новый, более точный и корректный алгоритм, позволяющий вычислить числа Лява для сферически симметричных моделей различных космических тел.

### СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В [6] выведена система уравнений для расчета приливной деформации по радиусу  $r$ , исходя из уравнений движения упругой среды, уравнения Пуассона для гравитационного потенциала и

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Московская обл., Россия

<sup>2</sup>Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта  
Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: amorim.dargilan@gmail.com

\*\*E-mail: gudkova@ifz.ru

условия гидростатического равновесия. Рассмотрим сначала случай твердых слоев (например, кора, мантия и внутреннее ядро).

Вводятся 6 переменных  $y_{in}(r)$ , где  $i = 1, 2, \dots, 6$ , а  $n$  обозначает порядок (в [6] все рассмотренные величины разлагаются по сферическим функциям): радиальное и тангенциальное смещения  $y_{1n}, y_{3n}$ ; нормальное и сдвиговое напряжения  $y_{2n}, y_{4n}$ ; гравитационный потенциал  $y_{5n}$  и модифицированная функция гравитации  $y_{6n}$ . Чаще всего используются числа Лява второго порядка и, для простоты, индекс  $n$  далее опускается. Переменные  $y_2, y_4$  и  $y_6$  связаны с остальными следующим образом:

$$\begin{aligned} X(r) &= \frac{dy_1}{dr} + 2\frac{y_1}{r} - n(n+1)\frac{y_3}{r}, \\ y_2(r) &= \lambda X + 2\mu \frac{dy_1}{dr}, \\ y_4(r) &= \mu \left( \frac{dy_3}{dr} - \frac{y_3}{r} + \frac{y_1}{r} \right), \\ y_6(r) &= \frac{dy_5}{dr} - 4\pi G \rho_0 y_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $X$  — дилатация,  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе.

В коре, мантии и во внутреннем ядре Земли будем интегрировать приливную деформацию с помощью дифференциальных уравнений (2), выведенных в [6] без каких-либо изменений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_1}{r} + \frac{y_2}{\lambda + 2\mu} + \\ &+ n(n+1) \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_3}{r}, \\ \frac{dy_2}{dr} &= \left[ -\rho_0 r^2 \chi^2 - 4\rho_0 g_0 r + 4\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{y_1}{r^2} - \\ &- \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{y_2}{r} + n(n+1) \left[ \rho_0 g_0 r - 2\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{y_3}{r^2} + \\ &+ n(n+1) \frac{y_4}{r} - \rho_0 y_6, \\ \frac{dy_3}{dr} &= -\frac{y_1}{r} + \frac{y_3}{r} + \frac{y_4}{\mu}, \\ \frac{dy_4}{dr} &= \left[ \rho_0 g_0 r - 2\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{y_1}{r^2} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_2}{r} + \\ &+ \left[ -\rho_0 r^2 \chi^2 + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left[ \lambda(2n^2 + 2n - 1) + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2\mu(n^2 + n - 1) \right] \right] \frac{y_3}{r^2} - 3\frac{y_4}{r} - \frac{\rho_0 y_5}{r}, \\ \frac{dy_5}{dr} &= 4\pi G \rho_0 y_1 + y_6, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dy_6}{dr} = -4\pi G \rho_0 n(n+1) \frac{y_3}{r} + n(n+1) \frac{y_5}{r^2} - \frac{2y_6}{r},$$

где  $\chi$  — частота прилива (равна обратному периоду, умноженному на  $2\pi$ ), а  $\rho_0$  и  $g_0$  — невозмущенные значения плотности и гравитационного ускорения на расстоянии  $r$  от центра планеты.

Система (2) изначально была создана для моделирования собственных колебаний Земли, но ее также можно применить к расчету чисел Лява. Периоды приливов как минимум на порядок больше, чем периоды собственных колебаний, и поэтому при расчете чисел Лява часто пренебрегают слагаемыми, пропорциональными  $\chi^2$  (например, в [7]). При частоте полусуточного лунного прилива  $M_2$  (12 ч 25 мин) мы оценили, что эти слагаемые в сотни раз меньше остальных. Действительно, наши расчеты показывают, что без этих слагаемых числа Лява уменьшаются примерно на 0.3%. Мы считаем, что нецелесообразно ими пренебрегать в уравнениях (2) по двум причинам: это создает значительную дополнительную погрешность в числах Лява, но при этом никак не уменьшает время расчета.

Во внешнем ядре (или в любой среде с  $\mu = 0$ ) система (2) неопределенная. В [6] была предложена другая система для интегрирования возмущения Земли через внешнее ядро. В ней тангенциальное смещение пропорционально  $\chi^{-2}$  и при достаточно больших периодах  $y_3$  может принимать нефизически большие значения. Эти уравнения подходят для расчета собственных колебаний, но не для вычисления чисел Лява (особенно для длинных приливов).

В [6–8] предложены разные подходы интегрирования приливного возмущения Земли через внешнее ядро. В этих работах пренебрегают слагаемыми с  $\chi^2$  в жидких слоях, и принимаемые условия в ядре различны. В [8] при выводе уравнений считают, что выполняется условие Адамса–Вильямсона:  $\lambda \dot{\rho}_0 = -g_0 \rho_0^2$ , где точка обозначает производную по  $r$ . Однако в моделях Земли (например, PREM) это условие не удовлетворяется на протяжении всего внешнего ядра. На рис. 1 изображены значения величин  $\lambda \dot{\rho}_0$  и  $-g_0 \rho_0^2$  согласно PREM и видно, что они заметно отличаются у вершины внутреннего ядра и у подошвы мантии. Действительно, современные исследования указывают на присутствие

химической стратификации [10] в жидком ядре, что противоречит условию Адамса–Вильямсона.

Другой подход применяется в [7]: вместо условия Адамса–Вильямсона считается, что дилатация нулевая во внешнем ядре. Это дает дополнительное условие ( $y_2 = 0$ ), которое должно удовлетворяться на границе внутреннего ядра и на нижней границе мантии. Из-за этого задача становится переопределенной и в [7] вводится разрыв радиального смещения на этих границах для замыкания системы. Алгоритм решения задачи при таком подходе изложен в [11], и он действительно дает хорошие результаты (достаточно близкие к результатам, полученным при использовании разработанного нами алгоритма). Тем не менее физического обоснования для разрыва радиального смещения нет, и мы предпочитаем отказаться от такого подхода.

Для упрощения записи граничных условий переменные  $y_i$  в жидком ядре далее будут обозначаться как  $z_i$ . В работе [9] предложен подход, в котором не используется условие Адамса–Вильямсона и не пренебрегается дилатацией во внешнем ядре, а вводится новая переменная  $z_7$ :

$$z_7 = \frac{dz_5}{dr} + \left( \frac{n+1}{r} - \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} \right) z_5. \quad (3)$$

Обратим внимание на то, что в [9] используется другое определение “шестой переменной” по сравнению с [6]. Для простоты мы предпочитаем определить  $z_6$  так же, как в [6] и в уравнениях (1) и (2) для твердой среды:

$$z_6 = \frac{dz_5}{dr} - 4\pi G \rho_0 z_1. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) получим более удобное определение для переменной  $z_7$ :

$$z_7 = z_6 + 4\pi G \rho_0 z_1 + \left( \frac{n+1}{r} - \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} \right) z_5. \quad (5)$$

Следуя [9], будем использовать следующие дифференциальные уравнения для интегрирования приливной деформации через жидкое внешнее ядро:

$$\begin{aligned} \frac{dz_5}{dr} &= \left( \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} - \frac{n+1}{r} \right) z_5 + z_7, \\ \frac{dz_7}{dr} &= \frac{2(n-1)}{r} \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} z_5 + \left( \frac{n-1}{r} - \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} \right) z_7. \end{aligned} \quad (6)$$

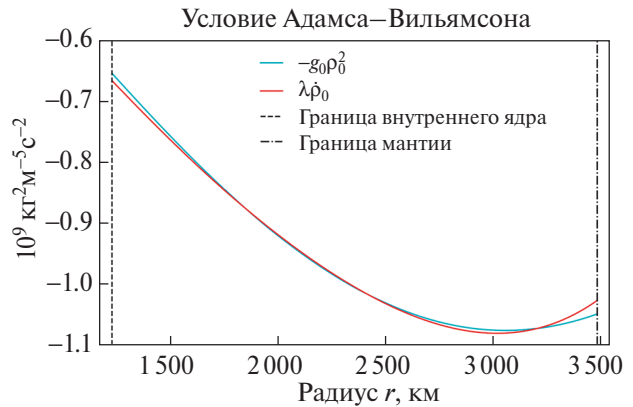


Рис. 1. Сравнение величин  $\lambda \dot{\rho}_0$  и  $-g_0 \rho_0^2$  во внешнем ядре. Условие Адамса–Вильямсона не выполняется у границы внутреннего ядра и у границы мантии.

Будем также использовать следующие соотношения, которые верны во всем внешнем ядре (см. [9]):

$$z_2 = \rho_0 (g_0 z_1 - z_5), \quad z_4 = 0. \quad (7)$$

#### НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В ЦЕНТРЕ ПЛАНЕТЫ

В центре планеты нет смещений, и изменение потенциала нулевое:  $y_1(r=0) = 0$ ,  $y_3(r=0) = 0$  и  $y_5(r=0) = 0$ . Существуют тогда три независимых начальных условия для интегрирования от  $r=0$  до границы внутреннего ядра с помощью системы (2):

$$\overrightarrow{y^{A0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y^{B0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y^{C0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В системе (2), однако, имеется сингулярность в нуле. Эту проблему можно обойти, если начать интегрирование векторами (8) не от нуля, а от маленького  $\delta r$ , как предложено в [11]. Используя  $\delta r$  равным одной тысячной радиуса Земли (примерно 6 км), получаем достаточно точные результаты для чисел Лява.

В нашей программе используем функцию `solve_ivp` библиотеки `scipy` [12] и сравниваем два метода интегрирования: явный метод Рунге–Кутты 8-го порядка (DOP853) и неявный метод 5-го порядка (BDF). Описанный подход отхода от нуля имеет огромный недостаток – конечные результаты сильно зависят от используемого метода и от шага интегрирования. Это объясняется тем, что, подставляя (8) в (2), на самом первом шаге интегрирования невязка пропорциональна  $\delta r^{-1}$  и может привести к большим погрешностям.

Для того чтобы увеличить точность при отходе от нуля, можно разложить переменные  $y_i$  по  $r$ . Такой подход был предложен в [13], на основе этой статьи мы разработали свою собственную аппроксимацию –  $y_1(r)$ ,  $y_3(r)$  и  $y_5(r)$  аппроксимируются около нуля следующим образом:

$$y_5(r) = Ar^n \gamma,$$

$$y_3(r) = br^{n-1} + Br^{n+1}, \quad (9)$$

$$y_1(r) = cr^{n-1} + Cr^{n+1},$$

где  $\gamma = \frac{4\pi G\rho_0(r)}{3}$  и  $A, B, C, b, c$  – неизвестные

коэффициенты. Подставляя (9) в (1), можно выразить  $y_2(r)$ ,  $y_4(r)$  и  $y_6(r)$  через эти же коэффициенты:

$$y_2(r) = -Br^n(n+1)n\lambda + Cr^n(n\lambda + 2n\mu + 3\lambda + 2\mu) - br^{n-2}(n+1)n\lambda + cr^{n-2}(n\lambda + 2n\mu + \lambda - 2\mu),$$

$$y_4(r) = Br^n n\mu + Cr^n \mu + br^{n-2}(n-2)\mu + cr^{n-2}\mu, \quad (10)$$

$$y_6(r) = Ar^{n-1}n\gamma - Cr^{n+1}3\gamma - cr^{n-1}3\gamma,$$

здесь считается, что  $\rho_0$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  – постоянные около нуля.

В системе (2) три уравнения (1-е, 3-е и 5-е) следуют из определений  $y_2(r)$ ,  $y_4(r)$  и  $y_6(r)$  и выполняются тождественно при (9) и (10). Подставляя (9) и (10) в оставшиеся три уравнения, получим систему алгебраических уравнений. Все слагаемые, пропорциональные  $r^{n-3}$  и  $r^{n-2}$ , могут быть исключены, если:

$$J = \frac{\gamma}{n\gamma - \chi^2}, \quad (11)$$

$$b = A \cdot J, \quad c = A \cdot nJ.$$

Таким образом, невязка в системе (2) на первом шаге пропорциональна  $r^{n-1}$  и не зависит от коэффициента  $A$ . Решение теперь зависит от трех неизвестных коэффициентов –  $A, B, C$ .

Из (9)–(11) получим три независимых вектора, которые с высокой точностью аппроксимируют решение около нуля:

$$\vec{y}^{A0}(r) = \begin{pmatrix} nJr \\ 2n(n-1)J\mu \\ Jr \\ 2(n-1)J\mu \\ r^2\gamma \\ n(1-3J)r\gamma \end{pmatrix} r^{n-2},$$

$$\vec{y}^{B0}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ -n(n+1)\lambda \\ r \\ n\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r^n, \quad (12)$$

$$\vec{y}^{C0}(r) = \begin{pmatrix} r \\ n(\lambda + 2\mu) + 3\lambda + 2\mu \\ 0 \\ \mu \\ 0 \\ -3r\gamma \end{pmatrix} r^n,$$

а само решение при  $r = \delta r$  равно

$$\vec{y}(\delta r) = A \cdot \vec{y}^{A0}(\delta r) + B \cdot \vec{y}^{B0}(\delta r) + C \cdot \vec{y}^{C0}(\delta r), \quad (13)$$

где  $A, B, C$  – неизвестные коэффициенты.

Расчеты показывают, что решения, в которых используются начальные условия (12) вместо (8), значительно более устойчивы к изменению метода и шага интегрирования. Поэтому мы считаем, что при вычислении чисел Лява любых планетных тел с внутренним ядром следует применять полученные нами начальные условия (12).

## АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Первый шаг – интегрирование векторов  $y^{A0}(\delta r)$ ,  $y^{B0}(\delta r)$  и  $y^{C0}(\delta r)$  от  $\delta r$  до границы внутреннего ядра (ICB), используя систему (2). Получаем тогда три вектора  $y^{A,ICB}$ ,  $y^{B,ICB}$  и  $y^{C,ICB}$ , а полное решение под этой границей имеет вид

$$\overrightarrow{y^{ICB}} = A \cdot \overrightarrow{y^{A,ICB}} + B \cdot \overrightarrow{y^{B,ICB}} + C \cdot \overrightarrow{y^{C,ICB}}. \quad (14)$$

Решение над этой границей (уже в жидком внешнем ядре) обозначим как  $z^{ICB}$ . При переходе от твердой к жидкой среде требуем непрерывности всех компонент за исключением третьей [6]:

$$y_1^{ICB} = Ay_1^{A,ICB} + By_1^{B,ICB} + Cy_1^{C,ICB} = z_1^{ICB},$$

$$y_2^{ICB} = Ay_2^{A,ICB} + By_2^{B,ICB} + Cy_2^{C,ICB} = z_2^{ICB} = \rho_0^{ICB} \left( g_0^{ICB} z_1^{ICB} - z_5^{ICB} \right),$$

$$y_4^{ICB} = Ay_4^{A,ICB} + By_4^{B,ICB} + Cy_4^{C,ICB} = z_4^{ICB} = 0, \quad (15)$$

$$y_5^{ICB} = Ay_5^{A,ICB} + By_5^{B,ICB} + Cy_5^{C,ICB} = z_5^{ICB},$$

$$y_6^{ICB} = Ay_6^{A,ICB} + By_6^{B,ICB} + Cy_6^{C,ICB} = z_6^{ICB},$$

где  $\rho_0^{ICB}$  – плотность в жидком внешнем ядре непосредственно над границей ICB, а  $g_0^{ICB}$  – ускорение силы тяжести на этой же границе. В (15) используются соотношения (7).

Получаем тогда 5 уравнений с 6 неизвестными:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $z_1^{ICB}$ ,  $z_5^{ICB}$  и  $z_6^{ICB}$ . Из первых четырех уравнений можно выразить  $B$  и  $C$  через  $A$  следующим образом:

$$L^i = -\frac{y_2^{i,ICB} - \rho_0^{ICB} g_0^{ICB} y_1^{i,ICB} + \rho_0^{ICB} y_5^{i,ICB}}{y_2^{C,ICB} - \rho_0^{ICB} g_0^{ICB} y_1^{C,ICB} + \rho_0^{ICB} y_5^{C,ICB}},$$

$$Q^i = -\frac{y_4^{i,ICB}}{y_4^{C,ICB}}, \quad i = A, B,$$

$$V^A = -\frac{L^A - Q^A}{L^B - Q^B}, \quad S^A = L^A + L^B V^A, \quad (16)$$

$$B = V^A \cdot A, \quad C = S^A \cdot A.$$

Решение над ICB равно:

$$z_i^{ICB} = A \cdot Z_i^{ICB}, \quad i = 1, 5, 6, 7, \quad (17)$$

где

$$Z_i^{ICB} = y_i^{A,ICB} + V^A y_i^{B,ICB} + S^A y_i^{C,ICB}, \quad i = 1, 5, 6, \\ Z_7^{ICB} = Z_6^{ICB} + 4\pi G \rho_0^{ICB} Z_1^{ICB} + \left( \frac{n+1}{r^{ICB}} - \frac{4\pi G \rho_0^{ICB}}{g_0^{ICB}} \right) Z_5^{ICB} \quad (18)$$

и коэффициент  $A$  пока еще неизвестен.

Для интегрирования через жидкое внешнее ядро нам нужны только две компоненты – пятая и седьмая. С ними можно составить следующий вектор:

$$\overrightarrow{z^{A,ICB}} = \begin{pmatrix} Z_5^{ICB} \\ Z_7^{ICB} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

и его следует проинтегрировать до границы внешнего ядра с мантией (СМВ) с помощью уравнений (6). Результат обозначим как

$$\overrightarrow{z^{A,CMB}} = \begin{pmatrix} Z_5^{CMB} \\ Z_7^{CMB} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

а полное решение под СМВ есть

$$\overrightarrow{z^{CMB}} = A \cdot \overrightarrow{z^{A,CMB}}, \quad (21)$$

Для того чтобы продолжить интегрирование из СМВ до поверхности, необходимо извлечь из (20) значения второй и шестой компонент, используя соотношения (5) и (7):

$$z_2^{CMB} = \rho_0^{CMB} \left( g_0^{CMB} z_1^{CMB} - z_5^{CMB} \right),$$

$$z_6^{CMB} = z_7^{CMB} - 4\pi G \rho_0^{CMB} z_1^{CMB} - \left( \frac{n+1}{r^{CMB}} - \frac{4\pi G \rho_0^{CMB}}{g_0^{CMB}} \right) z_5^{CMB}, \quad (22)$$

где  $\rho_0^{CMB}$  – плотность в жидком внешнем ядре непосредственно под СМВ.

Подставляя (21) в (22), можно выразить  $z_2^{CMB}$  и  $z_6^{CMB}$  через два неизвестных –  $A$  и  $z_1^{CMB}$ :

$$z_2^{CMB} = A \cdot \left[ -\rho_0^{CMB} Z_5^{CMB} \right] + z_1^{CMB} \cdot \left[ \rho_0^{CMB} g_0^{CMB} \right],$$

$$z_6^{CMB} = A \cdot \left[ Z_7^{CMB} - \left( \frac{n+1}{r^{CMB}} - \frac{4\pi G \rho_0^{CMB}}{g_0^{CMB}} \right) Z_5^{CMB} \right] + z_1^{CMB} \cdot \left[ -4\pi G \rho_0^{CMB} \right]. \quad (23)$$

В СМВ требуем непрерывности всех компонент, кроме третьей. Решение непосредственно над СМВ (в подошве нижней мантии) имеет вид

$$\vec{y}^{CMB} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0^{CMB} Z_5^{CMB} \\ 0 \\ 0 \\ Z_5^{CMB} \\ Z_7^{CMB} - \left( \frac{n+1}{r^{CMB}} - \frac{4\pi G \rho_0^{CMB}}{g_0^{CMB}} \right) Z_5^{CMB} \end{pmatrix} +$$

$$+ z_1^{CMB} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_0^{CMB} g_0^{CMB} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\pi G \rho_0^{CMB} \end{pmatrix} + y_3^{CMB} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

и зависит от трех неизвестных —  $A$ ,  $z_1^{CMB}$  и  $y_3^{CMB}$ . Для простоты переобозначим  $z_1^{CMB}$  и  $y_3^{CMB}$  как  $D$  и  $E$  соответственно, а три вектора из (24) обозначим как  $\vec{y}^{A,CMB}$ ,  $\vec{y}^{D,CMB}$  и  $\vec{y}^{E,CMB}$ . Тогда решение над СМВ можно записать в виде:

$$\vec{y}^{CMB} = A \cdot \vec{y}^{A,CMB} + D \cdot \vec{y}^{D,CMB} + E \cdot \vec{y}^{E,CMB}. \quad (25)$$

Следующий шаг — проинтегрировать векторы  $\vec{y}^{A,CMB}$ ,  $\vec{y}^{D,CMB}$  и  $\vec{y}^{E,CMB}$  от СМВ до поверхности планеты, используя уравнения (1). Получаем три вектора, которые обозначим как  $\vec{y}^{\alpha}$ ,  $\vec{y}^{\delta}$  и  $\vec{y}^{\varepsilon}$  и полное решение на поверхности:

$$\vec{y}^S = A \cdot \vec{y}^{\alpha} + D \cdot \vec{y}^{\delta} + E \cdot \vec{y}^{\varepsilon}. \quad (26)$$

Пренебрегая влиянием атмосферы в приливной деформации Земли, получаем следующие граничные условия на поверхности ( $r = a$ ) [6, 11]:

$$y_2^S = 0, \quad y_4^S = 0, \quad y_6^S = (2n+1) \cdot g_0(a) - (n+1) \cdot \frac{y_5^S}{a}. \quad (27)$$

Это приводит к системе 5 уравнений с 5 неизвестными ( $A$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $y_1^S$  и  $y_5^S$ ):

$$\begin{aligned} Ay_1^a + Dy_1^{\delta} + y_1^{\varepsilon} &= y_1^S, \\ Ay_2^a + Dy_2^{\delta} + y_2^{\varepsilon} &= 0, \\ Ay_4^a + Dy_4^{\delta} + y_4^{\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$Ay_5^a + Dy_5^{\delta} + y_5^{\varepsilon} = y_5^S,$$

$$Ay_6^a + Dy_6^{\delta} + y_6^{\varepsilon} = (2n+1) \cdot g_0(a) - (n+1) \cdot \frac{y_5^S}{a},$$

решение которой получается из

$$\begin{pmatrix} y_1^{\alpha} & y_1^{\delta} & y_1^{\varepsilon} & -1 & 0 \\ y_2^{\alpha} & y_2^{\delta} & y_2^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ y_4^{\alpha} & y_4^{\delta} & y_4^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ y_5^{\alpha} & y_5^{\delta} & y_5^{\varepsilon} & 0 & -1 \\ y_6^{\alpha} & y_6^{\delta} & y_6^{\varepsilon} & 0 & \frac{n+1}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ D \\ E \\ y_1^S \\ y_5^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (2n+1) \cdot g_0(a) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Подставляя полученные значения коэффициентов  $A$ ,  $D$  и  $E$  в (26), получим все компоненты  $\vec{y}^S$ . Приливные числа Лява  $k_n$ ,  $h_n$ ,  $l_n$  определяются как

$$k_n = y_5^S - 1, \quad h_n = y_1^S, \quad l_n = y_3^S. \quad (30)$$

Описанные уравнения необходимо сначала обезразмерить. Все интегрирование выполняется с помощью функции `solve_ivp` библиотеки `scipy` [12] на языке программирования Python. Методы RK45, DOP853 и BDF дают одинаковые результаты для выбранной точности вычисления. На первом шаге используется  $\delta r = a / 1000$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОODY

В данной работе алгоритм применяется к вычислению приливных чисел Лява Земли, но его можно использовать без изменений для любого тела с похожей внутренней структурой — внутреннее ядро, внешнее жидкое ядро, мантия и твердая кора. Для работы с другими телами необходимо сделать некоторые изменения в алгоритме. Если, например, ядро находится полностью в жидком состоянии, следует применить начальные условия, описанные в [9], и пропустить первый этап интегрирования через внутреннее ядро (т.е. начать с (19)). Если же присутствуют другие жидкие слои, достаточно в них повторить описанный выше способ интегрирования приливной деформации через внешнее ядро.

Алгоритм разработан для расчета чисел Лява в сферически симметричных моделях. Ожидаемая погрешность будет порядка эллиптичности

исследуемого тела, в случае Земли она составляет 0.3%, что заметно меньше точности измерения чисел Лява. По этой причине в литературе встречаются только сферически симметричные алгоритмы вычисления чисел Лява.

Применение данного алгоритма к упругой модели Земли PREM при частоте полусуточного лунного прилива  $M_2$  дает следующие значения чисел Лява:

$$k_2 = 0.29872, \quad h_2 = 0.60496, \quad l_2 = 0.08399, \\ k_3 = 0.09203,$$

что хорошо согласуется, например, с [13]. Однако планеты не являются идеально упругими телами, и при расчете чисел Лява необходимо учитывать неупругость путем применения некоторой реологии, как, например, реология Андраде. Значение модуля сдвига в каждом слое меняется по заданному закону и преобразуется в комплексную величину, но алгоритм при этом никак не меняется. В связи с этим надо использовать методы интегрирования, которые работают в комплексной области как RK45, DOP853 и BDF из библиотеки `solve_ivp`.

Описанный выше алгоритм является не только более точным и устойчивым для вычисления приливных чисел Лява, но и более корректным с точки зрения физики по сравнению с теми, которые часто встречаются в литературе. По этой причине именно этот алгоритм следует применять для расчета приливных чисел Лява. В случае если внутренняя структура исследуемого тела сильно отличается от земной, метод расчета легко адаптируется.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-22-00074), <https://rscf.ru/project/23-22-00074>.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Love A.E.H. The yielding of the Earth to disturbing forces // Proc. The Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1909. 82.551. P. 73–88.
2. Amorim D.O., Гудкова Т.В. Внутреннее строение Венеры на основе модели PREM // Астрон. вестн. 2023. Т. 57(5). С. 403–414.
3. Dumoulin C., Tobie G., Verhoeven O., et al. Tidal constraints on the interior of Venus // J. Geophysical Research: Planets. 2017. V. 122(6). P. 1338–1352.
4. Steinbrugge G., Padovan S., Hussmann H., et al. Viscoelastic tides of Mercury and the determination of its inner core size // J. Geophysical Research: Planets. 2018. V. 123(10). P. 2760–2772.
5. Bagheri A., Khan A., Al-Attar D., et al. Tidal response of Mars constrained from laboratory-based viscoelastic dissipation models and geophysical data // J. Geophysical Research: Planets. 2019. V. 124(11). P. 2703–2727.
6. Alterman Z., Hans Jarosch, Pekeris C.L. Oscillations of the Earth. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1959. 252.1268. P. 80–95.
7. Chinnery M.A. The static deformation of an earth with a fluid core: a physical approach // Geophysical J. Intern. 1975. V. 42. № 2. P. 461–475.
8. Longman I.M. A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads: 2. Computations and numerical results // J. Geophysical Research. 1963. V. 68. № 2. P. 485–496.
9. Saito M. Some problems of static deformation of the Earth // J. Physics of the Earth. 1974. V. 22(1). P. 123–140.
10. Helffrich G., Satoshi Kaneshima. Outer-core compositional stratification from observed core wave speed profiles // Nature. 2010. № 468. P. 807–810.
11. Michel A., Jean-Paul Boy. Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects // Geophysical J. International. 2022. V. 228. № 2. P. 1191–1212.
12. Virtanen P. et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // Nature methods. 2020. V. 17. № 3. P. 261–272.
13. Petit Gerard, Brian Luzum. IERS technical note No. 36, IERS conventions (2010) / International Earth Rotation and Reference Systems Service: Frankfurt, Germany, 2010.

## DEVELOPMENT OF A NEW MORE PRECISE ALGORITHM FOR COMPUTING TIDAL LOVE NUMBERS

**D. O. Amorim<sup>a</sup>, T. V. Gudkova<sup>b</sup>**

*<sup>a</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

*<sup>b</sup>Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS L.M. Zeleny

Tidal Love numbers are often used for studying the interior structure of planets and satellites of the Solar System. Measuring the deformation in response to tidal loading belongs to the methods for probing the interiors. The algorithm for computing tidal deformation depends on a series of assumptions and approximations and, therefore, can differ according to different authors. In this paper we compare the existing methods and, based on them, we propose a new and more precise algorithm for computing the tidal Love numbers of the Earth and other bodies with a similar interior structure.

**Keywords:** algorithm, tidal Love numbers, lunar semidiurnal tide, Earth, planets