

УДК 532.5

## ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ РАЗЛИВОВ ПО ВОДЕ ПЯТЕН НЕФТЕПРОДУКТОВ

© 2023 г. А. В. Кистович<sup>1,\*</sup>, Т. О. Чаплина<sup>1,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 31.03.2023 г.

Поступило 31.03.2023 г.

После доработки 04.04.2023 г.

Принято к публикации 04.04.2023 г.

Экспериментально и теоретически исследован процесс квазиодномерного растекания пятен нефтепродуктов по поверхности воды. В основе теоретической модели лежит приближенное уравнение, полученное при использовании законов сохранения массы разлившегося продукта и полной энергии системы. Представлены приближенные решения этого уравнения и результаты экспериментальных исследований по растеканию в узком протяженном контейнере машинного масла и сырой нефти, и показано их хорошее соответствие теории. Проведено сравнение с процессом двумерного осесимметричного растекания пятна таких же нефтепродуктов.

**Ключевые слова:** моделирование, квазиодномерное растекание, машинное масло, сырая нефть, коэффициент сопротивления формы

**DOI:** 10.31857/S2686739723600662, **EDN:** WGEZIL

Экспериментальному и теоретическому изучению растекания нефти и нефтепродуктов посвящена обширная научная литература, из которых к наиболее известным относятся работы [1–8]. Упомянутые работы содержат, ставшее почти обязательным, сравнение экспериментальных результатов с теоретическими предсказаниями, что связано с полуэмпирической природой математических моделей распространения. По этой причине необходимо проведение более глубокого изучения модели распространения, самая продвинутая версия которой, достигнутая в [6], все еще недостаточно точна для требуемого уровня понимания процессов, происходящих при распространении нефтепродуктов в различных природных условиях. Представленная в [9] простая модель осесимметричного радиального растекания, основанная на исследовании динамики полной энергии системы “вода–нефтепродукт”, показала хорошее совпадение экспериментальных и теоретических результатов. В большинстве естественных ситуаций разливы нефтепродуктов происходят на двумерной поверхности (открытые водные пространства заливов, озер, морей и т.д.), но также возможны и особые условия (каналы,

реки, узкие аквариумы и т.д.), когда поверхность разлива можно считать одномерной [7, 8]. В данной работе представлена, основанная на энергетическом подходе, упрощенная математическая модель, позволяющая исследовать основные динамические параметры такого типа растекания. При этом химический состав и все термодинамические параметры сред считаются постоянными величинами, масса растекающегося пятна предполагается неизменной, все среды однородны, изотропны и несжимаемы.

Ниже представлен приближенный расчет параметров разлива, в основу модели которого положена форма нефтяного пятна в виде полосы, ширина  $D$  которой постоянна, а его длина  $L(t)$  вдоль оси  $x$  и толщина  $h(t)$  вдоль оси  $z$  являются функциями времени. Полоса и нижележащая вода ограничены непроницаемой стенкой при  $x = 0$ . Структура течения нефти внутри полосы такова, что в надводной части жидкие частицы нефти движутся вниз и от стенки, а в нижней части — вверх и от стенки. Этот тип течения находится в соответствии с движением поверхностей пятна при разливе: верхняя граница (граница раздела “нефть–воздух”) движется вниз, а нижняя (граница раздела “нефть–вода”) движется вверх.

Потенциальная энергия рассматриваемой системы имеет вид

$$\Pi = \frac{M_o g}{2} h(1 - \rho), \quad (1)$$

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия

\*E-mail: kavmendeleevo@mail.ru

\*\*E-mail: tanya.75.06@mail.ru

где  $M_o$  — масса нефти, постоянная величина;  $\rho = \rho_o/\rho_w$  при этом  $\rho_o, \rho_w$  — плотности нефти и воды соответственно.

Поверхностная энергия задается выражением

$$E_S = LD(\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}) = M_{og} \frac{\lambda_s^2}{h} \text{sign}(\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}), \quad (2.13)$$

где  $\lambda_s = \sqrt{\frac{\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}}{\rho_o g}}$  — капиллярная постоянная контактной линии “нефть–вода–воздух”,  $\sigma_{ij}$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела  $i$ -й и  $j$ -й сред.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии нефти и воды и имеет вид

$$T = \frac{D}{2} \left[ \rho_w \int_{L-H}^0 \int_{L-H}^0 \mathbf{w}^2 dx dz + \rho_w \int_0^L \int_{-H}^{h_-} \mathbf{w}^2 dx dz + \rho_o \int_0^L \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{v}^2 dx dz \right], \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  — поля скорости в нефти и воде соответственно;  $H$  — глубина воды;  $h_{\pm}(t)$  — вертикальные координаты верхней и нижней границ нефтяного пятна в момент времени  $t$ , причем  $h(t) = h_+(t) - h_-(t)$ .

Скорость вязкой диссипации энергии в системе задается выражением

$$\dot{E}_v = \frac{D}{2\eta_w} \left[ \int_{L-H}^0 \int_{L-H}^0 \Sigma_w dx dz + \int_0^L \int_{-H}^{h_-} \Sigma_w dx dz \right] + \frac{D}{2\eta_o} \int_0^L \int_{h_-}^{h_+} \Sigma_o dx dz, \quad (4)$$

где  $\Sigma_i = \sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + \sigma_{zz}^2$ , причем элементы тензора вязких напряжений вычисляются для  $i$ -й среды.

Таким образом, имеет место

$$\begin{aligned} \Sigma_w &= 2\eta_w^2 \left[ 2(\partial w_x / \partial x)^2 + (\partial w_x / \partial z + \partial w_z / \partial x)^2 + 2(\partial w_z / \partial z)^2 \right] \\ \Sigma_o &= 2\eta_o^2 \left[ 2(\partial v_x / \partial x)^2 + (\partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x)^2 + 2(\partial v_z / \partial z)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение динамики энергии системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (T + \Pi + E_S) = -\dot{E}_v. \quad (6)$$

Для того, чтобы система уравнений (1–6) приводила к конструктивным результатам, необходимо

задать моделью поля скорости в нефти и воде.

Поле скорости в нефти должно удовлетворять граничным условиям вида

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=L(t)} = \dot{L}(t), \quad v_z|_{z=h_{\pm}(t)} = \dot{h}_{\pm}(t), \quad (7)$$

где точка над символом обозначает производную по времени,

$$\begin{aligned} w_x|_{x=0} &= 0, \quad w_x|_{x=L, z \in [h_-, 0]} = \dot{L}, \quad w_z|_{z=0, r > L} = 0, \\ w_z|_{z=h_-, r \leq L} &= \dot{h}_-, \quad w|_{x=\infty} = 0, \quad w|_{z=-H} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Распределение скорости в нефти с учетом вязкого увлечения воды задается выражением [9]

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\dot{L}}{L} x (1 - \kappa_{ow} \text{erfc}(\zeta_o)) \\ v_z &= \dot{h}_- - 2 \frac{\dot{L}}{L} \sqrt{v_o t} \left[ \zeta_o (1 - \kappa_{ow} \text{erfc}(\zeta_o)) + \frac{\kappa_{ow}}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_o^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

а в воде распределение скорости при  $0 \leq x \leq L(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\dot{L}}{L} x \kappa_{wo} \text{erfc}(\zeta_w) + \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} \\ w_z &= 2\kappa_{wo} \frac{\dot{L}}{L} \sqrt{v_w t} \left[ \zeta_w \text{erfc}(\zeta_w) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_w^2} \right] + \frac{\partial \Phi_w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (10)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \zeta_o &= \frac{z - h_-}{2\sqrt{v_o t}}, \quad \zeta_w = \frac{h_- - z}{2\sqrt{v_w t}}, \\ \kappa_{ow} &= \frac{\rho_w \sqrt{v_w}}{\rho_o \sqrt{v_o} + \rho_w \sqrt{v_w}}, \quad \kappa_{wo} = 1 - \kappa_{ow}, \end{aligned} \quad (11)$$

при этом  $v_o, v_w$  — кинематические вязкости нефти и воды соответственно.

Расчет кинетической энергии по соотношению (3) дает величину главного члена (без учета той части кинетической энергии воды, которая обусловлена сопротивлением формы нефтяного пятна)

$$\begin{aligned} T &= \frac{M_o \alpha^2}{6} \dot{L}^2, \quad \alpha^2 = (1 - \kappa_{ow} \text{erfc}(\zeta_h))^2, \\ \zeta_h &= \frac{h}{2\sqrt{v_o t}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Мощность производства кинетической энергии воды за счет сопротивления формы нефтяного пятна при его растекании определяется выражением

$$P_{kw} = C_{sh} \dot{L}^2, \quad (13)$$

где  $C_{sh}$  — коэффициент сопротивления формы.

Анализ составляющих уравнения (6) и использование приближений, подобных тем, которые были проведены в случае с азимутально симметричным пятном [9], приводят к уравнению вида

$$\ddot{L} + 2a^2\dot{L} - \frac{b^2}{L^2} + c^2 \operatorname{sign}(\sigma) = 0, \quad (14)$$

где введены обозначения

$$a^2 = \frac{3C_f}{2M_o\alpha^2}, \quad b^2 = \frac{3gV(1-\rho)}{2D\alpha^2}, \quad c^2 = \frac{3gD\lambda_s^2}{V\alpha^2}. \quad (15)$$

В качестве начальных условий для уравнения (14) выбираются значения длины разлива  $L$  и скорости его края  $\dot{L}$  в некоторый начальный момент времени

$$L|_{t=0} = L_0, \quad \dot{L}|_{t=0} = L_1. \quad (16)$$

$$L = \frac{3L_0}{2} + \frac{e^{-a^2t}}{\rho} \begin{cases} L_1 \sin(\rho t) - \frac{L_0\rho}{2} \left( \cos(\rho t) + a^2 \frac{\sin(\rho t)}{\rho} \right), & a^4 - \frac{2b^2}{L_0^3} < 0 \\ L_1 \sinh(\rho t) - \frac{L_0\rho}{2} \left( \cosh(\rho t) + a^2 \frac{\sinh(\rho t)}{\rho} \right), & a^4 - \frac{2b^2}{L_0^3} > 0, \end{cases} \quad (18)$$

где  $\rho = \sqrt{a^4 - 2b^2/L_0^3}$ .

На малых временах оба соотношения (18) описывают единое поведение размера нефтяного пятна во времени

$$L = L_0 + L_1 t + \frac{b^2 - 2L_1 L_0^2 a^2}{2L_0^2} t^2 + o(t^2),$$

которое определяется относительными вкладами гравитационных, инерциальных эффектов и явлением сопротивления формы нефтяного пятна.

I.2. Вблизи положения равновесия решение принимает вид

$$L = L_* + e^{-a^2t} \begin{cases} A \cos(\rho t) + B \sin(\rho t), & a^4 - \frac{2b^2}{L_*^3} < 0 \\ A \cosh(\rho t) + B \sinh(\rho t), & a^4 - \frac{2b^2}{L_*^3} > 0, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\rho = \sqrt{a^4 - 2b^2/L_*^3}$ .

II. Теперь рассматривается случай разлива неограниченных размеров, когда  $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ .

Положение равновесия отсутствует.

II.1. Начальные моменты времени разлива. В этом случае так же, как и в случае I.1 толщина нефтяного пятна  $h$  существенно больше капиллярной постоянной  $\lambda_s$  и искомое решение совпадает с решением (18).

I. Сначала рассматривается случай разлива конечных размеров, когда  $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ . Положение равновесия задается величиной  $L_* = c/b$ .

I.1. Начальные моменты времени разлива. В этом случае толщина нефтяного пятна  $h$  существенно больше капиллярной постоянной  $\lambda_s$  и последним членом в уравнении (2.19) можно пренебречь, так что справедливо приближенное уравнение

$$\ddot{L} + 2a^2\dot{L} - \frac{b^2}{L^2} = 0, \quad (17)$$

решение которого имеет вид

II.2. На больших временах, когда  $L \gg L_*$ , в уравнении (14) можно пренебречь членом  $b^2/L^2$ , в результате чего это уравнение приобретает вид

$$\ddot{L} + 2a^2\dot{L} - c^2 = 0. \quad (20)$$

Пусть в некоторый “начальный” момент времени  $t = t_*$  (отличающийся от начального момента разлива, чтобы выполнялось условие  $L \gg L_*$ ) и при  $t \rightarrow \infty$  выполняются условия

$$L|_{t=t_*} = L_0, \quad \dot{L}|_{t=t_*} = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} L = \infty. \quad (21)$$

Тогда решение задачи (20, 21) представимо в форме

$$L = L_0 + \frac{c^2}{4a^4} \left( 2a^2(t - t_*) - 1 + e^{-2a^2(t-t_*)} \right) + \frac{L_1}{2a^2} \left( 1 - e^{-2a^2(t-t_*)} \right), \quad (22)$$

причем, согласно выражению для скорости роста разлива, получаемого дифференцированием (22),

$$\dot{L} = \frac{c^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-2a^2(t-t_*)} \right) + L_1 e^{-2a^2(t-t_*)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{c^2}{2a^2}, \quad (23)$$

на больших временах имеет место линейное приращение площади разлива, что отличается от экспоненциального приращения площади аксиально симметричного нефтяного пятна [9, 10].

В эксперименте использовалось машинное масло Volga M8B-SAE 20 API ( $\rho_o = 883.7$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_o = 3.34 \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ ) и сырая нефть Мамонтовского месторождения ( $\rho_o = 878.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_o = 2.15 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, при темпе-



Рис. 1. Фото экспериментальной кюветы сверху.

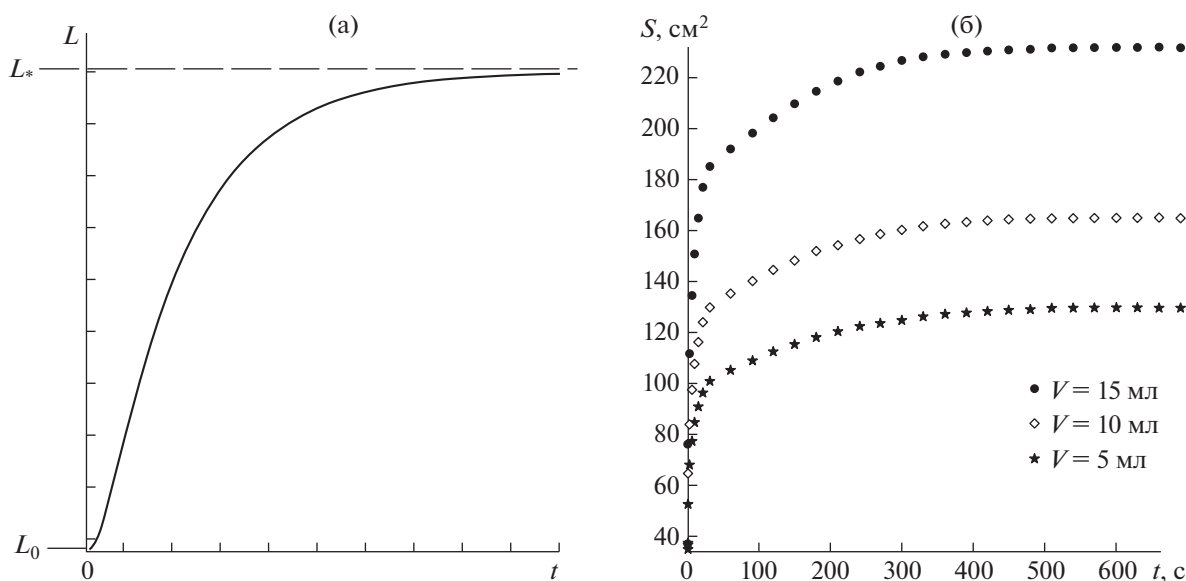


Рис. 2. Ограниченный рост пятна машинного масла. Теория (18) – (а), эксперимент – (б).

ратуре  $T = 20^\circ\text{C}$ ). В опытах использовался пластиковый контейнер ( $0.29 \times 0.08 \times 0.08$  м), который заполнялся дегазированной водой, температурой  $T = 20^\circ\text{C}$ .

Экспериментальный метод включал нанесение различных количеств (5, 10, 15 мл) моторного масла Volga M8B-S AE 20 API и сырой нефти Мамонтовского месторождения на поверхность воды площадью  $37.35 \text{ см}^2$ , ограниченной пластиковой перегородкой, после устранения которой растекание происходит только в одном направлении.

На фотографии рис. 1 показана экспериментальная кювета в первые моменты времени после устранения ограничивающей перегородки. В левой части кюветы нефть черного цвета начинает свое движение из начального положения, в правой части видна свободная поверхность воды, еще не занятая растекающейся нефтью.

Ход экспериментов записывался с помощью цифровой камеры в автоматическом режиме, съемка велась с частотой 360 кадров в минуту, а полученные последовательности кадров обрабатывались и анализировались. Положение пятна

нефтепродуктов регистрировали с использованием метода фотометрии обработанных изображений, полученных из исходных кадров методами пакетной обработки.

Рисунок 2 иллюстрирует поведение размера пятна нефтепродукта в случае, когда выполняется условие  $a^4 - 2b^2/L_*^3 > 0$  (машинное масло) и возможно положение равновесия. Здесь и далее экспериментальные результаты представлены после численной обработки методом [11], устраняющим погрешности измерений при наличии различных временных масштабов, проявляющихся в исследуемом явлении. Рисунок 2 показывает хорошее качественное совпадение теоретических и экспериментальных данных изменения площади масляного пятна. Количественное сравнение результатов крайне затруднено отсутствием необходимых численных значений физических характеристик нефтепродуктов, так как производители машинных масел и нефти не могут их предоставить. По этой же причине не указаны количественные отсчеты на теоретических графиках (рис. 3 а).

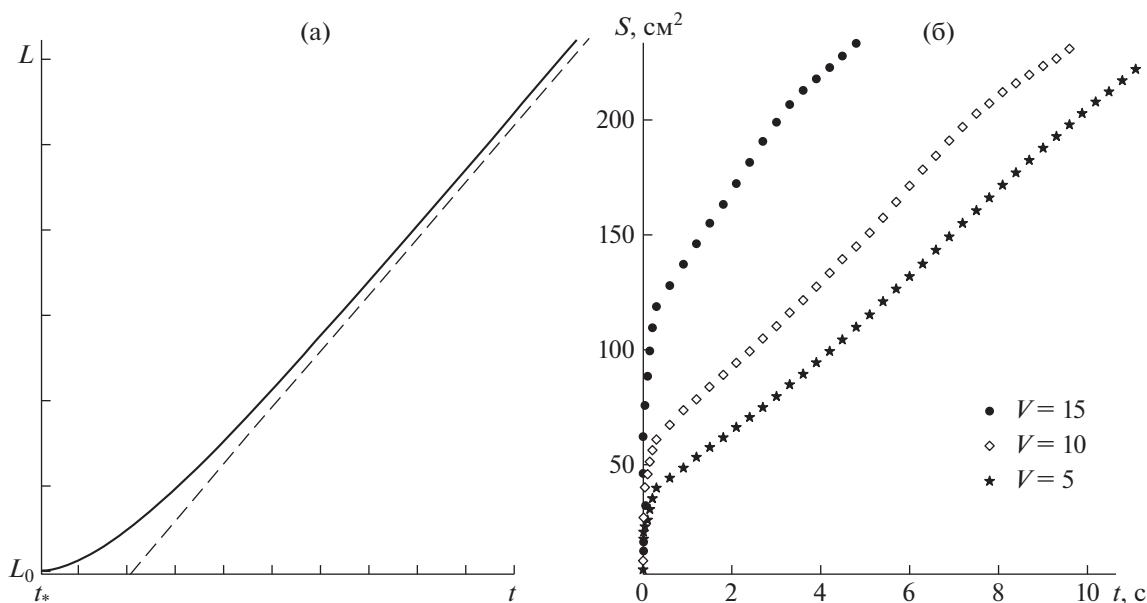


Рис. 3. Неограниченный рост нефтяного пятна. Теория (22) для больших времен — (а), эксперименты для разных объемов сырой нефти — (б).

При обратном отношении  $a^4 - 2b^2/L_*^3 < 0$  изменение размеров нефтяного пятна отличается затухающим колебательным характером вблизи положения равновесия. Затухание колебаний связано с генерацией движения воды за счет сопротивления формы нефтяного пятна при его распространении по поверхности воды. Необходимо отметить, что в рассмотренных случаях характер поведения размера пятна качественно совпадает с поведением площади нефтяного пятна при аксиально симметричном разливе [9, 10].

Результаты теоретических расчетов и экспериментов с сырой нефтью приведены на рис. 3 а и б соответственно.

Отклонение закона роста площади пятна от линейного на конечных тапах разлива (рис. 3 б) связано с приближением края пятна к концу экспериментального контейнера, где структура течения в воде заведомо отличается от теоретической модели, в которой контейнер имеет неограниченные размеры.

Сравнение графиков рис. 3 а, б показывает совпадение теоретических и экспериментальных результатов — на основной и завершающей стадиях роста нефтяного пятна увеличение его площади происходит по линейному закону, в отличие от экспоненциального закона роста, наблюдаемом при двумерном осесимметричном разливе [9, 10].

Подобно двумерному осесимметричному растеканию квазиодномерное растекание проявляет наличие тех же характерных режимов: ограниченное растекание с монотонным или колебатель-

ным характером стремления к предельному размеру пятна машинного масла и неограниченное растекание сырой нефти.

В отличие от неограниченного двумерного осесимметричного растекания сырой нефти, когда скорость роста площади пятна подчиняется экспоненциальному закону [9, 10], в одномерном случае имеет место линейная зависимость площади от времени.

#### ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Госзадания FFGN-2023-0006.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fay J.A. The spreading of oil slicks on a calm sea from oil on the sea. By ed. Hoult D.P. 1969. Plenum Press. New York. P. 53–64.
2. Garrett W.D., Berger W.R. Environment Science Technologies. 1970. V. 4. P. 123.
3. Cross R.H., Hoult D.P. Collection of oil slicks. By ed. Waterways J. Harbours and coastal engineering division, A.S.C.E. 1971. V. 97. P. 313.
4. Hoult D.P. Oil spreading on the sea//Annual Review of Fluid Mechanics. 1972. V. 4. P. 341–368.
5. Buckmaster J. Viscous-gravity spreading of an oil slick//Journal of Fluid Mechanics. 1973. V. 59. Part 3. P. 481–491.
6. DiPietro N.D., Huh C., Cox R.G. The hydrodynamics of the spreading of one liquid on the surface of another //

- Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 84. Part 3. P. 529–549.
7. *Hoult D.P., Suchon W.* The spread of the oil in a channel. Fluid Mechanics Laboratory, Department of Mechanics Engineering, Massachusetts Institute of Technology. 1970. 25 p.
  8. *Huh C., Inoue M., Mason S.G.* Unidirectional spreading of one liquid on the surface of another//Canadian Journal of Chemistry Engineering. 1975. V. 53. P 367–371.
  9. *Кистович А.В., Чаплина Т.О., Пахненко В.П.* Радиальное растекание нефтепродуктов по поверхности воды// Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86. № 6. С. 956–974.
  10. *Кистович А.В., Чаплина Т.О., Пахненко В.П.* Растекание технических масел и сырой нефти по поверхности воды// Доклады РАН. Науки о Земле. 2023. Т. 508. № 2. С. 290–296.  
<https://doi.org/10.31857/S2686739722601211>
  11. *Солодкий Д.А., Кистович А.В.* Модифицированный сдвиговый алгоритм обработки измерительных данных// Измерительная техника. 2014. № 11. С. 43–47.  
<https://doi.org/10.1007/s11018-015-0622-5>

## DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL WATER SPILLS OIL PRODUCT STAINS

**A. V. Kistovich<sup>a,#</sup> and T. O. Chaplina<sup>a,##</sup>**

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>#</sup>*E-mail: kavmendeleevo@mail.ru*

<sup>##</sup>*E-mail: tanya75.06@rambler.ru*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov March 31, 2023

The process of quasi-one-dimensional spreading of oil product spots on the water surface has been experimentally and theoretically investigated. The theoretical model is based on an approximate equation obtained using the laws of conservation of the mass of the decomposed product and the total energy of the system. Approximate solutions of this equation and the results of experimental studies on the spreading of machine oil and crude oil in a narrow extended container are presented, and their good compliance with the theory is shown. A comparison is made with the process of two-dimensional axisymmetric spreading of a spot of the same petroleum products.

**Keywords:** modeling, quasi-one-dimensional spreading, engine oil, crude oil, resistance shape coefficient