

УДК 551.2+539.3

О КРИТЕРИИ ОТБОРА МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОВЕДЕНИЯ ГЕОСИСТЕМ

© 2024 г. Е. И. Рыжак*, С. В. Синюхина

Представлено академиком РАН А.О. Глико 13.08.2024 г.

Поступило 13.08.2024 г.

После доработки 13.08.2024 г.

Принято к публикации 14.08.2024 г.

Основополагающим критерием отбора моделей вязкоупругости для теоретического воспроизведения неустойчивого поведения геосистем является пригодность таких моделей (с учетом присущей геоматериалам очень большой вязкости) для описания реальных волновых процессов в этих геосистемах до возникновения неустойчивости. В случае большой вязкости обоснованы принципиальная непригодность моделей типа Фойхта и принципиальная пригодность моделей типа стандартного вязкоупругого материала (с частным случаем модели Максвелла). Доказано, что при наличии неустойчивости упругой системы сравнения неустойчивость вязкоупругой системы развивается динамически, и даже быстрее, чем неустойчивость упругой системы сравнения.

Ключевые слова: аномальное распределение плотности, критерий отбора моделей вязкоупругости, скорость развития неустойчивости

DOI: 10.31857/S2686739724120143

1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с пояснений, касающихся элементов самого названия работы. Во-первых, в нем упоминаются модели вязкоупругости, используемые для описания поведения геосистем. Мы исходим из того, что геоматериалам присущи свойства вязкоупругих материалов, что считается достоверно установленным на основании ряда косвенных проявлений и признаков. При этом понятие вязкоупрого поведения объединяет в себе по крайней мере два совершенно различных типа поведения, каждый из которых характеризуется своим типом моделей вязкоупругости, а именно: моделями типа Фойхта и моделями типа стандартного вязкоупрого материала (СВУМ) с частным случаем модели Максвелла.

В геофизическом сообществе достаточно распространено мнение, что выбор модели вязкоупругости для описания процессов в геомассивах является делом вкуса: можно выбрать любую, и это будет более или менее подходящее. Действительно, в каких-то случаях, а именно, при

умеренной вязкости, выбор модели вязкоупругости не играет столь уж принципиальной роли, что подтверждают конкретные расчеты, относящиеся, скажем, к процессам в грунтах, особенно в водонасыщенных грунтах. Однако в других случаях, когда вязкость очень велика (а вязкость геоматериалов значительной части земных недр не просто очень велика, а огромна [1, 2]), выбор модели вязкоупругости становится в высшей степени принципиальным моментом, поскольку в этих условиях свойства вязкоупругости, задаваемые различными моделями, абсолютно разные. Очевидно, что эта разница будет проявляться в любых теоретических исследованиях, относящихся к поведению геосистем, однако *результаты теоретических исследований не должны противоречить известным реальным свойствам геосистем, а те модели, свойства которых не соответствуют реальным свойствам геосистем, должны быть отброшены*. Таким образом, выбор типа моделей вязкоупругости далеко не произволен, и следовательно, должен быть сформулирован и всесторонне обоснован рациональный критерий такого выбора. В дальнейшем именно выбранный на основе сформулированного критерия тип вязкоупругости должен использоваться при теоретическом исследовании поведения геосистем, в том числе при исследовании процессов развития неустойчивости.

¹ Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской Академии наук, Москва, Россия.

*E-mail: E_I_Ryzhak@mail.ru

При обосновании критерия естественно опираться на те процессы и явления, которые доступны непосредственным наблюдениям и измерениям, в силу чего хорошо изучены. Такими явлениями, с нашей точки зрения, являются, например, собственные колебания геосистем в устойчивом состоянии. Периоды таких колебаний не превышают одного часа, что делает их инструментальное изучение вполне доступным и осуществимым в течение обозримых промежутков времени.

Очевидно, что при исследовании и устойчивого, и неустойчивого поведения некоторой геосистемы должна использоваться одна и та же модель вязкоупругости, поскольку эта модель определяется свойствами одного и того же геоматериала, образующего данную геосистему.

Отметим еще один принципиальный момент, нередко порождающий путаницу понятий. Теоретическое исследование поведения геосистемы означает исследование ее *самопроизвольного* поведения, в отличие от *предписанного*. Поясним, что методика изучения свойств той или иной модели вязкоупругости состоит в том, что мысленно предписывается тот или иной характер и темп деформирования элемента среды, порождающий некоторый отклик в виде соответствующих напряжений. Таким образом выясняется определяющее соотношение модели. Однако при изучении *самопроизвольного* движения геосистемы предсказывать поведение элементов, для которых определяющее соотношение уже выяснено, нельзя: оно заранее неизвестно и может быть определено только в результате решения соответствующей механической задачи, постановка которой включает в себя выбор модели вязкоупругости, задание распределения плотности и других механических параметров, а также задание области, занимаемой геосистемой, совместно с граничными условиями. В данной работе строгое аналитическое исследование поведения геосистем проводится именно таким образом.

Работа имеет следующую структуру. Первой (и весьма существенной) ее частью является исследование динамического поведения рассматриваемых геосистем в устойчивом состоянии. В результате такого исследования выявляются как те модели вязкоупругости, которые принципиально непригодны, так и модели, которые позволяют адекватно описывать реально наблюдаемые динамические явления. Второй частью работы, вытекающей из результатов первой части, сводящихся к доказательству непригодности (в случае очень большой вязкости

геоматериалов) моделей типа Фойхта и пригодности моделей типа СВУМ, является исследование динамики развития неустойчивости для тех моделей, адекватность которых подтверждается результатами первой части работы. В частности, во второй части работы характер развития неустойчивости в геомассивах, геоматериалы которых описываются моделями типа СВУМ, соотносится с характером развития неустойчивости в упругих системах сравнения (УСС). Доказывается, что развитие неустойчивости в системах с вязкоупругостью адекватного типа происходит аналогично развитию неустойчивости в соответствующей УСС, а при этом темп развития неустойчивости даже превышает темп развития неустойчивости в УСС. Таким образом, в случае неустойчивости УСС, наличие вязкости paradoxальным образом приводит не к замедлению, а к ускорению процесса развития неустойчивости в соответствующей вязкоупругой системе (ВУС). Выявлен также случай “квазистабильности”, когда УСС устойчива, а ВУС неустойчива, но темп развития такой неустойчивости крайне мал и стремится к нулю при стремлении вязкости к бесконечности. Именно в этом и только в этом весьма специфическом случае влияние вязкости на темп развития неустойчивости соответствует традиционным представлениям о таком влиянии.

2. ДВЕ ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Исследование динамики распределенных механических систем при малых возмущениях относительно состояния равновесия как в случае устойчивости, так и в случае неустойчивости последнего, основываются на линеаризованных уравнениях импульса, включающих линеаризованные определяющие соотношения для напряжений. Считается, что системы состоят из несжимаемых вязкоупругих материалов, невозмущенное напряженное состояние которых является гидростатическим, а при возмущениях гидростатичность может нарушаться.

Линеаризованные уравнения импульса, в силу наличия ненулевых начальных гидростатических напряжений, будут записываться с использованием напряжений Пиолы, но при этом линеаризованные определяющие соотношения для различных моделей вязкоупругости будут изначально заданы в виде соотношений для напряжений Коши.

Уравнения импульса и определяющие соотношения будут записываться в терминах отсчетного описания сплошной среды в сочетании с системой безиндексных тензорных обозначений Гиббса; используемые обозначения механических величин близки к обозначениям книги [3]. Невозмущенное равновесное состояние среды принимается за отсчетное. Отсчетные радиус-векторы материальных точек будут обозначаться через \mathbf{x} , а радиус-векторы материальных точек в момент времени t будут обозначаться через $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$; невозмущенному состоянию приписывается значение $t = 0$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \quad (2.1)$$

Поле смещений

$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} \quad (2.2)$$

при линеаризации будет считаться малым, равно как и его отсчетный градиент (тензор малых дисторсий)

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &\equiv \nabla_{\kappa} \otimes \delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I} \equiv \\ &\equiv \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ∇_{κ} означает градиент по \mathbf{x} . \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга (ТР(2)). Условие несжимаемости при линеаризации сводится к $\mathbf{I} : \delta\mathbf{H} = 0$. Материальные (т.е. при $\mathbf{x} = \text{const}$) производные по времени будем обозначать точкой над символом или вверху справа от символа. Тогда $\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = (\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t))^{\bullet}$ – скорость материальной точки. Для $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) &= (\nabla_{\kappa} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t))^{\bullet} = \nabla_{\kappa} \otimes \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \\ &= \nabla_{\kappa} \otimes (\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t))^{\bullet}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Значения напряжений Коши в точке \mathbf{x} в момент времени t обозначим через $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = -p_0(\mathbf{x})\mathbf{I}, \quad \delta\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = \\ &= \delta\mathbf{T}^d(\mathbf{x}, t) - \delta p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\delta\mathbf{T}^d(\mathbf{x}, t)$ – девиатор напряжений Коши, причем $\mathbf{T}^d(\mathbf{x}, 0) \equiv \mathbf{T}_0^d(\mathbf{x}) = 0$. Модель (определяющее соотношение) линейной вязкоупругости Фойхта может быть представлена в следующем виде [4]:

$$\delta\mathbf{T}^d(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \delta\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \Lambda(\mathbf{x}) : (\delta\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))^{\bullet} \quad (2.6)$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ – тензор упругих модулей для напряжений Коши, $\Lambda(\mathbf{x})$ – тензор вязкости (вообще говоря, анизотропной). Тензоры \mathbf{L} и Λ являются тензорами четвертого ранга (ТР(4)), причем для их изомеров справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(2134)} &= \mathbf{L}^{(1243)} = \mathbf{L}^{(3412)}, \\ \Lambda^{(2134)} &= \Lambda^{(1243)} = \Lambda^{(3412)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, модель Фойхта характеризуется тем, что к упругим напряжениям добавляются вязкие напряжения, и чем больше вязкость, тем большую роль играют вязкие напряжения.

Модель несжимаемого СВУМ (одно из возможных обобщений на трехмерный случай) задается следующим уравнением [4]:

$$\begin{aligned} &(\delta\mathbf{T}^d(\mathbf{x}, t))^{\bullet} + \mathbf{L}''(\mathbf{x}) : (\Lambda(\mathbf{x}))^{-1} : \delta\mathbf{T}^d(\mathbf{x}, t) = \\ &= (\mathbf{L}'(\mathbf{x}) + \mathbf{L}''(\mathbf{x})) : (\delta\mathbf{H}(\mathbf{x}, t))^{\bullet} + \mathbf{L}''(\mathbf{x}) : (\Lambda(\mathbf{x}))^{-1} : \mathbf{L}'(\mathbf{x}) : \\ &\quad : \delta\mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}'(\mathbf{x}) + \mathbf{L}''(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\delta\mathbf{H} : \mathbf{L}' : \delta\mathbf{H} > 0, \quad \delta\mathbf{H} : \mathbf{L}'' : \delta\mathbf{H} > 0, \quad \delta\mathbf{H} \neq 0 \quad (2.9)$$

Чем больше вязкость, тем меньшую роль в модели СВУМ играют содержащие ее слагаемые: при стремлении вязкости к бесконечности определяющее соотношение (2.8) превращается в инкрементальное соотношение для несжимаемого упругого материала с тензором упругих модулей \mathbf{L} . При $\mathbf{L}'(\mathbf{x}) \equiv 0$ соотношение (2.9) превращается в одно из возможных трехмерных обобщений модели линейной вязкоупругости Максвелла [4].

3. НЕПРИГОДНОСТЬ МОДЕЛИ ФОЙХТА ПРИ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В УСТОЙЧИВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Под динамическими явлениями будем понимать прежде всего собственные колебания. Существование таких явлений давно известно и хорошо изучено в ходе различных геофизических наблюдений. Поскольку неустойчивость возникает при изменении параметров (зачастую малом) в механических системах, которые до этого были устойчивыми (со всеми присущими устойчивым системам свойствами, включая наличие собственных колебаний), необходимым условием пригодности тех или иных моделей вязкоупругости для описания неустойчивого поведения систем является их пригодность для описания поведения тех же систем в предшествующем устойчивом состоянии. Хорошо известно, что для осциллятора с одной степенью свободы при добавлении к упругой возвращающей силе вязкой силы, собственные колебания при умеренной вязкости становятся затухающими, а при вязкости, превосходящей некоторое критическое значение, совсем пропадают, переходя в монотонно затухающие движения. Покажем, что то же самое справедливо и для

распределенных систем с вязкоупругостью типа Фойхта. Это, в случае наличия у геоматериалов очень большой вязкости и, соответственно, очень большого времени релаксации, и будет означать непригодность модели Фойхта для описания динамики таких геосистем, включая динамику потери устойчивости.

Будем исследовать уравнения движения распределенной механической системы при малых возмущениях относительно равновесного гидростатического состояния, принимаемого за отсчетное. Считается, что система в отсчетном состоянии занимает ограниченную область произвольной формы (рис. 1) с фиксированным положением материальных точек границы. Материал считается пространственно неоднородным, несжимаемым и вязкоупругим по Фойхту (2.6) с непрерывным пространственным распределением параметров модели. Имея в виду исследование в дальнейшем гравитационной неустойчивости, вызываемой уменьшением плотности с глубиной (аномальной стратификацией), в данном параграфе тоже будем учитывать наличие умеренной аномальной стратификации, не нарушающей устойчивости УСС.

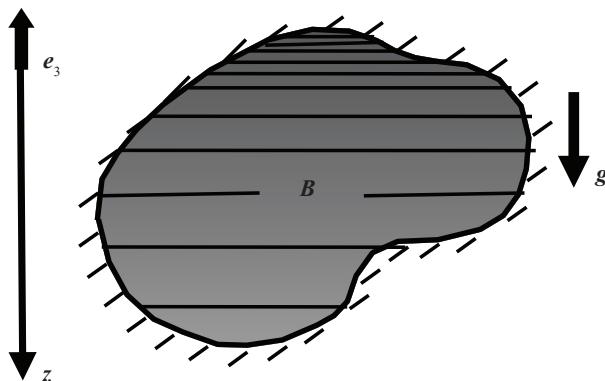


Рис. 1. Исследуемый аномально стратифицированный геомассив.

В отсчетном описании уравнения движения записываются в терминах тензора напряжений Пиолы \mathbf{T}_κ , связанного с тензором напряжений Коши \mathbf{T} следующим образом:

$$\mathbf{T}_\kappa = (\det \mathbf{F})(\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla_\kappa \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

В силу предположения о несжимаемости материала $\det \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 1$. Уравнения импульса

в возмущенном и равновесном невозмущенном состояниях имеют вид

$$\rho_\kappa(\mathbf{x}) \delta \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_\kappa \cdot \mathbf{T}_\kappa(\mathbf{x}, t) + \rho_\kappa(\mathbf{x}) \mathbf{g}, \quad \nabla_\kappa \cdot \mathbf{T}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) + \rho_\kappa(\mathbf{x}) \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} = -\mathbf{g} \mathbf{e}_3 = \text{const}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{T}_{\kappa_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = -p_0(\mathbf{x}) \mathbf{I}, \quad \rho_\kappa(\mathbf{x}) = \rho_\kappa(z), \quad z \equiv -\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3,$$

$$p_0(\mathbf{x}) = p_0(z), \quad \frac{dp_0}{dz}(z) = \rho_\kappa(z) g \quad (3.3)$$

Для доказательства утверждения, сформулированного в начале параграфа, линеаризуем уравнение импульса (3.2) и будем искать его экспоненциальные по времени решения с комплексными показателями экспоненты. Если при этом обнаружится, что при некоторых значениях параметров показатели могут быть только действительными (и отрицательными), то это и будет означать существование только монотонно затухающих собственных движений. При линеаризации уравнения (3.1), с учетом несжимаемости материала и гидростатичности невозмущенного равновесного состояния, получим следующее уравнение в возмущениях:

$$\rho_\kappa \delta \ddot{\mathbf{r}} = \nabla_\kappa \cdot (\delta \mathbf{T}^d) - \rho_\kappa g \nabla_\kappa (\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3) - \nabla_\kappa (\delta p) \quad (3.4)$$

Рассмотрение комплексных зависимостей от времени требует комплексификации пространства полей смещений и исследование комплексных решений уравнения (3.4):

$$\delta \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + i \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad (3.5)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ – действительные векторные поля. Дополнительно обобщим билинейным образом на комплексное векторное пространство то скалярное произведение, которое задано в действительном пространстве:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (\mathbf{u}_1 + i \mathbf{w}_1) \cdot (\mathbf{u}_2 + i \mathbf{w}_2) \equiv (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) + \\ &+ i(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оно положительно определено на действительных векторах. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= (\mathbf{u} + i \mathbf{w}) \cdot (\overline{\mathbf{u} + i \mathbf{w}}) = (\mathbf{u} + i \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} - i \mathbf{w}) = \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Искомые экспоненциальные по времени решения имеют вид:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = e^{\lambda t} \mathbf{q}(\mathbf{x}) = e^{\lambda t} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) + i \mathbf{w}(\mathbf{x})), \quad \lambda = \alpha + i \beta, \quad (3.8)$$

где α и β – действительные числа.

Уравнение (2.7) (задающее вязкоупругость типа Фойхта) примет следующий вид:

$$\delta \mathbf{T}^d(\mathbf{x}, t) = e^{\lambda t} (\mathbf{L}(\mathbf{x}) : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \lambda \Lambda(\mathbf{x}) : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q}(\mathbf{x})) \quad (3.9)$$

Тогда (3.4) преобразуется в следующее уравнение:

$$\lambda^2 \rho_\kappa(\mathbf{x}) \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla_\kappa \cdot ((\mathbf{L}(\mathbf{x}) + \lambda \Lambda(\mathbf{x})) : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q}(\mathbf{x})) - \rho_\kappa(\mathbf{x}) g \nabla_\kappa (\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3) - \nabla_\kappa (\delta p(\mathbf{x})) \quad (3.10)$$

Умножая обе части уравнения (3.10) скалярно на $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ и интегрируя по занимаемой системой области B с учетом бездивергентности $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, нулевых граничных условий для $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ и предполагаемой аномальной стратификации по глубине, получим:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle \rho_\kappa \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} \rangle_B &= - \left\langle \nabla_\kappa \otimes \bar{\mathbf{q}} : \mathbf{L} : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q} \right\rangle_B - \\ &- \lambda \left\langle \nabla_\kappa \otimes \bar{\mathbf{q}} : \Lambda : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q} \right\rangle_B \\ &+ \left\langle g \frac{d\rho_\kappa}{dz} \left| (\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_3)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3) \right| \right\rangle_B \end{aligned} \quad (3.11)$$

где угловые скобки означают интеграл по множеству, указанному справа внизу.

В (3.11) комплексными являются только величины λ , \mathbf{q} и $\bar{\mathbf{q}}$, поэтому все интегралы являются неотрицательными действительными числами.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega^2 &\equiv \frac{\langle \nabla_\kappa \otimes \bar{\mathbf{q}} : \mathbf{L} : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q} \rangle_B}{\langle \rho_\kappa \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} \rangle_B}, \tau \equiv \frac{\langle \nabla_\kappa \otimes \bar{\mathbf{q}} : \Lambda : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q} \rangle_B}{\langle \nabla_\kappa \otimes \bar{\mathbf{q}} : \mathbf{L} : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q} \rangle_B}, \\ \gamma^2 &\equiv \frac{\left\langle g \frac{d\rho_\kappa}{dz} \left| (\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{e}_3)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3) \right| \right\rangle_B}{\langle \rho_\kappa \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} \rangle_B} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) примет следующий вид:

$$\lambda^2 + \lambda \tau \omega^2 + (\omega^2 - \gamma^2) = 0 \quad (3.13)$$

Если выполнено неравенство

$$\left(\frac{\tau \omega^2}{2} \right)^2 \geq \omega^2 - \gamma^2 \quad (3.14)$$

то корни уравнения (3.13) действительные. Для выполнения неравенства (3.14) достаточно выполнения неравенства

$$\tau \geq \frac{2}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \quad (3.15)$$

где τ и ω – оценки снизу для τ и ω . Пусть

$$\underline{\omega}^2 = \inf_{\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}} \frac{\langle \nabla_\kappa \otimes \mathbf{u} : \mathbf{L} : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{u} \rangle_B}{\langle \rho_\kappa \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle_B} =$$

$$= \inf_{\{\mathbf{q}\}} \frac{\langle \nabla_\kappa \otimes \bar{\mathbf{q}} : \mathbf{L} : \nabla_\kappa \otimes \mathbf{q} \rangle_B}{\langle \rho_\kappa \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} \rangle_B}, \tau \equiv \min_{\mathbf{H}, \mathbf{x}} \frac{\mathbf{H} : \Lambda(\mathbf{x}) : \mathbf{H}}{\mathbf{H} : \mathbf{L}(\mathbf{x}) : \mathbf{H}} \quad (3.16)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – ненулевые векторные поля, обращающиеся в нуль на ∂B , а \mathbf{H} – ненулевые симметричные девиаторы ранга два. Величина $\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ – оценка снизу для наименьшей частоты собственных колебаний УСС [5]; ей соответствует оценка сверху для наибольшего периода собственных колебаний $\bar{\theta} = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. Достаточное условие отсутствия колебаний таково:

$$\tau \geq \frac{\bar{\theta}}{\pi}, \quad (3.17)$$

что для большинства геосистем больших размеров выполняется с колоссальным запасом. Таким образом, при вязкоупругости типа Фойхта собственных колебаний геосистем в принципе не было бы, а были бы только монотонно затухающие собственные движения. Следовательно, вязкоупругость геоматериалов, имеющих очень большую вязкость, не может являться и не является вязкоупругостью типа Фойхта.

В телах с другими типами вязкоупругости влияние вязкости совершило иное и приводит при больших значениях вязкости к совершенно другим результатам.

4. СООТВЕТСТВИЕ МОДЕЛИ СВУМ С ЧАСТНЫМ СЛУЧАЕМ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА СФОРМУЛИРОВАННОМУ КРИТЕРИЮ ОТБОРА: СУЩЕСТВОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ (СК) ПРИ СКОЛЬ УГОДНО БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ВЯЗКОУПРУГОСТЬЮ ТАКОГО ТИПА

Будем исходить из того, что реальные значения времен релаксации в геосистемах значительной части земных недр очень велики, а в пределе бесконечных времен релаксации модель СВУМ, в отличие от модели Фойхта, превращается в модель упругого материала. Как известно, для описания динамических процессов в геосистемах традиционно используются именно упругие модели, позволяющие теоретически воспроизвести и предсказывать многие наблюдаемые явления, в частности, СК. Для упругих геосистем СК доказано, и свойства частот и мод колебаний известны [5]. Таким образом, появляется возможность рассмотрения поведения вязкоупругих геосистем типа СВУМ при больших временах релаксации как возмущенного поведения УСС; в качестве малого параметра при использовании

аппарата теории возмущений будет выступать величина, обратная времени релаксации. Таким образом будет учтено влияние большой вязкости на процессы, и, главное, выяснено, что колебания (слабо затухающие) в таких геосистемах имеют место. Подтверждение адекватности именно модели СВУМ при описании поведения геосистем в устойчивом состоянии однозначно обосновывает использование именно такой модели при исследовании неустойчивости геосистем, состоящих из этих же геоматериалов.

Исследование поведения вязкоупругих геосистем типа СВУМ в устойчивом состоянии основывается на той же постановке задачи и на том же линеаризованном уравнении импульса, что и изученное в п. 3 поведение геосистем типа Фойхта. Таким образом, исходными уравнениями являются уравнения (3.1)–(3.8).

Используем для СВУМ определяющее соотношение (2.8). Введем наименьшее время релаксации по всей области, занимаемой телом:

$$\underline{\tau} = \min_{\mathbf{H}, \mathbf{x}} \frac{\mathbf{H} : \Lambda(\mathbf{x}) : \mathbf{H}}{\mathbf{H} : \mathbf{L}''(\mathbf{x}) : \mathbf{H}} \equiv \frac{1}{\xi} \quad (4.1)$$

Считая величину $\underline{\tau}$ большой, а обратную величину ξ малой, примем ξ в качестве малого параметра теории возмущений:

$$\Lambda(\mathbf{x}) \equiv \underline{\tau} \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}), \quad \Lambda^{-1}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\underline{\tau}} \tilde{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{L}'' : \Lambda^{-1} \equiv \frac{1}{\underline{\tau}} \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} = \xi \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{T}^d + \xi \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} : \mathbf{T}^d = (\mathbf{L}' + \mathbf{L}'') : \dot{\mathbf{H}} + \xi \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} : \mathbf{L}' : \mathbf{H},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – поле малых смещений. Для зависимостей от времени, пропорциональных $e^{\lambda t}$, определяющее соотношение (4.3) принимает следующий вид:

$$(\lambda \mathbf{1} + \xi \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1}) : \mathbf{T}^d = \lambda (\mathbf{L}' + \mathbf{L}'') : \mathbf{H} +$$

$$+ \xi \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} : \mathbf{L}' : \mathbf{H} \quad (4.4)$$

Учтём, что с точностью до величин первого порядка по ξ справедливо равенство

$$(1 + \frac{\xi}{\lambda} \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1})^{-1} = 1 - \frac{\xi}{\lambda} \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \mathbf{T}^d = \lambda (\mathbf{L}' + \mathbf{L}'') : \mathbf{H} - \xi \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} : \mathbf{L}' : \mathbf{H} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в уравнение импульса, умноженное на λ , получим:

$$\begin{aligned} \lambda^3 \rho_{\kappa} \mathbf{u} &= \lambda \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{L} : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}) - \xi \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} : \\ &: \mathbf{L}'' : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}) - \lambda \rho_{\kappa} g \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3) - \lambda \nabla_{\mathbf{x}} (p - p_{\kappa}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

При $\xi = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_0 (\lambda_0^2 \rho_{\kappa} \mathbf{u}_0 - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{L} : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 + \rho_{\kappa} g \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_3) + \\ + \nabla_{\mathbf{x}} (p_0 - p_{\kappa})) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда для $\lambda_0 \neq 0$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 &= - \frac{\left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 : \mathbf{L} : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 - g \left| \frac{d\rho_{\kappa}}{dz} \right| (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_3)^2 \right\rangle_B}{\langle \rho_{\kappa} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \rangle_B} = \\ &= -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_0 = \pm i\omega_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Соответствующие движения – это собственные колебания УСС с частотой ω_0 [5]. Для нахождения параметров возмущенного движения, задаваемого уравнением (4.6), примем:

$$\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

где $\delta\lambda$ и $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – величины порядка ξ . С точностью до величин первого порядка по ξ

$$\begin{aligned} 3\lambda_0^2 \delta\lambda \langle \rho_{\kappa} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \rangle_B &= \\ &= -\delta\lambda \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 : \mathbf{L} : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 - g \left| \frac{d\rho_{\kappa}}{dz} \right| (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_3)^2 \right\rangle_B + \\ &+ \xi \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 : \mathbf{L}'' : \tilde{\Lambda}^{-1} : \mathbf{L}'' : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 \right\rangle_B \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 : \mathbf{L}'' : \Lambda^{-1} : \mathbf{L}'' : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 \right\rangle_B}{\left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 : \mathbf{L} : \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}_0 - g \left| \frac{d\rho_{\kappa}}{dz} \right| (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_3)^2 \right\rangle_B},$$

$$\delta\lambda < 0, \quad \lambda = \pm i\omega_0 + \delta\lambda. \quad (4.11)$$

Таким образом, возмущенное движение системы представляет собой слабозатухающие колебания с частотой ω_0 и декрементом затухания $|\delta\lambda|$.

Подводя итог пунктов (3) и (4), констатируем, что модель вязкоупругости Фойхта при больших значениях вязкости и времени релаксации заведомо непригодна для описания динамики устойчивых геомассивов, а модель стандартного вязкоупругого материала (с частным случаем модели Максвелла) заведомо пригодна для указанной цели.

5. РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В АНОМАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ГЕОСИСТЕМАХ

Учитывая принципиальную непригодность модели Фойхта для изучения динамического поведения геосистем с очень большой вязкостью (п. 3), исследование неустойчивости будем проводить с использованием адекватных при большой вязкости моделей типа СВУМ (в частности, модели Максвелла) (п. 4).

В настоящей работе мы распространим на модели типа СВУМ то строгое исследование развития гравитационной неустойчивости, которое впервые было выполнено в [6] для максвелловской модели геоматериала.

Примем для СВУМ следующие упрощения в определяющем соотношении (2.8) [7]:

$$\Lambda = 2\chi \mathbf{1}, \quad \mathbf{L}' = \sum_{j=1}^5 2\mu'_j \Gamma_j \otimes \Gamma_j, \\ \mathbf{L}'' = \sum_{j=1}^5 2\mu''_j \Gamma_j \otimes \Gamma_j, \quad \Gamma_j : \Gamma_s = \delta_{js}, \quad \mathbf{I} : \Gamma_j = 0 \quad (5.1)$$

Считая смещения, градиенты смещений и девiatorные напряжения пропорциональными $e^{\lambda t}$, получим определяющее соотношение в следующем виде:

$$\delta \mathbf{T}^d = \mathbf{L}(\lambda) : \mathbf{H} \equiv \left(\sum_{j=1}^5 2\mu_j(\lambda) \Gamma_j \otimes \Gamma_j \right) : \mathbf{H}, \\ \mu_j(\lambda) = \frac{\mu'_j + \mu''_j + \frac{1}{\lambda\chi} \mu'_j \mu''_j}{1 + \frac{1}{\lambda\chi} \mu''_j} \quad (5.2)$$

$$\mu_j(\infty) = \mu'_j + \mu''_j, \quad \mu_j(0) = \mu'_j \quad (5.3)$$

Уравнение импульса, условие несжимаемости и граничные условия таковы:

$$\lambda^2 \rho_k \mathbf{u} = \nabla_k \cdot (\mathbf{L}(\lambda) : \nabla_k \otimes \mathbf{u}) - \rho_k g \nabla_k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3) - \\ - \nabla_k (\delta p) \equiv \mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}\}), \quad \nabla_k \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial B} = 0 \quad (5.4)$$

Будем искать решения линейных уравнений (5.4) для вещественных положительных значений λ . В этом случае все ТР(4) $\mathbf{L}(\lambda)$ симметричны, положительно определены ($\mathbf{H} : \mathbf{L}(\lambda) : \mathbf{H} > 0$, $\forall \mathbf{H} \neq 0$), а квадратичная форма $\mathbf{H} : \mathbf{L}(\lambda) : \mathbf{H}$ монотонно возрастает от $\mathbf{H} : \mathbf{L}' : \mathbf{H}$ до $\mathbf{H} : (\mathbf{L}' + \mathbf{L}'') : \mathbf{H}$ при изменении λ от нуля до $+\infty$. Оператор $\mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}\})$ для любого λ симметричен относительно скалярного произведения $\langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \rangle_B$, т.е.

$$\langle \mathbf{u}_1 \cdot \mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}_2\}) \rangle_B = \langle \mathbf{u}_2 \cdot \mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}_1\}) \rangle_B. \quad (5.5)$$

Для соответствующего квадратичного функционала $\Psi(\lambda, \{\mathbf{u}\})$ получаем:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}\}) \rangle_B \equiv \Psi(\lambda, \{\mathbf{u}\}) \equiv g \left\langle \left| \frac{d\rho_k}{dz} \right| (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3)^2 \right\rangle_B - \\ - \langle \nabla_k \otimes \mathbf{u} : \mathbf{L} : \nabla_k \otimes \mathbf{u} \rangle_B \quad (5.6)$$

При $\lambda = \infty$ $\mathbf{L}(\infty) = \mathbf{L}' + \mathbf{L}''$ – это тензор упругих модулей УСС, а функционал $\Psi(\infty, \{\mathbf{u}\}) = -R\{\mathbf{u}\}$, где $R\{\mathbf{u}\}$ – вторая вариация полной потенциальной энергии соответствующей УСС. Если УСС устойчива, то функционал $R\{\mathbf{u}\}$ положительно определен, а если УСС неустойчива, то на некотором подмножестве кинематически допустимых полей функционал $R\{\mathbf{u}\}$ принимает отрицательные значения. Заметим, что помимо основной УСС, которая фактически соответствует бесконечной вязкости, для ВУС имеется вторая УСС (УСС-2), которая соответствует нулевой вязкости. Если УСС неустойчива, то, очевидно, УСС-2 тоже неустойчива, а если УСС устойчива, то возможны два варианта: либо УСС-2 неустойчива, либо УСС-2 устойчива (для модели Максвелла, для которой $\mathbf{L}' = 0$, последний вариант при аномальной стратификации геомассива исключен). Для указанных трех случаев анализ устойчивости/неустойчивости дает разные результаты, которые и будут рассмотрены ниже. Уравнения (5.4) выражают тот факт, что искомые поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ являются обобщенными собственными функциями (ОСФ) с весом $\rho_k(\mathbf{x})$ симметричного линейного оператора $\mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}\})$, а числа λ^2 являются соответствующими обобщенными собственными числами (ОСЧ) [5]. Заметим, что при любом $\lambda > 0$ оператор $\mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}\})$ имеет некоторый зависящий от λ набор ОСЧ [5], однако эти ОСЧ, вообще говоря, не равны λ^2 , что требовалось бы для выполнения уравнений (5.4). Для нахождения наибольшего из искомых положительных значений λ (инкремента нарастания наибыстрейшей моды неустойчивости) воспользуемся методом, предложенным в [6]: будем отдельно изучать поведение левой и правой частей равенства $\lambda^2 = \beta_1(\lambda)$, где $\beta_1(\lambda)$ – наибольшее ОСЧ оператора $\mathcal{A}(\lambda, \{\mathbf{u}\})$. Учитывая монотонное возрастание левой части и монотонное убывание правой, заключаем, что существует единственное значение λ_* , при котором выполняется данное равенство. Что касается конкретной величины λ_* , то она зависит от того, устойчива или неустойчива УСС [6].

Если УСС неустойчива, ВУС тоже неустойчива, и при любой вязкости $\lambda_ > \gamma$, где γ – инкремент нарастания наибыстрейшей*

моды неустойчивости УСС. При стремлении вязкости к бесконечности λ_* стремится к γ сверху.

Если УСС устойчива, а УСС-2 неустойчива, то ВУС неустойчива, но инкремент нарастания наибыстрейшей моды неустойчивости стремится к нулю при неограниченном увеличении вязкости. Именно в этом случае большая вязкость сильно замедляет скорость развития неустойчивости.

Если УСС-2 устойчива, то устойчива и ВУС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен и обоснован критерий выбора моделей вязкоупругости для теоретического анализа процессов развития неустойчивости в геосистемах земных недр. Суть критерия заключается в следующем: пригодность тех или иных моделей поведения геоматериалов для описания развития неустойчивости определяется их пригодностью для описания хорошо изученных динамических явлений (например, собственных колебаний) в тех же геосистемах в устойчивом состоянии. В работе взяты за основу общепринятые представления о геоматериалах земных недр: (1) геоматериалы являются вязкоупругими; (2) вязкость геоматериалов значительной части земных недр огромна, и вместе с вязкостью огромны и соответствующие времена релаксации [1, 2].

Динамика геосистем в устойчивом состоянии хорошо изучена, и для ее описания используются исключительно динамические уравнения теории упругости. Тот факт, что геоматериалы не являются упругими и обладают огромной вязкостью, не рассматривается как внутреннее противоречие теории; из анализа, представленного в работе, следует, что по существу противоречия и нет. В работе рассмотрены оба основных типа моделей вязкоупругости, а именно: модели типа Фойхта и модели типа СВУМ с частным случаем модели Максвелла. Этим основным типам вязкоупругости присущи совершенно разные свойства, что особенно существенно проявляется в случае огромной вязкости. Материалы типа Фойхта в этом случае по своему поведению приближаются к поведению очень вязкой жидкости, а материалы типа СВУМ приближаются к поведению упругого материала. В работе доказано, что в устойчивых механических системах, состоящих из материала типа Фойхта, собственные колебания при достаточно большой вязкости невозможны, а собственные движения – это медленные монотонно затухающие движения.

Наоборот, в системах, состоящих из материала типа СВУМ, собственные колебания существуют при сколь угодно большой вязкости; они, в отличие от чистой упругости, затухающие, но чем больше вязкость, тем это затухание меньше. При огромной вязкости их поведение почти неотличимо от поведения упругих систем, что и оправдывает использование уравнений теории упругости и объясняет их адекватность. *Сочетание огромной вязкости и существования динамических явлений в устойчивом состоянии систем доказывает, что типом вязкоупругости, присущим геоматериалам соответствующей части земных недр, является именно СВУМ, а вязкоупругость типа Фойхта упомянутым сочетанием исключается.*

Переходя к рассмотрению неустойчивости, заметим, что неустойчивость возникает при некотором (зачастую, небольшом) изменении параметров в системе, которая до этого была устойчивой и состояла из материала типа СВУМ. При небольшом изменении внешних и внутренних параметров тип вязкоупругости материала остается прежним. Следовательно, в соответствии с предложенным и обоснованным критерием отбора, модели именно такого типа должны использоваться при исследовании характера развития неустойчивости в геосистемах земных недр с огромной вязкостью. Теоретическое исследование (методом, предложенным в [6]) характера развития неустойчивости на основе модели типа СВУМ представлено в заключительной части работы. Рассмотрены три случая, определяемые свойствами УСС и УСС-2; результаты исследования, приведенные ниже, во всех трех случаях оказываются совершенно различными.

Первый случай: УСС неустойчива. Неустойчивость УСС развивается динамически, и темп этого развития определяется степенью закритичности ее положение неустойчивого равновесия и инерционными свойствами системы. Исследование показало, что ВУС тоже неустойчива, и при любой вязкости темп ее ухода от положения равновесия превышает темп ухода соответствующей УСС. При стремлении вязкости к бесконечности темп ухода для ВУС стремится сверху к темпу ухода для УСС. Этот парадоксальный теоретический результат имеет большое прикладное значение, т.к. доказывает, что в реальных земных недрах, несмотря на огромную вязкость, возможны достаточно быстрые процессы трансформации существующих геомассивов. В ходе таких процессов могут происходить опасные разрушительные явления.

Второй случай: УСС устойчива, а УСС-2 неустойчива. В этом случае ВУС неустойчива, но неустойчивость развивается медленно, и при стремлении вязкости к бесконечности темп ухода от положения равновесия стремится к нулю. Заметим, что в этом и только в этом случае наличие вязкости уменьшает темп развития неустойчивости, и тем в большей степени, чем больше вязкость. Это коррелирует с распространенными представлениями о влиянии вязкости на характер развития неустойчивости и о применимости модели вязкой жидкости для описания данного процесса. Учитывая тот факт, что аномальная стратификация зачастую характеризуется весьма умеренным уменьшением плотности с глубиной, а сдвиговые жесткости геоматериалов достаточно велики, приходим к выводу, что рассматриваемый случай, будучи частным в смысле теории, реально весьма распространен в земных недрах, и это оправдывает использование по отношению к нему модели вязкой жидкости (которая в других случаях заведомо неприменима в силу ее несовместимости с реальными динамическими явлениями). Этому теоретическому случаю соответствуют геомассивы, глобальные изменения которых происходят крайне медленно.

Третий случай: УСС-2 (а значит, и УСС) устойчива. ВУС тоже устойчива, а соответствующие реальные геомассивы не будут претерпевать глобальных изменений.

Одним из главных результатов работы является вывод о том, что неустойчивость УСС влечёт за собой динамическое развитие неустойчивости соответствующей ВУС, причем при очень большой вязкости геоматериалов исследование неустойчивости УСС может рассматриваться как адекватное исследование динамики неустойчивости ВУС. В предыдущих работах авторов, посвященных исследованию устойчивости и неустойчивости стратифицированных упругих механических систем в поле силы тяжести [8–11], были получены строгие результаты о наличии устойчивости или неустойчивости на основе данных о распределении плотности и упругих параметров в изучаемой системе. В случае неустойчивости упругой системы методы динамической теории упругости позволяют находить или оценивать темп ухода от положения неустойчивого равновесия аналогично тому, как находятся или оцениваются частоты собственных колебаний в случае устойчивости [5]. Результаты данной работы, а также работы авторов [6], означают возможность использования и полноценного переноса на случай реальных

вязкоупругих геосистем, характеризуемых очень большой вязкостью геоматериала, тех значений скоростей развития неустойчивости, которые присущи соответствующим УСС. Такая методика оценки упомянутых скоростей может быть реализована как аналитически, так и численно в геодинамических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М.: Недра, 1965. 379 с.
2. Cathles L. M. The viscosity of the Earth's mantle. Princeton Univ. Press, 1975. 386 p.
3. Трудсделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965.
5. Gurtin M. The linear theory of elasticity // Handbuch der Physik. V. 6a/2. P. 1–295. Berlin: Springer Verlag, 1972.
6. Рыжак Е. И., Синюхина С. В. О влиянии вязкости на развитие неустойчивости в аномально стратифицированных геосистемах // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. 2023. Т. 508. № 2. С. 258–264.
7. Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
8. Ryzhak E. I., Sinyukhina S. V. On stability and instability of stratified elastic solids in a gravity field // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2022. V. 142. 103990. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103990>
9. Синюхина С. В. О влиянии сдвиговой жесткости и сжимаемости на устойчивость тяжелых стратифицированных геомассивов // Физика Земли. 2022. № 2. С. 155–160. <https://doi.org/10.31857/S0002333722020119>
10. Рыжак Е. И., Синюхина С. В. О неустойчивых изостатических стратификациях тяжелых геомассивов // Доклады Российской академии наук. Науки о Земле. 2021. Т. 500. № 1. С. 53–57. <https://doi.org/10.31857/S2686739721090164>
11. Рыжак Е. И., Синюхина С. В. Об устойчивости стратифицированных упругих геосистем в поле силы тяжести // ДАН (Геофизика). 2019. Т. 489. № 3. С. 29–302. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524893298-302>

ON THE CRITERION FOR SELECTING THE MODELS OF VISCOELASTICITY FOR DESCRIPTION OF THE UNSTABLE BEHAVIOR OF GEOSYSTEM

E. I. Ryzhak[#], S. V. Sinyukhina

Presented by Academician of the RAS A.O. Gliko on August 13, 2024.

Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences

[#]*E-mail: E_I_Ryzhak@mail.ru*

The fundamental criterion for selecting the models of viscoelasticity for theoretical reproduction of unstable behavior of geosystems is the appropriateness of such models (with regard for extremely high inherent viscosity of geomaterials) for description of real wave processes in the same geosystems prior to the onset of instability. In the case of high viscosity, it is substantiated the fundamental inappropriateness of models of the Voigt type and the fundamental appropriateness of models of the type of standard viscoelastic material (with the particular case of the Maxwell model). It is proven that in the case of instability of the elastic comparison system, the instability of corresponding viscoelastic system develops dynamically, and even faster than the instability of the elastic comparison system.

Keywords: anomalous density distribution, criterion for selecting the models of viscoelasticity, the rate of development of instability