

УДК 551.51;551.55

О МЕХАНИЗМЕ ГЕНЕРАЦИИ СПИРАЛЬНОСТИ ВОСХОДЯЩЕГО ПОТОКА, ОБУСЛОВЛЕННОГО НЕОДНОРОДНЫМ ТРЕНИЕМ НА ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2023 г. Л. Х. Ингель^{1,3}, член-корреспондент РАН А. А. Макоско^{2,3,*}

Поступило 05.10.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принято к публикации 24.10.2022 г.

Неоднородное трение на подстилающей поверхности приводит к возникновению горизонтальной дивергенции, вертикальных движений и генерации спиральности. В работе осуществлена оценка значимости этого механизма, для чего представлена аналитическая модель, которая позволяет установить некоторые общие закономерности и оценить амплитуды соответствующих возмущений в зависимости от значений параметров. В частности, показана возможность генерации заметных вертикальных движений и вклада в спиральность, выходящего далеко за пределы пограничного слоя.

Ключевые слова: неоднородное сопротивление, подстилающая поверхность, пограничный слой атмосферы, вертикальные движения, спиральность, аналитическая модель

DOI: 10.31857/S2686739722602137, EDN: SWDYDE

ВВЕДЕНИЕ

Фактор спиральности атмосферных течений в последние десятилетия привлекает все большее внимание. Анализ спиральности активно применяется для диагноза и прогноза атмосферных процессов. В частности, анализируется спиральность течений в пограничном слое атмосферы (ПСА) (см., например, [1–4] и библиографию в этих работах). Стандартные горизонтально-однородные модели ПСА позволяют рассчитать спиральность, обусловленную горизонтальными составляющими скорости. Но особый интерес представляют ситуации с горизонтально-неоднородным ПСА, когда имеется и вертикальная составляющая скорости, вклад которой в спиральность (“updraft helicity” [5, 6] – дословно “спиральность восходящего потока”) бывает особенно важен.

Один из возможных механизмов генерации завихренности и спиральности в ПСА – взаимодействие горизонтальных течений с неоднородностями трения на нижней границе. Этот механизм, насколько нам известно, практически не исследован.

Ввиду сложности соответствующих гидродинамических задач, их аналитическое исследование весьма затруднено. В настоящей работе предложен подход, который позволяет сделать аналитические оценки возникающих вертикальных движений, а также их вклада в спиральность, и тем самым устранить недооцененность механизма генерации спиральности восходящего потока, обусловленной неоднородным трением на подстилающей поверхности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Воспользуемся моделью пограничного слоя с квадратичным трением на нижней границе $z = 0$ [7–9] (вертикальная ось z направлена вверх). В такого типа моделях предполагается, что уровень $z = 0$ соответствует не подстилающей поверхности, а например, верхней границе приземного (приводного) слоя или уровню стандартных метеорологических наблюдений, так что на этом уровне допускается некоторое “проскальзывание”.

Постановка горизонтально-однородной задачи (при горизонтально-однородном сопротивлении) выглядит следующим образом:

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f v = 0, \quad K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0, \quad (1)$$

¹Научно-производственное объединение “Тайфун”, Обнинск, Россия

²Российская академия наук, Москва, Россия

³Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: aamacosco@mail.ru

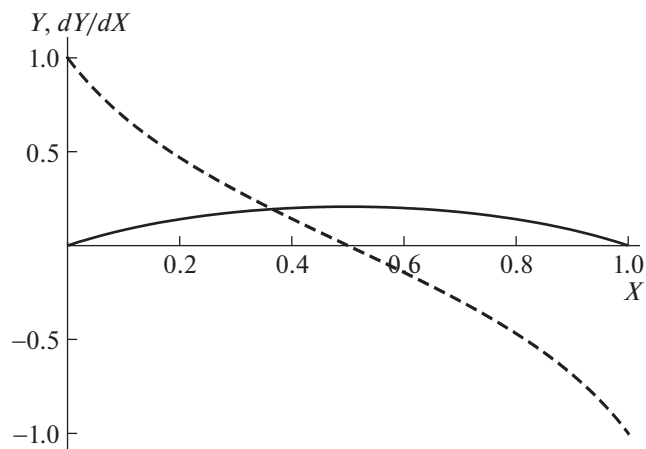


Рис. 1. Зависимость Y (сплошная линия) и dY/dX (штриховая линия) от X .

$$K \frac{\partial u}{\partial z} = c_D u (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad (2)$$

$$K \frac{\partial v}{\partial z} = c_D v (u^2 + v^2)^{1/2} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$u \rightarrow u_g, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь u, v — составляющие скорости в направлении горизонтальных осей x, y соответственно; u_g — скорость геострофического ветра, направленного вдоль оси x ; f — параметр Кориолиса; K — коэффициент кинематической вязкости (предполагается здесь постоянным); c_D — коэффициент сопротивления.

Решение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u &= u_g \left[1 + \left(Y \sin \frac{z}{h} - X \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right], \\ v &= u_g \left(X \sin \frac{z}{h} + Y \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $h = (2K/f)^{1/2}$; X, Y — безразмерные постоянные интегрирования, которые, с учетом нижних граничных условий, должны удовлетворять нелинейной алгебраической системе уравнений:

$$J(X + Y) = (1 - X) \left[(1 - X)^2 + Y^2 \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$J(X - Y) = Y \left[(1 - X)^2 + Y^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где введен безразмерный неотрицательный параметр $J = (fK/2)^{1/2} / (c_D |u_g|)$. Последний при реальных значениях параметров пограничного слоя обычно порядка единицы (например, $J \approx 1.6$ при $K = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $f = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $c_D = 10^{-3}$, $u_g = 10 \text{ м/с}$). Как показано в [8], в зависимости от значения параметра J , геометрическое место точек на плос-

кости (X, Y) , отвечающее решению, представляет собой часть окружности, находящуюся в первом квадранте, описываемую уравнением

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} \left[(1 + 4X - 4X^2)^{1/2} - 1 \right], \quad 0 \leq X \leq 1, \\ 0 &\leq Y \leq (\sqrt{2} - 1)/2 \approx 0.207. \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены зависимость $Y(X)$ и производная этой функции.

В предельном случае больших значений c_D значения J малы, $X \approx 1, Y \approx 0$. Это близко к условию прилипания и к экмановской модели пограничного слоя. При малых значениях c_D (слабом сопротивлении) значения J велики, $X \approx 0, Y \approx 0$. Это соответствует “проскальзыванию” на нижней границе.

Пусть теперь трение горизонтально-неоднородно — коэффициент сопротивления c_D , а следовательно, и параметр J , зависят от координаты y . В этом случае приведенное выше решение, строго говоря, нарушается, поскольку в уравнениях динамики не были учтены слагаемые с $\partial u/\partial y, \partial v/\partial y$, которые теперь отличны от нуля. Но при не слишком сильной зависимости от y (критерий ниже будет установлен) это решение приближенно выполняется. Наличие ненулевой горизонтальной дивергенции $\partial v/\partial y$ означает возникновение вертикальных движений.

ОЦЕНКА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

С учетом зависимости от y , необходимо включить в рассмотрение уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где w — вертикальная составляющая скорости. Отсюда следует:

$$w = - \int_0^z \frac{\partial v}{\partial y} dz',$$

(учтено условие непротекания на нижней границе).

С учетом (4), получаем

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{2} h u_g \left\{ \left[1 - \left(\sin \frac{z}{h} + \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right] \frac{dX}{dy} + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + \left(\sin \frac{z}{h} - \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right] \frac{dY}{dy} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

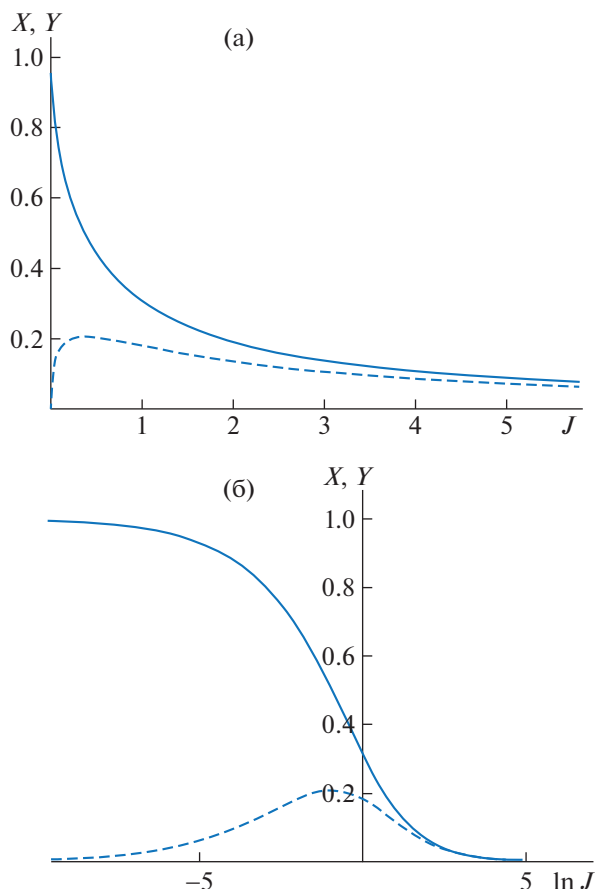


Рис. 2. Зависимость X (сплошные линии) и Y (штриховые линии) от J (а) и $\ln J$ (б).

Входящие в это выражение производные можно представить в виде

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dX}{dJ} \frac{dJ}{dc_D} \frac{dc_D}{dy} = -\frac{J}{c_D} \frac{dX}{dJ} \frac{dc_D}{dy} = -\frac{dX}{d(\ln J)} \frac{d(\ln c_D)}{dy}, \quad (8)$$

$$\frac{dY}{dy} = \frac{dY}{dJ} \frac{dJ}{dc_D} \frac{dc_D}{dy} = \frac{dY}{dX} \frac{dX}{dJ} \frac{dJ}{dc_D} \frac{dc_D}{dy} = \frac{dY}{dX} \frac{dX}{dy}.$$

С учетом этого, выражение (7) можно представить в виде

$$w = \frac{1}{2} h u_g \frac{1}{c_D} \frac{dc_D}{dy} \frac{dX}{d(\ln J)} \left\{ 1 - \left(\sin \frac{z}{h} + \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right) + \left[1 + \left(\sin \frac{z}{h} - \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right] \frac{dY}{dX} \right\}. \quad (9)$$

На рис. 2 представлены зависимости X и Y от J (рис. 2 а) и $\ln J$ (рис. 2 б). Видно, что производные по переменной $\ln J$ максимальны по абсолютной величине при $J \sim 1$. Отметим, что выражение для вертикальной скорости на верхней границе пограничного слоя (при $z \rightarrow \infty$) и в пределе больших значений J для данной задачи ранее было получено в [10].

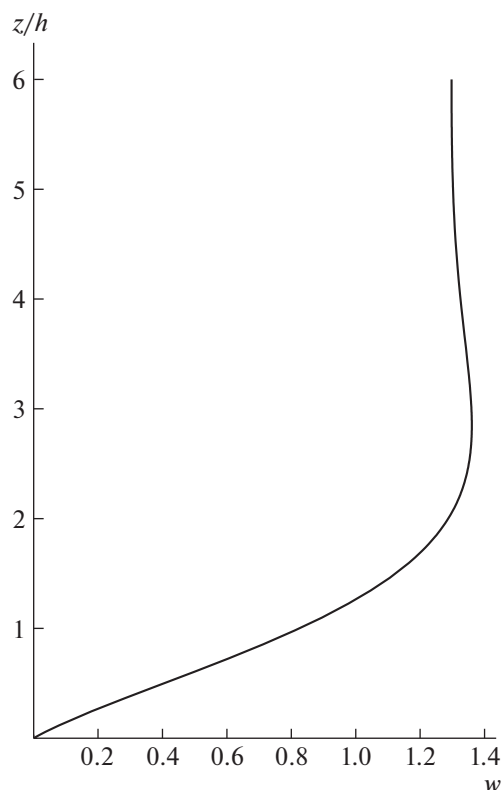


Рис. 3. Безразмерный профиль вертикальной скорости при $J = 1$.

Пусть, например, $K = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $f = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $c_D = 10^{-3}$, $u_g = 15 \text{ м/с}$. В этом случае $h \approx 600 \text{ м}$, $J \approx 1$, $X \approx 0.3$, $dX/dJ \approx dX/d(\ln J) \approx -0.2$, $dY/dX \approx 0.3$. Если при этом величина c_D меняется на 0.5×10^{-3} при изменении y на 100 км , то $|dc_D/dy| \sim 0.5 \times 10^{-8} \text{ м}^{-1}$, и абсолютная величина вертикальной скорости порядка $0.5 \times 10^{-2} \text{ м/с}$. Такие вертикальные движения на больших территориях могут быть значимыми. Отметим, что их знак зависит от знака dc_D/dy . На рис. 3 представлен пример безразмерного вертикального профиля w (выражение в фигурных скобках в (9)) при $J = 1$.

ОЦЕНКА СПИРАЛЬНОСТИ

Выражение для спиральности

$$H = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}$$

($\mathbf{v}$ — вектор скорости) для рассматриваемой однородной по x задачи имеет вид

$$H = -u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (10)$$

Первые два слагаемых отличны от нуля и в горизонтально-однородном пограничном слое. При этом для стандартного экмановского решения ($J = 0$) интегральная спиральность (проинтегрированная по высоте) равна $u_g^2/2$ [1]. При $J \neq 0$ (когда допускается частичное “проскальзывание” на нижней границе) угол поворота ветра в пограничном слое уменьшается, и, соответственно, уменьшается спиральность. (В рамках более простой модели с линейным однородным трением это ранее отмечалось в работе [11]). Можно показать, что в рассматриваемой модели интегральная спиральность в горизонтально-однородном пограничном слое отличается от экмановского решения на фактор $X^2 + Y(2 + Y) \leq 1$. При изменении J от нуля до бесконечности этот фактор монотонно убывает от единицы до нуля.

При горизонтально-неоднородном трении отличны от нуля и два последних слагаемых в (10). Масштабный анализ показывает, что они гораздо меньше первых двух по абсолютной величине (поскольку в числитель входит вертикальная скорость, которая много меньше горизонтальных составляющих, а горизонтальные производные много меньше вертикальных. Но, как выше упоминалось, известна важность этих составляющих спиральности, поэтому имеет смысл их оценить.

Согласно (4) и (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= u_g \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \sin \frac{z}{h} - \frac{\partial X}{\partial y} \cos \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right) = \\ &= u_g \frac{dX}{d(\ln J)} \frac{d(\ln c_D)}{dy} \left(\cos \frac{z}{h} - \frac{dY}{dX} \sin \frac{z}{h} \right) \exp \left(-\frac{z}{h} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Как видно из рис. 1, абсолютное значение производной dY/dX , как и X , Y , не может превышать единицы. Следовательно, выражения в фигурных скобках в (9) и зависящие от z множители в (11) в пограничном слое порядка единицы по модулю. Исходя из этого, можно оценить порядки абсолютных величин двух последних слагаемых в (10):

$$\begin{aligned} \left| u \frac{\partial w}{\partial y} \right| &\sim hu_g^2 \left| \frac{dX}{d(\ln J)} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{c_D} \frac{dc_D}{dy} \right) \right| = \\ &= hu_g^2 \left| \frac{dX}{d(\ln J)} \frac{d^2 \ln c_D}{dy^2} \right|, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left| w \frac{\partial u}{\partial y} \right| \sim hu_g^2 \left(\frac{dX}{d(\ln J)} \right) \left(\frac{d \ln c_D}{dy} \right)^2. \quad (13)$$

Первое из этих выражений заметно больше второго, поскольку малая по абсолютной величине безразмерная величина $dX/d(\ln J)$ входит в (12) в первой степени, в то время как в (13) – во второй. Кроме того, в производную $d^2(\ln c_D)/dy^2$ входит слагаемое

$$\frac{1}{c_D} \frac{d^2 c_D}{dy^2} \sim \frac{1}{L^2} \frac{\Delta c_D}{c_D}, \quad (14)$$

где Δc_D – характерная амплитуда изменения c_D , а L – характерный горизонтальный масштаб вариаций c_D . В (13) же входит величина

$$\left(\frac{1}{c_D} \frac{dc_D}{dy} \right)^2 \sim \frac{1}{L^2} \left(\frac{\Delta c_D}{c_D} \right)^2. \quad (15)$$

Очевидно, что (14) много больше (15), если $\Delta c_D \ll c_D$.

Отметим также, что выражение (13) отлично от нуля только в пограничном слое (поскольку только в нем $\partial u/\partial y$ отлично от нуля). А выражение (12) не убывает с высотой (в пределах применимости рассматриваемой модели).

Итак, основным слагаемым, связанным с неоднородностью сопротивления, в (10) является $u \partial w/\partial y$. Это качественно отличается от обычно рассматриваемых ситуаций, когда генерация спиральности связана с возмущениями плавучести, и существенными являются слагаемые типа последнего в (10) [5, 6].

Для набора параметров, рассмотренного в предыдущем разделе, выражение (12) имеет порядок 10^{-6} м/с². Сравним это, например, со слагаемым в выражении для спиральности $w \partial v/\partial r$ (где v – тангенциальная скорость, r – радиальная координата) в циклоне умеренных широт. Если $w = 10^{-2}$ м/с, $v = 10$ м/с при радиусе 10^3 км, то упомянутое слагаемое порядка 10^{-7} м/с². Таким образом, полученный выше вклад неоднородного сопротивления в спиральность может быть сравним и даже превышать упомянутое слагаемое в циклоне.

О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ РАССМОТРЕННОЙ МОДЕЛИ

При горизонтально-неоднородном трении становятся отличными от нуля не учитываемые в настоящей модели нелинейные адвективные слагаемые в исходных уравнениях, например, $v \partial u/\partial y$. Сравним абсолютную величину этого слагаемого с учтенным слагаемым $f v$. Иными словами, условие применимости: $|\partial u/\partial y| \ll f$. С учетом (11), должно выполняться условие

$$u_g \left| \frac{dX}{d(\ln J)} \frac{1}{c_D} \frac{dc_D}{dy} \right| \sim \frac{u_g}{L} \left| \frac{dX}{d(\ln J)} \right| \frac{\Delta c_D}{c_D} \ll f. \quad (16)$$

В рассмотренном выше численном примере это условие выполняется, хотя и на пределе. Нетрудно показать, что при выполнении (16) относительно малы и другие неучтенные нелинейные адвективные слагаемые.

Безразмерный комплекс

$$\frac{u_g}{fL} \left| \frac{dX}{d(\ln J)} \right| \frac{\Delta c_D}{c_D}$$

является некоторым аналогом числа Россби. Его малость по сравнению с единицей дает основания предполагать незначительность нелинейных адвективных слагаемых по сравнению с кориолисовыми ускорениями, хотя такие оценки и не могут претендовать на строгое математическое доказательство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная аналитическая модель позволяет выразить в явном виде скорость вертикальных движений, возникающих вследствие неоднородного трения, и их вклад в спиральность. Показано, что амплитуда возникающих вертикальных движений может быть заметной. Основной вклад вертикальных движений в спиральность дает слагаемое, которое обычно не учитывается при анализе фактора “updraft helicity”. Таким образом, показано, что механизм генерации спиральности восходящего потока, обусловленной неоднородным трением на подстилающей поверхности, может играть заметную роль при моделировании процессов мезомасштабной циркуляции в ПСА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курганский М.В. О связи между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 5. № 12. С. 1326–1329.
2. Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Дурнева Е.А. О критериях идентификации полярных мезоциклонов // Метеорология и гидрология. 2022. № 4. С. 20–33.
3. Вазаева Н.В., Чхетиани О. Г., Курганский М.В., Каллистратова М.А. Спиральность и турбулентность в атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57. № 1. С. 34–52.
4. Vazueva N.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky M.V. On integral characteristics of polar lows // CLIMATE 2019. // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2020. 606. 012065. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/606/1/012065>
5. Gallo B.T., Clark A.J., Dembek S.R. Forecasting tornadoes using convection-permitting ensembles // Wea. Forecasting. 2016. V. 31. P. 273–295. <https://doi.org/10.1175/WAF-D-15-0134.1>
6. Sobash R.A., Craig S. Schwartz C.S., Romine G.S., Weisman M.L. Next-day prediction of tornadoes using convection-allowing models with 1-km horizontal grid spacing // Wea. Forecasting. 2019. V. 34. P. 1117–1135.
7. Галушко В.В., Орданович А.Е. Двухслойная модель экмановского пограничного слоя атмосферы // Метеорология и гидрология. 1978. № 4. С. 33–34.
8. Ингель Л.Х., Михайлова Л.А. К теории экмановского пограничного слоя с нелинейными граничными условиями // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 7. С. 675–681.
9. Ingel L.Kh. On the nonlinear dynamics of the boundary layer of intense atmospheric vortex // Dynamics of Atmospheres and Oceans // 2005. V. 40. № 4. P. 295–304.
10. Ингель Л.Х. О вертикальных движениях, связанных с неоднородным трением на подстилающей поверхности // Метеорология и гидрология. 2007. № 6. С. 106–109.
11. Вазаева Н.В., Чхетиани О.Г., Кузнецов Р.Д., Каллистратова М.А., Крамар В.Ф., Люлюкин В.С., Кузнецов Д.Д. Оценка спиральности в атмосферном пограничном слое по данным акустического зондирования // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2017. Т. 53. № 2. С. 200–214.

ON THE MECHANISM OF THE UPFLOW HELICITY GENERATION DUE TO INHOMOGENEOUS FRICTION ON THE UNDERLYING SURFACE

L. Kh. Ingel^{a,c} and Corresponding Member of the RAS A. A. Makosko^{b,c,#}

^aResearch and Production Association “Typhoon”, Obninsk, Russian Federation

^bRussian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

^cObukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

[#]E-mail: aamacosco@mail.ru

Inhomogeneous friction on the underlying surface leads to horizontal divergence, vertical motions, and helicity generation. The paper presents an analytical model that allows one to establish some general laws and estimate the amplitudes of the corresponding perturbations depending on the values of the parameters. In particular, the possibility of generating noticeable vertical motions and a contribution to helicity that goes far beyond the boundaries of the boundary layer is shown.

Keywords: inhomogeneous drag, underlying surface, atmospheric boundary layer, vertical motions, helicity, analytical model