

**Координационный Совет научного журнала
«Вестник Российского университета дружбы народов»:**

Филиппов В. М. — ректор РУДН, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАО — *председатель Совета*

Зарюто С. А. — заместитель директора ИПК РУДН — *ответственный секретарь Совета*

Члены Координационного Совета:

Абрамов А. Ю. — директор медицинского института РУДН, доктор медицинских наук, доцент

Балыхина Т. М. — декан факультета повышения квалификации преподавателей русского языка как иностранного РУДН, доктор педагогических наук, профессор

Барбаш В. В. — декан филологического факультета РУДН, доктор филологических наук, профессор

Воскресенский Л. Г. — декан факультета физико-математических и естественных наук РУДН, доктор химических наук, профессор

Давтян М. А. — декан экономического факультета РУДН, доктор экономических наук, профессор

Ефремов А. П. — проректор по учебной работе РУДН, доктор физико-математических наук, профессор

Кирабаев Н. С. — первый проректор — проректор по научной работе РУДН, доктор философских наук, профессор

Мосейкин Ю. Н. — декан экономического факультета РУДН, доктор экономических наук, профессор

Плющиков В. Г. — директор Аграрно-технологического института РУДН, доктор сельскохозяйственных наук, профессор

Пономарев Н. К. — декан инженерного факультета РУДН, кандидат технических наук, доцент

Цвык В. А. — декан факультета гуманитарных и социальных наук РУДН, доктор философских наук, профессор

Черных Н. А. — декан экологического факультета РУДН, доктор биологических наук, профессор

Шаронов В. Н. — директор ИПК РУДН, кандидат физико-математических наук

Якушев В. В. — декан факультета русского языка и общеобразовательных дисциплин РУДН, кандидат химических наук, доцент

Ястребов О. А. — директор юридического института РУДН, доктор юридических наук, профессор

**Индекс журнала в каталоге подписных изданий
Агентства «Роспечать» — 18235**

ISSN Print 2312-9735
ISSN Online 2312-9743

© Российский университет дружбы народов, 2016

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ
«МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА»**

Рыбаков Юрий Петрович — Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики и механики РУДН — *главный редактор*

Севастьянов Леонид Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН — *заместитель главного редактора*

Члены редколлегии

Ильгисонис Виктор Игоревич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, начальник отдела теории плазмы Российского научного центра «Курчатовский институт»

Самуйлов Константин Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Скубачевский Александр Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

Датта Гупта Субхашини (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

Мартикайнен Олли Эрки (Финляндия) — PhD., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

Медведев М. В. (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо (Испания) — профессор Барселонского университета

Саха Биджан (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Чулуунбаатар Очбадрах (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского государственного университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

EDITORIAL BOARD
Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”

Rybakov Yu. P. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia, Head to the Department of Theoretical Physics and Mechanics of PFUR — *Editor-in-Chief of the series*

Sevastianov L. A. — DSc in Physics and Mathematics, professor, professor of the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR — *Vice Editor-in-Chief of the series*

Members of the editorial board

Il’gisonis V. I. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Head to the Department of Plasma Theory in Scientific Center of Russia “Kurchatov Institute”

Samouylov K. E. — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

Skubachevski A. L. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

Datta Gupta Subhashish (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

Martikainen Olli Erkki (ETLA, Helsinki) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy

Medvedev M. V. (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

Ramirez Inostrozo Orlando Raphael (Spain) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

Saha Bijan (Bangladesh) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

Chuluunbaatar Ochbadrah (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics, State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

**Вестник
Российского
университета
дружбы народов**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1993 году

Серия

**Математика. Информатика. Физика
2016, № 3**

Российский университет дружбы народов

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Конюхова Н. Б., Шеина А. А. Об одной вспомогательной нелинейной краевой задаче в теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау и её множественных решениях 5

Математические модели и методы в экономике

Остапов В. А. Агрегированная двухсекторная динамическая модель венчурного инвестирования 21

Математическое моделирование

Гусев А. А., Чулуунбаатар О., Виноцкий С. И., Дербов В. Л. Решение краевых задач для систем ОДУ большой размерности: эталонные расчеты в рамках метода Канторовича 31

Гусев А. А., Чулуунбаатар О., Виноцкий С. И., Хай Л. Л., Дербов В. Л., Гуждж А. Алгоритмы и программы решения краевых задач для систем ОДУ второго порядка с кусочно-постоянными потенциалами: многоканальная задача рассеяния и задача на собственные значения 38

Физика

Рыбаков Ю. П., Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Интегральная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя с большими поперечными числами Грасгофа и однородно распределённым удельным тепловым потоком 53

Рыбаков Ю. П., Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Анализ течения в пристеночной области свободноконвективного турбулентного пограничного слоя 61

Абдулов Н. А., Милантьев В. П. Особенности ускорения ультрарелятивистских электронов мощным лазерным излучением в режиме циклотронного авторезонанса	66
Красовицкий В. Б., Туриков В. А., Камин Д. В. Численное моделирование взаимодействия короткого ионного пучка с плазмой	79
Сведения об авторах	87
Правила оформления статей	89

Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia

SCIENTIFIC JOURNAL

Founded on 1993

Series

Mathematics. Information Sciences. Physics
2016, No 3

Peoples' Friendship University of Russia

CONTENTS

Mathematics

Konyukhova N. B., Sheina A. A. On an Auxiliary Nonlinear Boundary Value Problem in the Ginzburg–Landau Theory of Superconductivity and its Multiple Solutions 5

Mathematical Models and Methods in Economics

Ostapov V. A. Aggregated Dynamic Model of a Two-Sector Economy with Venture Investment 21

Mathematical Modeling

Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitzky S. I., Derbov V. L. Solution of the Boundary-Value Problem for a Systems of ODEs of Large Dimension: Benchmark Calculations in the Framework of Kantorovich Method 31

Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitzky S. I., Hai L. L., Derbov V. L., Gózdź A. Algorithms and Programs for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Second-Order ODEs with Piecewise Constant Potentials: Multichannel Scattering and Eigenvalue Problems 38

Physics

Rybakov Y. P., Cherkasov S. G., Suslov Y. A. Integral Model of Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surface width a Large Lateral Grasgof Number and Homogeneous Heat Flux 53

Rybakov Y. P., Cherkasov S. G., Suslov Y. A. Analysis of the Flow of the Near Wall Region in Natural Convection Boundary Layer	61
Abdulov N. A., Milant'ev V. P. The Peculiarities of Acceleration of Ultra-Relativistic Electrons by the Powerful Laser Radiation at the Regime of Cyclotron Autoresonance	66
Krasovitskiy V. B., Turikov V. A., Kamin D. V. Numerical Simulation of a Short Ion Beam Interaction with Plasma	79
Information about the authors	87
Guidelines for Authors	89

Математика

УДК 519.63

Об одной вспомогательной нелинейной краевой задаче в теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау и её множественных решениях

Н. Б. Колюхова, А. А. Шеина

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Проводятся аналитико-численные исследования однородной нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с кубической нелинейностью и двумя вещественными параметрами, возникающей в теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау. Множественные нетривиальные решения этой задачи, зависящие от указанных параметров, выражаются через эллиптические функции Якоби и описывают стационарные состояния (вблизи критических значений температур) сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины в отсутствие магнитного поля. Задача является «вырожденной» по отношению к исходной нелинейной краевой задаче для сверхпроводящей пластины в магнитном поле и важна для построения алгоритма нахождения всех решений последней в широком диапазоне изменения параметров; изучаемая задача представляет и самостоятельный математический интерес.

Ключевые слова: теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау, стационарные состояния сверхпроводящей пластины в отсутствие магнитного поля, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, однородная краевая задача и её множественные решения

1. Введение. О нелинейной краевой задаче для сверхпроводящей пластины в магнитном поле

Макроскопическая теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау (ГЛ) [1] широко применяется для описания состояний сверхпроводников в магнитных полях вблизи критических значений температур (см., например, [2–4] и цитированную там литературу). В [2], в частности, приведена известная история экспериментального открытия явления сверхпроводимости и описаны первые попытки (менее успешные, чем в [1]) создания теории этого явления.

По современным представлениям в сверхпроводниках, как и в сверхтекучих жидкостях, частицы ведут себя упорядоченно, образуя одну большую квантово-механическую волну (КМВ), и благодаря этому сверхпроводники переносят электричество без сопротивления. Такая большая КМВ описывается «эффективной волновой функцией» [1], которую также называют «параметром порядка»; квадрат этой функции задаёт концентрацию «сверхпроводящих электронов», т.е. отношение числа упорядоченных электронов, образующих единую КМВ, к общему числу электронов в сверхпроводнике.

Одной из интенсивно изучаемых задач теории сверхпроводимости ГЛ является одномерная нелинейная краевая задача (КрЗ), которая описывает стационарные состояния сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины, помещённой в магнитное поле, направленное вдоль пластины. В безразмерных переменных, введённых в [3] (см. также [5]), эта задача для симметричных решений имеет вид:

$$a'' - \psi^2 a = 0, \quad \psi'' + \kappa^2(\psi - \psi^3) - a^2 \psi = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (1)$$

$$a(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad a'(D) = h, \quad \psi'(D) = 0. \quad (2)$$

Здесь все величины вещественны; D , h и \varkappa – безразмерные положительные параметры: D – полуширина пластины, h – напряжённость магнитного поля, \varkappa – параметр теории ГЛ, характеризующий материал сверхпроводника и меняющийся в широком диапазоне; $a(x)$ – потенциал магнитного поля, $\psi(x)$ – эффективная волновая функция, характеризующая КМВ сверхпроводящих электронов в пластине, где величина $\psi^2(x)$ равна концентрации в ней таких электронов:

$$0 \leq \psi^2(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D] \quad (3)$$

(по сравнению с [1], как и в [3, 5], введена другая нормировка h : $h = h_{GL}\varkappa$, так что $a = a_{GL}\varkappa$, и выбрана другая ориентация пластины в магнитном поле).

Случай $\psi = 0$ соответствует нормальной фазе (n -фазе) состояния пластины, а случай $\psi \neq 0$ – сверхпроводящей фазе (s -фазе) её состояния. КрЗ (1), (2) разрешима: при любом h она имеет по крайней мере одно решение $\{a(x), \psi(x)\} = \{hx, 0\}$, которое при $h > 0$ является единственным n -решением этой задачи; «физическое» ограничение (3) выполняется для всех решений КрЗ (1), (2) $\forall \varkappa \neq 0$. Интерес, в частности, представляют фазовые переходы $s \rightarrow n$ и $n \rightarrow s$ для разных значений параметров задачи в режимах усиления или ослабления магнитного поля. Такие переходы описываются с помощью бифуркационных диаграмм состояний – зависимости от величины магнитного поля значений параметра порядка в центре или на краю пластины (и/или значений других физических величин – типа намагниченности пластины, см. [3, 5]).

Под **основным состоянием пластины в магнитном поле** понимается такое, при котором параметр порядка (как функция поперечной координаты) не меняет знак на ширине пластины, т.е. удовлетворяет более сильному ограничению по сравнению с выражением (3):

$$0 \leq \psi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D] \quad (4)$$

(задача (1), (2) с ограничением (4) относится к задачам типа Кнезера).

В [3] (см. также другие статьи автора, цитируемые в [3, 4]) содержится подробное изложение физических представлений автора об основных состояниях сверхпроводящей пластины в магнитном поле; во многом они основаны на численных исследованиях задачи (1), (2), (4). Однако, как подробно поясняется в [5], в этих достаточно многочисленных статьях использовался неудачный численный метод, что привело к получению в них неполных разрывных диаграмм состояний (по признанию автора [3], вид таких диаграмм подвергался сомнениям со стороны В.Л. Гинзбурга, так как противоречил его физической интуиции).

Правильные диаграммы были получены в [5] с помощью другого подхода, предложенного и реализованного группой соавторов-математиков. А именно, в [5, 6] представлены достаточно подробные аналитико-численные исследования множественных решений задачи (1), (2), (4): предложен простой численный метод нахождения всех таких решений в широком диапазоне изменения параметров задачи, в том числе получены не найденные ранее другими методами динамически неустойчивые и неизолированные решения; построены более подробные и точные непрерывные диаграммы состояний пластины, описывающие её переход из сверхпроводящей фазы в нормальную (и наоборот) при усилении (ослаблении) магнитного поля, что позволило детально изучить явление магнитного гистерезиса и эволюцию диаграмм с изменением параметров, и др.; поставлены и изучены спектральные задачи для исследования динамической (не)устойчивости решений в рамках линейной теории возмущений и для априорного нахождения пороговых значений магнитного поля.

К сожалению, автору [3] (а затем и всей группе соавторов [5]) не были известны результаты многочисленных работ математиков по изучению задачи (1), (2), (4)

(поток математических статей продолжается до сих пор), в том числе интересной работы [7], предвосхитившей подход [5] к решению этой задачи. В [7], в частности, доказано строго, что бифуркационная кривая должна быть непрерывна. Более детально некоторые результаты [7] будут обсуждаться нами в другой работе.

Для наших исследований важно, что как математический, так и, возможно, физический интерес (см., например, [8]) представляют и другие решения нелинейной КрЗ (1), (2), отвечающие «возбуждённым» сверхпроводящим состояниям пластины в магнитном поле, когда параметр порядка меняет знак на ширине пластины или плёнки. Такие решения ещё более затруднительно находить итерационными методами типа релаксации [3]: в [8] при попытках находить такие решения алгоритм их вычислений не приводится (по утверждению автора, ввиду его сложности). Согласно [8], хотя основные состояния пластины считаются наиболее реализуемыми в эксперименте, вопрос о роли других решений и других возможностях, вообще говоря, остаётся неизученным. В частности, в [8] сделано важное замечание: нигде не доказано, что решения общей одномерной КрЗ ГЛ должны быть симметричными, и следует изучать ОДУ (1) на интервале $(-D, D)$ с более общими условиями

$$a'(\pm D) = h, \quad \psi'(\pm D) = 0. \quad (5)$$

Поиску асимметричных решений КрЗ (1), (5) посвящено большое число современных математических работ, авторы которых ссылаются на гипотезы [8], на чем здесь останавливаться не будем. Отметим только, что КрЗ (1), (5) имеет уже континуум n -решений $\{a(x), \psi(x)\} = \{h(x+c), 0\}$, где c – произвольная постоянная, причём при $c \neq 0$ эти решения являются асимметричными.

Целью данной работы является математическое и численное исследование вспомогательной «вырожденной» однородной нелинейной КрЗ, нетривиальные решения которой описывают возможные стационарные состояния (вблизи критических значений температур) сверхпроводящей бесконечной пластины конечной толщины в отсутствие магнитного поля. Эта задача для параметра порядка, которая получается из (1), (2) при $h = 0$, $a \equiv 0$, важна, в частности, для анализа и численных исследований множественных решений исходной нелинейной неоднородной КрЗ (1), (2). Она представляет и самостоятельный математический интерес.

2. Нелинейная краевая задача для сверхпроводящей пластины в отсутствие магнитного поля

2.1. Постановка задачи и предварительные сведения

При $h = 0$, когда будет $a(x) \equiv 0$, КрЗ (1), (2) приобретает вид:

$$\psi'' + \varkappa^2(\psi - \psi^3) = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (6)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(D) = 0. \quad (7)$$

Зафиксируем некоторые достаточно очевидные свойства решений этой задачи.

Предложение 1. Следующие утверждения справедливы для однородной нелинейной КрЗ (6), (7) при фиксированных значениях параметров $\varkappa \neq 0$ и $D > 0$:

1) задача разрешима – она имеет по крайней мере три постоянных решения,

$$\psi^\pm \equiv \pm 1, \quad \psi_{\text{zero}} \equiv 0; \quad (8)$$

2) если $\psi(x)$ – решение задачи, то $-\psi(x)$ – тоже решение;

3) любое решение $\psi(x)$ КрЗ (6), (7) удовлетворяют ограничению

$$0 \leq \psi^2(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D] \quad (9)$$

и соотношению

$$\int_0^D \psi(s) (1 - \psi^2(s)) ds = 0. \quad (10)$$

Для определённости далее рассматриваем те нетривиальные решения $\psi(x, \varkappa, D)$ КрЗ (6), (7), для которых будет

$$\psi(0, \varkappa, D) = \psi_0(\varkappa, D) > 0. \quad (11)$$

Пусть при фиксированных значениях $\varkappa \neq 0$ и $D > 0$ функция $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$ есть решение нелинейной КрЗ (6), (7), которую линеаризуем на этом решении. Получим линейную однородную КрЗ относительно малого возмущения $w(x)$ решения $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$:

$$w'' + \varkappa^2 (1 - 3\bar{\psi}^2(x, \varkappa, D)) w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad w'(0) = w'(D) = 0. \quad (12)$$

Тогда, следуя [9], введём следующее определение.

Определение 1. Пусть $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$ – решение однородной нелинейной КрЗ (6), (7) при фиксированных значениях параметров $\varkappa \neq 0$ и $D > 0$. Это решение называем изолированным тогда, и только тогда, когда сопутствующая линейная однородная КрЗ (12) имеет только тривиальное решение; в противном случае $\bar{\psi}(x, \varkappa, D)$ – неизолированное решение нелинейной КрЗ (6), (7).

В частности, полагая $\bar{\psi}(x, \varkappa, D) \equiv \psi^+ = 1$, получим из (12) КрЗ

$$w'' - 2\varkappa^2 w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad w'(0) = w'(D) = 0, \quad (13)$$

которая при любом $\varkappa \neq 0$ имеет только тривиальное решение (то же для $\bar{\psi}(x, \varkappa, D) \equiv \psi^- = -1$), так что решения $\psi^\pm \equiv \pm 1$ – изолированные решения КрЗ (6), (7) при любом $\varkappa \neq 0$.

Замечание 1. Как известно, изолированное решение нелинейной КрЗ для ОДУ, вообще говоря, можно найти итеративными методами (например, методом квазилинеаризации), исходя из достаточно хорошего начального приближения.

Замечание 2. Нелинейная КрЗ (6), (7), зависящая от двух параметров \varkappa и D , сводится к аналогичной КрЗ на интервале $(0, 1)$ с одним параметром $p = \varkappa D$ заменой независимой переменной $x_{\text{new}} = x/D$. Как следствие, именно этот параметр играет далее наиболее важную роль.

В соответствии с понятием бифуркации (см., например, [10]) и с учётом Замечания 2 введём следующее определение.

Определение 2. В пространстве параметров (\varkappa, D) точка (\varkappa_0, D_0) тогда, и только тогда, является точкой бифуркации нелинейной КрЗ (6), (7), определяя для неё критическое значение параметра бифуркации $p_0 = \varkappa_0 D_0$, когда существует неизолированное решение $\bar{\psi}(x, \varkappa_0, D_0)$ этой задачи.

О неизоллированности тривиального решения и критических значениях параметра бифуркации. Как известно (см., например, [11]), при наличии трёх постоянных решений (8) следует, вообще говоря, ожидать существование других решений КрЗ (6), (7), меняющих знак на интервале $(0, D)$. Наличие таких решений и их количество зависят от величины параметра $p = \varkappa D > 0$. А именно, полагая $\bar{\psi}(x, \varkappa, D) \equiv \psi_{\text{zero}} = 0$, получим из (12) вспомогательную линейную однородную КрЗ на отыскание собственных значений (СЗ) и собственных функций (СФ) дискретного спектра:

$$w'' + \varkappa^2 w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad w'(0) = 0, \quad w'(D) = 0. \quad (14)$$

КрЗ (14) имеет счётный набор СЗ $\varkappa = \varkappa_l(D) : \varkappa_l^2(D) = (\pi l/D)^2$, $l = 1, 2, \dots$. Учитываем положительные СЗ

$$\varkappa_l(D) = \pi l/D, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

каждому из которых отвечает СФ

$$w_l(x) = w_l(x, D) = \cos(\pi l x/D), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

для определённости нормированная требованием $w_l(0) = 1$; она имеет ровно l нулей на интервале $(0, D)$.

Тогда тривиальное решение нелинейной однородной КрЗ (6), (7) является её неизоллированным решением при значениях параметров \varkappa и D , удовлетворяющих соотношению (15), а СЗ (15) определяют критические значения параметра бифуркации $p = \varkappa D > 0$ нелинейной КрЗ (6), (7). (Этот факт, вообще говоря, можно получить из общей спектральной теории линейных операторов: простые СЗ линейной КрЗ, полученной линеаризацией нелинейной КрЗ на её частном решении, являются точками бифуркации исходной нелинейной КрЗ.)

Отсюда, учитывая ограничение (11), получаем, что при

$$\varkappa D : l\pi \lesssim \varkappa D < (l+1)\pi, \quad 1 \leq l - \text{целое число}, \quad (17)$$

следует ожидать существования l узловых решений $\psi^{(s)}(x)$ ($s = 1, \dots, l$) нелинейной КрЗ (6), (7), таких, что $\psi^{(s)}(x)$ имеет ровно s нулей на $(0, D)$; им должны отвечать значения $\psi^{(s)}(0) = \psi_0^{(s)}$, где

$$0 < \psi_0^{(l)} < \psi_0^{(l-1)} < \dots < \psi_0^{(1)} < 1; \quad (18)$$

это подтверждается как последующими рассуждениями, так и в вычислениях.

Из (6), (7) следует соотношение (10), которое влечёт симметрию (антисимметрию) решений КрЗ (6), (7) относительно прямой $x = D/2$ с чётным (нечётным) числом узлов на $(0, D)$. Нетрудно также проверить справедливость соотношения

$$\int_0^D \psi^{(s)}(x) \psi^{(q)}(x) \left[\left(\psi^{(s)}(x) \right)^2 - \left(\psi^{(q)}(x) \right)^2 \right] dx = 0, \quad (19)$$

где $s, q = 0, 1, \dots, l$ (при $s = 0$ или $q = 0$ подразумеваются решения (8)).

Учитывая для строгости сведения, приведённые далее в подразделе 2, окончательно получим, что справедливо

Предложение 2. При выполнении условия

$$0 < \varkappa D < \pi \quad (20)$$

однородная нелинейная КрЗ (6), (7) не имеет других решений, кроме постоянных (8). При выполнении условий (17) нелинейная КрЗ (6), (7), наряду с решениями (8), имеет ещё $2l$ решений $\pm\psi^{(s)}(x)$ ($s = 1, \dots, l$), таких, что $\psi^{(s)}(x)$ имеет ровно s нулей на $(0, D)$.

Об энергетической (не)устойчивости постоянных решений. ОДУ (6) является уравнением Лагранжа–Эйлера для неотрицательно определённого функционала

$$E(\varkappa, D) = \int_{-D}^D \left[W_{GLH}(\psi, \varkappa)(x) + \psi'^2(x)/2 \right] dx, \quad (21)$$

где W_{GLH} – потенциал Гинзбурга–Ландау–Хиггса (ГЛХ), или потенциал «самодействия» поля ψ (см. рис. 1):

$$W_{GLH}(\psi, \varkappa) = \varkappa^2 (\psi^2 - 1)^2/4. \quad (22)$$

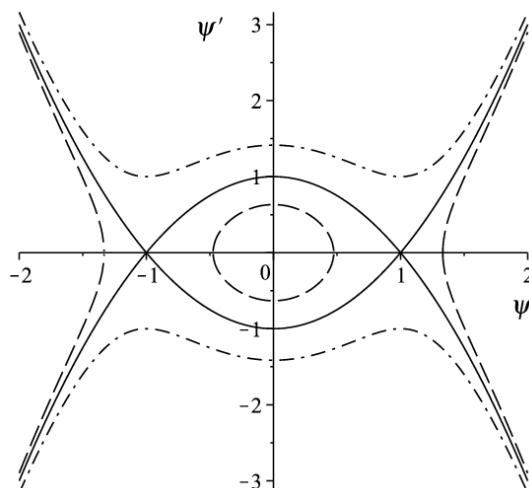


Рис. 1. Потенциал Гинзбурга–Ландау–Хиггса при $\varkappa = \sqrt{2}$

На решениях $\psi(x)$ КрЗ (6), (7) величина $W_{GLH}(\psi, \varkappa)(x) + \psi'^2(x)/2$ под интегралом (21) определяет плотность свободной (потенциальной) энергии пластины в отсутствие магнитного поля, а величина (21) пропорциональна поверхностной плотности энергии – величине энергии на единицу поверхности.

Для постоянных решений (8) КрЗ (6), (7) получаем: интеграл (21) принимает нулевое значение на решениях $\psi^{\pm} \equiv \pm 1$, так что эти решения («истинные вакуумы» поля ψ) являются энергетически абсолютно устойчивыми (или абсолютно устойчивыми по Лагранжу); на решении $\psi_{\text{zero}} \equiv 0$ имеем $E(\varkappa, D) = E^{(0)}(\varkappa, D) = D\varkappa^2/2 > 0$, так что $\forall \varkappa \neq 0$ это решение («ложный вакуум» поля ψ) энергетически неустойчиво (потенциал ГЛХ (22) достигает локального максимума при $\psi \equiv 0$).

Переход к нелинейной задаче с одним неизвестным параметром как собственным значением дискретного спектра. Для поиска решений КрЗ (6), (7),

отличных от (8), будем решать задачу с неизвестным параметром ψ_0 :

$$\psi'' + \varkappa^2 (\psi - \psi^3) = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (23)$$

$$\psi(0) = \psi_0 \quad (0 < \psi_0 < 1), \quad \psi'(0) = 0, \quad (24)$$

$$\psi'(D) = 0. \quad (25)$$

При фиксированных значениях \varkappa и D требуется определить значения $\psi_0, \psi_0 \in (0, 1)$, при которых существуют нетривиальные решения задачи (23)–(25), и определить их число.

Вспомогательную задачу (23)–(25) можно трактовать как нелинейную спектральную задачу со спектральным параметром ψ_0 на отыскание дискретных точек спектра на $(0, 1)$.

2.2. О связи решения задачи с эллиптическими функциями Якоби

Как замечено в [8], при каждом фиксированном значении $\psi_0 \in (0, 1)$ задача Коши (ЗК) (23), (24) имеет аналитическое решение:

$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{sn} \left(\varkappa x \sqrt{1 - \psi_0^2/2 + c_0} \right). \quad (26)$$

Здесь $\operatorname{sn}(u + c_0, k)$ – эллиптический синус с модулем k ,

$$k = \psi_0 / \sqrt{2 - \psi_0^2}, \quad k^2 < 1, \quad (27)$$

c_0 – постоянная сдвига,

$$\operatorname{sn}(c_0, k) = 1, \quad c_0 = \operatorname{sn}^{-1}(1, k) = K(k), \quad (28)$$

где показатель степени « -1 » понимается в смысле обратной функции, $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \quad k^2 < 1 \quad (29)$$

(определения и свойства эллиптических функций и интегралов см., например, в [12]).

Замечание 3. В [8] допущена опечатка в формуле (26) – под знаком корня стоит ψ_0^2 вместо $\psi_0^2/2$; относительно c_0 указано только, что значение этой постоянной связано с выбором начала.

В справедливости формул (26)–(28) легко убедиться, учитывая первый интеграл («закон сохранения») для решений ОДУ (23): $\psi'^2/2 + \varkappa^2 (\psi^2/2 - \psi^4/4) = \text{const}$. Тогда для решения $\psi(x)$ ЗК (23), (24) справедливо соотношение

$$\psi'^2 + \varkappa^2 (\psi^2 - \psi_0^2 - \psi^4/2 + \psi_0^4/2) = 0, \quad 0 \leq x \leq D. \quad (30)$$

Осуществив в (30) замены переменных

$$u = \varkappa x \sqrt{1 - \psi_0^2/2}, \quad \hat{\psi} = \psi/\psi_0 \quad (31)$$

и учитывая обозначение (27), получим ОДУ для эллиптического синуса (см. [12]):

$$\left(\frac{d\widehat{\psi}}{du}\right)^2 = (1 - \widehat{\psi}^2)(1 - k^2\widehat{\psi}^2). \quad (32)$$

Согласно [8, 12], период колебаний Π для решения (26) выражается формулой

$$\Pi = 4K(k) / \left[\varkappa \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \right], \quad (33)$$

где полный эллиптический интеграл I рода $K(k)$ и модуль $k > 0$ определены в (29) и (27), соответственно.

Можно приближённо найти $\Pi(k) = \widetilde{\Pi}(\psi_0)$, используя разложения (см. [12, 13]):

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right), \quad k^2 < 1; \quad (34)$$

$$K(k) = \widetilde{K}(m) = \frac{\pi}{2} (1 + m) \left(1 + \frac{1^2}{2^2} m^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \dots \right), \quad (35)$$

где

$$m = (1 - k')/(1 + k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad m^2 < k^2, \quad (36)$$

и разложение (35) сходится быстрее.

Замечание 4. При $D \rightarrow \infty$ решение ЗК (23), (24) при любом значении $\psi_0 \in (0, 1)$ определяет периодическое ограниченное на всей вещественной оси решение ОДУ (23) – эллиптическую функцию Якоби, т.е. значения ψ_0 образуют непрерывный спектр на $(0, 1)$, а функции (26) являются СФ непрерывного спектра ОДУ (23) (ср. с п. 1.3). Мы вернёмся к этому замечанию в подразделе 5.

3. Численный метод решения краевой задачи

Пусть выполнено условие (17), и пусть $\psi^{(s)}(x, \psi_0^{(s)})$ – решение КрЗ с параметром (23)–(25), т.е. при найденном значении $\psi_0^{(s)} > 0$ ($1 \leq s \leq l$). Тогда для периода колебаний этого решения, как нетрудно понять, получаем точную формулу:

$$\Pi = \Pi_s = 2D/s, \quad s = 1, \dots, l, \quad (37)$$

где s – число нулей функции $\psi^{(s)}(x)$ на $(0, D)$.

В результате, при выполнении требования (17), для нахождения нетривиального решения $\psi^{(s)}(x)$ нелинейной однородной КрЗ (6), (7) с помощью вспомогательной задачи с параметром (23)–(25) условие (25) достаточно заменить условием

$$\psi^{(s)}(\Pi_s/4) = \psi^{(s)}(D/(2s)) = 0, \quad s = 1, \dots, l. \quad (38)$$

Это условие существенно удобнее тем, что сразу фиксируется число нулей искомой функции, а вычисления осуществляются на меньшем отрезке $[0, D/(2s)]$ стрельбой по условию (38) с параметром стрельбы $\psi_0 = \psi_0^{(s)}$. Особенно это облегчает нахождение сильно осциллирующих решений для больших значений \varkappa и D .

Из (33), используя точную формулу (37), удобно находить значения полного эллиптического интеграла I рода $K_s(k_s)$ для различных значений k_s , определяемых

по формуле (27), где $\psi_0 = \psi_0^{(s)}$:

$$K_s(k_s) = \frac{D\kappa}{2s} \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2}, \quad s = 1, \dots, l. \quad (39)$$

Решение $\psi^{(s)}(x)$ КрЗ (6), (7) в результате можно представить в виде:

$$\psi^{(s)}(x) = \psi_0^{(s)} \operatorname{sn} \left(\kappa \left(x + D/(2s) \right) \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2} \right), \quad s = 1, \dots, l. \quad (40)$$

Кроме того, заметим, что при выполнении условия (17) и найденных значениях $\psi_0^{(s)} > 0$ должны выполняться соотношения

$$\operatorname{cn} \left(\kappa D \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2} + K(k) \right) = 0, \quad s = 1, \dots, l, \quad (41)$$

где $\operatorname{cn}(u + c_0, k)$ – эллиптический косинус с модулем k , определённым в (27).

Если учесть, в каких точках эллиптический косинус обращается в нуль (см. [12]), то из (41) получим соотношения

$$\kappa D \sqrt{1 - (\psi_0^{(s)})^2 / 2} + K(k) = (2s + 1)K(k), \quad s = 1, \dots, l. \quad (42)$$

Как нетрудно проверить, соотношения (42) при $K(k) = K_s(k_s)$, определённых в (39), обращаются в тождества. С другой стороны, использование соотношений (42) для нахождения самих значений $\psi_0^{(s)} > 0$ является, на наш взгляд, менее удобным по сравнению с описанным выше численным методом, так как на каждой итерации требует пересчёта k и $K(k)$.

Замечание 5. На наш взгляд, решение ЗК (23), (24) есть удобный способ нахождения эллиптического синуса и полного эллиптического интеграла I рода: при заданном $k > 0$ вычисляем ψ_0 по формуле:

$$\psi_0 = k\sqrt{2}/\sqrt{1+k^2}; \quad (43)$$

решаем ЗК (23), (24) с так полученным значением ψ_0 до первого нуля x_1 функции $\psi(x)$; учитываем, что

$$x_1 = \Pi/4 = K(k) / \left[\kappa \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \right], \quad (44)$$

откуда получаем

$$K(k) = x_1 \left[\kappa \sqrt{1 - \psi_0^2/2} \right] \quad (45)$$

и представление решения в виде

$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{sn} \left(\kappa x \sqrt{1 - \psi_0^2/2} + K(k) \right). \quad (46)$$

В [12, Табл. 30, с. 115] для набора значений $k^2 = 0, 0.02, 0.04, \dots, 1.0$ приведены величины $K(k)$, которые могут служить контролем правильности вычислений по алгоритму этого замечания.

Замечание 6. Эллиптические функции Якоби (в общем случае это двоякопериодические мероморфные функции комплексного аргумента) обычно вычисляют разложениями в ряды (см. такие разложения, например, в [13]), а для ускорения сходимости рядов используют представления этих функций через тэта-функции Якоби (см. [12, 14]), что, на наш взгляд, является довольно громоздкой процедурой. Но имеется ли альтернатива этому подходу в случае комплексного аргумента, нам пока неизвестно.

4. Результаты расчётов

Расчёты осуществлялись в программной среде пакета Maple 14.01 (лицензия ВЦ РАН) с задаваемой точностью вычислений и дополнительными приёмами контроля количества верных знаков. Примеры расчётных данных приведены в табл. 1.

Таблица 1

Примеры расчётных данных

κ	D	κD	$\psi_0^{(1)}$	$\psi_0^{(2)}$	$\psi_0^{(3)}$	$\psi_0^{(4)}$	$\psi_0^{(5)}$
0.5	6.4	3.2	0.21944				
	8	4	0.70593				
	15	7.5	0.97987	0.62511			
	20	10	0.99657	0.87298	0.38498		
	27	13.5	0.99971	0.96549	0.81006	0.42061	
	34	17	0.99998	0.99011	0.92363	0.76507	0.43999
$1/\sqrt{2}$	4.7	3.32...	0.37576				
	7	4.95...	0.86788				
	9	6.36...	0.95433	0.18329			
	13	9.19...	0.99395	0.82457			
	13.7	9.68...	0.99573	0.85632	0.26671		
	16	11.31...	0.99858	0.92307	0.63312		
	20	14.14...	0.99981	0.97262	0.84060	0.52681	
	26	18.38...	0.99999	0.99393	0.94573	0.82457	0.59550
0.8	4.5	3.6	0.56027				
	7	5.6	0.91972				
	8	6.4	0.95552	0.21944			
	11	8.8	0.99203	0.79345			
	12	9.6	0.99548	0.85123	0.21944		
	13	10.4	0.99744	0.89124	0.48602		
	17	13.6	0.99973	0.96672	0.81525	0.43999	
	21	16.8	0.99997	0.98941	0.91972	0.75455	0.40830
1.0	4.5	4.5	0.81007				
	5	5	0.87298				
	6.38	6.38	0.95486	0.20027			
	8	8	0.98592	0.70593			
	11	11	0.99832	0.91345	0.59105		
	13	13	0.99959	0.95864	0.78139	0.29532	
	16	16	0.99995	0.98592	0.90179	0.70593	0.21944

Таблица 1

Примеры расчётных данных (продолжение)

\varkappa	D	$\varkappa D$	$\psi_0^{(1)}$	$\psi_0^{(2)}$	$\psi_0^{(3)}$	$\psi_0^{(4)}$	$\psi_0^{(5)}$
1.2	2.7	3.24	0.28205				
	3.5	4.2	0.75455				
	5.5	6.6	0.96153	0.35270			
	7	8.4	0.98941	0.75455			
	10	12	0.99917	0.94037	0.70593		
	12	14.4	0.99984	0.97505	0.85123	0.56027	
	15.5	18.6	0.99999	0.99441	0.94852	0.83211	0.61335
1.5	2.2	3.3	0.35270				
	4	6	0.94037				
	4.3	6.45	0.95711	0.26062			
	5.5	8.25	0.98822	0.73763			
	6.38	9.57	0.99538	0.84944	0.20027		
	7.8	11.7	0.99898	0.93337	0.67681		
	10	15	0.99990	0.97988	0.87298	0.62511	
	11.5	17.25	0.99998	0.99097	0.92824	0.77745	0.47519

Дополнительным контролем точности вычислений могут служить следующие правила и соотношения: 1) для фиксированного $j \geq 1$ при одинаковых значениях параметра $p = \varkappa D$ должны быть одинаковыми величины $\psi_0^{(j)}$ (с учётом Замечания 2, величины $\psi_0^{(j)}$ зависят только от произведения параметров $\varkappa D$); 2) если $D_2/s_2 = D_1/s_1$ при $D_2 > D_1$ и $s_2 > s_1$, то решение $\psi^{(s_2)}(x, D_2)$ при $x \in [0, D_1]$ совпадает с решением $\psi^{(s_1)}(x, D_1)$, являясь его продолжением до значения $x = D_2$ с увеличением числа нулей; 3) должны выполняться соотношения (10), (19).

Пример графиков решений КрЗ (6), (7) см. на рис. 2.

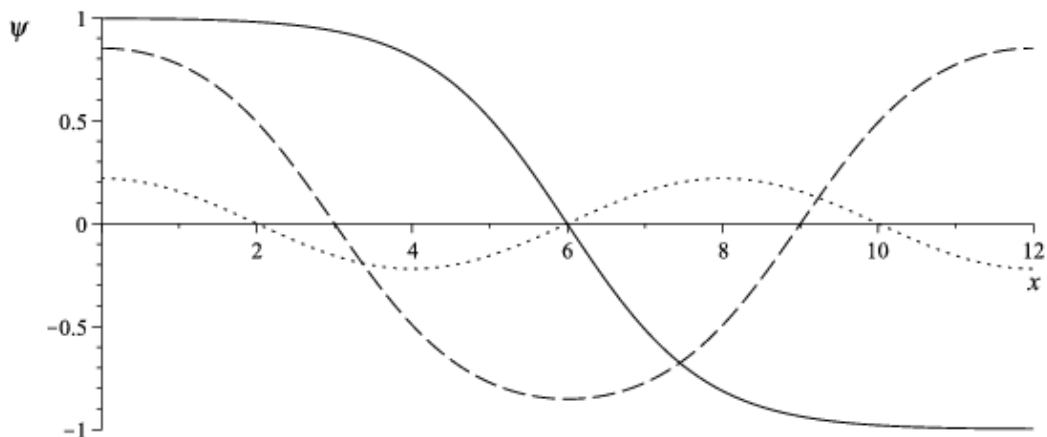


Рис. 2. Графики узловых решений $\psi^{(s)}(x)$ при $D = 12, \varkappa = 0.8, s = 1, 2, 3$

С учётом формул (8) и ограничения (11) всего здесь имеется 4 нетривиальных решения КрЗ (6), (7) – одно основное $\psi^+ \equiv 1$ и три узловых (см. табл. 1).

Важно заметить, что для исходной нелинейной КрЗ ГЛ (1), (2) (при $h > 0$) значения $\pm\psi_0^{(s)}$ из приведённой выше табл. 1 будут определять «коридор» существования решений, у которых ψ -компонента имеет s нулей на $(0, D)$.

5. Дополнение: об одной задаче нелинейной теории поля

ОДУ (6), рассматриваемое на всей оси \mathbb{R} , известно в нелинейной теории поля и космологии как одномерное стационарное уравнение для нейтрального скалярного поля Хиггса в пространстве Минковского (см., например, [15] и цитированную там литературу). В общем случае $(N + 1)$ -мерного пространства Минковского с координатами $x_0 = t, x_1, \dots, x_N$ ($N \geq 1$) лагранжиан L для такого поля $\psi(\vec{r}, t)$ имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)^2 - W_{GLH}(\psi), \quad (47)$$

где $W_{GLH}(\psi)$ – потенциал ГЛХ, определённый в (22).

Уравнение Лагранжа–Эйлера для лагранжиана (47) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta_N \psi + \frac{dW_{GLH}(\psi)}{d\psi} = 0, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (48)$$

где Δ_N – N -мерный оператор Лапласа и

$$\frac{dW_{GLH}(\psi)}{d\psi} = \kappa^2 \psi (\psi^2 - 1). \quad (49)$$

Здесь используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$ (c – скорость света в вакууме, \hbar – постоянная Планка). В этой системе единиц нетривиальной остаётся только размерность массы ($[m] = M$), а длина и время имеют размерность $1/M$. Тогда $[\kappa] = M$, а ψ – величина безразмерная.

Уравнение (48) обладает, в частности, известными одномерными решениями, которые называют «доменными стенками» (они соединяют два «истинных вакуума»). В общем случае эти стенки движутся с постоянной скоростью v , $0 < v < 1$, направленной перпендикулярно их поверхности:

$$\psi_{w\pm}(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0, \vec{n}, v) = \pm \tanh \left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \left[(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) \pm v(t - t_0) \right] / \sqrt{1 - v^2} \right), \quad (50)$$

где t_0, v – параметры, \vec{r}_0 – вектор параметров, \vec{n} – единичный вектор в направлении распространения волны.

Для стационарных одномерных решений, имеющих вид

$$\psi_{w\pm}(x - x^0) = \pm \tanh \left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}} (x - x^0) \right), \quad (51)$$

где $x, x^0 \in \mathbb{R}$ (x^0 – параметр сдвига), получаем

$$E_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_{w\pm}}{dx} \right)^2 + W_{GLH}(\psi_{w\pm}) \right] dx = 2\kappa\sqrt{2}/3, \quad (52)$$

где E_w – поверхностная плотность энергии стенки, сконцентрированная, вообще говоря, в тонком слое. Значение

$$\delta_w = \left[\frac{d^2 W_{GLH}}{d\psi^2}(\psi_{w\pm}) \right]^{-1/2} = 1 / (\varkappa\sqrt{2}) \approx 0.7071068/\varkappa \quad (53)$$

связано с понятием толщины стенки (или плёнки), а значение E_w совпадает со значением

$$\sigma_w = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d\psi_{w\pm}}{dx}(x) \right]^2 dx = 2\varkappa\sqrt{2}/3 \approx 0.942809 \varkappa, \quad (54)$$

которое определяет поверхностное натяжение плёнки (см., в частности, [15], где изучаются более общие задачи с потенциалами типа ГЛХ с «перекошенными вакуумами», возникающие как в нелинейной теории поля, так и в нелинейной физике сложных сред для моделей типа «пузырей» и «капель»).

В стационарном одномерном случае ($N = 1$, $x = x_1$) из (48), (49) следует ОДУ (6) при $x \in \mathbb{R}$; фазовый портрет для решений этого ОДУ см. на рис. 3.

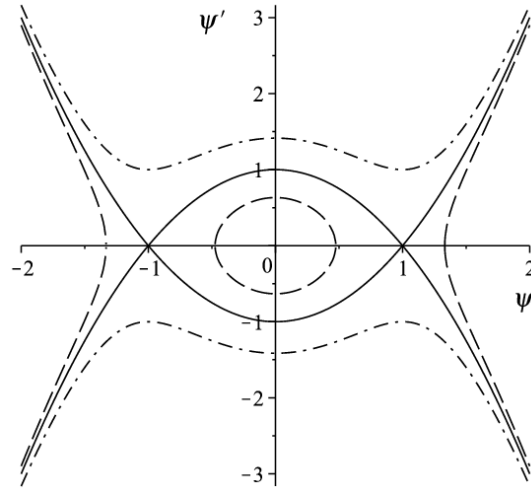


Рис. 3. Фазовый портрет для решений ОДУ (1) при $\varkappa = \sqrt{2}$

Здесь гомоклиническая орбита, образованная двумя гетероклиническими орбитами между точками $\{\psi, \psi'\} = \{-1, 0\}$ и $\{\psi, \psi'\} = \{1, 0\}$, отвечает решениям (51); внутри этой «ячейки» замкнутые орбиты образованы периодическими эллиптическими функциями Якоби (см. Замечание 4); «усы» из точек $\{\psi, \psi'\} = \{-1, 0\}$ и $\{\psi, \psi'\} = \{1, 0\}$ отвечают точным сингулярным решениям ОДУ (6):

$$\psi_{\text{sing}\pm}(x - x^0) = \pm \coth \left(\frac{\varkappa}{\sqrt{2}} (x - x^0) \right). \quad (55)$$

Можно также показать, что для любого фиксированного значения $x = x_p > 0$ ОДУ (6) обладает однопараметрическим семейством сингулярных решений («blow-up solutions»), имеющих в главном представлении

$$\psi_{\text{sing}\pm}(x - x_p) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\varkappa|x - x_p|} [1 + o(1)], \quad |x - x_p| \rightarrow 0. \quad (56)$$

Этим решениям отвечают неограниченные кривые на рис. 3. О способах выделения и изучения таких решений см., в частности, в [15].

При больших значениях $\varkappa D > 0$ одноузловое решение $\psi^{(1)}(x)$ нелинейной КрЗ (6), (7), с учётом ограничения (11), вообще говоря, будет близко к функции

$$\psi_{w-}(x - D/2) = \tanh\left(\varkappa(D/2 - x)/\sqrt{2}\right)$$

(см. (51)). В частности, при $D = 7$ и $\varkappa = 1.5$ графики этих функций практически совпадают.

6. Заключение

В заключение отметим, что хотя ОДУ (6) хорошо известно в нелинейной теории поля и космологии, подробное изучение КрЗ (6), (7) на конечном интервале нам неизвестно. На наш взгляд, исследования данной работы могут также представлять интерес для специалистов по изучению и применению эллиптических функций Якоби вещественного аргумента.

Литература

1. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1950. — Т. 20, № 12. — С. 1064–1082.
2. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1982. — 238 с.
3. Zharkov G. F. First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in a Superconducting Plate // Journal of Low Temperature Physics. — 2003. — Vol. 130, No 1/2. — Pp. 45–67.
4. Жарков Г. Ф. Сверхпроводящие состояния и магнитный гистерезис в сверхпроводниках конечного размера // Успехи физических наук. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 1012–1017.
5. Аналитико-численные исследования нелинейной краевой задачи для сверхпроводящей пластины в магнитном поле / А. Л. Дышко, Г. Ф. Жарков, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 9. — С. 1651–1676.
6. Konyukhova N. B., Kurochkin S. V. On Nonlinear Ginzburg–Landau Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field // International Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. — 2007. — Vol. 17. — Pp. 125–136. — (Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University; e-print: <http://www.kromsh.info/>).
7. Kwong M. K. On the One-Dimensional Ginzburg–Landau BVPs // Differential and Integral Equations. — 1995. — Vol. 8, No 6. — Pp. 1395–1405.
8. Marcus P. M. Exact Solution of the Ginzburg–Landau Equations for Slabs in Tangential Magnetic Fields // Reviews of Modern Physics. — 1964. — Pp. 294–299.

9. Keller H. B., White A. B. JR. Difference Methods for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1975. — Vol. 12, No 5. — Pp. 791–802.
10. Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — 128 с.
11. Rachůnková I. Multiple Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems and Topological Degree // Proc. Conf. on Differential Equations and Their Applications (EQUADIFF 9; held in Brno, August 25–29, 1997). — Brno: Masaryk Univ., 1997. — Pp. 147–158.
12. Янке М. Ф., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977. — 344 с.
13. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977. — 224 с.
14. Лаврентьев М. Ф., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1956. — 716 с.
15. Bubbles and Droplets in Nonlinear Physics Models: Analysis and Numerical Simulation of Singular Nonlinear Boundary Value Problem / N. B. Konyukhova, P. M. Lima, M. L. Morgado, M. B. Soloviev // Comput. Math. Math. Phys. — 2008. — Vol. 48, No 11. — Pp. 2018–2058. — (Pleiades Publishing, Ltd., 2008).

UDC 519.63

On an Auxiliary Nonlinear Boundary Value Problem in the Ginzburg–Landau Theory of Superconductivity and its Multiple Solutions

N. B. Konyukhova, A. A. Sheina

FRC CSC of RAS, Moscow, Russia

We realize analytic-numerical investigation of a homogeneous boundary value problem (BVP) for a second-order ordinary differential equation (ODE) with cubic nonlinearity and two real parameters which arises from the Ginzburg–Landau theory of superconductivity. Multiple non-trivial solutions to this problem depending on the specified parameters are expressed through the Jacobi elliptic functions and describe the stationary states (near the critical values of temperature) of a superconducting infinite plate of a finite thickness without magnetic field. It is a “degenerate” problem with respect to the original nonlinear BVP for a superconducting plate in a magnetic field and is important to construct algorithm for finding all the solutions to the indicated input problem in a wide range of the parameters. Studied problem is of separate mathematical interest by itself.

Key words and phrases: The Ginzburg–Landau theory of superconductivity, stationary states of a superconducting plate without magnetic field, nonlinear second-order ordinary differential equation (ODE), homogeneous boundary value problem (BVP) and its multiple solutions

References

1. V. L. Ginzburg, L. D. Landau, On the Theory of Superconductivity, Journal of Experimental and Theoretical Physics 20 (12) (1950) 1064–1082, [English transl. in: Men of Physics: L.D. Landau. Ed. D. ter Harr. — Oxford: Pergamon, 1965. Pp. 138–167].
2. V. V. Schmidt, Introduction in Physics of Superconductors, FIZMATLIT, Moscow, 1982, in Russian.
3. G. F. Zharkov, First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in A Superconducting Plate, Journal of Low Temperature Physics 130 (1/2) (2003) 45–67.

4. G. F. Zharkov, Superconducting States and Magnetic Hysteresis in Finite Superconductors, *Physics–Uspekhi* 47 (9) (2004) 944–949.
5. A. L. Dyshko, G. F. Zharkov, N. B. Konyukhova, S. V. Kurochkin, Analytic-Numerical Investigation of the Nonlinear Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field, *Comput. Maths Math. Phys.* 45 (9) (2005) 1593–1617.
6. N. B. Konyukhova, S. V. Kurochkin, On Nonlinear Ginzburg–Landau Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field, *International Scientific Journal Spectral and Evolution Problems* 17 (2007) 125–136, (Simferopol: Taurida National V.Vernadsky University; e-print: <http://www.kromsh.info/>).
7. M. K. Kwong, On the One-Dimensional Ginzburg–Landau BVPs, *Differential and Integral Equations* 8 (6) (1995) 1395–1405.
8. P. M. Marcus, Exact Solution of the Ginzburg–Landau Equations for Slabs in Tangential Magnetic Fields, *Reviews of Modern Physics* (1964) 294–299.
9. H. B. Keller, A. B. White JR., *Difference Methods for Boundary Value Problems in Ordinary Differential Equations*, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 12 (5) (1975) 791–802.
10. V. I. Arnold, *Theory of Catastrophes*, Nauka, Moscow, 1990, in Russian.
11. Rachůnková, I., Multiple Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems and Topological Degree, in: *Proc. Conf. on Differential Equations and Their Applications (EQUADIFF 9; held in Brno, August 25–29, 1997)*, Masaryk Univ., Brno, 1997, pp. 147–158.
12. E. Jahnke, F. Emde, F. Lesch, *Tables of Functions with Formulae and Curves*, Stechert, New York, 1938.
13. H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, The Macmillan Company, New York, 1961 (4th ed.).
14. M. F. Lavrent'ev, B. V. Shabat, *Methods of Theory of Complex Variable Functions*, FIZMATLIT, Moscow, 1956, in Russian.
15. N. B. Konyukhova, P. M. Lima, M. L. Morgado, M. B. Soloviev, Bubbles and Droplets in Nonlinear Physics Models: Analysis and Numerical Simulation of Singular Nonlinear Boundary Value Problem, *Comput. Math. Math. Phys.* 48 (11) (2008) 2018–2058, (Pleiades Publishing, Ltd., 2008).

Математические модели и методы в ЭКОНОМИКЕ

УДК 330.4, 519.86, 517.977.5

Агрегированная двухсекторная динамическая модель венчурного инвестирования

В. А. Остапов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Венчурный капитал составляет значительную долю инвестиций в инновационные проекты. Строится двухсекторная динамическая модель экономики с учётом венчурного инвестирования. Выделяются пять экономических агентов: население, банки, торговые посредники и производство, разделённое на два сектора — традиционный и инновационный. В статье даётся микроописание деятельности фирм обоих секторов.

Фирмы основного сектора в каждый момент времени образуются за счёт перехода в него одной из фирм венчурного сектора, в котором в каждый момент времени создаётся несколько фирм. Параметры инновационных фирм задаются нормальным распределением.

Венчурный инвестор кредитруется банковской системой, полностью контролирующей доходы и убытки венчурного сектора. Население инвестирует деньги в фирмы традиционного сектора в момент их перехода из венчурного.

Описывается процесс выхода фирм из инновационного сектора и их продажи. Также дано описание процесса ликвидации убыточных фирм обоих секторов. Приводятся результаты численных экспериментов с замкнутой математической моделью. Предложенная модель входит в режим экспоненциального роста в котором выделяется характерный излом в момент времени, когда инвестиции населения выходят на уровень банковских кредитов.

Ключевые слова: венчурное инвестирование, математическое моделирование, оптимальное управление, численные методы, математическая экономика

1. Введение

Рынок венчурных инвестиций в XXI в. постоянно расширяется. В современную эпоху актуальной является теория экономического разнообразия, основным постулатом которой является то, что постоянное расширение ассортимента потребительских товаров стимулирует потребительскую активность населения. Таким образом, очевидно, что население будет обеспечивать больший спрос на инновационные товары. Венчурный капитал в наше время является основным источником инвестиций в инновационные проекты. Тем самым обоснованной является необходимость построения модели инвестиционной политики фирм, учитывающей венчурный капитал и выделяющей инновационный сектор в отдельный сектор производства.

В статье рассматривается динамическая макроэкономическая модель венчурного инвестирования. Считаем, что в экономике взаимодействуют 5 агентов: крупное производство, инновационный сектор, банковский сектор, население и торговый посредник. Производство определяется двумя секторами: первый — крупный, второй — инновационный [1, 2].

Предполагается, что в каждый момент времени в инновационном секторе создаётся определённое число фирм, параметры которых задаются с помощью нормального распределения. В первом секторе в каждый момент времени создаётся одна фирма за счёт перехода из инновационного сектора фирмы с наименьшей трудоёмкостью. В момент выхода фирмы из инновационного сектора происходит доинвестирование в неё депозитов населения, которое начинает владеть соответствующей частью капитала фирмы.

Статья поступила в редакцию 28 апреля 2016 г.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 15-07-08952).

В модели считается, что в крупном секторе технологии только устаревают, а мощности воспроизводятся только за счёт создания новых фирм. В инновационном секторе начальная трудоёмкость задаётся случайно, при этом сама технология может как развиваться, так и деградировать [3, 4].

В инновационном секторе фирмы создаются за счёт инвестирования собственных средств венчурного инвестора и кредитов, которые он берет в банке. Доходы и расходы инновационных фирм контролируются инвестором, который получает доход при выходе фирмы из инновационного сектора, а также от владения активами крупного сектора.

Население в модели тратит деньги на потребление и инвестиции в фирмы, переходящие в крупный сектор. Доходы населения складываются из заработной платы рабочих, дивидендов банков и доли в доходах крупных фирм.

Банковская система хранит депозиты населения и собственников фирм, выдавая кредиты венчурному инвестору.

Описание модели начнём с описания секторов производства. Далее приводится описание экономической деятельности населения и определяется рынок товаров. Завершается описание модели описанием банковской системы.

Вторая часть статьи посвящена численным экспериментам с моделью и анализу их результатов.

В заключение приводится экономическая интерпретация полученных результатов и предложения по дальнейшему развитию предложенной модели.

2. Описание секторов производства

2.1. Венчурный сектор

2.1.1. Микроописание

Считаем, что в каждый момент времени τ в секторе создаётся n_v фирм, определяющихся мощностью $m_v^i(t, \tau)$ и капиталом $k_v^i(t, \tau)$, изменяющихся с темпами $\mu_v^{\tau, i}$ и $\beta_v^{\tau, i}$ соответственно, и начальной трудоёмкостью ν_τ^i . Также считаем, что мощности могут распродаваться с темпом $u_v^i(t, \tau)$.

Мощность, капитал и трудоёмкость $\lambda_v^i(t, \tau)$ изменяются в силу следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{m}_v^i(t, \tau) &= [\mu_v^{\tau, i} - u_v^i(t, \tau)] \cdot m_v^i(t, \tau), \\ \dot{k}_v^i(t, \tau) &= [\beta_v^{\tau, i} - u_v^i(t, \tau)] \cdot k_v^i(t, \tau), \\ \dot{\lambda}_v^i(t, \tau) &= -\mu_v^{\tau, i} \cdot m_v^i(t, \tau). \end{aligned}$$

Выданный венчурному инвестору банковский кредит $\Phi_v(\tau)$ делится поровну между вновь созданными фирмами, закупающими продукт по ценам $p_1(\tau)$ и $p_v(\tau)$ для создания мощности с нормами фондёмкости $b_{1v}(\tau, \tau)$ и $b_{vv}(\tau, \tau)$.

$$k_v^i(\tau, \tau) = \frac{\Phi_v(\tau)}{n_v}, \quad \lambda_v^i(\tau, \tau) = \nu_\tau^i,$$

$$m_v^i(\tau, \tau) = \frac{\Phi_v(\tau)}{n_v \cdot [p_1(\tau) \cdot b_{1v}(\tau, \tau) + p_v(\tau) \cdot b_{vv}(\tau, \tau)]}.$$

Прибыль $\pi_v^i(t, \tau)$ складывается из дохода $\pi_v^{i, y}(t, \tau)$ от производства за вычетом расходов на заработную плату и закупку материалов с нормами $a_{1v}(\tau, \tau)$ и $a_{vv}(\tau, \tau)$ и дохода $\pi_v^{i, z}(t, \tau)$ от распродажи мощностей.

$$\pi_v^i(t, \tau) = [p_v(t) - s_v(t) \cdot \lambda_v^i(t, \tau) - p_1(t) \cdot a_{1v} - p_v(t) \cdot a_{vv}] \cdot y_v^i(t, \tau),$$

$$\begin{aligned}\pi_v^{i,z}(t, \tau) &= u_v^i(t, \tau) \cdot [p_1(t) \cdot b_{1v}(t, \tau) + p_v(t) \cdot b_{vv}(t, \tau)] \cdot m_v^i(t, \tau), \\ \pi_v^i(t, \tau) &= \pi_v^{i,y}(t, \tau) + \pi_v^{i,z}(t, \tau).\end{aligned}$$

Выпуск $y_v^i(t, \tau)$ зависит от прибыльности фирмы:

$$y_v^i(t, \tau) = \begin{cases} m_v^i(t, \tau), & \pi_v^{i,y}(t, \tau) \geq 0; \\ 0, & \pi_v^{i,y}(t, \tau) < 0. \end{cases}$$

Выпуски $y_v^{i,v}(t, \tau)$ и $y_v^{i,1}(t, \tau)$ продукции секторов вследствие продажи мощностей:

$$\begin{aligned}y_v^{i,v}(t, \tau) &= u_v^i(t, \tau) \cdot b_{vv}(t, \tau) \cdot m_v^i(t, \tau), \\ y_v^{i,1}(t, \tau) &= u_v^i(t, \tau) \cdot b_{1v}(t, \tau) \cdot m_v^i(t, \tau).\end{aligned}$$

Спрос на рабочую силу определяется выпуском:

$$R_v^i(t, \tau) = \lambda_v^i(t, \tau) \cdot y_v^i(t, \tau).$$

2.1.2. Макроописание

Обозначим за $T^*(t)$ множество моментов $t^*(\tau)$ создания фирм, перешедших в первый сектор в момент τ к текущему моменту времени t . Суммарные показатели мощности $M_v(t)$, капитала $K_v(t)$ и спроса на рабочую силу $R_v^d(t)$ в секторе определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}K_v(t) &= \int_{\tau \in [0, t]/T^*(t)} d\tau \sum_{n_v} k_v^i(t, \tau), & M_v(t) &= \int_{\tau \in [0, t]/T^*(t)} d\tau \sum_{n_v} m_v^i(t, \tau), \\ R_v^d(t) &= \int_{\tau \in [0, t]/T^*(t)} d\tau \sum_{n_v} R_v^i(t, \tau).\end{aligned}$$

Задолженность банковской системе уменьшается за счёт выплат $H_v(t)$ и увеличивается за счёт начисления процента $r_1(t)$ и вновь выданного кредита $\Phi_v(t)$. Депозит увеличивается за счёт начисления процента $r_1(t)$ и дивидендов $d_v(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{L}_v(t) &= r_1(t) \cdot L(t) - H_v(t) + \Phi_v(t), \\ \dot{D}_v(t) &= r_2(t) \cdot D_v(t) + d_v(t), \\ L_v(0) &= \Phi_v(0), \quad D_v(0) = 0.\end{aligned}$$

Прибыль венчурного инвестора $\Pi_v(t)$ складывается из доходов от производства $\Pi_v^y(t)$, распродажи мощностей $\Pi_v^z(t)$, перехода фирм в первый сектор $\Pi_v^s(t)$ и доли в доходах первого сектора $\Pi_v^f(t)$. Она идёт на дивиденды и выплаты.

$$\begin{aligned}H_v(t) + d_v(t) &= \Pi_v(t), \\ \Pi_v(t) &= \Pi_v^y(t) + \Pi_v^z(t) + \Pi_v^s(t) + \Pi_v^f(t), \\ \Pi_v^y(t) &= \int_{\tau} d\tau \sum_{n_v} \pi_v^{i,y}(t, \tau), \quad \Pi_v^z(t) = \int_{\tau} d\tau \sum_{n_v} \pi_v^{i,z}(t, \tau),\end{aligned}$$

$$\Pi_v^f(t) = \int_{\tau} d\tau [(1 - \varkappa(\tau)) \cdot \pi_1(t, \tau)], \quad \Pi_v^s(t) = r_3 \cdot \Phi_1(t).$$

Продукция сектора создаётся за счёт произведённого товара $Y_v^p(t)$ и созданного из распроданных мощностей $Y_v^s(t)$:

$$Y_v^s(t) = \int_{\tau \in [0, t]/T^*(t)} d\tau \sum_{n_v} y_v^{i,v}(t, \tau) + \int_{\tau} d\tau y_1^v(t, \tau), \quad Y_v^p(t) = \int_{\tau} d\tau \sum_{n_v} y_v^i(t, \tau).$$

Доходность венчурного сектора можно определять двумя разными способами:

$$\rho_v(t) \leq \frac{\Pi_v(t) + \Delta K_v(t) - \Phi_v(t)}{L_v(t)},$$

$$\rho_v(t) \leq \frac{p_v(t) - s_v(t) \cdot \frac{\sum_{n_v} \lambda_v^i(t, t)}{n_v} - p_1(t) \cdot a_{1v} - p_v(t) \cdot a_{vv}}{p_1(t) \cdot b_{1v}(t, t) + p_v(t) \cdot b_{vv}(t, t)} + \frac{\sum_{n_v} \tau \beta_v^i}{n_v}.$$

2.2. Основной сектор

2.2.1. Микроописание

Считаем, что в каждый момент времени τ в сектор переходит одна фирма из венчурного сектора. Мощность $m_1(t, \tau)$ и капитал $k_1(t, \tau)$, убывают с темпами μ_1 и β_1 соответственно, общими для сектора. Вновь считаем, что мощности могут распродаваться с темпом $u_1(t, \tau)$.

Мощность, капитал и трудоёмкость $\lambda_1(t, \tau)$ изменяются в силу следующих уравнений:

$$\dot{m}_1(t, \tau) = -[\mu_1 + u_1(t, \tau)] \cdot m_1(t, \tau),$$

$$\dot{k}_1(t, \tau) = -[\beta_1 + u_1(t, \tau)] \cdot k_1(t, \tau),$$

$$\dot{\lambda}_1(t, \tau) = \mu_1 \cdot m_1(t, \tau).$$

Капитализация фирмы в первом секторе складывается из её капитала в венчурном секторе и инвестиций населения $\Phi_1(\tau)$ за вычетом доли r_3 венчурного инвестора. За счёт этих инвестиций создаются новые мощности $I_1(\tau)$. Доля $\varkappa(\tau)$ населения в фирме определяется отношением вновь созданных мощностей к их общему числу в фирме:

$$k_1(\tau, \tau) = k_v(\tau, t^*(\tau)) + (1 - r_3) \cdot \Phi_1(\tau), \quad m_1(\tau, \tau) = m_v(\tau, t^*(\tau)) + I_1(\tau),$$

$$\lambda_1(\tau, \tau) = \lambda_v(\tau, t^*(\tau)), \quad I_1(\tau) = \frac{(1 - r_3) \cdot \Phi_1(\tau)}{p_1(\tau) \cdot b_{11}(\tau, \tau) + p_v(\tau) \cdot b_{v1}(\tau, \tau)}, \quad \varkappa(\tau) = \frac{I_1(\tau)}{m_1(\tau, \tau)}.$$

Прибыль, выпуски и спрос на рабочую силу определяются так же, как и в венчурном секторе:

$$\pi_1^y(t, \tau) = [p_1(t) - s_1(t) \cdot \lambda_1(t, \tau) - p_1(t) \cdot a_{11} - p_v(t) \cdot a_{v1}] \cdot y_1(t, \tau),$$

$$\pi_1^z(t, \tau) = u_1(t, \tau) \cdot [p_1(t) \cdot b_{11}(t, \tau) + p_v(t) \cdot b_{v1}(t, \tau)] \cdot m_1(t, \tau),$$

$$\pi_1(t, \tau) = \pi_1^y(t, \tau) + \pi_1^z(t, \tau).$$

Считаем, что прибыль делят население и венчурный инвестор в зависимости от своих долей:

$$\begin{aligned} d_N(t, \tau) &= \varkappa(\tau) \cdot \pi_1(t, \tau), \\ d_v(t, \tau) &= (1 - \varkappa(\tau)) \cdot \pi_1(t, \tau). \end{aligned}$$

Выпуски:

$$\begin{aligned} y_1(t, \tau) &= \begin{cases} m_1(t, \tau), & \pi_1^y(t, \tau) \geq 0; \\ 0, & \pi_1^y(t, \tau) < 0, \end{cases} \\ y_1^v(t, \tau) &= u_1(t, \tau) \cdot b_{v1}(t, \tau) \cdot m_1(t, \tau), \\ y_1^1(t, \tau) &= u_1(t, \tau) \cdot b_{11}(t, \tau) \cdot m_1(t, \tau). \end{aligned}$$

Спрос на рабочую силу:

$$R_1(t, \tau) = \lambda_1(t, \tau) \cdot y_1(t, \tau).$$

2.2.2. Макроописание

Суммарные показатели мощности $M_1(t)$, капитала $K_1(t)$ и спроса на рабочую силу $R_1^d(t)$ в секторе определяются следующим образом:

$$K_1(t) = \int_{\tau} d\tau k_1(t, \tau), \quad M_1(t) = \int_{\tau} d\tau m_1(t, \tau), \quad R_1^d(t) = \int_{\tau} d\tau R_1(t, \tau).$$

Продукция сектора создаётся за счёт произведённого товара $Y_1^p(t)$ и созданного из распроданных мощностей $Y_1^s(t)$:

$$Y_1^s(t) = \int_{\tau} d\tau \sum_{n_v} y_v^{i,1}(t, \tau) + \int_{\tau} d\tau y_1^1(t, \tau), \quad Y_1^p(t) = \int_{\tau} d\tau y_1(t, \tau).$$

3. Население

Далее по тексту индекс i , где $i \in \{1, v\}$, подразумевает, что уравнение верно для обоих секторов.

Считаем, что население растёт с темпом λ_0 :

$$R^s(t) = R_0 \cdot \exp(\lambda_0 \cdot t).$$

Предложение рабочей силы $R_i^s(t)$ в секторах определяется долей $\chi_i^R(t)$, которая изменяется с темпом $\frac{1}{\Delta_R}$ в зависимости от разницы в уровнях занятости в секторах:

$$\begin{aligned} R_i^s(t) &= \chi_i^R(t) \cdot R^s(t), \quad R_i^l(t) = \min\{R_i^s(t), R_i^d(t)\}, \\ \dot{\chi}_1^R(t) &= \frac{1}{\Delta_R} \left[\frac{R_1^l(t)}{R_1^s(t)} - \frac{R_v^l(t)}{R_v^s(t)} \right], \quad \chi_v^R(t) = 1 - \chi_1^R(t). \end{aligned}$$

Ставка заработной платы $s_i(t)$ в секторе увеличивается при нехватке рабочей силы с темпом $\frac{1}{\Delta_S}$:

$$\dot{s}_i(t) = \frac{1}{\Delta_S} \max \left\{ 0, \frac{R_i^d(t)}{R_i^s(t)} - 1 \right\}.$$

Депозиты населения складываются из оклада, банковских дивидендов и доли в доходах фирм первого сектора, уменьшаясь за счёт инвестиций $\Phi_1(t)$ в фирмы, переходящие в первый сектор и потребления:

$$\dot{D}_N(t) = r_2(t) \cdot D_N(t) + d_N(t),$$

$$d_N(t) = s_1(t)R_1^l(t) + s_v(t)R_v^l(t) + d_B(t) + \int_{\tau} d\tau [\varkappa(\tau) \cdot \pi_1(t, \tau)] - \Phi_1(t) - C_1(t) - C_v(t).$$

Объём инвестиций растёт с темпом пропорциональным отношению вновь созданных за счёт населения мощностей к общей мощности сектора с коэффициентом γ_{Φ} :

$$\dot{\Phi}_1(t) = \gamma_{\Phi} \cdot \frac{I_1(t)}{M_1(t)} \cdot \Phi_1(t).$$

Потребление $C_i(t)$ населением пропорционально с коэффициентом γ_c имеющемуся у населения депозиту и доле вновь создаваемого товара, интерес к которому падает с темпом γ_{c_i} :

$$C_1(t) = \gamma_c \cdot D_N(t) \cdot \int_{\tau} d\tau \left[\frac{m_1(t, \tau)}{M_1(t)} \cdot e^{-\gamma_{c_1} \cdot (t-\tau)} \right],$$

$$C_v(t) = \gamma_c \cdot D_N(t) \cdot \int_{\tau \in [0, t]/T^*(t)} d\tau \left[\frac{m_v^I(t, \tau)}{M_v(t)} \cdot e^{-\gamma_{c_v} \cdot (t-\tau)} \right].$$

4. Описание рынка

Выпуск продукции каждого из секторов складывается из производства товара и распродажи мощностей:

$$Y_i(t) = Y_i^p(t) + Y_i^s(t).$$

Спрос на промежуточный продукт $J_i(t)$:

$$J_i(t) = a_{i1} \cdot Y_1^p(t) + a_{iv} \cdot Y_v^p(t).$$

Создаваемые мощности $I_i(t)$ и спрос на фондообразующий продукт $C_i^I(t)$:

$$I_i(t) = \frac{\Phi_i(t)}{p_1(t)b_{1i} + p_v(t)b_{vi}}, \quad C_i^I(t) = b_{i1}I_1(t) + b_{iv}I_v(t).$$

Основным в численных экспериментах был способ образования цены в зависимости от предложения товара на рынке.

Запасы $Q_i(t)$ изменяются в силу разности между производством и потреблением:

$$\dot{Q}_i(t) = Y_i(t) - C_i^I(t) - J_i(t) - \frac{C_i(t)}{p_i(t)}.$$

Темп изменения цены $p_i(t)$ пропорционален отношению запасов к мощности с коэффициентом α_i . Она падает в случае избытка товара и растёт в случае его дефицита:

$$\dot{p}_i(t) = -\alpha_i \frac{Q_i(t)}{M_i(t)} p_i(t).$$

5. Описание банковской системы

Пассив банковской системы $D(t)$ складывается из актива и резерва $R(t)$:

$$L(t) + R(t) = D(t).$$

Резерв изменяется в силу эмиссии $E(t)$ и пропорционален дивидендам:

$$\dot{R}(t) = E(t), \quad R(t) \geq \xi D(t).$$

Эмиссия денежных средств пропорциональна выпускам:

$$E(t) = \epsilon_1 \cdot p_1(t) \cdot Y_1^p(t) + \epsilon_v \cdot p_v(t) \cdot Y_v^p(t).$$

Банковский депозит складывается из дивидендов населения и венчурного инвестора, а также эмиссии:

$$\dot{D}(t) = r_2(t) \cdot D(t) + d_N(t) + d_v(t) + E(t), \quad d_B(t) = r_1(t) \cdot L(t).$$

Положив $R(t) = \xi \cdot D(t)$, получим соотношения на выдаваемый банком кредит и процентные ставки.

Кредит:

$$\Phi_v(t) = \frac{1 - \xi}{\xi} E(t) - \dot{L}(t).$$

Процентная ставка по кредиту $r_1(t)$ есть максимум из средней доходности секторов и депозитной ставки $r_2(t)$:

$$r_1(t) = \max \left\{ r_2(t), \frac{\rho_1(t) + \rho_v(t)}{2} \right\}, \quad r_2(t) = \frac{\frac{1}{\xi} \cdot E(t) - d_v(t) - d_N(t)}{D(t)}.$$

6. Численные эксперименты с моделью

Численные эксперименты проводились при следующем наборе параметров:

$$\begin{aligned} h &= 0.1, \quad \xi = 0.1, \quad \epsilon_1 = \epsilon_v = 0.1, \quad \lambda_0 = 0.6, \quad R_0 = 5 \cdot 10^5, \quad n_v = 3, \\ p_1(0) &= p_v(0) = 20, \quad s_1(0) = s_v(0) = 10, \quad Q_1(0) = Q_v(0) = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_v = 0.5, \\ \Delta_S &= \Delta_R = 15, \quad a_{11} = a_{v1} = a_{1v} = a_{vv} = 0, \quad b_{11} = b_{v1} = b_{1v} = b_{vv} = 1.5, \\ \mu_1 &= 0.05, \quad \beta_1 = 0.1, \quad r_3 = 0.25, \quad \gamma_C = 1, \quad \gamma_{C_1} = \gamma_{C_v} = 0.1, \quad \gamma_\Phi = 25. \end{aligned}$$

Параметры фирм венчурного сектора, задаваемые нормальным распределением $N(a, \sigma)$ с математическим ожиданием a и среднеквадратическим отклонением σ :

$$\nu_v^{i,\tau} = N(0.3, 0.2), \quad \mu_v^{i,\tau} = N(-0.1, 1.5), \quad \beta_v^{i,\tau} = 1.2 \cdot \mu_v^{i,\tau}.$$

Начальные распределения задавались в экспоненциальной форме.

Система после стабилизации параметров выходит в режим экспоненциального роста, который меняет свой темп в момент, когда объем инвестиций населения фактически сравнивается с банковским кредитом (рис. 1).

В этот момент оба этих показателя начинают расти с одним темпом, а доля населения в фирмах традиционного сектора начинает колебаться на уровне 45 процентов (рис. 2).

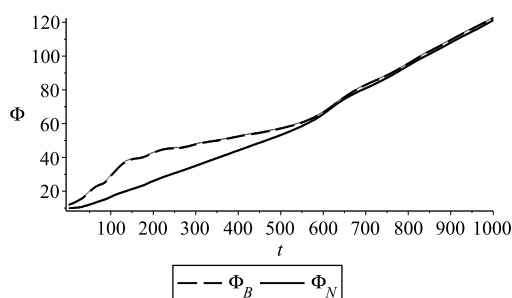


Рис. 1. Объем инвестиций населения и объем банковского кредита

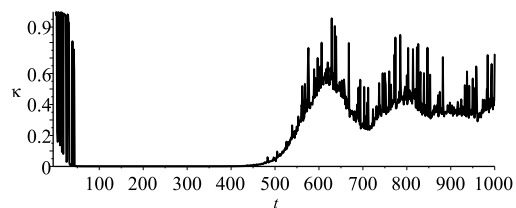


Рис. 2. Доля населения в фирмах традиционного сектора

Одновременно с этим происходит излом всех показателей изменяющихся экспоненциально (рис. 3, 4).

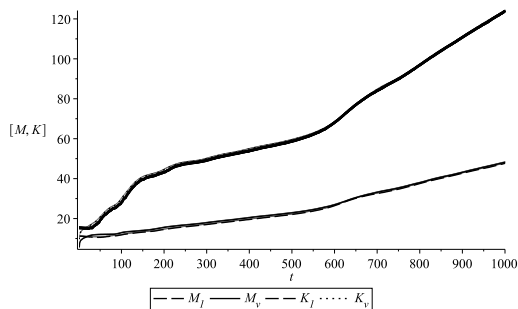


Рис. 3. Показатели мощности и капитала

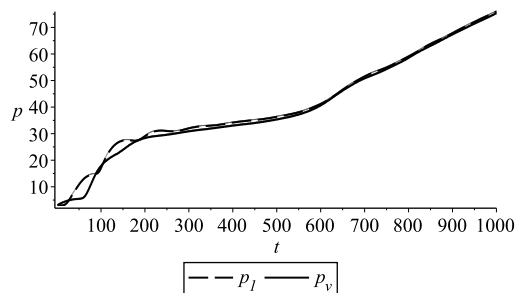


Рис. 4. Показатель доходности

Кредитная ставка в этот момент фактически сравнивается с депозитной (рис. 5).

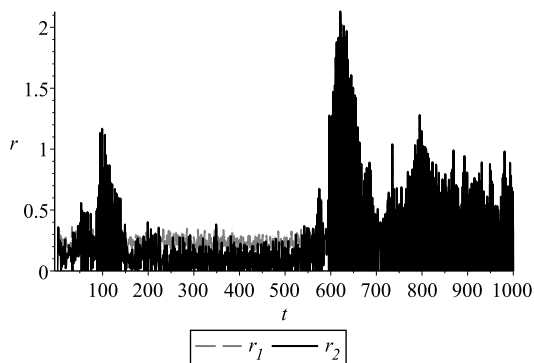


Рис. 5. Кредитная и депозитная ставки

7. Заключение

В рамках предложенной модели удаётся воспроизвести процесс выхода фирмы из инновационного сектора в традиционный и доинвестирования в неё средств населения, что в достаточно грубой форме описывает процесс первоначального размещения акций. Это позволяет говорить о дальнейшем развитии данной модели. Предполагается введение разных цен товары каждой из фирм, а также возможность инвестирования традиционного сектора банками. Актуальным является более тонкое описание работы банковской системы и исследование влияния структурных изменений в венчурном секторе на экономику страны [5].

Литература

1. Оленев Н., Остапов В. А. К динамической модели с учетом венчурного капитала. — Москва: ВЦ РАН, 2014.
2. Olenev N. N., Ostapov V. A. Optimal Investment Problems in a Dynamic Model of Economy with Venture Capital // Optimization and Applications (OPTIMA-2015). — CC RAS, 2015.
3. Остапов В. А. Задача оптимального инвестирования // Модернизация и инновационное развитие экономических систем. — Москва: РУДН, 2014. — С. 344–362.
4. Остапов В. А., Оленев Н. Н. Оптимизация в динамической модели инвестиционной политики фирм инновационного сектора // Вестник ТГУ. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1337–1340.
5. Оленев Н. Н. Исследование влияния структурных изменений на экономику России // Вестник Российского университета дружбы народов. — 2015. — № 1. — С. 150–157.

UDC 330.4, 519.86, 517.977.5

Aggregated Dynamic Model of a Two-Sector Economy with Venture Investment

V. A. Ostapov

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Venture capital now is a significant part of investments in innovative projects. In this article it is proposed dynamic model of a two-sector economy with venture investment. There are five economic agents: the population, the banks, resellers and producers, divided into two sectors - the traditional and innovative. The article gives microdescription of firms in both sectors.

The main sector companies at any given time are founded by moving into it one of the venture sector firms, where several firms are being created in each moment. Innovative firms parameters are set by the normal distribution.

Venture investor takes loans of the banking system, and is fully in control of gains and losses of the venture sector. People invest money in the firms which join the traditional sector to gain their share in profits.

The article describes the process of exiting the innovation sector by firms and their sale. Also it is described the process of liquidation of unprofitable firms in both sectors. The results of numerical experiments with a closed mathematical model are presented. The proposed model shows the exponential growth in which stands a distinctive kink in the time when the investments of the population reaching the level of bank loans.

Key words and phrases: venture investment, mathematical modelling, optimal control, numerical methods, mathematical economics

References

1. N. N. Olenev, V. A. Ostapov, *Toward a Dynamic Model for Economy with Venture Capital*, CC RAS, Moscow, 2014, in Russian.
2. N. N. O. V. A. Ostapov, *Optimal Investment Problems in a Dynamic Model of Economy with Venture Capital*, in: *Optimization and Applications (OPTIMA-2015)*, CC RAS, 2015.
3. V. A. Ostapov, *Optimal Investment Problem*, in: *Modernization and Innovative Development of Economic Systems*, PFUR, Moscow, 2014, pp. 344–362, in Russian.
4. N. N. Olenev, V. A. Ostapov, *Optimization in an Investment Policy Dynamic Model of Innovative Sector Firms*, *Bulletin of TGU* 20 (5) (2015) 1337–1340, in Russian.
5. N. N. Olenev, *A Study of Structural Changes Influence on Russian Economy*, *Bulletin of PFUR* (1) (2015) 150–157, in Russian.

© Остапов В. А., 2016

Математическое моделирование

UDC 519.632.4

Solution of the Boundary-Value Problem for a Systems of ODEs of Large Dimension: Benchmark Calculations in the Framework of Kantorovich Method

A. A. Gusev^{*}, O. Chuluunbaatar^{*}, S. I. Vinitsky^{*†}, V. L. Derbov[‡]

^{*} Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

[†] RUDN University, Moscow, Russia

[‡] Saratov State University, Saratov, Russia

We present benchmark calculations of the boundary-value problem (BVP) for a systems of second order ODEs of large dimension with help of KANTBP program using a finite element method. In practice, for solving the BVPs with the long-range potentials and a large number of open channels there is a necessity of solving boundary value problems of the large-scale systems of differential equations that require further investigation of convergence and stability of the algorithms and programs. With this aim we solve here the eigenvalue problem for an elliptic differential equation in a two-dimensional domain with Dirichlet boundary conditions. The solution is sought in the form of Kantorovich expansion over the parametric basis functions of one of the independent variables with the second variable treated as a parameter. The basis functions are calculated in an analytical form as solutions of the auxiliary parametric Sturm-Liouville problem for a second-order ODE. As a result, the two-dimensional problem is reduced to a boundary-value problem for a set of self-adjoint second-order ODEs for functions of the second independent variable. The discrete formulation of the problem is implemented using the finite element method. The efficiency, stability and convergence of the calculation scheme is shown by benchmark calculations for a triangle membrane with a degenerate spectrum.

Key words and phrases: benchmark calculations, boundary-value problem, large-scale systems of ODEs, Kantorovich method, finite element method

1. Introduction

The solving quantum tunneling problem or calculations of spectral and optical properties of electronic states in axially symmetric quantum dots and Helium-like atom (system of two-electron in the Coulomb field) is reduced to the solution of boundary-value problems (BVP) for elliptic differential equations with nonseparable variables in a finite domain [1–3]. One of the ways to solve these problems is implemented as a set of programs ODPEVP-POTHEA-KANTBP [4–6] basing on the Kantorovich method (KM) that provides the reduction of the initial problem to a set of self-adjoint second-order ODEs [7] with further discretization by the finite element method (FEM) [8]. In practice, for solving problems with the long-range potential and a large number of open channels there is a necessity of solving boundary value problems of the large-scale systems of the ODEs that require further investigation of convergence and stability of the algorithms and programs.

Testing such approach, algorithms and programs for the solution of two-dimensional BVPs and large-scale systems of the ODEs is the aim of the present work. We present a computational scheme for solving the eigenvalue problem for an elliptic differential equation in a two-dimensional finite domain with Dirichlet boundary conditions. The solution is sought in the form of Kantorovich expansion over the basis functions of one of the independent variables with the second variable treated as a parameter. The basis functions are calculated as a solution of the parametric eigenvalue problem for an ordinary

Received 12th July, 2016. The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) (grant 14-01-00420). The reported study was partially funded within the Agreement No. 02.a03.21.0008 dated 24.11.2016 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and RUDN University.

second-order differential equation. Finally, the initial problem is reduced to a BVP for a set of self-adjoint second-order differential equations for functions of the second independent variable. The discretization of the problems is carried out using the FEM with Lagrange interpolating polynomials. The result is used to formulate a generalized algebraic eigenvalue problem for higher-order matrices. We demonstrate the efficiency of the KANTBP program for solving the boundary-value problem for a systems of the ODEs of large dimension in benchmark calculations for the exactly solvable eigenvalue problem of a triangle membrane with the degenerate spectrum.

2. Kantorovich Method

Let us consider the 2D BVP in the two-dimensional domain $\Omega(x_f, x_s) \subset \mathbf{R}^2$:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_f^2} + V(x_f, x_s) - E \right) \Psi(x_f, x_s) = 0, \quad (1)$$

where $V(x_f, x_s)$ is a real-valued function and $\Psi(x_f, x_s)$ satisfies the Dirichlet condition at the boundary $\partial\Omega(x_f, x_s)$ of the domain $\Omega(x_f, x_s)$

$$\Psi(x_f, x_s) \Big|_{(x_f, x_s) \in \partial\Omega(x_f, x_s)} = 0. \quad (2)$$

The solution $\Psi(x_f, x_s) \in W_2^2(\Omega)$ of the BVP (1)–(2) is sought in the form of Kantorovich expansion [7]

$$\Psi_i(x_f, x_s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \Phi_j(x_f; x_s) \chi_j^i(x_s), \quad (3)$$

using the set of eigenfunctions of the parametric BVP

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_f^2} + V(x_f, x_s) - \epsilon_j(x_s) \right) \Phi_j(x_f; x_s) = 0, \quad (4)$$

defined in the interval $x_f \in (x_f^{\min}(x_s), x_f^{\max}(x_s)) = \Omega_{x_f}(x_s)$ and depending on the variable $x_s \in (x_s^{\min}, x_s^{\max}) = \Omega_{x_s}$ as a parameter. These functions obey the boundary conditions

$$\Phi_j(x_f^{\min}(x_s); x_s) = 0, \quad \Phi_j(x_f^{\max}(x_s); x_s) = 0 \quad (5)$$

at the boundary points $\{x_f^{\min}(x_s), x_f^{\max}(x_s)\} = \partial\Omega_{x_f}(x_s)$, of the interval $\Omega_{x_f}(x_s)$.

The eigenfunctions satisfy the orthonormality condition in the same interval $x_f \in \Omega_{x_f}(x_s)$:

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \Phi_i(x_f; x_s) \Phi_j(x_f; x_s) dx_f = \delta_{ij}. \quad (6)$$

In Eq. (4) $\epsilon_1(x_s) < \dots < \epsilon_{j_{\max}}(x_s) < \dots$ is the desired set of real-valued eigenvalues. If this parametric eigenvalue problem has no analytical solution, then it is solved numerically using the ODPEVP program [4] or in the case of two variables POTHEA program [5].

Substituting the expansion (3) into Eq. (1) with Eqs. (5) and (6) taken into account, we arrive at the set of self-adjoint ODEs for the unknown vector functions $\chi^{(i)}(x_s, E) \equiv$

$$\boldsymbol{\chi}^{(i)}(x_s) = (\chi_1^{(i)}(x_s), \dots, \chi_{j_{\max}}^{(i)}(x_s))^T:$$

$$\left(-\mathbf{I} \frac{d^2}{dx_s^2} + \mathbf{U}(x_s) - E \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{Q}(x_s)}{dx_s} + \mathbf{Q}(x_s) \frac{d}{dx_s} \right) \boldsymbol{\chi}^{(i)}(x_s) = 0. \quad (7)$$

Here $\mathbf{U}(x_s)$ and $\mathbf{Q}(x_s)$ are matrices of the dimension $j_{\max} \times j_{\max}$

$$U_{ij}(x_s) = \epsilon_i(x_s) \delta_{ij} + H_{ij}(x_s), \quad (8)$$

$$H_{ij}(x_s) = H_{ji}(x_s) = \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \frac{\partial \Phi_i(x_f; x_s)}{\partial x_s} \frac{\partial \Phi_j(x_f; x_s)}{\partial x_s} dx_f, \quad (9)$$

$$Q_{ij}(x_s) = -Q_{ji}(x_s) = - \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \Phi_i(x_f; x_s) \frac{\partial \Phi_j(x_f; x_s)}{\partial x_s} dx_f.$$

The solutions of the discrete spectrum $E : E_1 < E_2 < \dots < E_v < \dots$ that obey the boundary conditions at the points $x_s^t = \{x_s^{\min}, x_s^{\max}\} = \partial\Omega_{x_s}$, bounding the interval Ω_{x_s} ,

$$\boldsymbol{\chi}^{(p)}(x_s^t) = 0, \quad x_s^t = x_s^{\min}, x_s^{\max} \quad (10)$$

and the orthonormality conditions

$$\int_{x_s^{\min}}^{x_s^{\max}} (\boldsymbol{\chi}^{(i)}(x_s))^T \boldsymbol{\chi}^{(j)}(x_s) dx_s = \delta_{ij}, \quad (11)$$

are calculated by means of the KANTBP program [6].

3. Benchmark Calculation: Triangular Membrane

As a benchmark example we consider the exactly solvable BVP for a triangular membrane in conventional variables $(x_f, x_s) \in \Omega(x_f, x_s)$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_f^2} - E \right) \Psi(x_f, x_s) = 0 \quad (12)$$

with the Dirichlet conditions at the boundary $\partial\Omega(x, y)$ of the region $\Omega(x_f, x_s)$

$$\Psi((x_f, x_s) \in \partial\Omega(x_f, x_s)) = 0. \quad (13)$$

In the considered case the parametric eigenvalue problem (4)–(6) has an exact solution, i.e., the parametric eigenfunctions $\Phi_i(x_f; x_s)$ and potential curves $\epsilon_i(x_s)$ are expressed in the analytical form

$$\epsilon_i(x_s) = \frac{\pi^2 i^2}{(x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s))^2}, \quad \Phi_i(x_f; x_s) = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi i(x_f - x_f^{\min}(x_s))}{x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s)}\right)}{\sqrt{x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s)}}. \quad (14)$$

With the basis functions (14) the integration in the effective potentials (9) can be carried out analytically, which yields the expressions

$$Q_{ij}(x_s) = -\frac{2ij}{i^2 - j^2} \frac{\left((-1)^{i+j} \frac{dx_f^{\max}(x_s)}{dx_s} - \frac{dx_f^{\min}(x_s)}{dx_s}\right)}{x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s)}, \quad j \neq i,$$

$$H_{ij}(x_s) = -\frac{4ij(i^2 + j^2)}{(i^2 - j^2)^2} \frac{\left((-1)^{i+j} \frac{dx_f^{\max}(x_s)}{dx_s} - \frac{dx_f^{\min}(x_s)}{dx_s}\right) \left(\frac{dx_f^{\max}(x_s)}{dx_s} - \frac{dx_f^{\min}(x_s)}{dx_s}\right)}{(x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s))^2},$$

$$H_{ii}(x_s) = \frac{\pi^2 i^2}{3} \frac{\left(\frac{dx_f^{\max}(x_s)}{dx_s}\right)^2 + \left(\frac{dx_f^{\max}(x_s)}{dx_s}\right) \left(\frac{dx_f^{\min}(x_s)}{dx_s}\right) + \left(\frac{dx_f^{\min}(x_s)}{dx_s}\right)^2}{(x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s))^2} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{dx_f^{\max}(x_s)}{dx_s} - \frac{dx_f^{\min}(x_s)}{dx_s}\right)^2}{(x_f^{\max}(x_s) - x_f^{\min}(x_s))^2}.$$

In the symmetric case $x_f^{\max}(x_s) = -x_f^{\min}(x_s)$ the matrix elements H_{ij} and Q_{ij} between even and odd indexes equal zero and one can solve the BVP for even (e) and odd (o) solutions separately.

As a domain we chose the equilateral triangle with side equal to $4\pi/3$, in this case the eigenvalues $E_i = \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu = 3, 7, 7, 12, 13, 13, 19, 19, 21, 21, 27, \dots$, where $\mu, \nu = 1, 2, \dots$, are integer [9].

Case 1, x_f is paralleled to a triangle side and x_s belong to a triangle height:

$$x_f^{\max}(x_s) = 2\pi/3 - x_s/\sqrt{3}, \quad x_f^{\min}(x_s) = -2\pi/3 + x_s/\sqrt{3}, \quad x_s^{\min} = 0, \quad x_s^{\max} = 2\pi/\sqrt{3}.$$

Case 2, x_s is paralleled to a triangle side and x_f belong to a triangle height:

$$x_f^{\max}(x_s) = 2\pi/\sqrt{3} - \sqrt{3}|x_s|, \quad x_f^{\min}(x_s) = 0, \quad x_s^{\min} = -2\pi/3, \quad x_s^{\max} = 2\pi/3.$$

In both cases taking into account the symmetry properties of the equilateral triangle, we apply the FEM for discretization of the BVP (7)–(11) using finite element grid $\Omega_{x_s} = (0(2)3v/4(2)v)$, $v = x_s^{\max} - 0.002$, where the number of finite elements in each subinterval is presented in parentheses, and Lagrangian interpolation polynomials of $p' = 12$ th order, which provides the accuracy $O(h^{p'+1})$ of the vector-eigenfunctions $\chi^{(i)}(x_s, E) \equiv \chi^{(i)}(x_s) = (\chi_1^{(i)}(x_s), \dots, \chi_{j_{\max}}^{(i)}(x_s))^T$ and $O(h^{2p'})$ of the eigenvalues E_i , where $h = 3v/8$ is the maximal element length [8].

The numerical calculations of eigenvalue problem (7)–(11) were carried out till $j_{\max} = 280$ using the new version of the program KANTBP 2.0 implemented in Fortran. In Fig. 1 some typical examples of profiles of the eigenfunctions are presented, corresponding to the exact doubly degenerate eigenvalues $E_2^e = E_1^o = 7$, $E_4^e = E_2^o = 13$, and $E_5^e = E_3^o = 19$.

Achieved the discrepancy $\delta E_i^\sigma = E_i^\sigma - E_i$ of the order of 10^{-8} for the eigenvalues that is shown in the Table 1. One can see from the table that the convergence rate of the Kantorovich expansion (3) is the order j_{\max}^{-3} , which corresponds to the theoretical estimations given by the perturbation theory. Similar rate of convergence takes place also in solving of the parametric 2D BVP for a Helium atom [5] and 2D BVP for quadratic membrane [10].

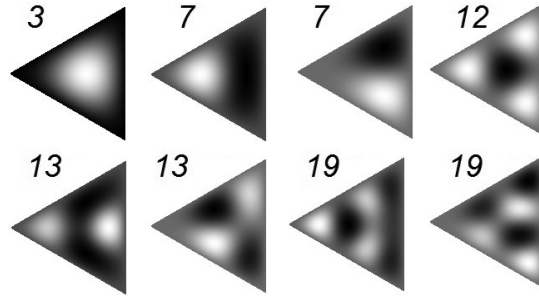


Figure 1. Eigenfunctions $\Psi(x, y)$ of bound states of the 2D boundary-value problem (12), (13) composed by the components $\chi_j^{(i)}(x_s)$ of the eigenfunctions of the BVP for system of ODEs (7)–(11) and parametric functions $\Phi_i(x_f; x_s)$ from (14)

Table 1
The discrepancy $\delta E_i^\sigma = E_i^{\sigma;\text{calc}} - E_i^\sigma$, $\sigma = e, o$, vs a number j_{\max} of even (e) and odd (o) basis functions (14) of Kantorovich expansion (3)

j_{\max}	δE_1^e	δE_2^e	δE_3^e	δE_4^e	δE_{10}^e	δE_1^o	δE_2^o	δE_7^o
	case 1							
6	1.36(-4)	5.44(-4)	2.45(-3)	1.29(-3)	2.32(-2)	6.67(-4)	2.59(-3)	2.47(-2)
13	1.37(-5)	5.41(-5)	2.35(-4)	1.22(-4)	2.02(-3)	7.44(-5)	2.85(-4)	2.35(-3)
28	1.39(-6)	5.49(-6)	2.37(-5)	1.22(-5)	1.99(-4)	7.98(-6)	3.05(-5)	2.44(-4)
60	1.42(-7)	5.62(-7)	2.42(-6)	1.25(-6)	2.03(-5)	8.41(-7)	3.21(-6)	2.56(-5)
130	1.41(-8)	5.56(-8)	2.39(-7)	1.23(-7)	2.01(-6)	8.42(-8)	3.22(-7)	2.56(-6)
280	1.43(-9)	5.54(-9)	2.41(-8)	1.24(-8)	2.05(-7)	8.56(-9)	3.26(-8)	2.59(-7)
	case 2							
6	8.69(-4)	8.21(-3)	1.83(-2)	2.43(-2)	0.95	1.13(-3)	8.79(-3)	4.84(-2)
13	1.01(-4)	8.93(-4)	1.79(-3)	2.33(-3)	3.57(-2)	1.34(-4)	9.97(-4)	3.10(-3)
28	1.13(-5)	9.82(-5)	1.93(-4)	2.52(-4)	3.48(-3)	1.50(-5)	1.10(-4)	3.27(-4)
60	1.21(-6)	1.05(-5)	2.07(-5)	2.70(-5)	3.65(-4)	1.62(-6)	1.18(-5)	3.48(-5)
130	1.24(-7)	1.07(-6)	2.10(-6)	2.73(-6)	3.68(-5)	1.64(-7)	1.20(-6)	3.52(-6)
280	1.29(-8)	1.09(-7)	2.13(-7)	2.78(-7)	3.74(-6)	1.68(-8)	1.22(-7)	3.58(-7)
exact	$E_1^e=3$	$E_2^e=7$	$E_3^e=12$	$E_4^e=13$	$E_{10}^e=37$	$E_1^o=7$	$E_2^o=13$	$E_7^o=37$

For the number j_{\max} of the parametric basis functions increased to 280, that requires more RAM and computer time are needed. The dimension of the mass and stiffness matrices and their half-width are following: $(12 \cdot 4 + 1)j_{\max} \times (12 \cdot 4 + 1)j_{\max}$ and $(12 \cdot 2 + 1)j_{\max}$: 294×294 and 150 for $j_{\max} = 6$, 2940×2940 and 1500 for $j_{\max} = 60$, 13720×13720 and 7000 for $j_{\max} = 280$. The calculation time was about 1 seconds for $j_{\max} = 6$, 15 seconds for $j_{\max} = 60$ and 455 seconds for $j_{\max} = 280$ in the double precision of Fortran-77 using the PC Intel Core i5 3.33GHz, 4Gb, 64 bit Windows 7.

4. Conclusion

We show and estimate the rate of convergence of Kantorovich expansion (3) in benchmark calculations for the exactly solvable eigenvalue problem of a triangle membrane with the degenerate spectrum, together with the efficiency and stability of the KANTBP program for solving the boundary-value problem for systems of the ODEs of a large dimension.

The proposed benchmark model can be used for testing of algorithms and programs for solving the BVPs for systems of the ODEs or generalized algebraic eigenvalue problems of a large dimension.

References

1. A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, O. Chuluunbaatar, V. L. Derbov, A. Gózdź, P. M. Krassovitskiy, *Metastable States of a Composite System Tunneling Through Repulsive Barriers, Theoretical and Mathematical Physics* 186 (2016) 21–40.
2. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, V. P. Gerdt, V. A. Rostovtsev, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, V. V. Serov, *Symbolic-Numeric Algorithms for Computer Analysis of Spheroidal Quantum Dot Models, Lecture Notes in Computer Science* 6244 (2010) 106–122.
3. S. I. Vinitzky, A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, V. L. Derbov, A. S. Zotkina, *On Calculations of Two-Electron Atoms in Spheroidal Coordinates Mapping on Hypersphere, Proc. SPIE* 9917 (2016) 99172Z.
4. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich, *ODPEVP: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined Sturm–Liouville Problem, Comput. Phys. Commun.* 180 (2009) 1358–1375.
5. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich, *POTHEA: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined 2D Elliptic Partial Differential Equation, Comput. Phys. Commun.* 185 (2014) 2636–2654.
6. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich, *KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach, Comput. Phys. Commun.* 179 (2008) 685–693.
7. L. V. Kantorovich, V. I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Wiley, New York, 1964.
8. G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1973.
9. F. Pockels, *Über die partielle Differential-Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren auftreten in der mathematischen physik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1891.
10. A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, *Solution of Boundary-Value Problems using Kantorovich Method, EPJ Web of Conferences* 108 (2016) 02026.

УДК 519.632.4

Решение краевых задач для систем ОДУ большой размерности: эталонные расчеты в рамках метода Канторовича

А. А. Гусев*, О. Чулуунбаатар*, С. И. Виницкий*[†],
В. Л. Дербов[‡]

* *Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна*

[†] *Российский университет дружбы народов, г. Москва*

[‡] *Саратовский государственный университет, г. Саратов*

Представлены эталонные расчеты краевой задачи для систем ОДУ второго порядка большой размерности с помощью программы KANTBP с использованием метода конечных элементов. На практике для решения краевых задач с дальнедействующими потенциалами и

большого числа открытых каналов необходимо решать краевые задачи для систем дифференциальных уравнений большой размерности, которые также требуют изучения сходимости и устойчивости алгоритмов и программ. С этой целью в данной работе решена задача на собственные значения для эллиптического дифференциального уравнения в двумерной области с граничными условиями Дирихле. Решение ищется в виде разложения Канторовича по параметрическим базисным функциям одной из независимых переменных, при этом вторая независимая переменная рассматривается как параметр. Базисные функции вычисляются в аналитическом виде как решения вспомогательной параметрической задачи Штурма–Лиувилля для ОДУ второго порядка. В результате, двумерная задача сводится к краевой задаче для самосопряжённой системы ОДУ второго порядка относительно второй независимой переменной. Дискретизация задачи выполнена в рамках метода конечных элементов. Эффективность, устойчивость и сходимость вычислительной схемы продемонстрирована эталонными расчетами для треугольной мембраны с вырожденным спектром.

Ключевые слова: тестовые расчеты, краевая задача, системы ОДУ большой размерности, метод Канторовича, метод конечных элементов

Литература

1. Metastable States of a Composite System Tunneling Through Repulsive Barriers / A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, O. Chuluunbaatar, V. L. Derbov, A. Gózdź, P. M. Krassovitskiy // *Theoretical and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 186. — Pp. 21–40.
2. Symbolic-Numeric Algorithms for Computer Analysis of Spheroidal Quantum Dot Models / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, V. P. Gerdt, V. A. Rostovtsev, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, V. V. Serov // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2010. — Vol. 6244. — Pp. 106–122.
3. On Calculations of Two-Electron Atoms in Spheroidal Coordinates Mapping on Hypersphere / S. I. Vinitzky, A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, V. L. Derbov, A. S. Zotkina // *Proc. SPIE*. — 2016. — Vol. 9917. — P. 99172Z.
4. ODPEVP: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined Sturm–Liouville Problem / O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Comput. Phys. Commun.* — 2009. — Vol. 180. — Pp. 1358–1375.
5. POTHEA: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined 2D Elliptic Partial Differential Equation / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Comput. Phys. Commun.* — 2014. — Vol. 185. — Pp. 2636–2654.
6. KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach / O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Comput. Phys. Commun.* — 2008. — Vol. 179. — Pp. 685–693.
7. *Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate Methods of Higher Analysis*. — New York: Wiley, 1964.
8. *Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method*. — New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
9. *Pockels F. Über die partielle Differential-Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren auftreten in der mathematischen physik*. — Leipzig: B. G. Teubner, 1891.
10. Solution of Boundary-Value Problems using Kantorovich Method / A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov // *EPJ Web of Conferences*. — 2016. — Vol. 108. — P. 02026.

UDC 519.632.4

Algorithms and Programs for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Second-Order ODEs with Piecewise Constant Potentials: Multichannel Scattering and Eigenvalue Problems

A. A. Gusev*, O. Chuluunbaatar*, S. I. Vinitsky*[†], L. L. Hai*[‡],
V. L. Derbov[§], A. Gózdź³²

* *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

[†] *RUDN University, Moscow, Russia*

[‡] *Belgorod State University, Belgorod, Russia*

[§] *Saratov State University, Saratov, Russia*

³² *Institute of Physics, University of M. Curie-Sklodowska, Lublin, Poland*

The new algorithms and programs, implemented in Maple, for solving waveguide-type multichannel scattering and eigenvalue problems for systems of the second-order ODEs with $N \times N$ matrix piecewise constant coefficients on the axis are proposed. New algorithm and program for solving the boundary-value problems by method of matching the fundamental solutions (MMFS) of the system of ODEs at the points of discontinuity of potentials are elaborated. In each of the subintervals of an axis the general solution of the system of ODEs are sought in the form of linear combination of $2N$ fundamental solutions with unknown coefficients. Each fundamental solution explicitly dependent on spectral parameter and eigenvalues and eigenvectors of algebraic eigenvalue problems with $N \times N$ matrix of constant potentials. From the condition of continuity for the solutions and their derivatives at the discontinuity points of the potentials, the system of algebraic equations is followed. In the case of bound or metastable state problem the obtained system of algebraic equations contains nonlinear dependence of unknown spectral parameter. For solving such nonlinear problem symbolic-numerical algorithm is formulated. The benchmark calculations of bound, metastable and scattering states of BVPs for systems of the second-order ODEs obtained using program of the MMFS are compared with those obtained using program of the finite element method.

Key words and phrases: multichannel scattering problem, eigenvalue problem, system of second order ordinary differential equations, method of matching the fundamental solutions

1. Introduction

The boundary-value problems for systems of N second-order ordinary differential equations (ODEs) of the waveguide type with the matrix of piecewise constant potentials arise in mathematical modelling of quantum-dimensional nanostructures and optical multilayer systems [1]. For example, application Kantorovich method to the solution of Maxwell's equations in an integrated optical waveguide with an irregular change of parameters along two horizontal directions is considered in Ref. [2]. In this paper the BVP for a system of differential equations for the coefficient Kantorovich functions using computer algebra system Maple was derived. For solving such type of the BVPs the method of matching the fundamental solutions (MMFS) at each boundary between the adjacent axis subintervals was applied for single second-order ODE, while application to system of ODEs is required [3].

The generalization of MMFS and creation of effective algorithms and programs for solving the BVPs for N second order ODEs with piecewise constant potentials in axis is the aim of the present paper. The efficiency of the algorithm and program is demonstrated by the example of calculating the resonance and metastable states of the multichannel scattering problem in the axis for the set of N second order ODEs with piecewise constant

Received 12th July, 2016.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 14-01-00420 and Bogoliubov-Infeld JINR program. The reported study was partially funded within the Agreement No. 02.a03.21.0008 dated 24.11.2016 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and RUDN University.

potentials. The results of solving the boundary-value problem by program of the MMFS in axis are compared with those obtained using program KANTBP 4M [4] of the finite element method (FEM) in finite interval with appropriate boundary conditions.

The structure of the paper is following. In Section 2 we present the algorithm of MMFS for solving the BVPs for systems of N second-order ordinary differential equations with piecewise constant potentials and calculation of bound, metastable and scattering states. In Section 3 we compare the benchmark calculations MMFS of bound, metastable and scattering states with results obtained with the program KANTBP 4M that realizes the Finite Element Method (FEM).

2. Algorithm of matching the fundamental solutions

Let us consider the boundary-value problems for systems of N second-order ordinary differential equations (ODEs) of the waveguide type

$$\left(-\mathbf{I} \frac{d^2}{dz^2} + \mathbf{V}(z) - E \mathbf{I}\right) \Phi(z) = 0, \quad \Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_N(z))^T, \quad (1)$$

with the matrix of piecewise constant potentials $\mathbf{V}(z) = \{V_{ji}(z)\}$, $i, j = 1, \dots, N$:

$$V_{ji}(z) = \{V_{ji,1}, z \leq z_1, V_{ji,2}, z \leq z_2, \dots, V_{ji,k-1}, z \leq z_{k-1}, V_{ji,k}, z > z_{k-1}\}. \quad (2)$$

Here we suppose that the matrix of potentials is symmetric $V_{ji}(z) = V_{ij}(z)$ and real-valued $\text{Im} V_{ji}(z) = 0$, the case of complex valued potentials is considered in [5].

Step 1. In each of the subintervals $z \in (z_{m-1}, z_m)$, $m = 1, \dots, k$, the system of N ODEs (1) is a system of ODEs with constant coefficients

$$\left(-\mathbf{I} \frac{d^2}{dz^2} + \mathbf{V}_m - E \mathbf{I}\right) \Phi_m(z) = 0,$$

that has the general solution, explicitly depending upon the spectral parameter E

$$\Phi_m(z) = \sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-2)N+i} F_i^{(m)}(E, -z) \Psi_i^{(m)} + C_{(2m-1)N+i} F_i^{(m)}(E, z) \Psi_i^{(m)} \right). \quad (3)$$

Here $F_i^{(m)}(E, z) = \exp\left(\sqrt{\lambda_i^{(m)} - Ez}\right)$, C_{2mN+i} are unknown coefficients, $\lambda_i^{(m)}$ and $\Psi_i^{(m)} = \{\Psi_{1i}^{(m)}, \dots, \Psi_{Ni}^{(m)}\}^T$ are the solutions of the algebraic eigenvalue problem

$$\mathbf{V}_m \Psi_i^{(m)} = \lambda_i^{(m)} \Psi_i^{(m)}, \quad (4)$$

calculated numerically. For the symmetric real matrix \mathbf{V}_m the eigenvectors $\Psi_i^{(m)}$ obey the condition of orthogonality and normalisation $(\Psi_i^{(m)})^T \Psi_j^{(m)} = \delta_{ij}$.

Step 2.1. For bound states $E < E_{\max} = \min(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_N^{(k)})$ the asymptotic conditions at $z \rightarrow \pm\infty$ describe the exponentially decreasing solutions $\Phi_m(z)$ of (3)

$$\Phi_1(z \rightarrow -\infty) = \sum_{i=1}^N C_{N+i} \exp\left(\sqrt{\lambda_i^{(1)} - Ez}\right) \Psi_i^{(1)}, \quad (5)$$

$$\Phi_k(z \rightarrow +\infty) = \sum_{i=1}^N C_{(2k-2)N+i} \exp\left(-\sqrt{\lambda_i^{(k)} - Ez}\right) \Psi_i^{(k)}. \quad (6)$$

The wave functions of bound states satisfy to the normalization conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \Phi^\dagger(z) \Phi(z) = 1, \quad (7)$$

where \dagger means a Hermitian conjugation.

Step 2.2. For metastable states $E^M = \text{Re } E^M + i \text{Im } E^M$, $\text{Im } E^M < 0$ the asymptotic conditions at $z \rightarrow \infty$ describe outgoing waves in the open channels and exponentially decreasing solutions in the closed ones

$$\Phi_1(z \rightarrow -\infty) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(1)} \begin{cases} C_{N+i} \exp\left(\sqrt{\lambda_i^{(1)} - E^M z}\right), & \text{Re } E^M < \lambda_i^{(1)}, \\ C_i \exp\left(-i \sqrt{E^M - \lambda_i^{(1)}} z\right), & \text{Re } E^M > \lambda_i^{(1)}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\Phi_k(z \rightarrow +\infty) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(k)} \begin{cases} C_{(2k-2)N+i} \exp\left(-\sqrt{\lambda_i^{(k)} - E^M z}\right), & \text{Re } E^M < \lambda_i^{(k)}, \\ C_{(2k-1)N+i} \exp\left(i \sqrt{E^M - \lambda_i^{(k)}} z\right), & \text{Re } E^M > \lambda_i^{(k)}. \end{cases} \quad (9)$$

The wave functions of metastable states satisfy to the normalization conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \Phi^T(z) \Phi(z) = 1 \quad (10)$$

where T means a transposition.

Step 2.3. For multichannel scattering problem with fixed energy $E \equiv \text{Re } E$ the desired matrix of solutions $\Phi(z)$ is calculated with the asymptotic form “incident wave + outgoing waves” (see Fig. 1)

$$\Phi_{\rightarrow}(z \rightarrow \pm\infty) = \begin{cases} \mathbf{X}_{\max}^{(\rightarrow)}(z) \mathbf{T}_{\rightarrow} + \mathbf{X}_{\max}^{(c)}(z) \mathbf{T}_{\rightarrow}^c, & z > 0, \\ \mathbf{X}_{\min}^{(\rightarrow)}(z) + \mathbf{X}_{\min}^{(\leftarrow)}(z) \mathbf{R}_{\rightarrow} + \mathbf{X}_{\min}^{(c)}(z) \mathbf{R}_{\rightarrow}^c, & z < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Phi_{\leftarrow}(z \rightarrow \pm\infty) = \begin{cases} \mathbf{X}_{\max}^{(\leftarrow)}(z) + \mathbf{X}_{\max}^{(\rightarrow)}(z) \mathbf{R}_{\leftarrow} + \mathbf{X}_{\max}^{(c)}(z) \mathbf{R}_{\leftarrow}^c, & z > 0, \\ \mathbf{X}_{\min}^{(\leftarrow)}(z) \mathbf{T}_{\leftarrow} + \mathbf{X}_{\min}^{(c)}(z) \mathbf{T}_{\leftarrow}^c, & z < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Here \mathbf{R}_{\rightarrow} and \mathbf{R}_{\leftarrow} are desired square matrices of reflection amplitudes with the dimension $N_o^L \times N_o^L$ and $N_o^R \times N_o^R$ and \mathbf{T}_{\rightarrow} and \mathbf{T}_{\leftarrow} are the rectangular matrices of transmission amplitudes with the dimension $N_o^R \times N_o^L$ and $N_o^L \times N_o^R$, where N_o^L and N_o^R are the numbers of open channels in the asymptotic regions. Here the desired scattering matrix \mathbf{S} with the dimension $N_o \times N_o$ is calculated

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\rightarrow} & \mathbf{T}_{\leftarrow} \\ \mathbf{T}_{\rightarrow} & \mathbf{R}_{\leftarrow} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger = \mathbf{I}, \quad (13)$$

which is unitary and symmetric for real effective potentials.

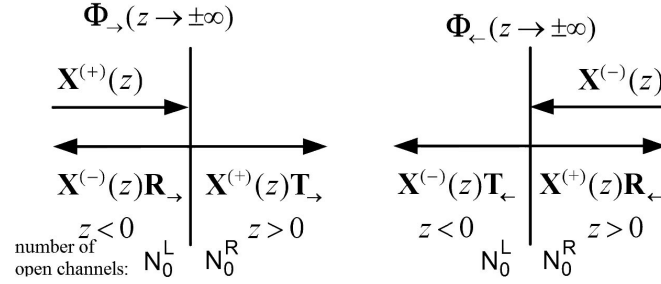


Figure 1. Left and right asymptotic solutions “incident wave + outgoing waves”, respectively

Let us write the expressions (11)–(12) in the explicit form

$$\Phi_{i_o^L}^{(\rightarrow)}(z \rightarrow -\infty) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(1)} \begin{cases} \frac{\exp\left(\imath \sqrt{E^M - \lambda_i^{(1)}} z\right)}{\sqrt[4]{E^M - \lambda_i^{(1)}}} \delta_{ii_o^L} + \\ + R_{ii_o^L} \frac{\exp\left(-\imath \sqrt{E^M - \lambda_i^{(1)}} z\right)}{\sqrt[4]{E^M - \lambda_i^{(1)}}}, & E > \lambda_i^{(1)}, \\ R_{ii_o^L}^c \exp\left(\sqrt{\lambda_i^{(1)} - E^M} z\right), & E \leq \lambda_i^{(1)}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\Phi_{i_o^L}^{(\rightarrow)}(z \rightarrow +\infty) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(k)} \begin{cases} T_{ii_o^L} \frac{\exp\left(\imath \sqrt{E^M - \lambda_i^{(k)}} z\right)}{\sqrt[4]{E^M - \lambda_i^{(k)}}}, & E > \lambda_i^{(k)}, \\ T_{ii_o^L}^c \exp\left(-\sqrt{\lambda_i^{(k)} - E^M} z\right), & E \leq \lambda_i^{(k)}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\Phi_{i_o^R}^{(\leftarrow)}(z \rightarrow -\infty) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(1)} \begin{cases} T_{ii_o^R} \frac{\exp\left(-\imath \sqrt{E^M - \lambda_i^{(1)}} z\right)}{\sqrt[4]{E^M - \lambda_i^{(1)}}}, & E > \lambda_i^{(1)}, \\ T_{ii_o^R}^c \exp\left(\sqrt{\lambda_i^{(1)} - E^M} z\right), & E \leq \lambda_i^{(1)}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\Phi_{i_o^R}^{(\leftarrow)}(z \rightarrow +\infty) = \sum_{i=1}^N \Psi_i^{(k)} \begin{cases} \frac{\exp\left(-\imath \sqrt{E^M - \lambda_i^{(k)}} z\right)}{\sqrt[4]{E^M - \lambda_i^{(k)}}} \delta_{ii_o^R} + \\ + R_{ii_o^R} \frac{\exp\left(\imath \sqrt{E^M - \lambda_i^{(k)}} z\right)}{\sqrt[4]{E^M - \lambda_i^{(k)}}}, & E > \lambda_i^{(k)}, \\ R_{ii_o^R}^c \exp\left(-\sqrt{\lambda_i^{(k)} - E^M} z\right), & E \leq \lambda_i^{(k)}. \end{cases} \quad (17)$$

Step 3. From the condition of continuity for the solutions and their derivatives

$$\lim_{z \rightarrow z_{m-1}} \Phi_{m-1}(z) - \Phi_m(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow z_{m-1}} \frac{\Phi_{m-1}(z)}{dz} - \frac{\Phi_m(z)}{dz} = 0, \quad m = 2, \dots, k, \quad (18)$$

at the discontinuity points $z = z_{m-1}$, $m = 2, \dots, k$ of the potentials (2), the system of algebraic equations is followed.

Step 3.1 In the case of a multichannel scattering problem for the wave incident from the left (see Fig. 1), for each value $i_o^L = 1, \dots, N_o^L$ we have a system of $2N(k-1)$ inhomogeneous linear equations with $2N(k-1)$ unknowns, $C_{2N+1;s}, \dots, C_{2N(k-1);s}$, and $R_{ii_o^L}, i = 1..N_o^L, R_{ii_o^L}^c, i = 1 + N_o^L, \dots, N, T_{ii_o^L}, i = 1..N_o^R, T_{ii_o^L}^c, i = 1 + N_o^R, \dots, N$: from condition of continuity for the solutions:

$$l \sum_{i=1}^N \left(\left(\bar{X}_i^{(1)}(E, \nu z_1) \delta_{ii_o^L} + \begin{Bmatrix} R_{ii_o^L} \bar{X}_i^{(1)}(E, -\nu z_1), & E > \lambda_i^{(k)} \\ R_{ii_o^L}^c F_i^{(1)}(E, z_1), & E \leq \lambda_i^{(k)} \end{Bmatrix} \right) \Psi_i^{(1)} - \right. \\ \left. - C_{2N+i} F_i^{(2)}(E, -z_1) \Psi_i^{(2)} - C_{3N+i} F_i^{(2)}(E, z_1) \Psi_i^{(2)} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-4)N+i} F_i^{(m-1)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} + C_{(2m-3)N+i} F_i^{(m-1)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} - \right. \\ \left. - C_{(2m-2)N+i} F_i^{(m)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} - C_{(2m-1)N+i} F_i^{(m)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} \right) = 0, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2k-4)N+i} F_i^{(k-1)}(E, -z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} + C_{(2k-3)N+i} F_i^{(k-1)}(E, z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} - \right. \\ \left. - \begin{Bmatrix} T_{ii_o^L} \bar{X}_i^{(k)}(E, \nu z_{k-1}), & E > \lambda_i^{(k)} \\ T_{ii_o^L}^c F_i^{(k)}(E, -z_{k-1}), & E \leq \lambda_i^{(k)} \end{Bmatrix} \Psi_i^{(k)} \right) = 0; \quad (21)$$

from condition of continuity for the derivatives of solutions:

$$\sum_{i=1}^N \left(\left(\bar{\bar{X}}_i^{(1)}(E, \nu z_1) \delta_{ii_o^L} + \begin{Bmatrix} R_{ii_o^L} \bar{\bar{X}}_i^{(1)}(E, -\nu z_1), & E > \lambda_i^{(k)} \\ R_{ii_o^L}^c G_i^{(1)}(E, z_1), & E \leq \lambda_i^{(k)} \end{Bmatrix} \right) \Psi_i^{(1)} - \right. \\ \left. - C_{2N+i} G_i^{(2)}(E, -z_1) \Psi_i^{(2)} - C_{3N+i} G_i^{(2)}(E, z_1) \Psi_i^{(2)} \right) = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-4)N+i} G_i^{(m-1)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} + C_{(2m-3)N+i} G_i^{(m-1)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} - \right. \\ \left. - C_{(2m-2)N+i} G_i^{(m)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} - C_{(2m-1)N+i} G_i^{(m)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2k-4)N+i} G_i^{(k-1)}(E, -z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} + C_{(2k-3)N+i} G_i^{(k-1)}(E, z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} - \right. \\ \left. - \begin{Bmatrix} T_{ii_o^L} \bar{\bar{X}}_i^{(k)}(E, \nu z_{k-1}), & E > \lambda_i^{(k)} \\ T_{ii_o^L}^c G_i^{(k)}(E, -z_{k-1}), & E \leq \lambda_i^{(k)} \end{Bmatrix} \Psi_i^{(k)} \right) = 0, \quad (24)$$

where the following notations are used:

$$G_i^{(m)}(E, \pm z_m) = \pm \sqrt{\lambda_i^{(m)} - E} F_i^{(m)}(E, \pm z_m), \quad m = 3, \dots, k-1, \quad (25)$$

$$\bar{X}_i^{(m)}(E, \pm i z_m) = F_i^{(m)}(E, \pm i z_m) / \sqrt[4]{E - \lambda_i^{(m)}}, \quad m = 1, k,$$

$$\bar{\bar{X}}_i^{(m)}(E, \pm i z_m) = F_i^{(m)}(E, \pm i z_m) \sqrt[4]{E - \lambda_i^{(m)}}, \quad m = 1, k.$$

In the case of multichannel scattering problem *for the wave incident from the right* (see Fig. 1) for each value $i_o^R = 1, \dots, N_o^R$ we have the system of $2N(k-1)$ inhomogeneous linear equations with $2N(k-1)$ unknowns, $C_{2N+1;s}, \dots, C_{2N(k-1);s}$, and $R_{ii_o^R}, i = 1..N_o^R, R_{ii_o^R}^c, i = 1 + N_o^R, \dots, N, T_{ii_o^R}, i = 1..N_o^L, T_{ii_o^R}^c, i = 1 + N_o^L, \dots, N$: from condition of continuity for the solutions:

$$\sum_{i=1}^N \left(+ \left\{ \begin{array}{l} T_{ii_o^R} \bar{X}_i^{(1)}(E, -iz_1), \quad E > \lambda_i^{(1)} \\ T_{ii_o^R}^c F_i^{(1)}(E, z_1), \quad E \leq \lambda_i^{(1)} \end{array} \right\} \Psi_i^{(1)} - \right. \\ \left. - C_{2N+i} F_i^{(2)}(E, -z_1) \Psi_i^{(2)} - C_{3N+i} F_i^{(2)}(E, z_1) \Psi_i^{(2)} \right) = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-4)N+i} F_i^{(m-1)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} + C_{(2m-3)N+i} F_i^{(m-1)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} - \right. \\ \left. - C_{(2m-2)N+i} F_i^{(m)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} - C_{(2m-1)N+i} F_i^{(m)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} \right) = 0, \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2k-4)N+i} F_i^{(k-1)}(E, -z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} + C_{(2k-3)N+i} F_i^{(k-1)}(E, z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} - \right. \\ \left. - \left\{ \begin{array}{l} R_{ii_o^R} \bar{X}_i^{(k)}(E, iz_{k-1}), \quad E > \lambda_i^{(k)} \\ R_{ii_o^R}^c F_i^{(k)}(E, -z_{k-1}), \quad E \leq \lambda_i^{(k)} \end{array} \right\} \Psi_i^{(k)} - \bar{X}_i^{(k)}(E, iz_{k-1}) \delta_{ii_o^R} \right) = 0; \quad (28)$$

from condition of continuity for the derivatives of solutions:

$$\sum_{i=1}^N \left(+ \left\{ \begin{array}{l} T_{ii_o^R} \bar{\bar{X}}_i^{(1)}(E, -iz_1), \quad E > \lambda_i^{(1)} \\ T_{ii_o^R}^c G_i^{(1)}(E, z_1), \quad E \leq \lambda_i^{(1)} \end{array} \right\} \Psi_i^{(1)} - \right. \\ \left. - C_{2N+i} G_i^{(2)}(E, -z_1) \Psi_i^{(2)} - C_{3N+i} G_i^{(2)}(E, z_1) \Psi_i^{(2)} \right) = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-4)N+i} G_i^{(m-1)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} + C_{(2m-3)N+i} G_i^{(m-1)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} - \right. \\ \left. - C_{(2m-2)N+i} G_i^{(m)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} - C_{(2m-1)N+i} G_i^{(m)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} \right) = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2k-4)N+i} G_i^{(k-1)}(E, -z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} + C_{(2k-3)N+i} G_i^{(k-1)}(E, z_{k-1}) \Psi_i^{(k-1)} - \right. \\ \left. - \begin{cases} R_{ii^R} \bar{X}_i^{(k)}(E, \nu z_{k-1}), & E > \lambda_i^{(k)} \\ R_{ii^R}^c G_i^{(k)}(E, -z_{k-1}), & E \leq \lambda_i^{(k)} \end{cases} \right) \Psi_i^{(k)} - \bar{X}_i^{(k)}(E, \nu z_{k-1}) \delta_{ii^R} = 0, \quad (31)$$

where the notations from (25) are used. **Step 3.2** or **Step 3.3** for the problem of bound or metastable states the nonlinear system of $2N(k-1) + 1$ equations with $2N(k-1) + 1$ unknowns follows

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-4)N+i} F_i^{(m-1)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} + C_{(2m-3)N+i} F_i^{(m-1)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} - \right. \\ \left. - C_{(2m-2)N+i} F_i^{(m)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} - C_{(2m-1)N+i} F_i^{(m)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} \right) = 0, \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^N \left(C_{(2m-4)N+i} G_i^{(m-1)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} + C_{(2m-3)N+i} G_i^{(m-1)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m-1)} - \right. \\ \left. - C_{(2m-2)N+i} G_i^{(m)}(E, -z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} - C_{(2m-1)N+i} G_i^{(m)}(E, z_{m-1}) \Psi_i^{(m)} \right) = 0, \quad (33)$$

where $G_i^{(m)}(E, \pm z_m) = \pm \sqrt{\lambda_i^{(m)} - E} F_i^{(m)}(E, \pm z_m)$, $m = 2, \dots, k$. The equation following from the normalisation condition (7) or (10) will be taken into account in final steps.

Step 3.2 From the condition of exponential decay of the bound-state eigenfunctions (5), for $z \rightarrow \pm\infty$ the limitation for the eigenvalues arises

$$E < E_{\max} = \min(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_N^{(k)}) \quad (34)$$

and the system of equations (32) is completed with the additional conditions

$$C_1 = 0, \dots, C_N = 0, \quad C_{(2k-1)N+1} = 0, \dots, C_{2kN} = 0. \quad (35)$$

The limitation of the parameter E from below

$$E > E_{\min} = \min(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_N^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(k-1)}, \dots, \lambda_N^{(k-1)}) \quad (36)$$

follows from the condition of boundedness of the self-adjoint operator, corresponding to the problem (1)–(2) in the inner subintervals $z \in (z_{m-1}, z_m)$, where m takes the values $m = 2, \dots, k-1$.

Step 3.3 For metastable states the system of equations (32) instead of (35) is completed with the additional conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} C_i = 0, \quad \operatorname{Re} E^M < \lambda_i^{(1)} \\ C_{N+i} = 0, \quad \operatorname{Re} E^M \geq \lambda_i^{(1)} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{N(2k-1)i} = 0, \quad \operatorname{Re} E^M < \lambda_i^{(k)} \\ C_{N(2k-2)i} = 0, \quad \operatorname{Re} E^M \geq \lambda_i^{(k)} \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

that follow from the asymptotic conditions (8).

Step 4. Writing the system of equations (32) and (33) in the matrix form

$$\mathbf{M}(E) = 0$$

and calculating the determinant $\det\mathbf{M}(E)$ of the obtained matrix, we arrive at the secular equation for the spectral parameter E ,

$$\det\mathbf{M}(E) = 0. \quad (37)$$

Remark 1. The determinant of the matrix $\det\mathbf{M}(E)$ in the analytical form as a function of the unknown spectral parameter E can be calculated in Maple during the reasonable time only for small number of subintervals k and small number of equations N , $kN < 19$. For example, for $N = 3$, $k = 4$ one expansion of the determinant of the matrix with the dimension 24×24 takes more than 3600 seconds, while the construction of the matrix $\mathbf{M}(E)$ and the calculation of its determinant for one given value of E takes about 0.6 second. Therefore, we calculate the determinant $\det\mathbf{M}(E)$ numerically using the appropriate grid $E: E_{\min}, \dots, E_{\max}$ from the interval $E_{\min} < E < E_{\max}$, where the boundary values E_{\min} and E_{\max} are given by Eqs. (34) and (36). One of the possible ways of constructing the suitable grid is implemented using the following algorithm. In the exponential functions are replaced with their truncated expansions in the vicinity of the chosen value E_0 , i.e., with the polynomials of the order Q with numerical coefficients

$$\exp\left(\pm\sqrt{\lambda_i^{(m)}-Ez}\right) = \exp\left(\pm\sqrt{\lambda_i^{(m)}-E_0z}\right) \mp \frac{\exp\left(\pm\sqrt{\lambda_i^{(m)}-E_0z}\right)}{2\sqrt{\lambda_i^{(m)}-E_0}}\Delta E + \dots, \quad (38)$$

where $\Delta E = E - E_0$. Substituting the obtained expressions into the determinant $\det\mathbf{M}(E)$, we get a polynomial of the order $2N(k-1)Q$ of the variable ΔE , which is again truncated to the order Q , i.e.,

$$\det\mathbf{M}(E) = \det\mathbf{M}(E_0) + a_1(\Delta E) + \dots + a_Q(\Delta E)^Q. \quad (39)$$

This leads to the limitation of the grid step $\Delta E_{\max} < |\varepsilon \det\mathbf{M}(E_0)/a_Q|^{1/Q}$, where $\varepsilon > 0$ is the preassigned number, the accuracy of the determinant $\det\mathbf{M}(E)$ series expansion. Similar expansion is used to correct the roots of Eq. (37), calculated using a certain method which will be published in a more detail elsewhere.

Remark 2. Near the singular points $E = \lambda_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, N$, $m = 2, \dots, k-1$, for which the subradical expressions in the exponents in Eq. (38) turn into zero, the domain of convergence of the expansions (38) and (39) is not large. In this case instead of Eq. (38) the following expansion is used

$$\exp\left(\pm\sqrt{\lambda_i^{(m)}-Ez}\right) = 1 \pm z\sqrt{\lambda_i^{(m)}-E} + \frac{1}{2}z^2(\lambda_i^{(m)}-E). \quad (40)$$

After calculating the set of solutions E_1, \dots, E_t of the equation (37), i.e., all values of the spectral parameter E for which $\det\mathbf{M}(E)$ turns into zero, for each E_s , $s = 1, \dots, t$ we get the degenerate algebraic system of equations (32), linear and homogeneous with respect to the unknown coefficients $C_{1;s}, \dots, C_{2Nk;s}$. To calculate the desired eigenvectors $\mathbf{C}_s = (C_{1;s}, \dots, C_{2Nk;s})^T$, we add an additional condition, e.g., $C_{2N+1;s} + \dots + C_{2N(k-2);s} = 1$. As a result, the inhomogeneous system of algebraic equations obtained for each E_s , $s = 1, \dots, t$ has the unique solution $\hat{\mathbf{C}}_s = (\hat{C}_{1;s}, \dots, \hat{C}_{2Nk;s})^T$. Substituting it into the left-hand side of the normalisation condition (7) or (10), we get the expressions for the

normalising coefficients B_s^2 , $s = 1, \dots, t$:

$$\sum_{m=1}^k \sum_{i=1}^N \int_{z_{m-1}}^{z_m} dz \left| \hat{C}_{(2m-2)N+i;s} F_i^{(m)}(E, -z) + \hat{C}_{(2m-1)N+i} F_i^{(m)}(E, z) \right|^2 = B_s^2$$

for bound states and

$$\sum_{m=1}^k \sum_{i=1}^N \int_{z_{m-1}}^{z_m} dz \left(\hat{C}_{(2m-2)N+i;s} F_i^{(m)}(E, -z) + \hat{C}_{(2m-1)N+i} F_i^{(m)}(E, z) \right)^2 = B_s^2$$

for metastable states.

Table 1

The eigenvalues of bound E_i and metastable $E_i^M = \text{Re } E_i^M + i \text{Im } E_i^M$, $\text{Im } E_i^M < 0$ states of the BVP (1) with effective potentials (43) at $N = 4$: (*) calculations by algorithm of MMFS. The same results are given using FEM with 3rd-type BC in intervals $z \in (-2, 2)$ and $z \in (-8, 8)$. (I) and (II): the estimations $\delta E_i = E_i^{\text{FEM}} - E_i$ of eigenvalues E_i calculations using FEM in interval $z \in (-8, 8)$ with Dirichlet (I) and Neumann (II) boundary conditions

	E_1	E_2	E_1^M	E_2^M
(*)	-0.3260959460	0.6358528584	2.8027364541 -0.0000002130 <i>i</i>	3.7392597199 -0.0263330505 <i>i</i>
(I)	(*)+1.69e-7	(*)+2.09e-4		
(II)	(*)-1.69e-7	(*)-2.10e-4		

As a result, we calculate the desired coefficients \mathbf{C}_s : $C_{i;s} = \hat{C}_{i;s}/B_s$, $i = 1, \dots, 2Nk$, $s = 1, \dots, t$, providing the fulfilment of the normalisation condition (7) or (10) for the desired orthogonal set of eigenfunctions, $s = 1, \dots, t$:

$$\Phi_s(z) = \{\Phi_s^{(1)}(z), z \leq z_1, \Phi_s^{(2)}(z), z \leq z_2, \dots, \Phi_s^{(k-1)}(z), z \leq z_{k-1}, \Phi_s^{(k)}(z), z > z_{k-1}\}. \quad (41)$$

3. Benchmark Calculations of Bound, Metastable and Scattering States

For example let us consider the problem of bound, metastable and scattering states for the Schrödinger equation in the 2D domain $\Omega_{yz} = \{y \in (0, \pi), z \in (-\infty, +\infty)\}$,

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(y, z) - E \right) \Psi(y, z) = 0, \quad \Psi(0, z) = \Psi(\pi, z) = 0, \quad (42)$$

with piecewise constant potential

$$V(y, z) = \{0, z \leq -2; -y, |z| < 2; 2, z \geq 2\},$$

presented in Fig. 2. We seek the solution of Eq. (42) in the form of expansion $\Psi(y, z) = \sum_i B_i(y) \Phi_i(z)$ over the set of basis functions $B_i(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(iy)$, which leads

to the system of ODEs (1) with the matrix of effective potentials (2) given in the form

$$V_{ij} = \{i^2\delta_{ij}, z \leq -2; i^2\delta_{ij} - \int_0^\pi y \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(iy) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(jy) dy, z \leq 2; (i^2 + 2)\delta_{ij}, z > 2\}. \quad (43)$$

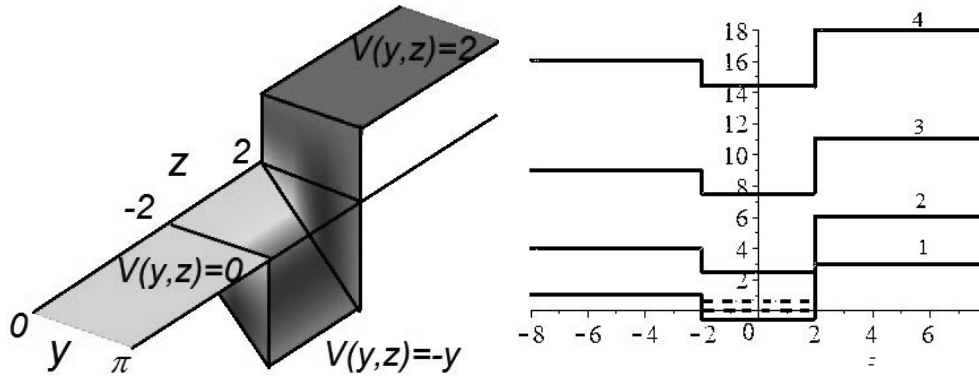


Figure 2. 2D potential and some diagonal (solid curves) and nondiagonal (dashed curves) effective potentials (44)

This system has two bound and a set of metastable states. The eigenvalues were calculated at $N = 4$, with matrix of potentials

$$V_{ij}(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}; & z < -2, \\ \begin{pmatrix} 1 - \frac{\pi}{2} & \frac{16}{9\pi} & 0 & \frac{32}{225\pi} \\ \frac{16}{9\pi} & 4 - \frac{\pi}{2} & \frac{48}{25\pi} & 0 \\ 0 & \frac{48}{25\pi} & 9 - \frac{\pi}{2} & \frac{96}{49\pi} \\ \frac{32}{225\pi} & 0 & \frac{96}{49\pi} & 16 - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}; & |z| \leq 2, \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}; & z > 2, \end{cases} \quad (44)$$

using the algorithm implementing the MMFS in the Maple system, and presented in Table 1.

So, the parameters $\lambda^{(m)}$ and matrices $\Psi^{(m)}$ of general solutions (3) calculated by **Step 1** by solving algebraic eigenvalue problem (4) take the form

$$\lambda^{(1)} = \text{diag} (1 \quad 4 \quad 9 \quad 16), \quad \Psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\lambda^{(2)} = \text{diag} (-0.675679 \quad 2.459337 \quad 14.484720 \quad 7.448436), \quad (46)$$

$$\Psi^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.983202 & 0.182314 & -0.003169 & -0.008059 \\ 0.181948 & 0.975788 & -0.004632 & -0.121288 \\ -0.013991 & -0.120697 & -0.088442 & -0.988642 \\ 0.003524 & 0.005598 & -0.996065 & -0.088372 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\lambda_i^{(3)} = \text{diag} (3 \quad 6 \quad 11 \quad 18), \quad \Psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

From here we have desirable restrictions of **Step 3.2** for the bound-state eigenvalues

$$-0.675679 = \min(\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_4^{(2)}) < E < \min(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)}, \lambda_1^{(3)}, \dots, \lambda_4^{(3)}) = 1. \quad (49)$$

These values were used to test the algorithm and programm KANTBP 4M, implementing the FEM in the Maple system [4]. The FEM calculations were performed with the Hermite elements of the seventh order ($p'=7, p=3, \kappa^{\max}=2$) on the finite element grid $\Omega_z = \{-8(4) - 2(4)2(4)8\}$, where in the parentheses the number of elements is indicated. The calculations of the bound states with the Neumann and Dirichlet conditions yield the upper and lower estimates of $\delta E_i = E_i^{\text{FEM}} - E_i$ with the accuracy $\delta E_1 \approx 1.7 \cdot 10^{-7}$ and $\delta E_2 \approx 2.1 \cdot 10^{-4}$. Note, the results, obtained by MMFS and FEM with 3rd-type BC (III) on both intervals $z \in (-2, 2)$ and $z \in (-8, 8)$ coincide with an accuracy of the order 10^{-10} . In this table we show also upper and lower estimations of eigenvalues of bound states obtained by FEM on interval $z \in (-8, 8)$ with Dirichlet (I) and Neumann (II) BC, respectively.

The results of calculations of eigenvalues of bound and metastable states and the matrix elements of reflection and transmission amplitudes for the multichannel scattering problem, obtained by matching the fundamental solutions and using FEM on the grid $\Omega'_z = \{-2(4)2\}$ with the boundary conditions of the third kind and the asymptotic solutions of **Step 2**, coincide with the accuracy to the order of 10^{-10} . Eigenfunctions $\Psi(y, z)$ of bound and metastable states of the 2D boundary-value problem and the components of the eigenfunctions $\Phi_j(z)$ (the imaginary parts shown by dotted lines) of the corresponding system of ODEs (1) are shown in Fig. 3.

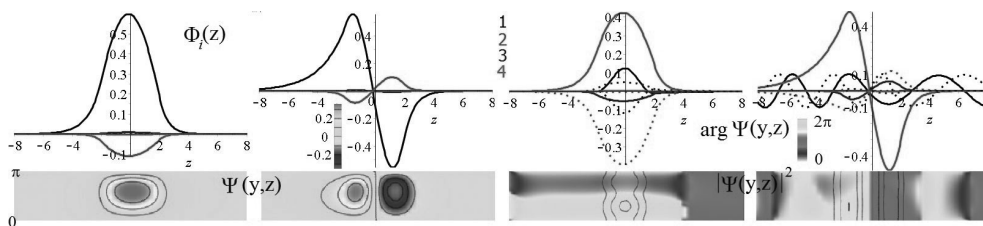


Figure 3. Eigenfunctions $\Psi(y, z)$ of bound and metastable states of the 2D boundary-value problem and the components of the eigenfunctions $\Phi_j(z)$ (the imaginary parts shown by dotted lines) of the corresponding system of ODEs (1)

The considered system has the set of threshold energies E : $E_1^{th;L}=1, E_1^{th;R}=3, E_2^{th;L}=4, E_2^{th;R}=6, \dots$ that are different for the left- and right-hand asymptotic regions of axis. At given $E \in (1, 3]$ we have only one open channel $N_o^L = 1, N_o^R = 0$ and we have only incident and reflected waves in left-hand side. The \mathbf{S} matrix (13) contains

only one element $\mathbf{S} = (R_{11})$. At given $E \in (3, 4]$ and $E \in (4, 6]$ for the wave incident from the right there is one open channel $N_o^R = 1$ and for wave incident from the left there are one and two open channels $N_o^L = 1$ and $N_o^L = 2$, respectively. The dependence of the elements of scattering \mathbf{S} matrix (13) is shown in Fig. 4.

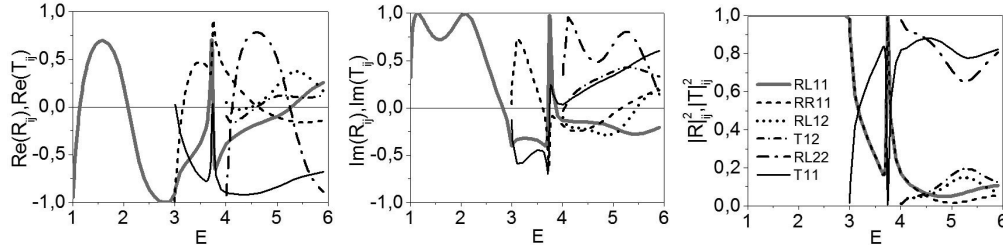


Figure 4. The dependence of real and image parts, and the square of absolute values of elements of \mathbf{S} -matrix (13) versus the scattering energy E . The threshold energies $E_1^{th;R}=3$ and $E_2^{th;L}=4$

For example at $E = 2.005$, $E = 3.305$ and $E = 4.805$ the \mathbf{S} -matrix takes form

$$\mathbf{S}(E = 2.005) = (0.21+0.98i), \quad \mathbf{S}(E = 3.305) = \left(\begin{array}{c|c} -0.53-0.32i & -0.57-0.53i \\ \hline -0.57-0.53i & 0.36+0.51i \end{array} \right),$$

$$\mathbf{S}(E = 4.805) = \left(\begin{array}{cc|c} -0.14-0.17i & 0.10-0.28i & -0.88+0.29i \\ 0.10-0.28i & -0.72+0.52i & 0.07+0.34i \\ \hline -0.88+0.29i & 0.07+0.34i & -0.06-0.13i \end{array} \right),$$

where the \mathbf{R}_{\rightarrow} , \mathbf{R}_{\leftarrow} , \mathbf{T}_{\rightarrow} and \mathbf{T}_{\leftarrow} submatrices are separated by lines. Corresponding typical wave functions of the multichannel scattering problems are presented in Fig. 5.

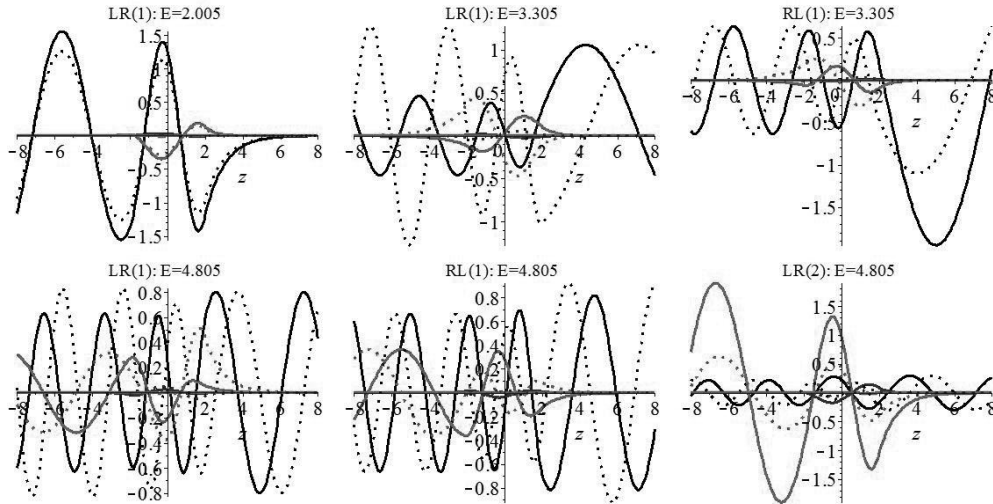


Figure 5. The real (solid lines) and the imaginary (dotted lines) components of the solution of the scattering problem for the wave incident from the right, RL(1), and the waves, incident from the left from the first, LR(1), and the second LR(2) open channels

One can see from Fig. 4 we have the resonance behavior of transmission and reflection amplitudes near $E \approx 3.7$ that corresponds to the resonance state at $E = 3.748$ presented in Fig. 6 while the other resonance state with the energy in vicinity of $E = 2.803$ is not resolved in this scale. The scattering energy $E = 2.803$ and $E = 3.748$ corresponds to real part of energy $\text{Re } E_1^M = 2.803$ and $\text{Re } E_2^M = 3.739$ of metastable states (see Table 1), while half-width of peaks corresponds to imaginary parts of the energy $\text{Im } E_1^M = -2.1 \cdot 10^{-7}$ and $\text{Im } E_2^M = -0.026$ of these metastable states. So, the wave functions of metastable states in Fig. 3 have similar behavior with wave functions of resonance scattering states in Fig. 6.

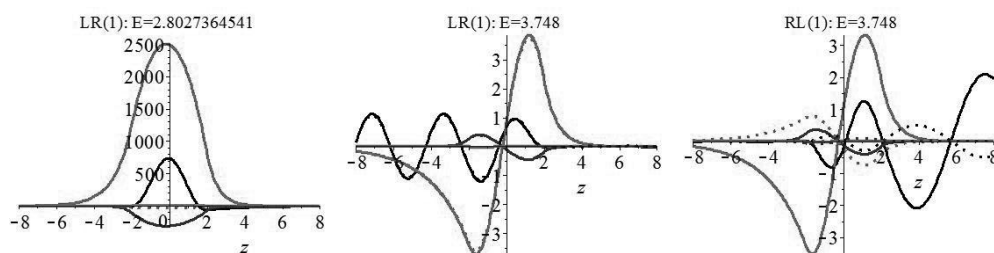


Figure 6. The the same as Fig. 5 but for resonance solutions of multichannel scattering problem that will be compared with the eigenfunctions of the metastable states in Fig. 3 and Table 1

So, the elements of \mathbf{S} -matrix at different values of energy E , obtained by MMFS and FEM with 3rd-type BC (III) on both intervals $z \in (-2, 2)$ and $z \in (-8, 8)$ coincide with an accuracy of the order 10^{-10} .

4. Conclusion

Effective Symbolic-Numerical Algorithms of Matching the Fundamental Solutions is elaborated and implemented in Maple. At large number k of subintervals or large number N of equations we have a cumbersome secular equation for bound and metastable states solving by author's algorithm, which will be published in a more detail elsewhere. It was shown that the results of benchmark calculations obtained by algorithms of Matching the Fundamental Solutions at each boundary between the adjacent axis subintervals and Finite Element Method in finite interval with third type boundary conditions coincided with an accuracy of the order of 10^{-10} . The proposed algorithms and programs can be applied for solving boundary-value problems for systems of N second-order ordinary differential equations (ODEs) of the waveguide type with the matrix of piecewise constant potentials arisen in mathematical modelling of optical multilayer systems and quantum-dimensional nanostructures.

References

1. C.-C. Huang, C.-C. Huang, J.-Y. Yang, An Efficient Method for Computing Optical Waveguides With Discontinuous Refractive Index Profiles Using Spectral Collocation Method With Domain Decomposition, *Journal of Lightwave Technology* 21 (10) (2003) 2284.
2. A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, Analytical Calculations of Derivation Partial Differential Equations for Coefficient Kantorovich Functions, *Matem. Mod.* 27 (2) (2015) 103.

3. M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, K. P. Lovetskiy, A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastyanov, Waveguide Modes of a Planar Optical Waveguide, *Mathematical Modelling and Geometry* 3 (1) (2015) 43.
4. A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, Program KANTBP 4M for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations of the Second Order.
URL <http://www.info.jinr.ru/programs/jinrlib/kantbp4m>
5. A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, V. Ulziibayar, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, A. Gózdź, V. A. Rostovtsev, Symbolic-Numeric Solution of Boundary-Value Problems for the Schrödinger Equation using the Finite Element Method: Scattering Problem and Resonance States, *Lecture Notes in Computer Science* 9301 (2015) 182.

УДК 519.632.4

Алгоритмы и программы решения краевых задач для систем ОДУ второго порядка с кусочно-постоянными потенциалами: многоканальная задача рассеяния и задача на собственные значения

А. А. Гусев*, **О. Чулуунбаатар***, **С. И. Виноцкий***,
Л. Л. Хай*†‡, **В. Л. Дербов§**, **А. Гуждж³²**

* *Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна*

† *Российский университет дружбы народов, г. Москва*

‡ *Белгородский государственный университет, г. Белгород*

§ *Саратовский государственный университет, г. Саратов*

³² *Институт физики, университет им. М. Кюри-Склодовска, г. Люблин, Польша*

Предложены новые алгоритмы и программы, реализованные в системе Maple для решения многоканальной задачи рассеяния и задачи на собственные значения волноводного типа для систем ОДУ второго порядка с матрицей кусочно-постоянных коэффициентов размерностью $N \times N$ на оси. Разработаны новые алгоритм и программа для решения краевой задачи методом сшивки фундаментальных решений (МСФР) системы ОДУ в точках разрыва потенциалов. На каждом из подынтервалов оси общее решение системы ОДУ ищется в виде линейной комбинации $2N$ фундаментальных решений с неизвестными коэффициентами. Каждое фундаментальное решение явно зависит от спектрального параметра и собственных значений и собственных векторов алгебраических задач на собственные значения с матрицей постоянных потенциалов размерностью $N \times N$. Из условия непрерывности решений и их производных в точках разрывов потенциалов следует система алгебраических уравнений. В случае задачи на связанные или метастабильные состояния полученная система алгебраических уравнений содержит нелинейную зависимость от неизвестного спектрального параметра. Для решения такой нелинейной задачи сформулирован символьно-численный алгоритм. Дано сравнение эталонных расчётов связанных, метастабильных состояний и состояний рассеяния краевых задач для систем ОДУ второго порядка, выполненных с помощью программ, реализующих алгоритмы МСФР и метода конечных элементов.

Ключевые слова: многоканальная задача рассеяния, задача на собственные значения, система ОДУ второго порядка, методом сшивки фундаментальных решений

Литература

1. *Huang C.-C., Huang C.-C., Yang J.-Y.* An Efficient Method for Computing Optical Waveguides With Discontinuous Refractive Index Profiles Using Spectral Collocation Method With Domain Decomposition // *Journal of Lightwave Technology*. — 2003. — Vol. 21, No 10. — P. 2284.
2. *Sevastyanov A. L., Sevastianov L. A., Tyutyunnik A. A.* Analytical Calculations of Derivation Partial Differential Equations for Coefficient Kantorovich Functions // *Matem. Mod.* — 2015. — Vol. 27, No 2. — P. 103.

3. Waveguide Modes of a Planar Optical Waveguide / M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, K. P. Lovetskiy, A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastyanov // *Mathematical Modelling and Geometry.* — 2015. — Vol. 3, No 1. — P. 43.
4. Gusev A. A., Hai L. L., Chuluunbaatar O., Vinitzky S. I. Program KANTBP 4M for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations of the Second Order. — <http://www.info.jinr.ru/programs/jinrlib/kantbp4m>.
5. Symbolic-Numeric Solution of Boundary-Value Problems for the Schrödinger Equation using the Finite Element Method: Scattering Problem and Resonance States / A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, V. Ulziibayar, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, A. Gózdź, V. A. Rostovtsev // *Lecture Notes in Computer Science.* — 2015. — Vol. 9301. — P. 182.

© Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitzky S. I., Hai L. L., Derbov V. L., Gózdź A.,
2016

Физика

УДК 532.526

Интегральная модель свободноконвективного турбулентного пограничного слоя с большими поперечными числами Грасгофа и однородно распределённым удельным тепловым потоком

Ю. П. Рыбаков*, С. Г. Черкасов†, Я. А. Суслов†

* *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

† *ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», Россия, Москва*

Предложена интегральная двухзонная модель для описания характеристик турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя около вертикальной стенки. Получены уточнённые профили вертикальной скорости и избыточной температуры, учитывающие влияние пристеночной области на течение в основной части пограничного слоя. Предложен корректный способ использования формулы Блазиуса для определения величины турбулентного напряжения трения на стенке. На основе дифференцирования профиля избыточной температуры найдено соотношение, связывающее удельную плотность теплового потока и избыточную температуры стенки. Показано, что в рамках выбранного приближения соотношение, связывающее удельную плотность теплового потока и избыточную температуры стенки, имеет форму, аналогичную формулам Влита–Росса и Саундерса. Получена замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая течение в свободноконвективном пограничном слое. В рамках выбранного приближения общая система интегро-дифференциальных уравнений была сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. На основании полученной системы было проведено численное моделирование свободноконвективного турбулентного пограничного слоя в условиях ряда экспериментов. Сделано сопоставление результатов численного моделирования, в том числе полей вертикальной скорости и избыточной температуры, с экспериментальными данными.

Ключевые слова: свободная конвекция, турбулентность, пограничный слой, интегральный подход, двухзонная модель

1. Введение

Среди инструментов расчётно-теоретического исследования свободно-конвективных пограничных слоёв своей простотой и удобством выделяются интегральные методы. По сравнению с прямым численным моделированием данный подход позволяет существенно упростить используемый математический аппарат и тем самым свести исходную задачу к более экономичным вычислительным алгоритмам. Наиболее широкая область применения интегральных методов — расчёт характеристик свободно-конвективного пограничного слоя во внешних задачах конвекции [1, 2], хотя эти методы могут быть полезными и для внутренних задач, в том числе и нестационарных [3]. Применительно к турбулентному свободно-конвективному пограничному слою наиболее известным интегральным методом является метод Эккерта–Джексона [4]. Этот метод был предложен довольно давно и использовался в основном для расчёта интенсивности теплообмена. Что же касается скорости конвективного течения, то расчёты по методу Эккерта–Джексона приводят к заметным отличиям от экспериментальных данных. Сравнительно недавно был предложен новый метод [5, 6]. В этом методе для описания теплообмена использовалась эмпирическая зависимость, но по поперечным распределениям скорости и температуры этот метод даёт более точные результаты. В данной статье исследования, начатые в [5, 6], продолжены и предложена новая интегральная физико-математическая модель, в

которой удалось сохранить уровень точности расчёта поперечных профилей скорости и температуры, но уже без привлечения эмпирических данных по теплообмену. Модель основана на выдвинутой ранее [7] гипотезе о двухзонной структуре свободно-конвективного турбулентного пограничного слоя. Проведено сравнение результатов расчёта по данной модели с экспериментальными данными [8, 9].

2. Постановка задачи

Рассматривается турбулентный свободно-конвективный пограничный слой около вертикальной полубесконечной пластины с однородно распределённым удельным тепловым потоком q_w . Задачу об определении полей скоростей и температуры в пограничном слое будем рассматривать в рамках двухзонной теории [7] в виде области, где доминируют вязкие силы (вязкий подслой), и области, где доминирует выталкивающая сила (основная часть пограничного слоя). При этом можно пренебречь выталкивающей силой внутри вязкого подслоя и вязкими силами внутри зоны свободной конвекции. В рамках сделанных допущений можно существенно упростить задачу, воспользовавшись интегральным подходом. Обозначим через δ толщину пограничного слоя, а через η — толщину вязкого вынужденного подслоя, которая определяется из соотношения $\frac{Gr_\eta^*}{Re_\eta^2} = 1$. В соответствии с теорией [7] и из соображений размерности примем, что

$$\eta = \left(\frac{\nu^2 \lambda}{g \beta q_w} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1)$$

Здесь β , ν , λ — соответственно коэффициент теплового расширения, кинематический коэффициент вязкости и коэффициент теплопроводности жидкости, g — ускорение массовой силы.

Направим ось z вверх вдоль пластины, а ось x по нормали к ней. В дальнейшем будем называть зонами 1 и 2 вязкий вынужденный подслой ($x < \eta$, $\frac{Gr_x^*}{Re_x^2} < 1$) и основную часть пограничного слоя ($\eta < x < \delta$, $\frac{Gr_x^*}{Re_x^2} > 1$) внутри пограничного слоя.

Примем также, что поперечное число Грасгофа $Gr_\delta^* = \frac{g \beta q_w \delta^4}{\lambda \nu^2}$ велико, следовательно, толщина вязкого подслоя намного меньше толщины всего пограничного слоя, то есть $\frac{\eta}{\delta} \sim Gr_\delta^{*-1/4} \ll 1$.

Введём избыточную температуру жидкости в пограничном слое

$$\Delta T(x, z) = T(x, z) - T_\infty, \quad T_\infty = T(z) \Big|_{x=\delta}.$$

Тогда уравнения турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя в отсутствии стратификации вне пограничного слоя для усреднённых величин в интегральной форме будут иметь вид:

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta w^2 dx = g \beta \int_0^\delta \Delta T dx - \frac{1}{\rho} \tau_w, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta w \Delta T dx = \frac{1}{\rho c} q_w. \quad (3)$$

Здесь w — вертикальная составляющая скорости; τ_w — напряжение трения на стенке; ρ , c — плотность и удельная теплоёмкость жидкости.

Примем также следующие дополнительные соотношения.

1. Профиль скорости. Для распределения вертикальной составляющей скорости поперёк пограничного слоя используем формулу

$$w = w_1(z) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^4. \quad (4)$$

2. Напряжение трения. В зоне 1 в рамках принятых в рассматриваемой модели допущений формула (4) принимает вид:

$$w \approx w_1(z) \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (5)$$

Используем теперь аналогию с течением в турбулентном пограничном слое при вынужденном обтекании пластины [10]. В этом случае профиль скорости достаточно хорошо описывается формулой

$$w = W_\infty (x/\delta)^{\frac{1}{7}}, \quad (6)$$

где W_∞ — скорость внешнего течения, δ — толщина пограничного слоя. При этом напряжение трения на стенке достаточно хорошо описывается формулой Блазиуса:

$$\tau_w = 0,0228 \rho W_\infty^2 \left(\frac{\nu}{W_\infty \delta} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

В двухзонной модели турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя роль внешнего течения играет течение во внешней части пограничного слоя (зона 2), а аналогом вынужденного пограничного слоя с толщиной δ является вязкий подслой с толщиной η (зона 1). Сравнивая формулы (5) и (6), легко увидеть, что профиль скорости около стенки в задаче конвекции совпадает с профилем скорости в такой задаче вынужденного обтекания, в которой $\delta = \eta$ и $W_\infty = w_1$. Если профили скорости около стенки совпадают, то можно предположить, что и напряжения трения совпадают. Поэтому для напряжения трения на стенке будем использовать формулу Блазиуса в виде

$$\tau_w = 0,0228 \rho w_1^2 \left(\frac{\nu}{w_1 \eta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

3. Профиль температуры. Согласно теоретическим исследованиям и экспериментальным данным [7–9] поперечное распределение избыточной температуры во внешней зоне 2 имеет вид:

$$\Delta T = Ax^{-\frac{1}{3}} + B.$$

Во внутренней зоне 1 профиль температуры описывается линейной функцией, а на внешней границе пограничного слоя ΔT обращается в нуль. Чтобы удовлетворить всем этим условиям, для распределения избыточной температуры поперёк пограничного слоя предлагается следующая формула:

$$\Delta T = T_1(z) \frac{\left(\frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{\delta} + \frac{\eta}{\delta} \right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta} \right)} - \left(\frac{\eta}{\delta} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

4. Теплообмен. В модели [5, 6] для описания теплообмена между стенкой и жидкостью использовалась эмпирическая формула Влита-Росса [1]

$$Nu_z = 0,17Ra_z^{*\frac{1}{4}} = 0,095Ra_z^{\frac{1}{3}}. \quad (9)$$

Здесь $Nu_z = q_w z / \lambda T_w$ — число Нуссельта, $Ra_z = g\beta T_w z^3 / \nu^2$ — число Рэлея, Ra_z^* — модифицированное число Рэлея.

В предлагаемой модели для этой цели используется закон Фурье, в который подставляется выражение (8), что даёт:

$$q_w = -\lambda \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda}{3} \frac{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{T_1(z)}{\eta}. \quad (10)$$

В рассматриваемом случае, когда $\eta/\delta \ll 1$, это формула принимает вид:

$$q_w \approx \frac{\lambda T_1(z)}{3\eta}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует соотношение:

$$Nu_z = \frac{1}{3^{\frac{4}{3}} Pr^{\frac{1}{3}}} Ra_z^{\frac{1}{3}} = K(Pr) \times Ra_z^{\frac{1}{3}}. \quad (12)$$

В условиях экспериментов, на которых проверялась модель [5, 6], коэффициент $K(Pr)$ в формуле (12) принимает значение 0,12–0,23 для чисел Прандтля в диапазоне от 7 до 1, соответственно. Это несколько выше, чем у формулы Влита-Росса, где $K(Pr) = 0,095$, однако стоит отметить, что данный результат хорошо согласуется с эмпирической формулой Саундерса [10], в которой коэффициент $K(Pr) = 0,17$.

5. Основная система уравнений. В рамках используемого подхода сначала требуется вычислить интегралы в формулах (2) и (3) с учётом формул (4) и (8):

$$\int_0^{\delta} w^2 dx \approx 0,0523 w_1^2 \delta^{\frac{9}{7}} \eta^{-\frac{2}{7}}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\delta} \Delta T dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{1}{3}} T_1 \delta, \quad (14)$$

$$\int_0^{\delta} w \Delta T dx \approx 0,172 \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{\frac{4}{21}} w_1 T_1 \delta. \quad (15)$$

Подставляя (4), (7), (8), (13), (14) и (15) в уравнения (2) и (3), с учётом однородности теплового потока на стенке, получим следующую систему уравнений:

$$0,0523 \frac{d}{dz} \left(w_1^2 \delta^{\frac{9}{7}} \right) = \frac{3}{2} \nu^{\frac{3}{14}} \left(\frac{g\beta q_w}{\rho c} \right)^{\frac{25}{42}} Pr^{\frac{25}{42}} \delta^{\frac{2}{3}} - 0,0228 \nu^{\frac{1}{4}} w_1^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\nu^2 \lambda}{g\beta q_w} \right)^{\frac{1}{112}}, \quad (16)$$

$$0,516 \frac{d}{dz} \left(w_1 \delta^{\frac{17}{21}} \right) = a \left(\frac{g\beta q_w}{\nu^2 \lambda} \right)^{\frac{25}{84}}. \quad (17)$$

3. Верификация модели

Для проверки полученной модели были использованы экспериментальные исследования [8] и [9], сделанные на воде с перепадами температур $7\text{--}25^\circ\text{C}$. Пластина была погружена в воду с температурой $25\text{--}30^\circ\text{C}$. В статье [8] наиболее полно представлены эксперименты V5 и V9. В эксперименте V5 плотность теплового потока на пластине составляла 19497 Вт/м^2 , в эксперименте V9 — 28661 Вт/м^2 . На рис. 1 и 2 представлены поперечные распределения температуры и скорости в условиях эксперимента V5 и V9 соответственно. Как видно из графиков, результаты расчёта хорошо согласуются с экспериментальными данными во всей толщине пограничного слоя. Так же можно заметить, что точность расчёта возле стенки и вблизи внешней границы пограничного слоя немного ниже, чем в середине.

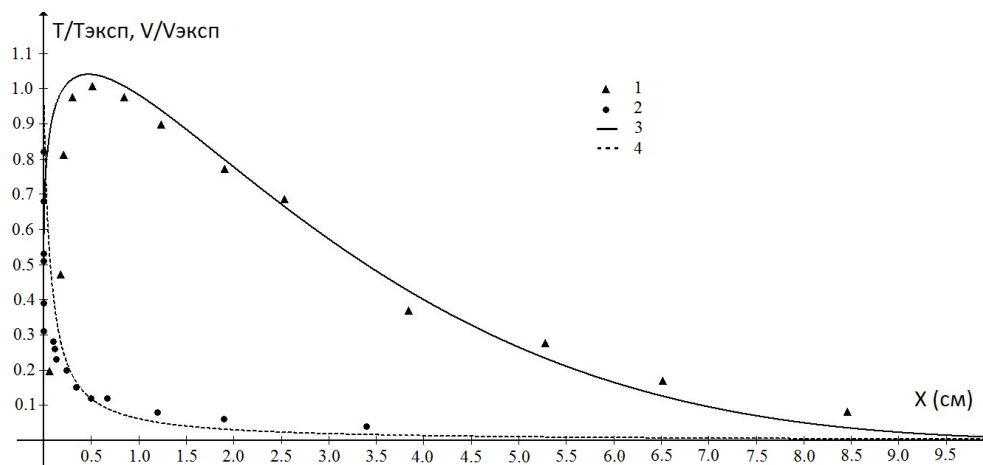


Рис. 1. Профиль скорости и избыточной температуры поперёк пограничного слоя для условий опыта V5. На данном рисунке: 1 — экспериментальные значения скорости, 2 — экспериментальные значения температуры, 3 — расчётные значения скорости и 4 — расчётные значения температуры

Из статьи [9] для сравнения с результатами расчёта был взят эксперимент с тепловым потоком 4488 Вт/м^2 как наилучшим образом описывающий область развитой турбулентности. Как видно из рис. 3, зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа, представленная формулой (12), которая следует из данной модели, так же хорошо совпадает с экспериментальными данными. Максимальное отклонение расчётного значения числа Нуссельта от полученного в результате эксперимента не превышает $12,5\%$.

4. Заключение

Предложена физико-математическая модель для расчёта характеристик турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя, основанная на уравнениях пограничного слоя в интегральной форме. В модели используются элементы двухзонной теории свободно-конвективного пограничного слоя. Показано, что результаты расчётов хорошо совпадают с результатами известных экспериментов, как по интенсивности теплообмена, так и по распределениям скорости и температуры поперёк пограничного слоя.

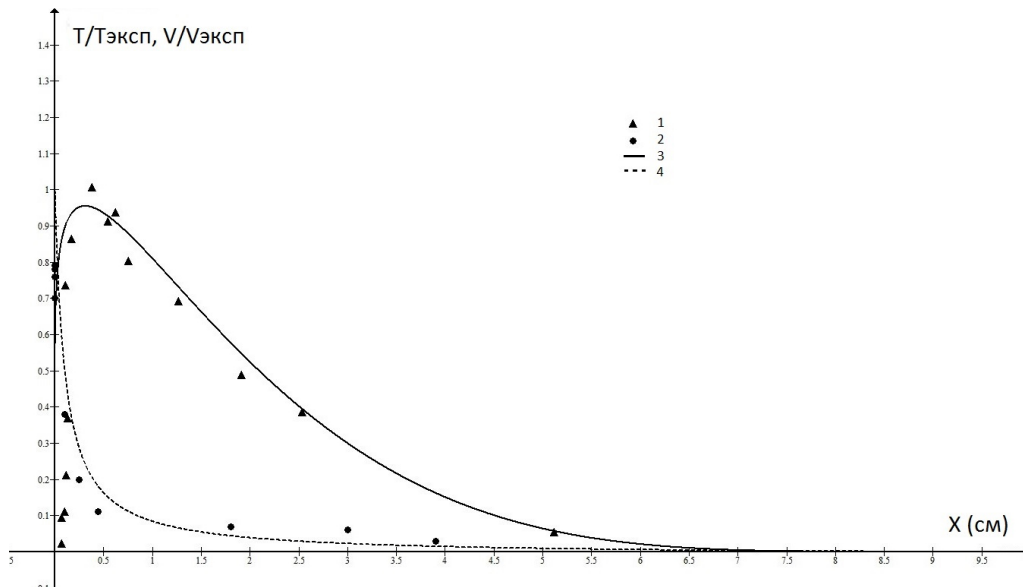


Рис. 2. Профиль скорости и избыточной температуры поперёк пограничного слоя для условий опыта V9. На данном рисунке: 1 — экспериментальные значения скорости, 2 — экспериментальные значения температуры, 3 — расчётные значения скорости и 4 — расчётные значения температуры

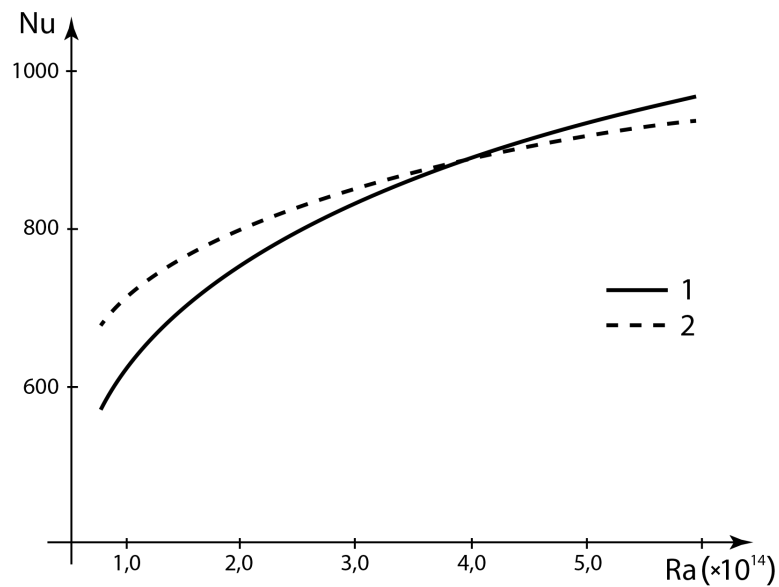


Рис. 3. Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея в условиях экспериментов [9] с плотностью теплового потока на стенке 4488 [Вт/м²]. На данном рисунке: 1 — расчётное значение числа Нуссельта, 2 — экспериментальное значение числа Нуссельта

Литература

1. Джалурия Й. Естественная конвекция. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
2. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. — М.: Мир, 1991. — 678 с.
3. Черкасов С. Г. Естественная конвекция и температурная стратификация в криогенном топливном баке в условиях микрогравитации // Изв. РАН. МЖГ. — 1994. — № 5. — С. 142–149.
4. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 680 с.
5. Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Двухпараметрический интегральный метод расчёта турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя // Тепловые процессы в технике. — 2014. — Т. 6, № 8. — С. 338–342.
6. Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Полуэмпирический интегральный метод расчёта свободноконвективного турбулентного пограничного слоя // Шестая Российская Национальная Конференция по тепломассобмену, тезисы докладов. Секция 2. — Т. 1. — 2014. — С. 242.
7. William K. George S. P. C. A Theory for Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surfaces // Int. J. Heat Mass Transform. — 1979. — Vol. 22. — Pp. 813–826.
8. Влит Л. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоёв в условиях естественной конвекции // Теплопередача. Серия С. — 1969. — Т. 91, № 4. — С. 73–95.
9. Qureshi Z. H., Gebhart B. Transition and Transport in a Buoyancy Driven Flow in Water Adjacent to a Vertical Uniform Flux Surface // Int. J. Heat Mass Transform. — 1978. — Vol. 21. — Pp. 1467–1479.
10. Saunders O. A. Natural Convection in Liquids // Proc R. Soc. A. — 1939. — Vol. 172. — Pp. 55–71.

UDC 532.526

Integral Model of Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surface with a Large Lateral Grashof Number and Homogeneous Heat Flux

Y. P. Rybakov*, S. G. Cherkasov[†], Y. A. Suslov[†]

* Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

[†] Keldysh Federal Research Center, Moscow, Russia

The proposed integrated two-zone model to describe the characteristics of the turbulent free convection boundary layer near a vertical wall. To obtain accurate profiles of vertical velocity and excess temperature, taking into account the effect of wall region of the flow in the main part of the boundary layer. Offered the correct way of using the Blasius formula to determine the value of turbulent shear stress on the wall. On the basis of the differentiation profile of excess temperature the relation connecting the specific heat flux and excess wall temperature. It is shown that in the framework of the chosen approximation ratio linking density of the heat flux and excess wall temperature has a form similar to the formulas Vliet–Ross and Saunders. The obtained closed system of integro-differential equations describing the flow in free convection flow the boundary layer. In the framework of the chosen approximation, the total system of integro-differential equations was reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations of the first order. On the basis of the obtained systems was carried out numerical simulation of a natural convection turbulent boundary layer in terms of the number of experiments. Made comparison of results of numerical simulation, including the fields of vertical velocity and excess temperature, with experimental data.

Key words and phrases: natural convection, turbulence, boundary layer, integral method, two-zone model

References

1. Y. Jaluria, Natural Convection, Mir, Moscow, 1983, in Russian.
2. B. Gebhart, Y. Jaluria, R. Mahajan, B. Sammakia, Natural Convection Flows, Heat and Mass Transfer, Mir, Moscow, 1991, in Russian.
3. S. G. Cherkasov, Natural Convection and Temperature Stratification in Criogenic Fuel Tank in Conditions of Micro Gravitation, *Izvestia RAN MZG* (5) (1994) 142–149, in Russian.
4. E. R. Eckert, R. M. Drake, Theory of Heat and Mass Transfer, Gosenergoizdat, Moscow, Leningrad, 1961, in Russian.
5. S. G. Cherkasov, Y. A. Suslov, Two-Parametrical Integral Method of Calculation Turbulent Boundary Layer, *Heat Processes in Technics* 6 (8) (2014) 338–342, in Russian.
6. S. G. Cherkasov, Y. A. Suslov, Semi-Empirical Integral Method of Calculation Turbulent Boundary Layer, in: Six National Conferencing of heat ond mass transfer, thesis. Section 2., Vol. 1, 2014, p. 242, in Russian.
7. S. P. C. William K. George, A Theory for Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surfaces, *Int. J. Heat Mass Transform* 22 (1979) 813–826.
8. L. Vliet, Experimental Investigation of Natural Convection Turbulent Boundary Layers, *Heat Transfer. Series S.* 91 (4) (1969) 73–95, in Russian.
9. Z. H. Qureshi, B. Gebhart, Transition and Transport in a Buoyancy Driven Flow in Water Adjacent To a Vertical Uniform Flux Surface, *Int. J. Heat Mass Transform* 21 (1978) 1467–1479.
10. O. A. Saunders, Natural Convection in Liquids, *Proc R. Soc. A* 172 (1939) 55–71.

© Рыбаков Ю. П., Черкасов С. Г., Суслов Я. А., 2016

Анализ течения в пристеночной области свободноконвективного турбулентного пограничного слоя

Ю. П. Рыбаков*, С. Г. Черкасов[†], Я. А. Суслов[†]

* *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

[†] *ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», Россия, Москва*

Проведён анализ течения турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя около нагретой вертикальной пластины. На основе сопоставления критериев подобия определено относительное влияние вязких и конвективных сил в рассматриваемой области. Получены приближенные уравнения, описывающие характеристики течения в пристеночной области с учётом относительного влияния вязких и конвективных сил. С использованием аналогии между уравнениями вынужденного турбулентного пограничного слоя и полученных уравнений для пристеночной области найдены соответствующие профили вертикальной скорости и избыточной температуры. На основе полученных профилей вертикальной скорости и избыточной температуры были построены поля скоростей и температуры внутри пристеночной области. По полям скоростей получено выражение, описывающее турбулентное трение в пристеночной области свободноконвективного турбулентного пограничного слоя. На основе аналогии с вынужденным турбулентным пограничным слоем и течением в пристеночной области свободноконвективного турбулентного пограничного слоя возле вертикальной пластины было предложено использовать формулу Блазиуса для нахождения значения турбулентного напряжения трения на стенке. Проведён обзор полученных результатов.

Ключевые слова: свободная конвекция, турбулентность, пограничный слой, турбулентное трение, пристеночная область

1. Введение

При исследовании свободноконвективных турбулентных пограничных слоёв интегральными методами [1–3] особенно остро встаёт проблема определения параметров течения в пристеночной области и значений напряжения трения на стенке. Впервые задача о структуре течения в пристеночной области была поставлена С. С. Кутутеладзе [4, 5], где была использована модель квазиламинарного вязкого подслоя. В рамках приближения квазиламинарного вязкого подслоя было предложено пренебречь левыми частями уравнений Навье–Стокса и пульсационными составляющими для напряжений трения и теплового потока. В рамках этой модели были получены приближённые решения уравнений пограничного слоя в пристеночной области для вертикальной скорости и избыточной температуры. В дальнейшем подобное решение было получено В. Джорджем и С. Кэппом [6] в 1978 году в рамках тех же предположений было получено аналогичное решение, в котором, однако, явно фигурировало значение напряжения трения на стенке. Данные результаты почти не использовались в практических расчётах, ввиду того, что согласно моделям С. С. Кутутеладзе и Джорджа–Кэппа течение в пристеночной области не оказывает прямого влияния на теплообмен. Как показывают современные экспериментальные данные [7, 8], пренебрежение левой частью уравнения переноса импульса в пристеночной области некорректно ввиду положительности как выталкивающей силы, так и силы трения. В данной статье предложено использовать анализ критериев подобия в пристеночной области для определения относительного влияния выталкивающей силы и силы трения на параметры течения. Получена приближённая система уравнений, учитывающая левую часть уравнения переноса импульса. Получено решение приближённой системы и определены границы применимости выбранного приближения.

2. Постановка задачи

Рассматривается пристеночная область турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя около вертикальной бесконечной нагретой пластины с заданным удельным тепловым потоком q_w . Задачу об определении полей скоростей и температуры в пристеночной области пограничного слоя будем рассматривать в рамках смешанной конвекции [9], где относительное влияние вязких сил и силы плавучести определяется отношением числа Грасгофа к квадрату числа Рейнольдса. Обозначим за d расстояние по нормали до стенки и примем это расстояние за характерный линейный масштаб задачи. Направим ось z вверх вдоль пластины, а ось x по нормали к ней. В соответствии с теорией [6] отношение Gr^*/Re^2 задаётся соотношением:

$$\frac{Gr^*}{Re^2} = \left(\frac{g\beta q_w}{\lambda \nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot d^2. \quad (1)$$

Отсюда следует, что в пристеночной области ($d \rightarrow 0$) можно пренебречь выталкивающей силой. Обозначим за η толщину области, в которой доминируют вязкие силы. Из условия (1) можно величину η условием равенства единице отношения Gr^*/Re^2 .

$$\eta = \left(\frac{\nu^2 \lambda}{g\beta q_w} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2)$$

В рамках сделанного допущения можно существенно упростить исходную задачу, записав уравнение переноса импульса в следующем виде:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь ρ , u , w — соответственно плотность, нормальная скорость и вертикальная скорость, τ — турбулентные напряжения трения. Для замыкания уравнения (3) требуется использовать уравнение неразрывности.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

В рамках принятых в рассматриваемой модели допущений, с учётом линейности профиля температуры в пристеночной области, уравнение переноса тепла запишем в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Граничными условиями для уравнений (3)–(5) являются условие прилипания, условие не протекания и значение теплового потока на стенке, а также значения вертикальной и нормальной скоростей на внешней границе пристеночной области. Данные условия можно записать в виде следующих формул:

$$w|_{x=0} = 0, \quad (6)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

$$q|_{x=0} = q_w, \quad (8)$$

$$w|_{x=\eta} = w_0. \quad (9)$$

3. Анализ решения

Уравнения (3)–(4) с граничными условиями (6)–(7) и (9) эквивалентны задаче о турбулентном пограничном слое при вынужденном обтекании пластины [9], где в качестве скорости внешнего течения используется скорость на внешней границе пристеночной области, а в качестве толщины пограничного слоя — толщина η . Вертикальную скорость и трение на стенке, с учётом аналогии с вынужденным турбулентным течением, можно записать в следующем виде:

$$u = -\frac{7\eta}{8} \frac{dw_0}{dz} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{8}{7}}, \quad (10)$$

$$w = w_0(z) \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad (11)$$

$$\tau_w = 0,0228\rho w_0^2 \left(\frac{\nu}{w_0\eta}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (12)$$

В силу уравнений (3)–(4) турбулентные напряжения трения в пристеночной области описываются формулой:

$$\tau = 0,00228\rho w^2 \left(\frac{\nu}{w\eta}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{49}{72}\eta\rho w \frac{dw}{dz} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\frac{9}{7}}. \quad (13)$$

Турбулентное напряжение трения, описываемое формулой (13), демонстрирует поведение, аналогичное экспериментальным исследованиям в работах [7, 8, 10, 11] при $\frac{x}{\delta} < 5 \cdot 10^{-2}$, где δ — общая толщина пограничного слоя.

Уравнение (5) решается отдельно от уравнений (3)–(4) и в силу граничного условия (8) имеет решение в виде постоянного теплового потока.

$$q = q_w. \quad (14)$$

4. Заключение

Предложена физико-математическая модель для расчёта характеристик турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя, основанная на уравнениях пограничного слоя в интегральной форме. В модели используются элементы двухзонной теории свободно-конвективного пограничного слоя. Показано, что результаты расчётов хорошо совпадают с результатами известных экспериментов, как по интенсивности теплообмена, так и по распределениям скорости и температуры поперёк пограничного слоя.

Литература

1. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 680 с.
2. Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Двухпараметрический интегральный метод расчёта турбулентного свободно-конвективного пограничного слоя // Тепловые процессы в технике. — 2014. — Т. 6, № 8. — С. 338–342.
3. Черкасов С. Г., Суслов Я. А. Полуэмпирический интегральный метод расчёта свободноконвективного турбулентного пограничного слоя // Шестая Российская

- национальная конференция по тепломассобмену, тезисы докладов. Секция 2. — Т. 1. — 2014. — С. 242.
4. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979. — 416 с.
 5. Турбулентная естественная конвекция в вертикальном слое / С. С. Кутателадзе, В. П. Ивакин, А. Г. Кирдяшкин, А. Н. Кекалов // ТВТ. — 1977. — Т. 15, № 3. — С. 545–553.
 6. William K. George S. P. C. A Theory for Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surfaces // Int. J. Heat Mass Transform. — 1979. — Vol. 22. — Pp. 813–826.
 7. Development of Turbulence Characteristics in a Vertical Free Convection Boundary Layer / M. Miyamoto, H. Kajino, J. Kurima, I. Takanami // Proc. 7th Int. Heat Transfer Conf. — Vol. 2, No NC31. — Munich: 1982. — Pp. 323–328.
 8. Чумаков Ю. С. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидродинамика») // Научно-технические ведомости. — 2004. — № 2. — С. 1–27.
 9. Saunders O. A. Natural Convection in Liquids // Proc R. Soc. A. — 1939. — Vol. 172. — Pp. 55–71.
 10. Turbulent Boundary Layer of Natural Convection Along a Vertical Flat Plate / M. Hishida, Y. Nagano, T. Tsuji, I. Kaneko // Trans. JSME, Ser. B. — 1981. — Vol. 47, No 419. — Pp. 1260–1268.
 11. Doan K. S., Coutanceau J. Structure d'un écoulement de convection naturelle-transition et turbulence établie // Acta Astronautica. — 1981. — Vol. 8. — Pp. 123–160.

UDC 532.526

Analysis of the Flow of the Near Wall Region in Natural Convection Boundary Layer

Y. P. Rybakov*, S. G. Cherkasov[†], Y. A. Suslov[†]

* Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

[†] Keldysh Federal Research Center, Moscow, Russia

The analysis of the flow of turbulent natural convection boundary layer near a heated vertical plate was done. On the basis of comparison of criteria of similarity determined relative influence of viscous and convective forces in this region. The approximate equations describing the flow characteristics in the near wall region takes into account the relative influence of viscous and convective forces. Using the analogy between equations of forced turbulent boundary layer and obtained the equations for the near wall region was found corresponding profiles of vertical velocity and excess temperature. On the basis of the profiles of vertical velocity and excess temperature were built of the velocity field and temperature in the near wall region. In the fields of velocities obtained an expression describing the friction in turbulent wall region of a turbulent boundary layer free convection flow. Based on the analogy with a forced turbulent boundary layer and the flow in the near wall region of natural convection turbulent boundary layer near a vertical plate has been proposed to use the Blasius formula for finding the values of the turbulent shear stress on the wall. A review of the results was done.

Key words and phrases: natural convection, turbulence, boundary layer, turbulent friction, near-wall region

References

1. E. R. Eckert, R. M. Drake, Theory of Heat and Mass Transfer, Gosenergoizdat, Moscow, Leningrad, 1961, in Russian.
2. S. G. Cherkasov, Y. A. Suslov, Two-Parametrical Integral Method of Calculation Turbulent Boundary Layer, Heat Processes in Technics 6 (8) (2014) 338–342, in Russian.

3. S. G. Cherkasov, Y. A. Suslov, Semi-Empirical Integral Method of Calculation Turbulent Boundary Layer, in: Six National Conferencing of heat ond mass transfer, thesis. Section 2., Vol. 1, 2014, p. 242, in Russian.
4. S. S. Kutateladze, Main Theory of Heat Tranfer, Atomizdat, Moscow, 1979, in Russian.
5. S. S. Kutateladze, V. P. Ivankin, A. G. Kirdyashkin, A. N. Kekalov, Turbulent Natural Convection in Vertical Boundary Layer, TVT 15 (3) (1977) 545–553, in Russian.
6. S. P. C. William K. George, A Theory for Natural Convection Turbulent Boundary Layers Next to Heated Vertical Surfaces, Int. J. Heat Mass Transform 22 (1979) 813–826.
7. M. Miyamoto, H. Kajino, J. Kurima, I. Takanami, Development of Turbulence Characteristics in a Vertical Free Convection Boundary Layer, in: Proc. 7th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 2, Munich, 1982, pp. 323–328.
8. Y. S. Chumakov, Problems of Turbulence and Numeric Hydrodynamics (to the 70th Anniversary of Department “Hydrodynamics”), Science and technology news (2) (2004) 1–27, in Russian.
9. O. A. Saunders, Natural Convection in Liquids, Proc R. Soc. A 172 (1939) 55–71.
10. M. Hishida, Y. Nagano, T. Tsuji, I. Kaneko, Turbulent Boundary Layer of Natural Convection Along a Vertical Flat Plate, Trans. JSME, Ser. B 47 (419) (1981) 1260–1268.
11. K. S. Doan, J. Coutanceau, Structure d’un écoulement de convection naturelle-transition et turbulence établie, Acta Astronautica 8 (1981) 123–160.

УДК 533.9

Особенности ускорения ультрарелятивистских электронов мощным лазерным излучением в режиме циклотронного авторезонанса

Н. А. Абдулов, В. П. Милантьев

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Проведён анализ численного решения уравнений движения электронов в поле ультракороткого лазерного импульса, распространяющегося вдоль постоянного магнитного поля, при условии циклотронного авторезонанса. Показано, что при отсутствии условия циклотронного резонанса в момент инжекции электроны мгновенно покидают область взаимодействия. Поле лазерного излучения круговой поляризации задавалось в параксиальном приближении в виде гауссовых пучков основной и первой мод. Учитывались поправки первого приближения к компонентам поля излучения. Расчёты показали, что поправки первого порядка к поперечным компонентам векторов поля не оказывают существенно влияния на авторезонансное движение электронов, тогда как продольные компоненты первого приближения играют решающую роль. Было показано также, что в рассматриваемом случае конкретная форма импульса не имеет значения. Получены картины пространственного распределения векторов поля излучения в поперечной плоскости в зависимости от продольной координаты (направления распространения излучения). Показано, что характер изменения энергии пучка электронов сильно зависит от их положений инжекции в фокальной плоскости. При этом в зависимости от места инжекции возможно как ускорение, так и замедление пучка электронов. Показано, что при оптимальных условиях инжекции механизм циклотронного авторезонанса может обеспечить достаточно высокую эффективность ускорения ультрарелятивистских электронов в поле мощного лазерного излучения первой и основной мод с достаточно высоким средним темпом на расстоянии порядка двух рэлеевских длин. Предпочтительнее является основная мода из-за более простого описания поля этой моды, более высокого темпа ускорения и более широкой ускоряющей зоны инжекции пучка электронов.

Ключевые слова: циклотронный авторезонанс, ультрарелятивистский электрон, мощное лазерное излучение, ультракороткие импульсы, моды гауссовых пучков, авторезонансное ускорение

1. Введение

Авторезонансный механизм ускорения заряженных частиц, открытый Коломенским и Лебедевым [1] и Давыдовским [2], основан на том, что при движении частицы в вакууме в поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля со скоростью света, начальное условие циклотронного резонанса является интегралом движения. Различные проблемы ускорения электронов в режиме циклотронного авторезонанса обсуждались во многих работах (см. обзоры [3, 4]). Эффективность авторезонансного ускорения существенно зависит от интенсивности ускоряющего излучения. Поэтому естественно возник интерес к авторезонансному механизму ускорения мощным лазерным излучением. Однако в этом случае имеется ряд особенностей, связанных с большой частотой излучения и его импульсным характером [5, 6]. Прежде всего, оказалось, что для выполнения условия циклотронного резонанса в начальный момент времени для покоящихся частиц требуются фантастически сильные ведущие магнитные поля. Если же рассматривать реалистичные значения магнитного поля, то в режим авторезонансного ускорения лазерным излучением могут вовлекаться лишь ультрарелятивистские электроны [5, 6]. Далее, импульсный характер излучения ставит проблему адекватного описания такого излучения и приводит к ряду особенностей движения электрона

в авторезонансном режиме. Наиболее изученным является авторезонансный механизм ускорения электронов импульсным лазерным излучением достаточно большой длительности, описываемым в рамках параксиального приближения [7, 8]. Вопрос о применимости параксиального приближения в случае коротких импульсов обсуждался в работах [9, 10]. Было показано, что лазерное излучение фемтосекундной длительности вполне может описываться в параксиальном приближении. Это приближение становится неприменимым в случае мощного остро сфокусированного лазерного излучения [11].

Основной целью данной работы является исследование возможности эффективного ускорения ультрарелятивистских электронов мощным лазерным излучением фемтосекундной длительности в режиме циклотронного авторезонанса.

2. Поле лазерного излучения

Описание мощного импульсного лазерного излучения, в общем, представляет собой достаточно сложную задачу [7–11]. Ограничимся рассмотрением импульсов, протяжённость которых превышает длину волны λ : $c\Delta t \gg \lambda$. Здесь Δt — длительность импульса, c — скорость света в вакууме. В этом случае для описания излучения можно использовать параксиальное приближение, в котором излучение представляется в виде гауссовых пучков произвольной моды [9]. Предполагается, что характерный размер пучка a в плоскости $z = 0$ (сужение гауссова пучка) намного превосходит длину волны λ , так что существует малый параметр:

$$\mu = 2/ka = a/z_R \ll 1. \quad (1)$$

Здесь $z_R = ka^2/2$ — рэлеевская длина, определяющая дифракционное распывание волнового пучка [7, 8], $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ — волновое число, ω — несущая частота волны, c — скорость света.

Поперечные компоненты электрического поля лазерного излучения в параксиальном приближении определяются с помощью параболического уравнения, вытекающего из точных уравнений Максвелла. Его решения находятся с помощью разложений по параметру (1) и представляются в виде гауссовых пучков m -ой моды [9]. Предполагается, что излучение распространяется вдоль внешнего постоянного магнитного поля (оси z). В случае аксиально-симметричных пучков круговой поляризации в нулевом приближении по параметру μ компоненты электрического поля, в общем, можно представить в виде [9]:

$$E_{xm} = f(\sigma)E_m(r, z) \sin(\theta + \psi_m), \quad E_{ym} = f(\sigma)E_m(r, z) \cos(\theta + \psi_m). \quad (2)$$

В этих формулах: $E_m(r, z)$ — амплитуда m -ой моды, ψ_m — её фаза, $\theta = kz - \omega t$ — «быстрая» фаза волны, распространяющейся вдоль внешнего постоянного магнитного поля (оси z), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Функция $f(\sigma)$ определяет импульсный характер излучения, при этом параметр $\sigma = (t - z/c)/\Delta$, где Δ — длительность импульса. Импульсная функция $f(\sigma)$ может задаваться по-разному. В данной работе будем представлять её в виде [10]: $f(\sigma) = \cos^2(\frac{\pi}{2}\sigma)$.

Важную роль в движении электронов в поле импульсного лазерного излучения, как будет показано далее, играет продольная составляющая вектора напряжённости электрического поля, являющаяся величиной первого порядка по параметру μ [9]:

$$E_{zm} = f(\sigma) [E_1(r, z) \sin(\theta + \psi_m) + E_2(r, z) \cos(\theta + \psi_m)], \quad (3)$$

$$E_1 = -\frac{1}{k} (\partial_y E_m + E_m \partial_x \psi_m), \quad E_2 = \frac{1}{k} (\partial_x E_m - E_m \partial_y \psi_m), \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}.$$

Поперечные компоненты векторов поля излучения в нулевом и первом приближениях по параметру (1) связаны общими соотношениями:

$$B_{xm} = -E_{ym}, \quad B_{ym} = E_{xm}. \quad (4)$$

Продольная составляющая вектора магнитного поля, так же как и электрического поля, является величиной первого порядка [9]:

$$B_{zm} = f(\sigma) [B_1(r, z) \sin(\theta + \psi_m) + B_2(r, z) \cos(\theta + \psi_m)], \quad (5)$$

$$B_1 = \frac{1}{k} (\partial_x E_m - E_m \partial_y \psi_m),$$

$$B_2 = \frac{1}{k} (\partial_y E_m + E_m \partial_x \psi_m).$$

В случае достаточно длительных импульсов поправки к поперечным компонентам векторов поля являются величинами второго порядка по параметру (1). При длительности импульса $\Delta t < 66$ фс поправки к поперечным компонентам возникают в первом приближении [9, 10]. Однако проведенные оценки показали, что при рассматриваемых интенсивностях лазерного излучения и начальной энергии ускоряемого пучка электронов поправки первого приближения на 5–6 порядков меньше величин нулевого приближения (2). Поэтому первыми поправками к поперечным компонентам векторов поля будем пренебрегать.

Далее будем рассматривать основную и первую моды лазерного излучения ($m = 0, 1$). Удобно использовать безразмерные переменные: время $\tau = \omega t$, радиус-вектор в поперечной плоскости $\rho = (X, Y)$, где $(X, Y) = (x/a, y/a)$, продольная координата $Z = z/z_R$.

Для основной моды ($m = 0$) амплитуда и фаза лазерного излучения (2) электрического поля нулевого приближения определяются формулами [7, 9]:

$$E_0 = \frac{E(0)}{\sqrt{1 + Z^2}} \exp\{-\rho^2/(1 + Z^2)\}, \quad \psi_0 = \rho^2 Z/(1 + Z^2) - \arctg Z, \quad (6)$$

где $E(0)$ — амплитуда волны в фокусе (при $\tau = 0, X = Y = Z = 0$), $\rho^2 = X^2 + Y^2$.

Амплитуда и фаза первой моды ($m = 1$) описываются формулами [7, 9]:

$$E_0 = \frac{E(0) \sqrt{(1 - \rho^2)^2 + Z^2}}{\sqrt{(1 + Z^2)^{3/2}}} \exp\{-\rho^2/(1 + Z^2)\}, \quad (7a)$$

$$\psi_1 = \rho^2 Z/(1 + Z^2) - 3 \arctg Z + \arctg \left(\frac{Z}{1 - \rho^2} \right) + \pi H(1 - \rho^2). \quad (7b)$$

Здесь $H(x)$ — функция Хэвисайда.

Продольные компоненты поля излучения находятся по формулам (3), (5). Для их определения необходимо вычислить производные от амплитуды E_0 и фазы ψ_0 по поперечным координатам:

$$\partial_q E_0 = -\frac{2E_0 q}{a(1 + Z^2)}, \quad \partial_q \psi_0 = \frac{2qZ}{a(1 + Z^2)},$$

где q — координата X или Y .

3. Уравнения движения электрона

Релятивистское движение электрона в заданном электромагнитном поле (3)–(7) описывается, в общем, уравнениями (в безразмерном виде):

$$\begin{aligned}\frac{dP_x}{d\tau} &= \frac{e}{\omega m_0 c} (1 - P_z/\gamma) E_x + \omega_c P_y (1 + B_z^1/B_0), \\ \frac{dP_y}{d\tau} &= \frac{e}{\omega m_0 c} (1 - P_z/\gamma) E_y - \omega_c P_x (1 + B_z^1/B_0),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_z}{d\tau} &= \frac{eE_z}{\omega m_0 c} + \frac{e}{\omega m_0 c \gamma} (P_x E_x + P_y E_y), \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= \frac{\mathbf{P}}{ak\gamma}, \quad \frac{dZ}{d\tau} = \frac{P_z}{z_R k \gamma}.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь использованы соотношения (4). Введены также обозначения: безразмерный вектор импульса $\mathbf{P} = \mathbf{p}/m_0 c$, где m_0 — масса электрона, γ — релятивистский гамма-фактор, $\omega_c = eB_0/m_0 c \gamma \equiv \omega_{c0}/\gamma$, где $\omega_{c0} = eB_0/m_0 c$ — классическая циклотронная частота. В уравнениях (8) вектор \mathbf{E} представляет собой вектор напряжённости электрического поля лазерного излучения с точностью до членов первого порядка. Внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 считается постоянным и направленным вдоль оси z .

Согласно проведённым оценкам, поле лазерного излучения с интенсивностью 10^{18} Вт/см² на несколько порядков сильнее самосогласованного поля электронного пучка, поэтому влиянием последнего на движение электронов будем пренебрегать.

4. Условия циклотронного авторезонанса

Строго говоря, авторезонансное движение частицы возможно лишь в поле плоской поперечной электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью света в вакууме вдоль постоянного магнитного поля [3]. В этом случае начальное условие циклотронного резонанса частицы с волной $\omega - kv_z = \omega_{c0}/\gamma$, или

$$\gamma - P_z = \omega_{c0}/\omega \equiv \Omega \quad (10)$$

совпадает с интегралом уравнений движения и, следовательно, сохраняется во всё время движения частицы [3]. Здесь v_z — скорость частицы в направлении внешнего магнитного поля (и распространения волны), P_z — продольный безразмерный импульс частицы, $\omega_{c0} = eB_0/m_0 c$ — классическая циклотронная частота. В случае лазерного излучения начальное условие циклотронного резонанса, в общем, не может сохраняться во всё время движения частицы. Рассмотрим, однако, изменение величины $G \equiv \gamma - P_z$, входящей в соотношение (10). Из уравнений движения (9) с учётом членов первого порядка по параметру μ следует:

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{e}{m_0 c} \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) E(z) + o(\mu^2).$$

Отсюда видно, что величина G при учёте членов первого порядка в среднем остаётся постоянной. Таким образом, можно считать, что за время взаимодействия частицы с коротким лазерным импульсом условие (10) в среднем сохраняется. Расчёты показали, что действительно условие (10) выполняется с очень высокой точностью. Поэтому можно считать, что авторезонансный режим движения частицы, обеспечиваемый условием (9), возможен и при движении частицы в поле мощного

импульсного лазерного излучения, которое существенно отличается от поля плоской волны.

Классическая циклотронная частота электрона зависит только от внешнего магнитного поля, которое мы считаем постоянным и равным 10^5 Гс. Таким образом, параметр Ω в (10) зависит только от длины волны излучения. Мы рассматриваем излучение с длиной волны $\lambda = 1$ мкм, интенсивностью лазерного пучка $\sim 10^{18}$ Вт/см², и длительностью импульса $\Delta t = 34$ фс. Такие параметры хотя и являются теоретическими, но они достаточно хорошо приближены к реальным данным [12, 13]. Учитывая релятивистское соотношение $P_z = \sqrt{\gamma^2 - 1 - P_{\perp}^2}$, где P_{\perp}^2 — квадрат безразмерной поперечной компоненты импульса, из условия (10) получим: $\gamma = \frac{\Omega^2 + 1 + P_{\perp}^2}{2\Omega}$. Отсюда при $P_{\perp}^2 = 0$ следует:

$$\gamma_{\min} = \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega}. \quad (11)$$

Это минимальная начальная энергия, требуемая для осуществления резонанса (10). В рассматриваемых условиях параметр $\Omega = 9,3 \cdot 10^{-4}$. В этом случае согласно (11) минимальная начальная энергия частицы должна быть порядка $W_0 \sim 273,5$ МэВ. Это значит, что электроны, вовлекаемые в режим авторезонансного ускорения, уже должны быть ультрарелятивистскими.

Уравнения движения электрона (9) при условии циклотронного авторезонанса (10) являются чрезвычайно сложными для аналитического решения. Поэтому они решались численно по методу Рунге–Кутты. Решение проводилось с точностью до 10^{-6} . Движение электронов с различными начальными условиями в авторезонансном режиме рассматривалось на ограниченном интервале в направлении распространения излучения (вдоль постоянного магнитного поля): от фокальной плоскости до расстояния $3z_R$. Далее лазерный гауссов пучок заметно расплывается, и его интенсивность существенно ослабляется. Такое расстояние пучок электронов преодолевает в среднем за 3,2 пс. С помощью численного решения получены графики, показывающие эволюцию структуры поля лазерного излучения при авторезонансном движении электрона. Из проведённых расчётов следует, что изменения импульсной функции $f(\sigma)$ за всё время движения частицы происходят примерно в 5–6 знаке после запятой. Поэтому считалось, что эта функция остаётся постоянной на рассматриваемом интервале движения частицы. В расчётах принималось: $a_0 = 10^{-3}$ см, $z_R = 0,031$ см.

5. Изменения структуры электрического поля лазерного излучения основной моды

При движении частицы происходит изменение пространственного распределения компонент электрического поля. Согласно формулам (2), (6) в фокальной плоскости ($Z = 0$) при $t = 0$ компонента электрического поля основной моды $E_x = 0$, при этом компонента E_y имеет гауссово распределение с максимумом в начале координат. Далее в поперечной плоскости структура этих компонент существенно изменяется. Характер изменения структуры поля в поперечной плоскости $Z = 2$ показан на рис. 1 и 2.

Как уже отмечалось, важную роль в движении частицы в рассматриваемых условиях играет продольная составляющая электрического поля E_z , которая описывается формулой (3). Пространственное распределение компоненты E_z основной моды гауссова излучения при $Z = 0$ изображено на рис. 3, а её проекция в поперечной плоскости — на рис. 4.

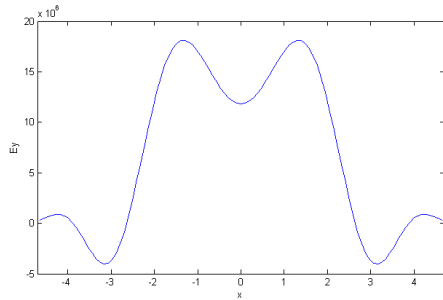


Рис. 1. Распределение компоненты поля E_y основной моды в плоскости $Z = 2$

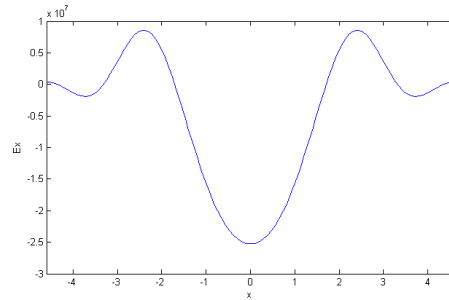


Рис. 2. Распределение компоненты поля E_x основной моды в плоскости $Z = 2$

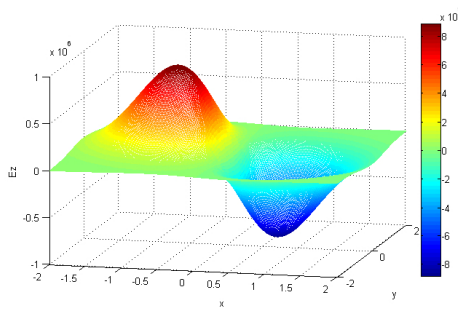


Рис. 3. Пространственное распределение компоненты E_z при $Z = 0$

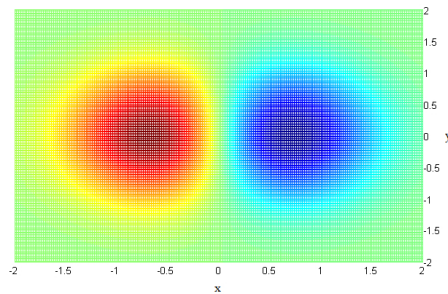


Рис. 4. Проекция компоненты E_z в поперечной плоскости

Из этих рисунков видно, что структура продольной компоненты в поперечной плоскости является ассиметричной с чётким разделением областей положительных и отрицательных значений поля E_z . Это существенно влияет на характер движения электрона в зависимости от места инжекции частицы в фокальной плоскости. Заметим, что при $X = 0$ поле E_z равно нулю. Характер зависимости поля E_z от X при $Y = 0$ демонстрирует рис. 5.

В процессе движения частицы пространственное распределение поля E_z существенно изменяется. Структура поля в поперечной плоскости $Z = 2$ изображена на рис. 6, 7.

Из этих рисунков видно, что в отличие от фокальной плоскости в плоскости $Z = 2$ области с положительными и отрицательными значениями поля E_z распределяются довольно сложным образом. При больших длинах волн порядка 10 мкм продольная составляющая электрического поля E_z является быстро осциллирующей величиной, так что в среднем действие этой компоненты на частицу отсутствует. В рассматриваемом авторезонансном режиме частица движется со скоростью, близкой к скорости света. Поэтому частица движется практически одновременно с волной, и для неё поле волны представляется как близкое к квазистационарному. Это видно из рис. 8, на котором показано распределение поля E_z в направлении распространения излучения для частицы с начальными поперечными координатами в фокальной плоскости $X = Y = 0,3$.

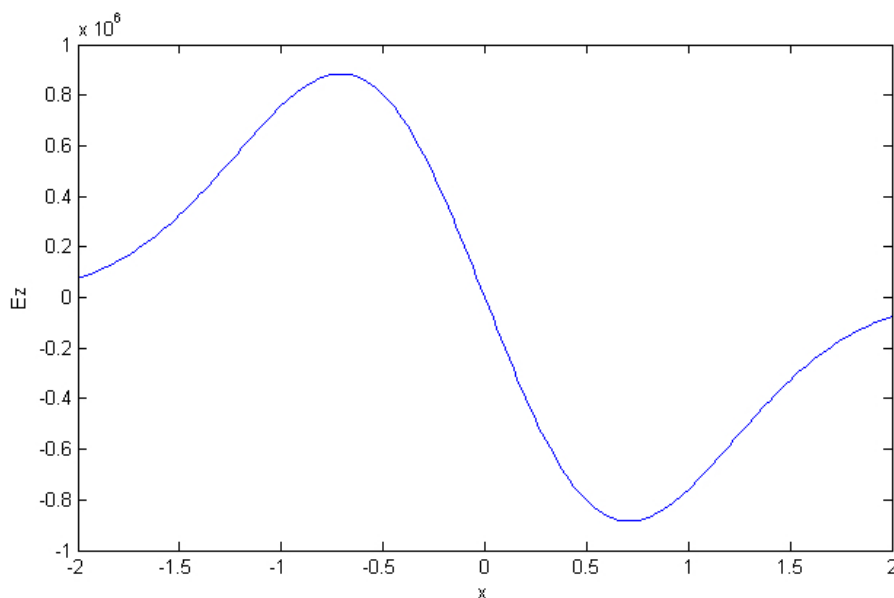


Рис. 5. Зависимость компоненты E_z от X при $Y = 0$ в плоскости $Z = 0$

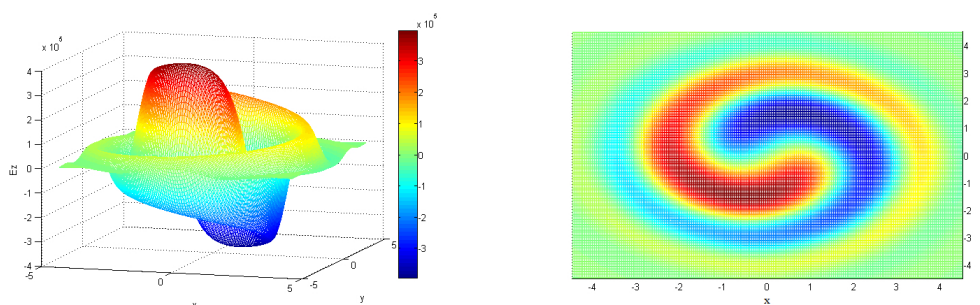


Рис. 6. Структура поля в поперечной плоскости $Z = 2$

Рис. 7. Структура поля в поперечной плоскости $Z = 2$

6. Ускорение электронов лазерным излучением основной моды

При циклотронном резонансе в поле импульсного излучения большой длительности все частицы независимо от начальных фаз со временем начинают вовлекаться в режим ускорения [3, 5, 6]. В случае коротких мощных импульсов решающее воздействие на продольное движение ультррелятивистского электрона оказывает продольная компонента электрического поля. Это поле, как показано выше, имеет асимметричную структуру. Поэтому возможность захвата частиц в режим ускорения сильно зависит от положения инжекции. На рис. 9 представлена зависимость энергии пробных электронов от Z при разных начальных положениях в плоскости сужения пучка ($Z = 0$).

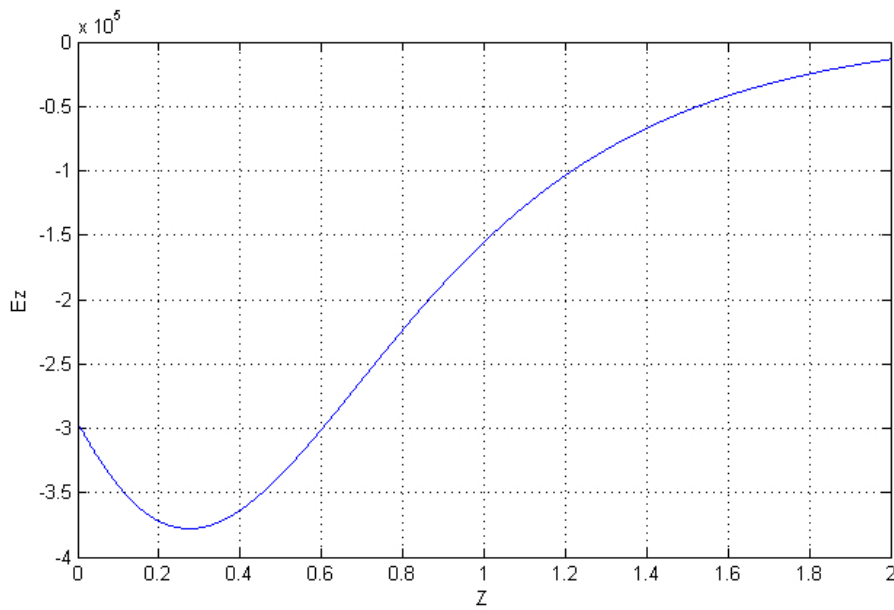


Рис. 8. Распределение поля E_z в направлении распространения излучения для частицы с начальными поперечными координатами в фокальной плоскости $X = Y = 0,3$

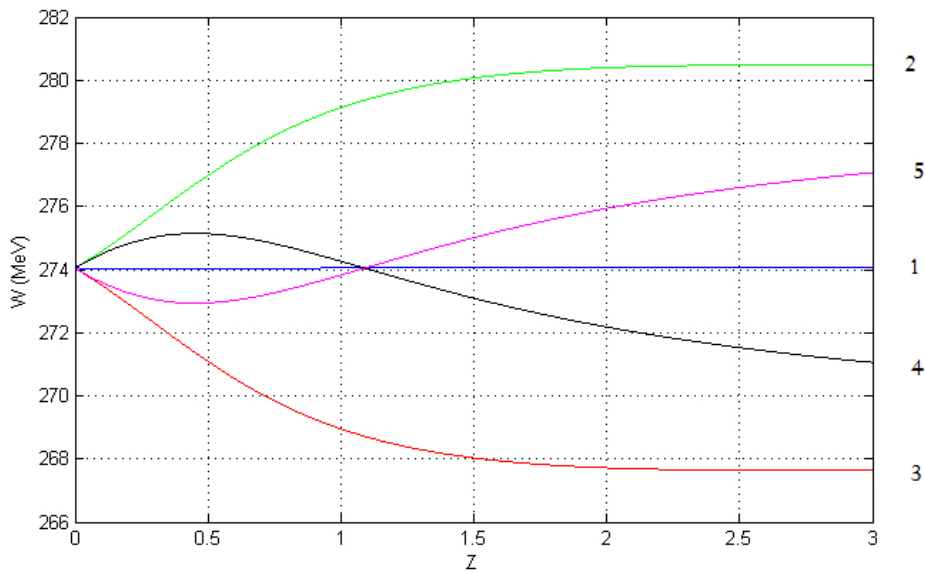


Рис. 9. 1) $X = 0; Y = 0$; 2) $X = 0,3; Y = 0,3$; 3) $X = -0,3; Y = -0,3$; 4) $X = 0,3; Y = -0,3$; 5) $X = -0,3; Y = 0,3$

Из рисунка видно, что частицы, находящиеся в первой четверти плоскости сужения лазерного пучка 2), монотонно ускоряются, и на расстоянии 1,5–2 рэлеевских длин наступает насыщение. Частицы в третьей четверти 3) монотонно тормозятся. Основной набор (или потеря) энергии происходит на расстоянии до одной рэлеевской длины. Энергия частиц, инжектируемых на оси лазерного излучения, никак не меняется. Это связано с тем, что изменение энергии частицы вызывает продольная составляющая электрического поля излучения. Смещение частиц в поперечной плоскости составляет не более $6 \cdot 10^{-6}$ см при начальном радиусе лазерного пучка $a_0 = 10^{-3}$ см.

На рис. 10 дана зависимость энергии $W(Z)$ пучка частиц, инжектируемых в окрестности точки $X = Y = 0,5$.

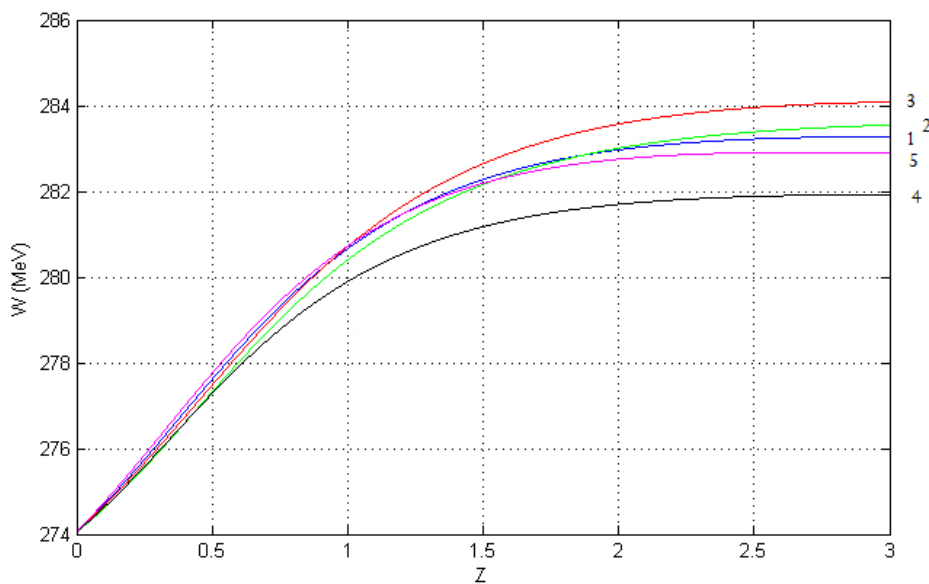


Рис. 10. 1) $X = 0,5$; $Y = 0,5$; 2) $X = 0,4$; $Y = 0,55$; 3) $X = 0,6$; $Y = 0,6$; 4) $X = 0,35$; $Y = 0,4$; 5) $X = 0,55$; $Y = 0,45$

Видно, что все частицы, инжектируемые вблизи данной точки в фокальной плоскости при выполнении условия резонанса, приобретают энергию. В этом случае средний темп ускорения составляет $d = 129,3$ МэВ/см. Из графиков видно также, что основной прирост приходится до расстояний $(1-1,5)z_R$, далее наступает насыщение.

Подчеркнём, что рассматриваемый режим ускорения является авторезонансным: изменение величины Ω к концу движения составляет в среднем $\pm 2,3 \cdot 10^{-5}$. Это значит, что условие (10) с высокой точностью сохраняется за время движения частицы. Если это условие в начальный момент времени не выполняется, то электроны практически мгновенно покидают лазерный пучок.

7. Авторезонансное ускорение электронов лазерным излучением первой моды

Пространственное распределение поперечных компонент электрического поля мощного лазерного излучения первой моды отличается по структуре от излучения основной моды. Это приводит к некоторой специфике движения ускоряемых частиц.

Как и в случае основной моды, решающую роль в ускорении играет продольная компонента электрического поля, которая также имеет асимметричную структуру со сложным чередованием областей положительных и отрицательных значений поля E_z . Вследствие этого возникает необходимость подбора оптимального положения инжекции пучка ускоряемых частиц. В отличие от основной моды область ускоряющего поля является довольно узкой и находится между областями тормозящего поля. Это накладывает довольно строгие ограничения на область инжекции ускоряемых частиц.

На рис. 11 представлен график зависимости энергии от продольной координаты для частиц, находящихся в ускоряющей области. Средний прирост энергии составляет $d = 122,8$ МэВ/см, что несколько меньше, чем для частиц, ускоряемых полем основной моды.

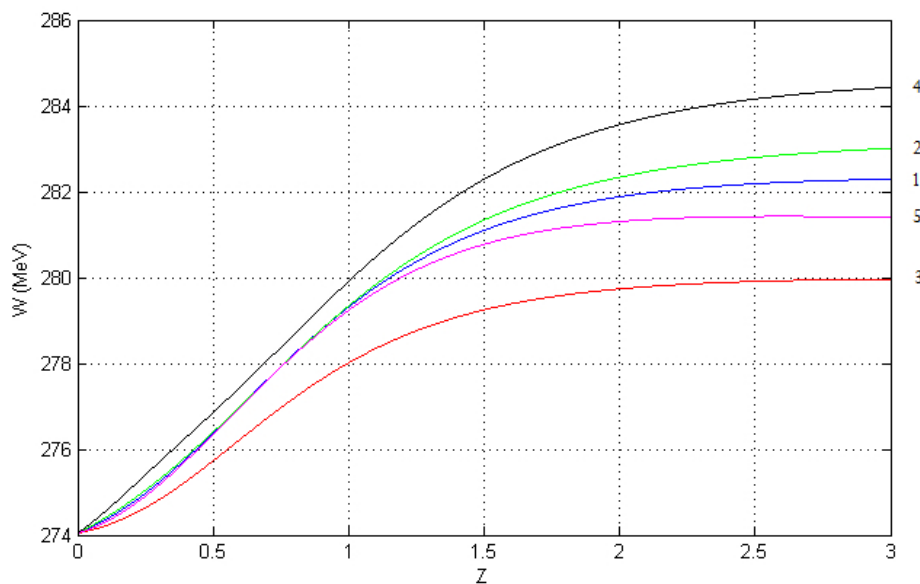


Рис. 11. 1) $X = 0,45$; $Y = -0,45$; 2) $X = 0,55$; $Y = -0,35$; 3) $X = 0,35$; $Y = -0,3$; 4) $X = 0,6$; $Y = -0,55$; 5) $X = 0,3$; $Y = -0,6$

Таким образом, прирост энергии электронов в поле мощного лазерного излучения первой и основной мод при оптимальных условиях инжекции отличается на 6–7 МэВ/см. Но предпочтительнее является основная мода из-за относительной простоты описания поля этой моды, более высокого темпа ускорения и более широкой ускоряющей зоны инжекции пучка электронов.

8. Заключение

С помощью численного решения уравнений движения проведён анализ эффективности ускорения ультрарелятивистских электронов мощным импульсным лазерным излучением в режиме циклотронного авторезонанса. Поле лазерного излучения круговой поляризации задавалось в параксиальном приближении в виде гауссовых пучков основной и первой мод. Показано, что условие циклотронного авторезонанса сохраняется во всё время движения электрона с достаточно высокой точностью.

Найдено, что при анализе движения ультрарелятивистских электронов в поле мощного импульсного лазерного излучения в авторезонансном режиме поправки первого порядка к поперечным компонентам векторов поля являются пренебрежимо малыми. Оказалось также, что при ультрарелятивистском движении электронов в поле мощных импульсов фемтосекундной длительности конкретная форма импульса не имеет значения. При описании поля лазерного излучения учтены продольные компоненты электрического и магнитного полей и показано, что их влияние является решающим в процессе взаимодействия пучка частиц с излучением. Получены картины пространственного распределения векторов поля излучения в поперечной плоскости в зависимости от продольной координаты. Показано, что изменение энергии пучка электронов сильно зависит от его положения инжекции, и возможно не только ускорение, но и замедление пучка на расстоянии порядка двух рэлеевских длин. При подборе оптимальных параметров инжекции можно добиться ускорения пучка ультрарелятивистских электронов с достаточно высоким средним темпом на расстоянии порядка двух рэлеевских длин. Более эффективным является ускорение пучка электронов в поле основной моды излучения, нежели в поле первой моды. Для повышения эффективности ускорения, по-видимому, целесообразно использование каскадного механизма. Полученный пучок ускоренных электронов с помощью выходящего магнитного поля может служить источником синхротронного излучения.

Литература

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Резонансные явления при движении частиц в плоской электромагнитной волне // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44, № 1. — С. 261–269.
2. Давыдовский В. Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43, № 3(9). — С. 886–888.
3. Милантьев В. П. Явление циклотронного авторезонанса и его применения // УФН. — 1997. — Т. 167, № 1. — С. 3–16.
4. Милантьев В. П. Циклотронный авторезонанс (к 50-летию открытия явления) // УФН. — 2013. — Т. 183, № 8. — С. 875–884.
5. Милантьев В. П., Шаар Я. Ускорение электронов гауссовым электромагнитным пучком в постоянном магнитном поле // ЖТФ. — 2000. — Т. 70, № 8. — С. 100–103.
6. Милантьев В. П., Степина С. П. Повышение эффективности авторезонансного ускорения электронов лазерным гауссовым излучением // ЖТФ. — 2005. — Т. 75, № 9. — С. 95–100.
7. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
8. Гончаренко А. М. Гауссовы пучки света. — Минск: Наука и техника, 1997. — 144 с.
9. Милантьев В. П., Карнилович С. П., Шаар Я. Об описании мощного лазерного излучения в параксиальном приближении // Квантовая электроника. — 2015. — Т. 45, № 11. — С. 1063–1068.
10. Quesnel B., Mora P. Theory and Simulation of the Interaction of Ultraintense Laser Pulses with Electrons in Vacuum // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 58, No 3. — Pp. 3719–3732.
11. Бочкарев С. Г., Быченков В. Ю. Ускорение электронов при острой фокусировке фемтосекундного лазерного излучения // Квантовая электроника. — 2007. — Т. 37, № 3. — С. 273–284.
12. Горизонты петаваттных лазерных комплексов / А. В. Коржиманов, А. А. Гоносков, Е. А. Хазанов, А. М. Сергеев // УФН. — 2011. — Т. 181, № 1. — С. 9–32.
13. Petawatt Class Lasers Worldwide / C. Danson, D. Hillier, N. Hopps, D. Neely // High Power Laser Science and Engineering. — 2015. — Vol. 3, No 3. — Pp. 1–14.

UDC 533.9

The Peculiarities of Acceleration of Ultra-Relativistic Electrons by the Powerful Laser Radiation at the Regime of Cyclotron Autoresonance

N. A. Abdulov, V. P. Milant'ev

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

Analysis of the numerical solution of the motion equations of electrons in the field of ultra-short laser pulse, propagating along the steady magnetic field at the conditions of cyclotron autoresonance, is performed. It is shown that in the absence of the condition of cyclotron resonance during injection of electrons they momentarily escape the range of interaction. Laser radiation of the circular polarization is defined in the paraxial approximation in the form of the Gaussian beams of the basic and the first modes. Corrections of the first approximation to the components of the radiation field are taken into consideration. Calculations show that corrections of the first order to the transverse components exert no sufficient influence on the autoresonant motion of electrons whereas the longitudinal components of the first approximation play a major role. It is shown also that the specific form of the pulse is inessential. Images of the spatial distribution of the vectors of the radiation field in the transverse plane depending on the longitudinal coordinate (the direction of the radiation propagation) are obtained. It is shown that the character of changes of energy of an electron beam essentially depends on their position of injection in the focal plane. In this case acceleration as well as deceleration is possible in dependence on the position of injection of electron beam. It is shown that under the optimal conditions of injection the mechanism of the cyclotron autoresonance can provide sufficiently high efficient of acceleration of ultrarelativistic electrons in the field of powerful laser radiation with sufficiently high average rate at the distance of the order of two Rayleigh lengths. The basic mode is more preferable due to more simple description of that mode, higher acceleration rate and wider acceleration zone of injection of an electron beam.

Key words and phrases: cyclotron autoresonance, ultra-relativistic electrons, high-power laser radiation, ultra-short pulses, modes of Gaussian beams, autoresonant acceleration

References

1. A. A. Kolomenskii, A. N. Lebedev, Resonance Effects Associated with Particle Motion in a Plane Electromagnetic Wave, JETP 17 (1) (1963) 261–269, in Russian.
2. V. Y. Davydovsky, On the Possibility of Resonant Acceleration of Charged Particles by Electromagnetic Waves in the Steady Magnetic Field, JETP 43 (3(9)) (1962) 886–888, in Russian.
3. V. P. Milantiev, Cyclotron Autoresonance and its Applications, Physics-Uspekhi 40 (1) (1997) 1–14, in Russian.
4. V. P. Milantiev, Cyclotron Autoresonance — 50 Years Since its Discovery, Physics-Uspekhi 56 (8) (2013) 823–832, in Russian.
5. V. P. Milantiev, Y. N. Shaar, Electron Acceleration by Gaussian Electromagnetic Beam in a Stationary Magnetic Field, Technical Physics 45 (8) (2000) 1054–1057, in Russian.
6. V. P. Milantiev, S. P. Stepina, Enhanced Effectivity of Autoresonant Acceleration of Electrons by Gaussian Laser Radiation, Technical Physics 50 (9) (2005) 1201–1206, in Russian.
7. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, A. P. Sukhorukov, Theory of Waves, Nauka, Moscow, 1990, in Russian.
8. A. M. Goncharenko, Gaussian Light Beams, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1997, in Russian.
9. V. P. Milantiev, S. P. Karnilovich, Y. N. Shaar, Description of High-Power Laser Radiation in the Paraxial Approximation, Quantum Electronics 45 (11) (2015) 1063–1068, in Russian.
10. B. Quesnel, P. Mora, Theory and Simulation of the Interaction of Ultraintense Laser Pulses with Electrons in Vacuum, Phys. Rev. E. 58 (3) (1998) 3719–3732.

11. S. G. Bochkarev, V. Y. Bychenkov, Acceleration of Electrons by Tightly Focused Femtosecond Laser Pulses, *Quantum Electronics* 37 (3) (2007) 273–284, in Russian.
12. A. V. Korzhimanov, A. A. Gonoskov, E. A. Khazanov, A. M. Sergeev, Horizons of Petawatt Laser Technology, *Physics-Uspekhi* 54 (1) (2011) 9–28, in Russian.
13. C. Danson, D. Hillier, N. Hopps, D. Neely, Petawatt Class Lasers Worldwide, *High Power Laser Science and Engineering* 3 (3) (2015) 1–14.

© Абдулов Н. А., Милантьев В. П., 2016

УДК 533.9

Численное моделирование взаимодействия короткого ионного пучка с плазмой

В. Б. Красовицкий*, В. А. Туриков†, Д. В. Камин†

* *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

† *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

В работе рассматривается задача о прохождении короткого ионного пучка через слой плазмы. В таком процессе происходит захват пучком электронов плазмы и компенсация его заряда. Компенсация заряда при транспортировке заряженных пучков необходима для предотвращения их расплывания под действием собственного кулоновского поля. Важность изучения методов компенсации заряда ионных пучков высоких энергий обусловлена их многочисленными приложениями. В частности, в последние годы ведутся активные исследования по взаимодействию интенсивных ионных пучков с термоядерными мишенями с целью получения управляемого синтеза. Для описания взаимодействия пучка с плазмой в работе использовано одномерное электростатическое приближение и приведены условия его применимости. Рассмотрено движение электрона в поле ионного пучка с модельным распределением плотности. Посредством численного моделирования по методу частиц в ячейке показано, что при прохождении короткого ионного пучка через слой плазмы происходит захват части электронов плазмы полем сгустка. Однако, в отличие от гидродинамического описания, использованного другими авторами, этот процесс имеет существенно кинетическую природу, причём коллективное электрическое поле сравнимо по величине с полем пучка. Под действием суммарного поля возникают пучки ускоренных электронов, приводящие к нелинейному режиму пучковой неустойчивости и сильному нагреву электронной компоненты плазмы. Показано, что на захват электронов полем сгустка сильное влияние оказывает переменное поле, вызванное плазменными колебаниями на границах слоя. Проведено численное моделирование процесса прохождения пучка через слой плазмы на интервалах времени, сравнимых с ионным плазменным периодом. Метод частиц в ячейке применён в этом случае для расчёта движения ионов. Предполагалось, что электроны имеют бальмановское распределение плотности в самосогласованном поле. Краевая задача для уравнения Пуассона, которое в такой постановке становится нелинейным, решалась численно методом стрельбы. При электронной температуре, значительно превышающей ионную, продемонстрировано образование стационарных структур типа ионных фазовых дыр.

Ключевые слова: ионные пучки, плазма, плазменные неустойчивости, компенсация заряда, ионные фазовые дыры

1. Введение

Кулоновское расталкивание зарядов в интенсивных ионных пучках приводит к их расплыванию, что ухудшает характеристики пучков. Поэтому исследование методов нейтрализации объёмного заряда интенсивных пучков является весьма важным в связи с разработкой новых типов ускорителей высоких энергий, а также в связи с использованием релятивистских пучков в системах инерциального термоядерного синтеза.

Для предотвращения кулоновского расталкивания ионных пучков существует большое число методов компенсации их заряда [1]. В последние годы широкое распространение получил метод компенсации заряда, основанный на пропускании пучков через слой плазмы [2–5]. Процесс прохождения ионного пучка конечной длины через плазму теоретически и численно исследовался в работах [3–5]. Аналитические результаты были получены в гидродинамическом приближении в предположении

полной нейтрализации заряда и тока пучка. Было также проведено двумерное численное моделирование по методу частиц для пучков, длина которых l_b была значительно больше их радиуса r_b (длинные пучки). При этом собственное поле сгустка E_z вдоль направления его движения считалось малым по сравнению с радиальным полем E_r . Был сделан вывод о том, что в таком процессе развивается пучковая неустойчивость, обусловленная движением захваченных электронов относительно неподвижной плазмы.

В данной работе рассмотрено прохождение через плазменный слой коротких пучков, для которых $l_b \leq r_b$. В этом случае захват электронов в основном происходит под действием продольного поля E_z . Проведённое численное моделирование показало, что захват электронов такими пучками определяется коллективным полем, возникающим на нелинейной стадии пучковой неустойчивости, а также плазменными колебаниями на границах слоя. Моделирование для интервалов времени порядка плазменного периода ионов показало, что короткий ионный пучок может возбуждать в плазме нелинейные структуры типа равновесий Бернштейна–Грина–Крускала.

2. Движение электрона в заданном поле короткого пучка

Рассмотрим в одночастичном приближении движение электрона в поле ионного пучка. Будем считать, что все ионы в нем движутся с одинаковой скоростью V_b . Тогда в системе отсчёта пучка электроны из холодного плазменного слоя будут иметь начальную скорость $-V_b$. Для определённости зададим поле пучка в виде

$$E_z^{(0)} = E_0 \operatorname{th} \left(\frac{2z}{l_b} \right), \quad (1)$$

где ось z направлена вдоль направления распространения пучка.

Из теоремы Гаусса следует значение амплитуды поля вне слоя плазмы

$$E_0 = 2\pi l_b e n_b, \quad (2)$$

где n_b — плотность ионов в пучке.

Перейдём к следующим безразмерным переменным:

$$Z = z \cdot \frac{\omega_p}{c}, \quad L_b = l_b \cdot \frac{\omega_p}{c}, \quad L_p = l_p \cdot \frac{\omega_p}{c}, \quad P_{ze} = \frac{p_{ze}}{m_e c},$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{e E_0}{m_e c \omega_p}, \quad V_b = \frac{v_b}{c}, \quad \tau = t \cdot \omega_p,$$

где l_p — ширина плазменного слоя, m_e — масса покоя электрона, p_{ze} — релятивистский импульс. В таких переменных закон сохранения энергии (в единицах $m_e c^2$) для электрона, движущегося в поле (1), можно представить в виде

$$H = \sqrt{1 + P_{ze}^2} - \varepsilon_0 \frac{L_b}{2} \ln \left[ch \left(\frac{2Z}{L_b} \right) \right] = \text{const}. \quad (3)$$

На рис. 1 представлена фазовая плоскость ансамбля независимых электронов, соответствующая закону сохранения (3). В начальный момент времени частицы равномерно распределены по координате в области $5 \leq Z_0 \leq 20$ и имеют начальную скорость $V_0 = -0.2$. Из рисунка следует, что все электроны захватываются полем сгустка. При этом область их движения расширяется с ростом начальной координаты Z_0 . Значения L_b , V_b , n_b/n_0 (n_b , n_0 — плотности пучка и плазмы) соответствуют характерным значениям параметров в работах [3–5]. Из значений безразмерного

импульса электронов на рис. 1 видно, что при таких параметрах их энергия может достигать релятивистских значений порядка нескольких МэВ.

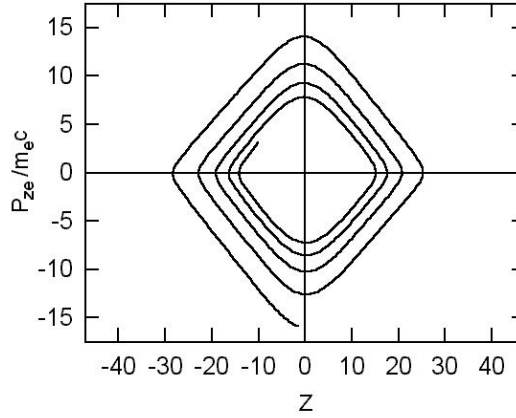


Рис. 1. Фазовая плоскость ансамбля независимых электронов в момент времени $\tau = 540$. При $\tau = 0$ электроны равномерно распределены с координатами $5 \leq Z_0 \leq 20$, $L_b = 12$, $V_b = 0, 2$, $n_b/n_0 = 0, 1$.

3. Численное моделирование захвата электронов ионным пучком

Характерный масштаб возмущения электронной плотности плазмы в таком взаимодействии имеет порядок V_b/ω_{pe} . При $V_b/\omega_{pe} \ll r_b$ (r_b — радиус пучка) главный вклад в поле разделения заряда будет давать продольное поле E_z . Такое приближение применимо к случаю пучка с радиусом, превосходящем его продольную длину. Для нерелятивистских пучков с $V_b/c \ll 1$ действием на электроны собственного магнитного поля по сравнению с полем разделения заряда можно пренебречь. Таким образом, при указанных ограничениях для описания взаимодействия сгустка с плазменным слоем можно использовать одномерное электростатическое приближение. Такое рассмотрение подобно модели тонких дисков, использованной в работе [6] для анализа динамики слоистых электронно-ионных пучков в плазме.

Для численного моделирования процесса распространения заряженного ионного пучка в плазменном слое был использован одномерный электростатический вариант метода частиц в ячейке [7]. Задача в численном моделировании была поставлена следующим образом. Учитывалось только электростатическое поле разделения заряда $E(z)$. Пучок до входа в плазменный слой имел профиль распределения плотности, соответствующий электрическому полю вида (1). Плазменный слой с обеих сторон был окружён вакуумными областями и имел ступенчатый профиль плотности на границах. Отношение масс электронов и ионов полагалось равным $m_i/m_e = 1840$. Граничные значения поля E_z в вакуумных областях вне слоя определялись по значению его полного начального заряда Q_0 . В моделировании пучок в начальный момент времени располагался вблизи границы плазмы. При удалении начального положения от границы результаты изменялись мало. Появлялся лишь пучок электронов малой плотности, вытягиваемый ионным пучком из плазмы. По мере вхождения пучка ионов внутрь слоя наблюдалось развитие пучковой неустойчивости (рис. 2), вызванной ускоренными электронами. Параметры L_p , L_b и n_b/n_0 выбирались близкими к значениям, использованным в работе [3]. После полного прохождения через

слой (рис. 3) часть электронов слоя захватывалась сгустком и двигалась вместе с ним. При этом пучковая неустойчивость приводила к сильному нагреву электронов плазмы.

Для оценки эффективности нейтрализации пучка вычислялась степень компенсации его заряда

$$f = 1 - Q_f/Q_0, \quad (4)$$

где Q_f — полный заряд сгустка после его полного прохождения через плазменный слой. Как показали результаты численных экспериментов, максимальные значения степени компенсации в такой постановке задачи составляют порядка 50%. Эта величина значительно ниже наблюдавшейся в экспериментах [2]. Неполная компенсация объясняется тем, что мы рассматривали плазменный слой со свободными границами. В работе [2] исследование проводилось в системе с проводящей границей, которая обеспечивала дополнительную поставку электронов в плазму.

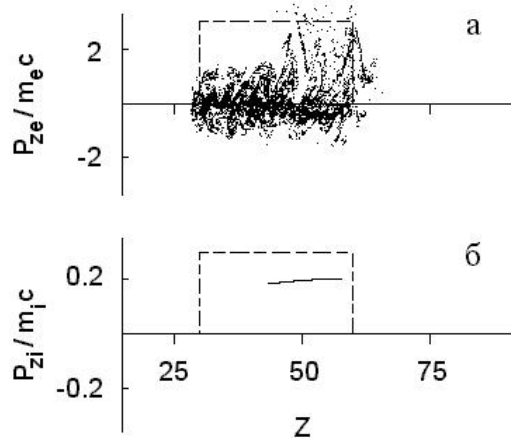


Рис. 2. Фазовые плоскости электронов (а) и ионов пучка (б) при его движении внутри плазменного слоя в момент времени $t = 300$. Пунктиром отмечена область слоя в начальный момент. $L_p = 30$, $L_b = 8$, $n_b/n_0 = 0,1$

Численное моделирование показало, что степень компенсации заряда f слабо зависит от толщины плазменного слоя L_p . Это указывает на то, что основная часть захваченных электронов увлекается сгустком вблизи границ слоя. Исследована также зависимость степени компенсации заряда от начальной плотности заряда пучка. Имеет место возрастание f при увеличении отношения n_b/n_0 . При этом, однако, наблюдалось сильное распыление пучка при больших значениях n_b/n_0 . Это связано с большим значением заряда Q_f на выходе из слоя. При $n_b/n_0 > 1$ происходят сильные нерегулярные возмущения скоростей электронов в слое и монотонное возрастание степени компенсации нарушается.

4. Формирование нелинейных структур при прохождении ионного пучка через плазму

При взаимодействии короткого ионного пучка с плазмой на интервалах времени порядка ионного плазменного периода могут формироваться квазистационарные нелинейные структуры типа равновесий Бернштейна–Грина–Крускала (БГК) [8]. В частности могут возникать так называемые ионные фазовые дыры (ion phase-space

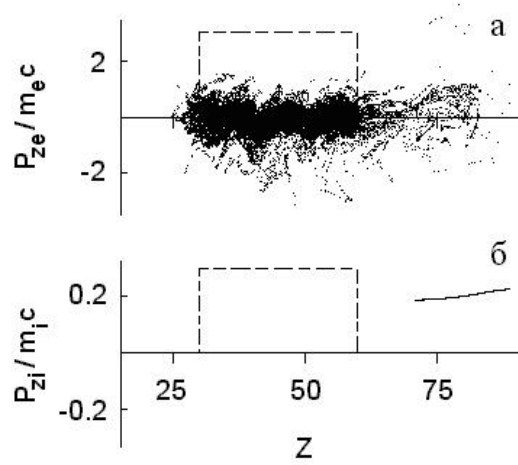


Рис. 3. Фазовые плоскости электронов (а) и ионов пучка (б) после его прохождения через плазменный слой в момент времени $t = 380$, $L_p = 30$, $L_b = 8$, $n_b/n_0 = 0,1$

holes). В них ионы совершают колебания в медленно меняющемся самосогласованном электрическом поле. В фазовом пространстве p_z, z такое распределение имеет вид вихря или «дыры», если функция распределения ионов в его центральной части близка к нулю. При этом оно близко по своим свойствам к солитонам, так как при движении его форма остаётся неизменной. Ионные фазовые дыры наблюдались в численном моделировании [9] и в лабораторных экспериментах [10]. В данной работе процесс образования ионной фазовой дыры исследуется посредством численного моделирования.

Для моделирования динамики ионных фазовых дыр использован метод частиц в ячейке, причём частицами в ячейках теперь являются ионы, а электроны считаются распределёнными по Больцману. Такое описание можно считать оправданным при малых скоростях движения ионного пучка в плазме. При этом электроны в силу их большей подвижности успевают распределиться по Больцману за промежуток времени намного меньший, чем время прохода пучка через плазменный слой. Уравнение Пуассона для самосогласованного поля в такой постановке задачи становится нелинейным

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT}\right) - n_i. \quad (5)$$

На границах области моделирования использовались отражательные условия для частиц. В связи с этим граничные условия для электрического поля в вакуумных областях задавались в виде

$$E_z(0) = E_z(L) = 0, \quad (6)$$

где L — размер области моделирования. Краевая задача для нелинейного уравнения Пуассона (5) решалась методом стрельбы [11].

В численном моделировании ионный пучок в начальном состоянии генерировался в виде однородного распределения частиц по координате z и максвелловского распределения по скорости V_z , смещённого на скорость движения пучка V_b (см. рис. 4). При этом пучок с самого начала располагался внутри плазменного слоя. Образование фазовых дыр происходило, начиная с отношения температур $T_e/T_i \approx 10$. На

рис. 4 представлена эволюция фазовой плоскости при взаимодействии пучка с плазменным слоем в течение одного ионного плазменного периода. Видно, что через этот интервал времени формируется ионная фазовая дыра, в которой ионы совершают колебания в образовавшейся потенциальной яме. При этом фазовая дыра движется в противоположном направлении по отношению к движению пучка. На рис. 5 изображены соответствующие распределения электрического поля E_z в те же моменты времени, что и на рис. 4.

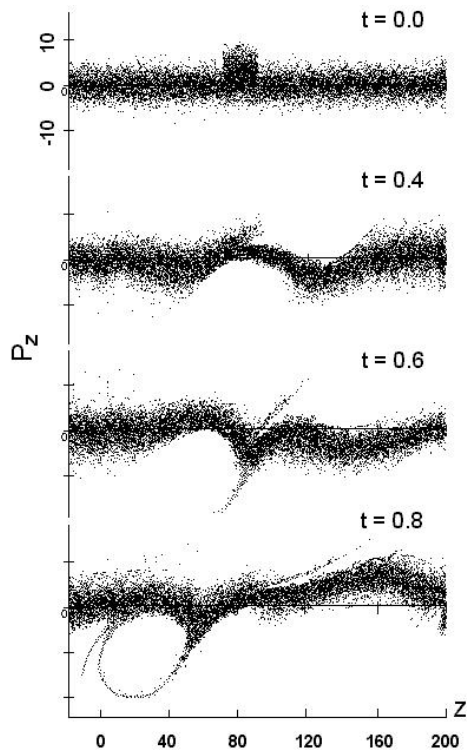


Рис. 4. Образование ионной фазовой дыры при прохождении ионного пучка через плазму, $L_b = 20$, $V_b = 2$, $\theta = T_e/T_i = 20$

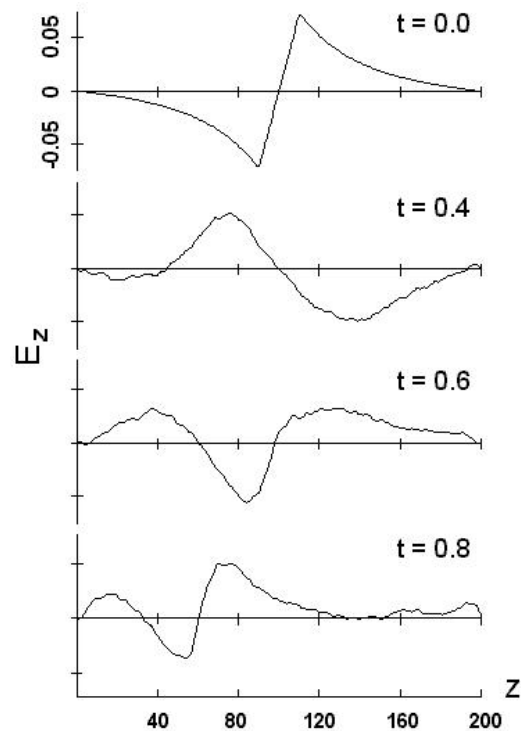


Рис. 5. Изменение распределения электрического поля E_z со временем при распространении ионного пучка в плазме. Параметры см. на рис. 4

5. Заключение

В работе показано, что при прохождении короткого ионного пучка через слой плазмы происходит захват части электронов плазмы полем пучка. Однако, в отличие от гидродинамического описания [3–5], этот процесс имеет существенно кинетическую природу, причём коллективное электрическое поле сравнимо по величине с полем пучка. Под действием суммарного поля возникают пучки ускоренных электронов, приводящие к нелинейному режиму пучковой неустойчивости и сильному нагреву электронов плазмы. На захват электронов полем ионного пучка сильное влияние оказывает также переменное поле, вызванное плазменными колебаниями на границах слоя.

Результаты численного моделирования показали, что степень компенсации заряда пучка слабо зависит от ширины слоя. Отсюда можно заключить, что захват электронов в основном происходит вблизи границ слоя. При увеличении плотности

пучка степень компенсации заряда возрастает. Однако при значениях $n_b/n_0 > 1$ возникают сильно нелинейные возмущения скоростей электронов в слое, приводящие к нарушению условий захвата и к снижению степени компенсации заряда пучка.

Моделирование процесса прохождения пучка через слой плазмы на интервалах времени, сравнимых с ионным плазменным периодом, продемонстрировало образование стационарных структур типа ионных фазовых дыр.

Литература

1. *Габович М. Д.* Ионно-пучковая плазма и распространение интенсивных компенсированных ионных пучков // УФН. — 1977. — Т. 121. — С. 259–284.
2. *Roy P. K., Yu S. S. et al.* Results on Intense Beam Focusing and Neutralization from the Neutralized Beam Experiment // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11. — Pp. 2890–2898.
3. *Kaganovich I. D., Startsev E. A., Davidson R. C.* Nonlinear Plasma Waves Excitation by Intense Ion Beams in Background Plasma // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11. — Pp. 3546–3552.
4. Enhanced Self-Focusing of an Ion Beam Pulse Propagating Through a Background Plasma Along a Solenoidal Magnetic Field / M. A. Dorf, I. D. Kaganovich, E. A. Startsev, R. C. Davidson // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — Pp. 075003–1–5.
5. *Kaganovich I. D., Davidson R. S. et al.* Physics of Neutralization of Intense High-Energy Ion Beam Pulses by Electrons // Phys. Plasmas. — 2010. — Vol. 17. — Pp. 056703–1–20.
6. *Красовицкий В. Б., Нагучев О. Ю.* Равновесные электронно-ионные сгустки в плазме // Физика плазмы. — 1994. — Т. 20. — С. 405–412.
7. *Туриков В. А., Ульяницкий И. В., Умнов А. М.* Численное моделирование плазменных процессов. — М.: РУДН, 2001.
8. *Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D.* Physics of Neutralization of Intense High-Energy Ion Beam Pulses by Electrons // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 108. — Pp. 546–552.
9. *Sakanaka P. H.* Beam-Generated Collisionless Ion-Acoustic Shocks // Phys. Fluids. — 1972. — Vol. 15. — Pp. 1323–1327.
10. *Pecseli H. L., Trulsen J., Armstrong R. J.* Formation of Ion Phase-Space Vortexes // Physica Scripta. — 1984. — Vol. 29. — Pp. 241–253.
11. *Жидков Е. Н.* Вычислительная математика. — М.: Изд. Академия, 2013.

UDC 533.9

Numerical Simulation of a Short Ion Beam Interaction with Plasma

V. B. Krasovitskiy*, V. A. Turikov[†], D. V. Kamin[†]

* *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[†] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*

The problem of a short ion beam passing through the plasma layer is considered in this paper. In such a process the plasma electrons capture by the beam takes place. The charge compensation is necessary during the charged beams transport with the purpose to prevent their dispersion under the influence of the own Coulomb field. It is important to investigate the methods of the beam charge compensation methods for the reason of their numerous applications. Specifically the active investigations of the intensive ion beams interactions with the thermonuclear targets in the controlled fusion problem are performed last years. In this paper the one-dimensional electrostatic approximation is used and the conditions of its applicability are presented. The electron movement in the ion beam field with the model density distribution is considered. It

is shown by the numerical simulation using the particle-in-cell method that during the short ion beam passing through the plasma layer the capture of the part of plasma electrons by the beam field takes place. But unlike the hydrodynamical description used by other authors this process has the essentially kinetic nature moreover the collective electric field is compared with the beam field. The beams of accelerated electrons are formed under the influence of the total field leading to the nonlinear regime of the beam instability and strong heating of the plasma electrons. It is shown that the oscillating field caused by the plasma oscillations on the plasma boundaries affects essentially on the electron capture. The numerical simulation of the beam passing through the plasma layer on the time intervals compared with ion plasma period is carried out. The particle-in-cell method is applied in this case for the ion movement calculation. It was supposed that the electrons have the Boltzmann density distribution in the self-consistent field. The boundary problem for the Poisson equation which becomes nonlinear in such a statement was solved numerically by the shooting method. It was demonstrated the formation of the stationary structures of the ion phase space holes type for the electron temperature much larger the ion one.

Key words and phrases: ion beams, plasma, plasma instabilities, charge compensation, ion phase-space holes

References

1. M. D. Gabovich, Ion-Beam Plasma and Propagation of Intense Compensated Ion Beams, *UFN* 121 (1977) 259–284, in Russian.
2. P. K. Roy, S. S. Yu, et al., Results on Intense Beam Focusing and Neutralization from the Neutralized Beam Experiment, *Phys. Plasmas* 11 (2004) 2890–2898.
3. I. D. Kaganovich, E. A. Startsev, R. C. Davidson, Nonlinear Plasma Waves Excitation by Intense Ion Beams in Background Plasma, *Phys. Plasmas* 11 (2004) 3546–3552.
4. M. A. Dorf, I. D. Kaganovich, E. A. Startsev, R. C. Davidson, Enhanced Self-Focusing of an Ion Beam Pulse Propagating Through a Background Plasma Along a Solenoidal Magnetic Field, *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009) 075003–1–5.
5. I. D. Kaganovich, R. S. Davidson, et al., Physics of Neutralization of Intense High-Energy Ion Beam Pulses by Electrons, *Phys. Plasmas* 17 (2010) 056703–1–20.
6. V. B. Krasovitskiy, O. J. Naguchev, Equilibrium Electron-Ion Bunches in Plasma, *Fizika plazmy* 20 (1994) 405–412, in Russian.
7. V. A. Turikov, I. V. Uljanitskiy, A. M. Umnov, Numerical Simulation of Plasma Processes, PFUR, Moscow, 2001, in Russian.
8. I. B. Bernstein, J. M. Greene, M. D. Kruskal, Physics of Neutralization of Intense High-Energy Ion Beam Pulses by Electrons, *Phys. Rev.* 108 (1957) 546–552.
9. P. H. Sakanaka, Beam-Generated Collisionless Ion-Acoustic Shocks, *Phys. Fluids* 15 (1972) 1323–1327.
10. H. L. Pecseli, J. Trulsen, R. J. Armstrong, Formation of Ion Phase-Space Vortexes, *Physica Scripta* 29 (1984) 241–253.
11. E. N. Zhidkov, Computational Mathematics, Akademia Publishing, Moscow, 2013, in Russian.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абдулов Низами Асад оглы — студент кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: nizami.abdulov@gmail.com)

Виницкий Сергей Ильич — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научного отдела теории атомного ядра лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна; профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: vinitysky@theor.jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-348)

Гуждж Анджей (Gózdź Andrzej, Польша) — профессор, профессор кафедры теоретической физики института физики университета им. М. Кюри-Склодовска, г. Люблин (e-mail: andrzej.gozdz@umcs.pl, тел.: +4881 5376239)

Гусев Александр Александрович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: gooseff@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-536)

Дербов Владимир Леонардович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики физического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (e-mail: derbov@sgu.ru, тел.: +7 (8452) 51-17-57)

Камин Дмитрий Владимирович — студент кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: kdv5@bk.ru, тел.: +7 (916)2935452)

Конюхова Надежда Борисовна — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А.Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН (e-mail: nadja@ccas.ru)

Красовицкий Валерий Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела кинетических уравнений ИПМ РАН им. М.В. Келдыша (e-mail: krasovit@mail.ru, тел.: +7 (495)3304917)

Льонг Ле Хай (Luong Le Hai, Вьетнам) — кандидат физико-математических наук, аспирант факультета математики и естественнонаучного образования Белгородского государственного национального исследовательского университета, г. Белгород (e-mail: luonglehai_tcl@yahoo.com.vn, тел.: +7 (49621) 63536)

Милантьев Владимир Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: vmilantiev@sci.pfu.edu.ru)

Остапов Всеволод Александрович — аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: vaostapov@gmail.com, тел.: +7 (926)0462838)

Рыбаков Юрий Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики и механики РУДН (e-mail: soliton4@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550398)

Суслов Яков Александрович — аспирант кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: yasuslov@mail.ru, тел.: +7 (916) 9361683)

Туриков Валерий Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: vturikov@yandex.ru)

Черкасов Сергей Гелиевич — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ФГУП ГИЦ «Центр Келдыша» (e-mail: sgcherkasov@yandex.ru, тел.: +7 (916) 3357477)

Чулуунбаатар Очбадрах (Chuluunbaatar Ochbadrah, Монголия) — доктор физико-математических наук, начальник сектора научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: chuka@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 62529)

Шейна Анастасия Александровна — младший научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ РАН; студент магистратуры,

кафедра «Математическое моделирование в космических системах» Института прикладных технико-экономических исследований и экспертиз РУДН (e-mail: nadja@ccas.ru)

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе \LaTeX (используется версия $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, для набора формул используется макропакет $\mathcal{AMS}\text{-}\text{\LaTeX}$). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS, \TeX ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе \BibTeX и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям:

оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, комн. 313; e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

**Серия «Математика.
Информатика. Физика»**

Количество
комплектов:

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	литер

на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Стои- мость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.	

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

ВЕСТНИК РУДН

Серия _____

(индекс издания)

Количество комплектов: _____

на 2010 год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

на журнал

ПВ	место	литер

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия _____

Стоимость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:	_____
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.		

на 2010 год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

Научный журнал
ВЕСТНИК
Российского университета дружбы народов

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА
2016, № 3

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»
(ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198)

Редактор *К. В. Зенкин*
Компьютерная вёрстка: *А. В. Королькова*

Адрес редакции:
Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, г. Москва, Россия, 115419
тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@pfur.ru

Адрес редакционной коллегии
серии «Математика. Информатика. Физика»:
ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419
тел. +7(495) 952-02-50, email: mathitphysjournalrudn@pfur.ru
сайт: <http://vestnik-miph.sci.pfu.edu.ru>

Подписано в печать 01.08.2016. Выход в свет 10.08.2016. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».
Усл. печ. л. 11,21 Тираж 500 экз. Заказ № 823.

Цена свободная

Типография ИПК РУДН
ул. Орджоникидзе, 3, ГСП-1, г. Москва, Россия, 115419, тел. 952-04-41

Scientific journal
BULLETIN
of Peoples' Friendship University of Russia

Series
MATHEMATICS. INFORMATION SCIENCES. PHYSICS
2016, № 3

Editor *K. V. Zenkin*
Computer design: *A. V. Korolkova*

Address of editorial board:
Peoples' Friendship University of Russia
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419
Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@pfur.ru

Address of editorial board
series "Mathematics. Information Sciences. Physics":
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419
Tel. +7 (495) 952-02-50, email: mathitphysjournalrudn@pfur.ru
site: <http://vestnik-miph.sci.pfu.edu.ru>

Printing run 500 copies

Open price

Address of PFUR publishing house
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419
Tel. +7 (495) 952-04-41