Математика

УДК 519.216, 519.866

Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса. Часть 1

М. Л. Гольдман, О. М. Гусельникова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Для потенциалов типа Бесселя и типа Рисса получены эффективные критерии вложения в перестановочно-инвариантные пространства. Даны явные описания для этих вложений.

Ключевые слова: потенциалы типа Бесселя, потенциалы типа Рисса, пространства Лоренца, перестановочно-инвариантные пространства, оптимальные вложения, убывающие перестановки.

1. Введение

В данной статье рассматривается пространство потенциалов $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) = \Big\{U = G * f : f \in \mathbf{E}(\mathbb{R}^n)\Big\},$$

где E — перестановочно инвариантное пространство (кратко: ПИП). Здесь мы подробно выделяем случай, когда в качестве базового ПИП выступает пространство $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Сформулирована теорема об оптимальном вложении, и приведено доказательство для случая потенциалов типа Рисса при $1 < p < \infty$. Случай, когда $1 < p < \infty$ для оптимального вложения потенциалов типа Бесселя и критерии вложения будут рассмотрены во второй части статьи.

Главной целью этой работы является получение конструктивных критериев вложения в ПИП и явных описаний оптимальных ПИП для вложений потенциалов типа Бесселя и типа Рисса.

Отметим, что в случае $p = 1$ ответы выглядят и получаются достаточно просто. Для потенциалов типа Рисса оптимальным ПИП оказывается обобщённое пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ с весовой функцией φ, определённой по ядру G. Для потенциалов типа Бесселя оптимальным будет пересечение $\mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$. Там же установлены эффективные критерии вложений потенциалов в общие ПИП.

2. Вспомогательные определения. Потенциалы типа Бесселя и типа Рисса

Пространством потенциалов $\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)$ называется:

$$\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n) = \Big\{U = G * f : f \in \mathbf{E}(\mathbb{R}^n)\Big\},$$

$$\|U\|_{\mathbf{H}_E^G(\mathbb{R}^n)} = \inf\Big\{\|f\|_E : f \in \mathbf{E}(\mathbb{R}^n) : G * f = U\Big\},$$

$\mathbf{E}(\mathbb{R}^n)$ — перестановочно инвариантное пространство (кратко: ПИП). Мы используем аксиоматику, развитую К. Беннетом и Р. Шарпли [1].

Всюду в этой работе $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbb{R}^n)$ ПИП, $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbb{R}^n)$ ассоциированное ПИП, а $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}(\mathbb{R}_+)$ и $\widetilde{\mathbf{E}'} = \widetilde{\mathbf{E}}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга, т.е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\widetilde{E}}, \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\widetilde{E'}},$$

f^* — убывающая перестановка функции f (неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+$: $\mu_n\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\} = \mu_1\{t \in \mathbb{R}_+ : f^*(t) > y\}$ [2].

Определим класс монотонных функций. Функция $\Phi : (0, R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит $\mathfrak{J}_\mathfrak{n}(R)$, если выполнены следующие условия:

1) Φ — убывает и непрерывна на $(0, R)$;

2) существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$, т.ч. $\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \leqslant c\Phi(r)r^n, \quad r \in (0, R).$

Пусть $\Phi \in \mathfrak{J}_\mathfrak{n}(\infty)$. Считаем, что $G \in S_\infty(\Phi)$, если $G^\#(\rho) \cong \Phi(\rho)$, $\rho = |x| \in \mathbb{R}_+$.

Считаем, что $G \in S^0_\infty(\Phi)$, если $G(x) \cong \Phi(\rho)$, $\rho = |x| \in \mathbb{R}_+$, где $G^\#$ — симметричная перестановка функции G, т.е. радиально симметричная неотрицательная убывающая и непрерывная справа функция, равноизмеримая с G.

Пусть $R \in \mathbb{R}_+$, $\Phi \in \mathfrak{J}_\mathfrak{n}(R)$, $X = X(\mathbb{R}^n)$ ПИП. Тогда $G \in S_R(\Phi; X)$, если $(G^0_R)^\#(\rho) \cong \Phi(\rho)$, $\rho \in (0; R)$, $G^1_R \in X(\mathbb{R}^n)$, где $G^0_R = G\chi_{B_R}$, $G^1_R = G\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_R}$.

Дадим теперь определение обобщённых потенциалов типа Рисса и типа Бесселя.

Определение 1. Пусть $G \in S^0_\infty(\Phi)$, тогда потенциалы $\mathbf{H}^G_E(\mathbb{R}^n)$ называются обобщёнными потенциалами типа Рисса [3–5].

Определение 2. Пусть $R \in \mathbb{R}_+$, $\Phi \in \mathfrak{J}_\mathfrak{n}(R)$ и $G \in S^0_R(\Phi; L_1 \cap \mathbf{E}')$; $\int\limits_{\mathbb{R}} G\mathrm{d}x \neq 0.$

Тогда U называют обобщёнными потенциалами типа Бесселя [3–5].

3. Общие теоремы

Для $t, \tau \in (0, T)$ определим $\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\tau/\mathbf{V}_n\right)^{1/n}\right) \in \mathfrak{J}_\mathfrak{1}(T)$. Определим оператор $\mathfrak{R}_{\varphi,T}$:

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g; t) = \int\limits_0^T f_\varphi(t;\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau; \quad f_\varphi(t;\tau) = \min\{\varphi(t), \varphi(\tau)\}. \tag{1}$$

Сформулируем критерии вложений потенциалов в ПИП:

$$\mathbf{H}^G_{L_p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{X}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

При $1 \leqslant p < \infty$ полагаем, как обычно, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Теорема 1.

1. *Для потенциалов Рисса вложение* (2) *эквивалентно ограниченности оператора*

$$\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}: \quad L_p(\mathbb{R}_+) \to \widetilde{\mathbf{X}}(\mathbb{R}_+). \tag{3}$$

2. *Для потенциалов типа Бесселя каждое из следующих условий необходимо, а их совокупность достаточна для вложения* (2)*:*

а) ограничен оператор

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}: \quad L_p(0,T) \to \widetilde{\mathbf{X}}(0,T), \tag{4}$$

где $T = \mathbf{V}_n(R/2)^n$;
б) имеет место вложение

$$L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{X}(\mathbb{R}^n). \tag{5}$$

Замечание 1. Для потенциалов типа Рисса вложение

$$\mathbf{H}^G_{L_p}(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n) + L_\infty(\mathbb{R}^n) \tag{6}$$

эквивалентно условию $\varphi \in L_{p'}(t,\infty)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (для разных $t \in \mathbb{R}_+$ условия эквивалентны). При нарушении этого условия пространство $\mathbf{H}^G_{L_p}(\mathbb{R}^n)$ не вложено ни в одно ПИП.

Введём оболочку локального роста $\lambda_H(t) = \sup\{U^*(t) : \|U\|_{\mathbf{H}^G_{L_p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant 1\}$.

Теорема 2.

1. *При* $T = \infty$ *для потенциалов типа Рисса,* $T = \mathbf{V}_n(R/2)^n \in \mathbb{R}_+$ *для потенциалов типа Бесселя имеет место эквивалентность*

$$\mathbf{H}^G_{L_p}(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \varphi \in L_{p'}(0,T). \tag{7}$$

2. *Для оболочки локального роста* $\lambda_H(t)$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\lambda_{\mathbf{H}}(t) \cong \varphi(t)t^{1/p'} + \left(\int\limits_t^T \varphi(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau\right)^{1/p'}, \quad t \in (0,T). \tag{8}$$

Замечание 2. При $T = \infty$ и любых $t \in \mathbb{R}_+$ для потенциалов типа Рисса или при $T \in \mathbb{R}_+, t \in (0, T/2]$ для потенциалов типа Бесселя справедлива оценка

$$\lambda_{\mathbf{H}}(t) \cong \left(\int\limits_t^T \varphi(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau\right)^{1/p'}. \tag{9}$$

Действительно, в этих условиях из свойств $\varphi \in \mathfrak{J}_1(T)$ следует, что

$$\int\limits_t^T \varphi(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau \geqslant \int\limits_t^{2t} \varphi(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau \geqslant \varphi(2t)^{p'} t \cong \varphi(t)^{p'} t.$$

Таким образом, первое слагаемое в (8) поглощается вторым, и мы приходим к оценке (9).

Рассмотрим норму

$$||f||_{\widetilde{\mathbf{X}_0}(0,T)} = \sup\left\{\int\limits_0^T f^* g^* \mathrm{d}t : \quad g \in L_0(0,T); \quad ||\mathfrak{R}_{\Phi,T}(g^*)||_{L_{p'}(0,T)} \leqslant 1\right\}. \tag{10}$$

Теорема 3.

1. *Для потенциалов типа Рисса оптимальное ПИП* $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^n)$ *для вложения* (2) *имеет эквивалентную норму* (10) *с* $T = \infty$ *(в представлении Люксембурга).*

2. *Для потенциалов типа Бесселя оптимальное ПИП* $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^n)$ *имеет эквивалентную норму*

$$||f||_{\widetilde{\mathbf{X}_0}(\mathbb{R}_+)} = ||f||_{\widetilde{\mathbf{X}_0}(0,T)} + ||f||_{L_p(\mathbb{R}_+)}. \tag{11}$$

Цель дальнейших рассмотрений — придать ответам, приведённым в теоремах 1, 3, явную конструктивную форму.

4. Оптимальные вложения при $p = 1$

Пусть $T \in (0, \infty], \varphi \in \mathfrak{J}_1(T)$. Если $T \in \mathbb{R}_+$, то считаем в этом разделе, что φ продолжена постоянной с $(0, T]$ на $\mathbb{R}_+ : \varphi(t) = \varphi(T), t > T$. Тогда продолженная функция $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$. Рассмотрим пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ с нормой:

$$||f||_{\mathbf{M}_\varphi} = ||f^*||_{\widetilde{\mathbf{M}_\varphi}(\mathbb{R}_+)} = \sup_{t>0} \left[f^{**}(t)\varphi(t)^{-1} \right]. \tag{12}$$

Замечание 3. При $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$ имеет место эквивалентность

$$||f||_{\mathbf{M}_\varphi} \cong \mathbf{A}_\varphi \equiv \sup_{t>0} \left[f^*(t)\varphi(t)^{-1} \right]. \tag{13}$$

Действительно, так как $f^* \leqslant f^{**}$, то $\mathbf{A}_\varphi \leqslant ||f||_{\mathbf{M}_\varphi}$. Обратно, если $\mathbf{A}_\varphi < \infty$, то $f^*(\tau) \leqslant \mathbf{A}_\varphi \varphi(\tau)$, так что при $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$

$$f^{**} = t^{-1} \int\limits_0^t f^* \mathrm{d}\tau \leqslant \mathbf{A}_\varphi t^{-1} \int\limits_0^t \varphi \mathrm{d}\tau \leqslant c\mathbf{A}_\varphi \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Поэтому $||f||_{\mathbf{M}_\varphi} \leqslant c\mathbf{A}_\varphi$, что и даёт требуемую эквивалентность.

Теорема 4.

1. *Для потенциалов типа Бесселя и типа Рисса при* $p = 1$ *критерии вложений в ПИП имеют вид*

$$\mathbf{H}^G_{L_1} \subset \mathbf{X}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \varphi \in \widetilde{\mathbf{X}}(0, T) \tag{14}$$

(здесь $T = \infty$ *для потенциалов Рисса,* $T = \mathbf{V}_n(R/2)^n$ *для потенциалов типа Бесселя).*

2. *Оптимальное ПИП* $\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^n)$ *для вложения* (14) *в случае потенциалов типа Рисса совпадает с* $\mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)$*, а в случае потенциалов типа Бесселя оно совпадает с пересечением* $\mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ *с нормой*

$$||f||_{\mathbf{X}_0} = ||f||_{\mathbf{M}_\varphi} + ||f||_{L_1}. \tag{15}$$

Пример 1. Для классических потенциалов Рисса здесь следует положить

$$T = \infty, \quad \varphi(t) = t^{\alpha/n-1}, \quad 0 < \alpha < n. \tag{16}$$

Например, при $\mathbf{X}(\mathbb{R}^n) = L_q(\mathbb{R}^n)$ имеем $\widetilde{\mathbf{X}}(\mathbb{R}_+) = L_q(\mathbb{R}_+)$, так что условие (14) с $T = \infty$ не выполнено ни при каком $q \in [1, \infty]$.

Пример 2. Для классических потенциалов Бесселя можем считать здесь $T = 1$;

$$\begin{gathered} \varphi(t) = t^{\alpha/n-1}, \quad \alpha \in (0, n); \quad \varphi(t) = \ln\frac{eT}{t}, \quad \alpha = n; \\ \varphi(t) = 1, \quad \alpha > n \quad \text{при} \quad t \in (0, 1], \end{gathered} \tag{17}$$

$\varphi(t) = 1$, $t > 1$. В случае $\alpha > n$ это означает, что пространство потенциалов Бесселя вложено в любое ПИП, а оптимальным ПИП является $\mathbf{X}_0 = L_1 \cap L_\infty$. В частности, при $\mathbf{X}(\mathbb{R}^n) = L_q(\mathbb{R}^n)$ (14) $\Leftrightarrow \alpha > n(1-1/q)$.

Пример 3. Важные примеры ПИП дают весовые пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_q(\omega)$ и $\mathbf{\Gamma}_q(\omega)$, где $\omega > 0$ — измеримая функция (вес), $1 \leqslant q \leqslant \infty$:

$$||f||_{\mathbf{\Lambda}_q(\omega)} = ||f^*\omega||_{L_q(\mathbb{R}_+)}; \quad ||f||_{\mathbf{\Gamma}_q(\omega)} = ||f^{**}\omega||_{L_q(\mathbb{R}_+)}. \tag{18}$$

В рамках теории ПИП требуется, чтобы эти пространства содержали характеристические функции множеств конечной меры. Для $\mathbf{\Lambda}_q(\omega)$ это требование эквивалентно конечности первого слагаемого, а для $\mathbf{\Gamma}_q(\omega)$ — суммы обоих слагаемых в (19):

$$||\omega||_{L_q(0,t)} + t||\tau^{-1}\omega||_{L_q(t,\infty)} < \infty, \quad t \in (\mathbb{R}_+). \tag{19}$$

Поскольку $f^{**} \geqslant f^*$, то всегда $\mathbf{\Gamma}_q(\omega) \subset \mathbf{\Lambda}_q(\omega)$, причём в общем случае эти пространства различны. Для их совпадения необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое в (19) оценивалось сверху первым. Однако, при $\varphi \in \mathfrak{J}_1(T)$ в виду соотношений $\varphi^{**} \cong \varphi^* = \varphi$, критерии (14) для них формулируются одинаково ($T = \infty$ для потенциалов типа Рисса)

$$\mathbf{H}^G_{L_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{\Lambda}_q(\omega) \Leftrightarrow \mathbf{H}^G_{L_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{\Gamma}_q(\omega) \Leftrightarrow ||\varphi\omega||_{L_q(0,T)} < \infty. \tag{20}$$

5. Обоснование теоремы 4

Лемма 1. *Пусть $T \in (0,\infty], X(0,T)-$ банахово функциональное пространство (БФП), $\varphi \in \mathfrak{J}_1(T)$. Тогда для оператора $\mathfrak{R}_{\varphi,T}$* (1)

$$||\mathfrak{R}_{\varphi,T}|| := ||\mathfrak{R}_{\varphi,T}||_{L_1(0,T)\to X(0,T)} = ||\varphi||_{X(0,T)}. \tag{21}$$

Доказательство (леммы 1).

1. Поскольку $0 \leqslant f_\varphi(t;\tau) \leqslant \varphi(t)$, то в силу (1)

$$|\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g;t)| \leqslant \mathfrak{R}_{\varphi,T}(|g|,t) \leqslant \varphi(t) \int\limits_0^T |g(\tau)|\mathrm{d}\tau,$$

так что для БФП в силу монотонности нормы:

$$||\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g)||_{X(0,T)} \leqslant ||\varphi||_{X(0;T)} \cdot ||g||_{L_1(0,T)},$$

откуда

$$||\mathfrak{R}_{\varphi,T}|| \leqslant ||\varphi||_{X(0,T)}. \tag{22}$$

2. Получим обратное неравенство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > T^{-1}$, $g_n(\tau) = n\chi_{(0,1/n)}(\tau)$, $\tau \in (0,T)$;

$$\varphi_n(t) = \min\{\varphi(1/n); \varphi(t)\} = \begin{cases} \varphi(1/n), & t \in (0,1/n], \\ \varphi(t), & t \in (1/n, T). \end{cases}$$

Тогда

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g_n,t) = n \int\limits_0^{1/n} \min\{\varphi(t);\varphi(\tau)\}\mathrm{d}\tau \geqslant \varphi_n(t). \tag{23}$$

Действительно, при $t \in (0, 1/n]$ имеем в силу убывания φ:

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g_n, t) \geqslant n \int\limits_0^{1/n} \varphi(1/n)\mathrm{d}\tau = \varphi(1/n) = \varphi_n(t).$$

Если же $t \in (1/n, T)$, то при $\tau \in (0, 1/n)$ имеем $\min\{\varphi(t); \varphi(\tau)\} = \varphi(t)$, так что

$$\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g_n, t) = n \int\limits_0^{1/n} \varphi(t)\mathrm{d}\tau = \varphi(t) = \varphi_n(t).$$

Итак, верно (23), причём $||g_n||_{L_1(0,T)} = 1$. Поэтому

$$||\mathfrak{R}_{\varphi,T}|| \geqslant \sup_{n>T^{-1}} ||\mathfrak{R}_{\varphi,T}(g_n)||_{X(0,T)} \geqslant \sup_{n>T^{-1}} ||\varphi_n||_{X(0,T)}.$$

Но $0 \leqslant \varphi_n \uparrow \varphi (n \uparrow \infty)$ и в силу известных свойств БФП

$$||\varphi_n||_{X(0,T)} \uparrow ||\varphi||_{X(0,T)} \quad (n \uparrow \infty).$$

Итак, $||\mathfrak{R}_{\varphi,T}|| \geqslant ||\varphi||_{X(0,T)}$. Вместе с (23) это даёт равенство (1). Лемма 1 доказана. $\square$

Доказательство (теоремы 4).

A. Докажем эквивалентность (14). Согласно теореме 4 для потенциалов типа Рисса вложение (2) эквивалентно условию (3) при $p = 1$, а оно, по лемме 1, эквивалентно тому, что $\varphi \in \widetilde{X}_{(0,\infty)}$. Для потенциалов типа Бесселя вложение (2) эквивалентно совокупности условий (4) и (5) с $p = 1$. По лемме 1 условие (4) эквивалентно тому, что $\varphi \in \widetilde{X}(0, T)$. Условие (5) с $p = 1$ выполнено для любого ПИП $X(\mathbb{R}^n)$, поскольку $L_1 \cap L_\infty$ есть самое узкое ПИП. Итак, эквивалентность (14) имеет место и для потенциалов типа Рисса (с $T = \infty$) и для потенциалов типа Бесселя (с $T \in \mathbb{R}_+$).

B1. Покажем, что $X_0(\mathbb{R}^n) = \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ оптимально для вложения в (14) в случае потенциалов типа Рисса. Для $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$ имеем $\varphi^{**} \cong \varphi^* \cong \varphi$, так что

$$||\varphi||_{\widetilde{X_0}(\mathbb{R}_+)} = ||\varphi||_{\widetilde{\mathbf{M}}_\varphi(\mathbb{R}_+)} = \sup_{t>0} \left[\varphi^{**}(t) \cdot \varphi(t)^{-1}\right] < \infty. \tag{24}$$

Согласно (14) это даст вложение

$$\mathbf{H}^G_{L_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n). \tag{25}$$

Далее, если есть вложение в (14) для некоторого ПИП $X(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi \in \widetilde{X}(0, \infty)$. Тогда для любой функции $f \in \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ получим из (12)

$$f^*(t) \leqslant f^{**}(t) \leqslant ||f||_{\mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n)} \cdot \varphi(t), \quad t \in (\mathbb{R}_+); \tag{26}$$

откуда

$$||f||_{X(\mathbb{R}^n)} = ||f^*||_{\widetilde{X}_{(0,\infty)}} \leqslant ||f||_{\mathbf{M}_\varphi} \cdot ||\varphi||_{\widetilde{X}(0,\infty)}, \quad \forall f \in \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, $X_0(\mathbb{R}^n) = \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$, т.е. $X_0(\mathbb{R}^n)$ — оптимальное ПИП для потенциалов типа Рисса.

B2. Пусть теперь $T \in \mathbb{R}_+$, т.е. речь идёт о потенциалах типа Бесселя. Для них также установлена эквивалентность (14). Как в (24) получим, что

$$||\varphi||_{\widetilde{\mathbf{M}}_\varphi(0,T)} = \sup_{t\in(0,T)} \left[\varphi^{**}(t)\cdot\varphi(t)^{-1}\right] < \infty,$$

т.е. имеет место вложение (25). Кроме того, ядра обобщённых потенциалов Бесселя и, в частности, ядра потенциалов типа Бесселя принадлежат $L_1(\mathbb{R}^n)$. Из этого следует, что $\mathbf{H}^G_{L_1}(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$.

В результате для потенциалов типа Бесселя имеет место вложение

$$\mathbf{H}^G_{L_1}(\mathbb{R}^n) \subset X_0(\mathbb{R}^n) = \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n).$$

Обратно, пусть справедливо вложение в (14) для некоторого ПИП $X(\mathbb{R}^n)$. Нужно показать, что $X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$. Согласно эквивалентности (14) имеем $\varphi \in \widetilde{X}(0,T)$. Кроме того, для любого ПИП $X(\mathbb{R}^n)$ имеет место вложение (5) с $p=1$, которое сопровождается оценкой с постоянной $\theta_T \in \mathbb{R}_+$, не зависящей от f:

$$||f^*||_{\widetilde{X}(T,\infty)} \leqslant \theta_T ||f^*||_{L_1(\mathbb{R}_+)}.$$

Таким образом,

$$||f^*||_{\widetilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant ||f^*||_{\widetilde{X}(0,T)} + ||f^*||_{\widetilde{X}(T,\infty)} \leqslant ||f^*||_{\widetilde{X}(0,T)} + \theta_T ||f^*||_{L_1(\mathbb{R}_+)}. \qquad (27)$$

Для $f \in X_0(\mathbb{R}^n) = \mathbf{M}_\varphi(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ имеем, в частности, оценку (26), из которой следует, что

$$||f^*||_{\widetilde{X}(0,T)} \leqslant ||f||_{\mathbf{M}_\varphi} \cdot ||\varphi||_{\widetilde{X}(0,T)}.$$

Подставим эту оценку в (27):

$$||f^*||_{\widetilde{X}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \max\left\{||\varphi||_{\widetilde{X}(0,T)}; \theta_T\right\} \cdot \left[||f||_{\mathbf{M}_\varphi} + ||f||_{L_1}\right].$$

Итак, для $f \in X_0(\mathbb{R}^n))$

$$||f||_X \leqslant \max\left\{||\varphi||_{\widetilde{X}(0,T)}; \theta_T\right\} \cdot ||f||_{X_0},$$

что доказывает вложение $X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $X_0(\mathbb{R}^n)$ — оптимальное ПИП для вложения потенциалов типа Бесселя. Теорема 4 доказана. □

6. Оптимальные вложения при $1 < p < \infty$

Напомним, что всюду в этой работе $T = \infty$ для потенциалов типа Рисса, $T = \mathbf{V}_n(R/2)^n \in \mathbb{R}_+$ для потенциалов типа Бесселя.

Если выполнено условие $\varphi \in L_{p'}(0,T)$, то согласно теореме 5 имеет место вложение (7). Более того, для потенциалов типа Бесселя это условие означает, что $G \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, а тогда

$$\mathbf{H}^G_{L_p}(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n), \qquad (28)$$

причём стоящее справа ПИП оптимально.

В то же время для потенциалов типа Бесселя

$$\varphi \in \mathfrak{J}_1(T) \Rightarrow \varphi \in L_{p'}(t,T), \quad t \in (0,T).$$

Для потенциалов типа Рисса, если $\varphi \notin L_{p'}(t,\infty), t \in \mathbb{R}_+$, то пространство потенциалов не вложено ни в одно ПИП, поэтому ниже мы будем предполагать, что

$$\varphi \in \mathfrak{J}_1(T) \cap L_{p'}(t,T), \quad t \in (0,T); \quad \varphi \notin L_{p'}(0,T) \tag{29}$$

(при разных $t \in (0,T)$ для $\varphi \in \mathfrak{J}_1(T)$ условия $\varphi \in L_{p'}(t,T)$ эквивалентны).

Обозначим

$$\mathbf{V}_\infty(t) = \varphi(t)^{p'-1}\Big(\int\limits_t^\infty \varphi^{p'}\mathrm{d}\tau\Big)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{30}$$

а при $T \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{V}_T(t) = \varphi(t)^{p'-1}\Big(\int\limits_t^T \varphi^{p'}\mathrm{d}\tau\Big)^{-1}, \quad t \in (0,T/2]; \quad \mathbf{V}_T(t) = \mathbf{V}_T(T/2), \quad t > T/2. \tag{31}$$

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнены условия* (29). *Тогда оптимальное ПИП для вложения* (2) *имеет эквивалентную норму*

$$||f||_{\widetilde{\mathbf{X}_0}(\mathbb{R}_+)} \cong ||f||_{\mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{V}_T)} := \left(\int\limits_0^\infty \Big[f^{**}(t)\mathbf{V}_T(t)\Big]^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{32}$$

Кроме того, в условиях теоремы $\mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{V}_T) = \mathbf{\Lambda}_p(\mathbf{V}_T)$, *так что эквивалентную норму получим также, заменив в* (32) f^{**} *на* f^*.

Замечание 4. Пусть φ кроме (29) удовлетворяет ещё условию

$$\int\limits_t^T \varphi^{p'}\mathrm{d}\tau \cong \varphi(t)^{p'}t, \quad t \in (0,T/2). \tag{33}$$

Тогда в описании (30)–(32)

$$\mathbf{V}_T(t) \cong \Big[\varphi(t)t\Big]^{-1}, \quad t \in (0,T/2) \tag{34}$$

эквивалентную норму получим, заменив здесь f^{**} на f^*.

Замечание 5. Для потенциалов типа Бесселя, в отличие от (11), в формуле (32) отсутствует слагаемое $||f||_{L_p(\mathbb{R}_+)}$. Дело в том, что в условиях теоремы 5 имеет место вложение $\mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{V}_T) \subset L_p$ (поскольку $\mathbf{V}_T(t) \geqslant c_0 > 0$, $t \in (\mathbb{R}_+)$), так что слагаемое поглощается нормой в правой части (32) и может быть опущено. Более того, $\mathbf{V}_T(+0) = \infty$, так что указанное вложение строгое: $\mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{V}_T) \neq L_p$.

Доказательство (теоремы 5 для потенциалов типа Рисса).

1. Согласно теореме 3 эквивалентная норма в оптимальном ПИП для вложения (2) имеет вид (10) с $T = \infty$, причём в силу (1)

$$\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}(g^*,t) = \varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)\mathrm{d}\tau + \int\limits_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{35}$$

Следовательно,

$$||\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}(g^*)||_{L_{p'}(\mathbb{R}_+)} \cong \left(\int\limits_0^\infty \varphi(t)^{p'} \Big(\int\limits_0^t g^* \mathrm{d}\tau \Big)^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'} + \left(\int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_t^\infty \varphi g^* \mathrm{d}\tau \Big)^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'}. \tag{36}$$

С учётом убывания g^*, первое слагаемое в (36) оценивается снизу следующим образом:

$$\left(\int\limits_0^\infty \varphi(t)^{p'} \Big(\int\limits_0^t g^* \mathrm{d}\tau \Big)^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'} \geqslant \left(\int\limits_0^\infty \Big[\varphi(t) g^*(t) t \Big]^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'}.$$

Второе слагаемое в (36) оценим сверху по неравенству Харди:

$$\left(\int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_t^\infty \varphi g^* \mathrm{d}\tau \Big)^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'} \leqslant c_p \left(\int\limits_0^\infty \Big[\varphi(t) g^*(t) t \Big]^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'}.$$

Следовательно, второе слагаемое поглощается первым и

$$||\mathfrak{R}_{\varphi,\infty}(g^*)||_{L_{p'}(\mathbb{R}_+)} \cong \left(\int\limits_0^\infty \Big(\int\limits_0^t g^* \mathrm{d}\tau \Big)^{p'} \varphi(t)^{p'} \mathrm{d}t \right)^{1/p'} = ||g||_{\mathbf{\Gamma}_{p'}(\upsilon)}, \tag{37}$$

где (см. (18))

$$\upsilon(t) = t\varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{38}$$

Формула (10) показывает, что норма в оптимальном ПИП $\widetilde{X_0}(\mathbb{R}_+)$ является ассоциированной к норме (37), т.е.

$$||f||_{\widetilde{X_0}(\mathbb{R}_+)} \cong ||f||_{\Big[\mathbf{\Gamma}_{p'}(\upsilon)\Big]'}, \quad 1 < p < \infty. \tag{39}$$

Наиболее удобная интегральная форма описания пространства, ассоциированного с весовым пространством Лоренца с учётом наших обозначений (18) и при выполнении условий (29) с $T = \infty$, выглядит так:

$$||f||_{\Big[\mathbf{\Gamma}_{p'}(\upsilon)\Big]'} \cong \left(\frac{t^{p+p'-1} f^{**}(t)^p \cdot \mathbf{V}(t) \int\limits_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau}{\Big(\mathbf{V}(t) + t^{p'} \int\limits_t^\infty \tau^{-p'} \upsilon(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau \Big)^{p+1}} \mathrm{d}t \right)^{1/p}, \tag{40}$$

где

$$\mathbf{V}(t) = \int\limits_0^t \upsilon^{p'} \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \Big[\tau\varphi(\tau) \Big]^{p'} \mathrm{d}\tau.$$

Ближайшая цель — упростить ответ (40), учитывая свойства функции $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$. Для неё $\tau\varphi(\tau)$ почти возрастает, так что

$$\mathbf{V}(t) \leqslant c \Big[t\varphi(t) \Big]^{p'} \int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \cong \varphi(t)^{p'} t^{1+p'}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Кроме того, для $\varphi \in \mathfrak{J}_1(\infty)$ имеем $\varphi(\tau) \cong \varphi(t)$, $\tau \in [t/2, t]$, так что

$$\mathbf{V}(t) \geqslant \int\limits_{t/2}^{t} \Big[\tau\varphi(\tau)\Big]^{p'} \cong \varphi(t)^{p'} \cdot t^{1+p'}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В результате получим:

$$\mathbf{V}(t) \cong \varphi(t)^{p'} \cdot t^{1+p'}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{41}$$

Аналогично (см. (38))),

$$t^{p'} \int\limits_{t}^{\infty} \tau^{-p'} \upsilon(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau \geqslant t^{p'} \int\limits_{t}^{2t} \varphi(\tau)^{p'} \mathrm{d}\tau \cong \varphi(t)^{p'} t^{p'+1}.$$

Следовательно, сумма в знаменателе (40) эквивалентна её второму слагаемому, так что

$$||f||_{\Big[\mathbf{\Gamma}_{p'(\upsilon)}\Big]'} \cong \left(\int\limits_{0}^{\infty} f^{**}(t)^p \mathbf{V}_\infty(t)^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} = ||f||_{\mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{V}_\infty)},$$

где

$$\mathbf{V}_\infty(t)^p \cong \frac{t^{p+p'-1} \cdot \mathbf{V}(t)}{t^{p'(p+1)} \cdot \Big(\int\limits_{t}^{\infty} \varphi^{p'} \mathrm{d}\tau \Big)^p}.$$

Подставив сюда соотношение (41), получим, что

$$\mathbf{V}_\infty(t)^p \cong \varphi(t)^{p'} \Big(\int\limits_{t}^{\infty} \varphi^{p'} \mathrm{d}\tau \Big)^{-p}.$$

Это даёт описания (30), (32) с $T = \infty$.

2. Проверим теперь равенство $\mathbf{\Gamma}_p(\mathbf{V}_\infty) = \mathbf{\Lambda}_p(\mathbf{V}_\infty)$. Как отмечалось выше (см. комментарии к формуле (19)), это равенство эквивалентно оценке: существует $c \in \mathbb{R}_+$, такая что при $T = \infty$

$$t \cdot \left(\int\limits_{t}^{\infty} \Big[\mathbf{V}_T(\tau)\tau^{-1}\Big]^p \mathrm{d}\tau \right)^{1/p} \leqslant c \Big(\int\limits_{0}^{t} \mathbf{V}_T(\tau)^p \mathrm{d}\tau \Big)^{1/p}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{42}$$

которую нам и предстоит доказать. Она вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$*;* $W \geqslant 0$ *— измеримая функция на* $\mathbb{R}_+$*;*

$$A_p(t) = \int\limits_{t}^{\infty} \Big[W(\tau)\tau^{-1}\Big]^p \mathrm{d}\tau; \quad B_p(t) = t^{-p} \int\limits_{0}^{t} W^p \mathrm{d}\tau; \quad D_p(t) = \int\limits_{t}^{\infty} B_p(\tau)\tau^{-1} \mathrm{d}\tau. \tag{43}$$

1. Справедливо неравенство

$$D_p(t) \geqslant p^{-1} B_p(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{44}$$

2. Пусть при некоторых $\varepsilon > 0, c_0 \geq 1$, *функция* $B_p(t)t^{\varepsilon}$, c_0 *почти убывает на* $\mathbb{R}_+$, *т.е.*

$$B_p(\tau)\tau^{\varepsilon} \leqslant c_0 B_p(t)t^{\varepsilon}, \quad 0 < t < \tau < \infty. \tag{45}$$

Тогда

$$\text{а)} D_p(t) \leqslant c_0 \cdot \varepsilon^{-1} B_p(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{46}$$

$$\text{б)} A_p(t) \leqslant p \cdot c_0 \cdot \varepsilon^{-1} B_p(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{47}$$

Доказательство.

1. Оценка (44) очевидна:

$$D_p(t) = \int_t^{\infty} \Big(\int_0^{\tau} W^p \mathrm{d}\xi\Big)\tau^{-p-1}\mathrm{d}\tau \geqslant \int_0^t W^p \mathrm{d}\xi \cdot \int_t^{\infty} \tau^{-p-1}\mathrm{d}\tau = p^{-1}B_p(t).$$

2. В условиях части 2 леммы имеем аналогично

$$D_p(t) = \int_t^{\infty} B_p(\tau)\tau^{\varepsilon}\tau^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}\tau \leqslant c_0 \cdot B_p(t) \cdot t^{\varepsilon} \int_t^{\infty} \tau^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}\tau = c_0 \cdot \varepsilon^{-1} \cdot B_p(t),$$

   что доказывает (46).

3. При выводе оценки (47) можем считать, что $B_p(t) < \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$ (иначе нечего доказывать). Тогда и $D_p(t) < \infty$, $t \in \mathbb{R}_+$, откуда следует, что $D_p(+\infty) = 0$, так что и $B_p(+\infty) = 0$ (см. (44)). Поэтому, интегрируя $A_p(t)$ по частям, получим:

$$A_p(t) = \int_t^{\infty} \tau^{-p}\mathrm{d}\Big(\int_0^{\tau} W^p \mathrm{d}\tau\Big) = -B_p(t) + pD_p(t) \leqslant pD_p(t).$$

   Вместе с (46) это неравенство даёт (47). Что и требовалось доказать. □

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$; функция ψ на $\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям:

$$1)\ \psi \in L_{p'}(t, \infty), \quad t > 0; \quad \psi \notin L_{p'}(0, \infty); \tag{48}$$

$$2)\ 0 < \psi(t)t \text{ почти возрастает на } \mathbb{R}_+.$$

Положим

$$W(t) = \psi(t)^{p'-1}\Big(\int_t^{\infty} \psi^{p'}\mathrm{d}\tau\Big)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{49}$$

Тогда существует постоянная $c = c(p) \in \mathbb{R}_+$, такая что

$$t \cdot \left(\int_t^{\infty} \Big[W(\tau)\tau^{-1}\Big]^p \mathrm{d}\tau\right)^{1/p} \leqslant c \cdot \left(\int_0^t W(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{1/p}. \tag{50}$$

Доказательство. В условиях следствия 1 имеем:

$$\int_0^t W^p \mathrm{d}\tau = \int_0^t \psi(\tau)^{p'}\Big(\int_{\tau}^{\infty} \psi^{p'}\mathrm{d}\xi\Big)^{-p}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{p-1}\Big(\int_t^{\infty} \psi^{p'}\mathrm{d}\xi\Big)^{1-p}$$

(при $p > 1$ нижняя подстановка равна нулю).

Итак, обозначив

$$\lambda(t)=t^{p'-1}\int\limits_t^\infty \psi^{p'}\mathrm{d}\xi,$$

имеем

$$t^{p-1}B_p(t)=t^{-1}\int\limits_0^t W^p\mathrm{d}\tau=\frac{1}{p-1}\lambda(t)^{1-p}. \tag{51}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\psi(t)t$ возрастает на $\mathbb{R}_+$ (заменяя, если необходимо, функцию ψ на эквивалентную ей, для которой это свойство выполнено). Тогда

$$(p'-1)\int\limits_t^\infty \psi^{p'}\mathrm{d}\xi=(p'-1)\int\limits_t^\infty \Big[\psi(\xi)\xi\Big]^{p'}\cdot\xi^{-p'}\mathrm{d}\xi\geqslant(p'-1)\Big[\psi(t)t\Big]^{p'}\int\limits_t^\infty \xi^{-p'}\mathrm{d}\xi=\psi(t)^{p'}\cdot t.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=t^{p'-2}\Big[(p'-1)\int\limits_t^\infty \psi^{p'}\mathrm{d}\xi-\psi(t)^{p'}\cdot t\Big]\geqslant 0\Rightarrow\lambda(t)\uparrow.$$

Отсюда и из (51) следует, что при $\varepsilon=p-1>0$, $t^\varepsilon B_p(t)$ убывает, поэтому по лемме 2 справедлива оценка (50). Что и требовалось доказать. □

Доказательство (оценки (42) при $T=\infty$). В следствии положим $\psi=\varphi$, где φ удовлетворяет условиям (29). В этом случае следствие применимо и даёт оценку (50), причём из (30) и (49) видим, что $W=\mathbf{V}_\infty$). Тогда оценка (50) совпадает с (42) при $T=\infty$, что и требовалось доказать. □

Теорема 5 для потенциалов типа Рисса доказана. □

Некоторые из обсуждаемых в данной работе результатов были анонсированы в [6,7]. Результаты данной работы обобщают и развивают результаты, полученные в [8].

Литература

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. — Academic, New York, Pure Appl. Math., 1988. — 129 p.
2. *Neil R. O.* Convolution Operators and Spaces // Duke Math. J. — 1963. — Vol. 30. — Pp. 129–142.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. [*Nikoljskiyj S. M.* Priblizhenie funkciyj mnogikh peremennihkh i teoremih vlozheniya. — M.: Nauka, 1977.]
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973. [*Steyjn I. M.* Singulyarnihe integralih i differencialjnihe svoyjstva funkciyj. — M.: Mir, 1973.]
5. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Изд-во ЛГУ, 1985. [*Mazjya V. G.* Prostranstva Soboleva. — Izd-vo LGU, 1985.]
6. *Гольдман М. Л.* Перестановочно инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Доклады РАН. — 2008. — Т. 423. — С. 151–155. [*Goljdman M. L.* Perestanovochno invariantnihe obolochki obobthennihkh potencialov Besselya i Rissa // Dokladih RAN. — 2008. — T. 423. — S. 151–155.]

7. *Гольдман М. Л.* Интегральные свойства обобщенных бесселевых потенциалов // Доклады РАН. — 2007. — Т. 414, № 2. — С. 159–164. [*Goljdman M. L.* Integraljnihe svoyjstva obobthennihkh besselevihkh potencialov // Dokladih RAN. — 2007. — T. 414, No 2. — S. 159–164.]
8. *Gogatishvili A., Neves J. S., Opitz B.* Optimality of Embeddings of Bessel-Potential-Type Spaces, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis // Proc. Conf., Milovy, Czech Republic. May 28-June 2, Prague: Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic. — 2005. — Pp. 97–102.

UDC 519.216, 519.866

Optimal Embeddings for Bessel and Riesz Potentials. Part 1

M. L. Goldman, O. M. Guselnikova

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We establish effective criteria of optimal embeddings for Bessel and Riesz potentials into rearrangement invariant spaces.

Key words and phrases: Bessel potentials, Riesz potentials, Lorentz spaces, rearrangement invariant spaces, optimal embeddings, decreasing rearrangement.