

Научная статья

УДК 624.041.63

DOI: <https://doi.org/10.25686/2542-114X.2024.1.66>

EDN: MDWCVE

## Разработка теоретической модели для построения линий влияния вертикальных перемещений сечения трехшарнирной арки

*Р. А. Бикбаев<sup>✉</sup>, Е. Ф. Ежов*

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет  
им. Н. П. Огарёва (г. Саранск)  
[bikbaevra@yandex.ru](mailto:bikbaevra@yandex.ru)<sup>✉</sup>

**Аннотация.** *Введение.* Данная статья посвящена рассмотрению теоретических методов расчета трехшарнирных арок. Приведен обзор истории развития методик расчета и построения линий влияния для стержневых систем. Анализ теоретической и научно-методической литературы по указанной тематике показал преимущества и недостатки существующих методов и способов построения линий влияния для трехшарнирных арок. Теоретические и практические разработки авторов позволяют устранить недостатки известных методов.

*Цель исследования* заключается в разработке теоретических методов расчета трехшарнирных арок. Анализ источников по расчету арок показывает, что отсутствуют сведения о линиях влияния перемещений сечения арок.

*Результаты исследования.* На основе математических выкладок получены формулы, позволяющие построить линию влияния перемещений произвольного сечения ( $k$ ) трехшарнирной арки от действия единичной подвижной силы. Представлены основные положения этой методики и даны практические формулы, облегчающие построение линий влияния. Полученные аналитические выражения могут быть применены для практического расчета трехшарнирных арок.

*Выводы.* Проведенный численный анализ полученных результатов с помощью программного комплекса LIRA дает хорошие результаты. Эта методика внедряется в учебном процессе при изучении строительной механики в ходе подготовки инженеров строительных специальностей, а также в проверочных расчетах, связанных с обследованием технического состояния строительных конструкций, при разработке способов восстановления их работоспособности.

**Ключевые слова:** линия влияния; перемещение; трехшарнирная арка; опорная реакция; уравнение; изгибающий момент; интеграл Мора; шарнир; единичная сила; поперечная сила; продольная сила.

**Финансирование:** авторы заявляют об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

---

**Для цитирования:** Бикбаев Р. А., Ежов Е. Ф. Разработка теоретической модели для построения линий влияния вертикальных перемещений сечения трехшарнирной арки // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. 2024. № 1 (29). С. 66–75. DOI: <https://doi.org/10.25686/2542-114X.2024.1.66>; EDN: MDWCVE

---

## Введение

Первые расчеты стержневых конструкций берут свое начало еще в XIX веке. Методика построения линий влияния зародилась в 1854 году. Французский инженер Ж. А. К. Бресс составил таблицы «чисел влияния» для распора и опорных моментов бесшарнирной арки [1].

Через 13 лет после Бресса линии влияния для балки с заделанными концами, а затем и для арки построил Г. Винклер [2], доведя до конца идею Бресса и заслужив славу изобретателя линий влияния. В 1876 году Френкель применил этот метод к расчету статически определимой балки.

Для решения сложных задач позже были разработаны методы моментных точек Мюллера-Бреслау (1887 г.), Абрамова (1935 г.); метод замены стержней Геннеберга (1886 г.); метод замены связей (1901 г.); метод ложного положения.

В наши дни большой вклад в развитие стержневых структур внес доктор физико-математических наук М. Н. Кирсанов. Он рассматривает методы оптимизации стержневых структур, занимается популяризацией метода индукции в расчетах ферм [3-5].

В научных и методических изданиях авторов Ю. И. Бутенко и Н. А. Засятыко изложены различные способы построения линий влияния перемещений в консольных балках. Это отражено в учебниках по строительной механике указанных авторов [6].

В работе Е. Ф. Ежова и М. В. Мишина [7] предложены формулы для построения линий влияния шарнирно-опертых, статически определимых балок.

В. А. Киселевым рассмотрены расчеты двухшарнирных арок с очертанием по веревочной кривой [8]. Он приводит способы построения линий влияния внутренних усилий (изгибающих моментов  $M_k$ , поперечных сил  $Q_k$  и продольных сил  $N_k$ ) в заданном сечении  $k$  трехшарнирной арки. При этом используются методы нулевых точек, кинематический и способ наложения. Недостатком этих способов является отсутствие уравнений, описывающих величину искомых усилий  $M_k$ ,  $Q_k$

и  $N_k$  в зависимости от положения единичной вертикальной силы  $P = 1$ , расположенной на расстоянии  $x$  от правой опоры трехшарнирной арки.

В работе [9] Е. Ф. Ежовым и соавторами получены формулы, устраняющие неудобства вышеупомянутых методов. Однако здесь не приведены конкретные примеры расчета арки на подвижную нагрузку.

В статье [10] на основе теоретических выкладок из предыдущей работы саранскими учёными даются решения характерных практических задач. Эти задачи предлагаются в качестве расчетно-проектировочных работ для студентов строительных специальностей Архитектурно-строительного института Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Анализ теоретической и научно-методической литературы по расчету арок показывает, что отсутствуют сведения о линиях влияния перемещений сечения арок, что обуславливает актуальность данного исследования.

**Цель исследований** – разработка теоретических методов расчета трехшарнирных арок.

В данной работе получены формулы, позволяющие построить линию влияния перемещений сечения ( $k$ ) трехшарнирной арки от действия единичной подвижной силы.

## Математическое моделирование

1.1. Определим опорные реакции от единичной силы  $P_k = 1$ , приложенной в точке определения вертикального перемещения ( $k$ ) (рис. 1–3).

$$\sum M_b = 0, R_a \cdot l - 1 \cdot b = 0, R_a = b/l;$$

$$\sum M_c = 0,$$

$$R_a \cdot l/2 - H_a \cdot f - 1 \cdot (b - l/2) = 0,$$

$$H_a = \frac{R_a \cdot l}{2 \cdot f} - \frac{(b - l/2)}{f} = \frac{b}{2f} - \frac{(b - l/2)}{f}.$$

$$\text{Примем } \frac{b}{2f} - \frac{(b - l/2)}{f} = c.$$

Упростим выражение

$$\frac{b}{2f} - \frac{(b-l/2)}{f} = c, \quad c = \frac{l-b}{2f}; \quad H_a = c.$$

Примем  $\frac{b}{l} = t$ , тогда  $R_a = \frac{b}{l} = t$ .

$$\sum Y = 0; \quad R_a - 1 + R_b = 0,$$

$$R_b = 1 - R_a = \left(1 - \frac{b}{l}\right),$$

$$R_b = (1-t), \quad H_b = c.$$

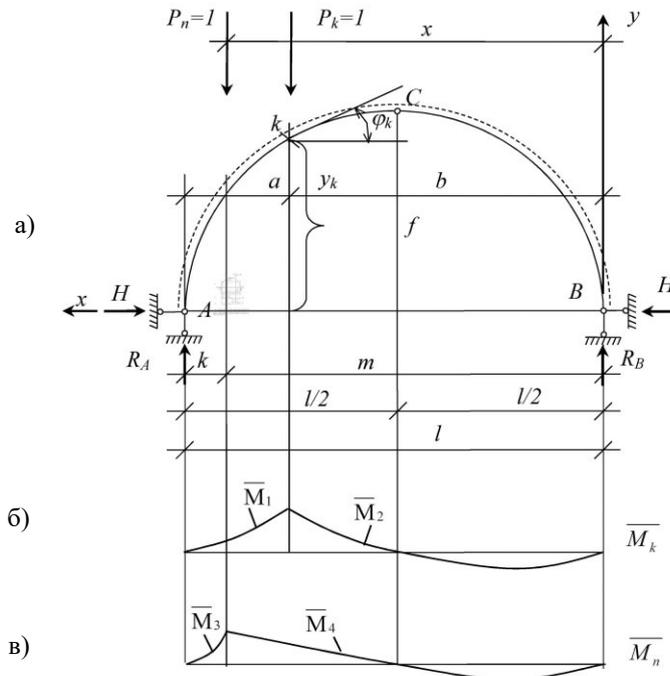


Рис. 1. Исходная расчетная схема трехшарнирной арки для определения усилий при  $b \leq x \leq l$  (а); эпюра моментов  $\bar{M}_k$  от действия единичной силы  $P_k = 1$ , приложенной в сечении  $k$  (б); эпюра моментов  $\bar{M}_n$  от действия единичной силы  $P_n = 1$ , приложенной в произвольном сечении  $n$  (в)

Fig. 1. The initial calculation scheme of a three-hinged arch for determining forces at  $b \leq x \leq l$  (a); the plot of moments from the action of a single force  $P_k = 1$  applied in section  $k$  (b); the plot of moments from the action of a single force  $P_n = 1$  applied in an arbitrary section  $n$  (c)

1.2. Определим опорные реакции от единичной силы  $P_n = 1$ , расположенной на расстоянии  $x$  от правой опоры (см. рис. 1).

$$M_1 = R_a(l-x) - H_a \cdot y =$$

$$= t(l-x) - c \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2};$$

$$M_2 = (1-t) \cdot x - c \cdot \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2};$$

$$R_a \cdot l - P_n \cdot m = 0; \quad R_a = \frac{P_n \cdot m}{l} = \frac{m}{l};$$

Примем выражение  $\frac{m}{l} = v$ , тогда

$$-H_a \cdot f + R_a \cdot l/2 - 1 \cdot (m - l/2),$$

$$H_a = \frac{m}{2f} - \frac{m - l/2}{f}.$$

$$\text{Примем } \frac{m}{2f} - \frac{m - l/2}{f} = g,$$

тогда  $H_a = g, \quad H_b = g, \quad R_b = 1 - v$ .

1.3. Запишем уравнения изгибающих моментов на участках 1 ( $\bar{M}_1$ ), 2 ( $\bar{M}_2$ ), 3 ( $\bar{M}_3$ ) и на участке 4 ( $\bar{M}_4$ ).

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= R_a(l-x) - H_a \cdot y = \\ &= t(l-x) - c \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2}; \\ \bar{M}_2 &= (1-t) \cdot x - c \cdot \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2}; \\ \bar{M}_3 &= v(l-x) - g \left( \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2} \right); \\ \bar{M}_4 &= (1-v) \cdot x - g \left( \frac{4f \cdot x \cdot (l-x)}{l^2} \right).\end{aligned}$$

2. Выведем уравнения для случая, когда единичная сила  $P_n = 1$  находится между точками  $k$  и  $A$  для сечения с координатой  $v \leq x \leq l$ .

В этом случае (случай 1) для точки с координатой  $v \leq x \leq l$  значения моментов  $\bar{M}_k = \bar{M}_2$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}_4$ , а для любого сечения с координатой  $v \leq x \leq l-k$  значения моментов  $\bar{M}_k = \bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}_4$ . Если абсцисса сечения находится в интервале  $l-k \leq x \leq l$ , значения моментов будут составлять  $\bar{M}_k = \bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}_3$ .

2.1. Вертикальные перемещения сечения ( $k$ ) вычислим с помощью интеграла

Мора, учитывая лишь влияние изгибающих моментов. Влияние поперечных и продольных сил на искомое перемещение незначительно, что будет видно из сравнения наших результатов с данными, полученными при помощи программного комплекса LIRA.

Принимаем, что арка имеет постоянную жесткость при изгибе по всей длине. ( $EJ_0 = \text{const}$ ).

$$\begin{aligned}\delta_{kn}^1 &= \int_0^b \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \int_k^a \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \\ &+ \int_m^l \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_n}{EJ_0} \cdot dx = \int_0^b \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_4}{EJ_0} \cdot dx + \\ &+ \int_k^a \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_4}{EJ_0} \cdot dx + \int_m^l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_3}{EJ_0} \cdot dx.\end{aligned}$$

Вычислим почленно три интеграла и просуммируем их, получив окончательно величину  $\delta_{kn}^1$  для случая, когда сила  $P_n = 1$  находится в пределах от опоры  $A$  до сечения  $k$ .

В конечном итоге для первого случая, когда  $P_n = 1$  находится между точками  $A$  и  $k$ , получим выражение (1).

$$\begin{aligned}\delta_{kn}^1 &= \int_0^b \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \int_k^a \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \int_m^l \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_n}{EJ_0} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{b^3}{3} \left( 1-v - \frac{4gv}{l} + \frac{4gf}{l^2} - t + tv + \frac{4gtf}{l} - \frac{4cf}{l} + \frac{4cvf}{l} + \frac{16cgf^2}{l^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{b^4}{4} \left( \frac{4cf}{l^2} - \frac{4cvf}{l^2} - \frac{16cf}{l^3} - \frac{4gft}{l^2} - \frac{cgf^2}{l^3} \right) + \frac{b^5}{5} \left( \frac{16cgf^2}{l^4} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{(a^2 - k^2)}{2} \cdot \left( tk - \frac{4fck}{l} \right) + \frac{a^3 - k^3}{3} \left( tv - \frac{4gtf}{l} - \frac{4fcv}{l} + \frac{16f^2gc}{l^2} - t + \frac{4fc}{l} + \frac{4fck}{l^2} \right) \right. \\ &+ \frac{a^4 - k^4}{4} \left( \frac{4ftg}{l^2} - \frac{16f^2gc}{l^3} + \frac{4fcv}{l^2} - \frac{16f^2gc}{l^3} - \frac{4fc}{l^2} \right) + \frac{a^5 - k^5}{5} \left( \frac{16f^2gc}{l^4} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{k^3}{3} \left( vt - \frac{4gft}{l} - \frac{4fcv}{l} + \frac{16f^2cg}{l^2} \right) + \frac{k^4}{4} \left( \frac{4fgt}{l^2} - \frac{16f^2cg}{l^3} + \frac{4fcv}{l^2} - \frac{16f^2gc}{l^3} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{k^5}{5} \left( \frac{16f^2cg}{l^4} \right) \right] \quad (1)\end{aligned}$$

3. Рассмотрим случай, когда сила  $P_n$  находится правее сечения  $k$ , но левее ключевого шарнира  $C$  ( $l/2 \leq x \leq m$ ).

Значения опорных реакций останутся теми же.

$$H_a = c, \quad \text{здесь } c = \frac{l-b}{2f}; \quad R_a = \frac{b}{l} = t;$$

$$R_b = (1-t).$$

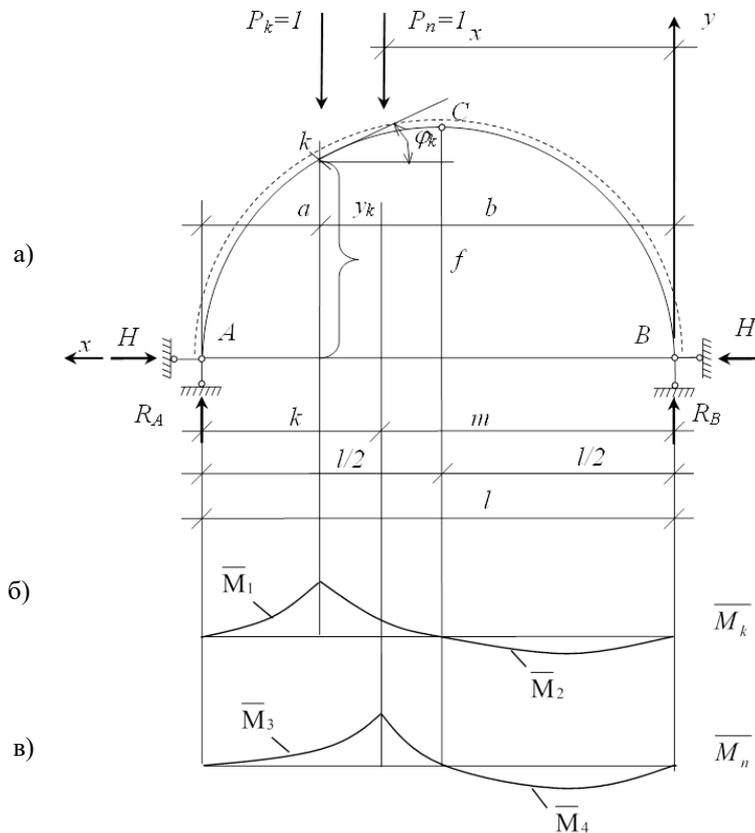


Рис. 2. Исходная расчетная схема трехшарнирной арки для определения усилий при  $l/2 \leq x \leq b$  (а); эпюра моментов  $\bar{M}_k$  от действия единичной силы  $P_k = 1$ , приложенной в сечении  $k$  (б); эпюра моментов  $\bar{M}_n$  от действия единичной силы  $P_n = 1$ , приложенной в произвольном сечении  $n$  (в)

Fig. 2. The initial design scheme of a three-hinged arch for determining the forces at  $l/2 \leq x \leq b$  (a); the plot of moments from the action of a single force  $P_k = 1$  applied in section  $k$  (b); the plot of moments from the action of a single force  $P_n = 1$  applied in an arbitrary section  $n$  (c)

Поменяются лишь пределы интегрирования и произведения выражений моментов в интеграле Мора.

Выведем уравнения для случая, когда единичная сила  $P_n = 1$  находится между точками  $k$  и  $C$  для точки с координатой  $l/2 \leq x \leq b$ .

В этом случае (случай 2) для сечения с координатой  $b \leq x \leq l$  значения моментов  $\bar{M}_k = \bar{M}_2$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}_4$ . Для сечения с координатой  $b \leq x \leq l-k$  значения

моментов  $\bar{M}_k = \bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}_4$ . Для точки с координатой  $l-k \leq x \leq l$  значения моментов будут составлять  $\bar{M}_k = \bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_n = \bar{M}_3$ .

3.1. Для определения вертикальных перемещений сечения ( $k$ ) снова воспользуемся интегралом Мора, учитывая лишь влияние изгибающих моментов (влияние поперечных и продольных сил на искомое перемещение незначительно,

что также будет видно из сравнения помощи программного комплекса наших результатов с полученными при LIRA).

$$\delta_{kn}^2 = \int_0^m \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \int_m^b \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \int_b^l \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_n}{EJ_0} \cdot dx;$$

$$\delta_{kn}^2 = \int_0^m \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_4}{EJ_0} \cdot dx + \int_k^a \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_4}{EJ_0} \cdot dz + \int_0^a \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3}{EJ_0} \cdot dz.$$

Вычислим почленно три интеграла и просуммируем их, получив окончательно величину  $\delta_{kn}^2$ . В итоге для второго случая,

когда единичная сила  $P_n = 1$  находится в пределах от сечения  $k$  до ключевого шарнира  $C$  (см. рис. 2), получим выражение (2).

$$\delta_{kn}^2 = \int_0^m \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_n}{EJ_0} \cdot dx + \int_k^a \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_n}{EJ_0} \cdot dz + \int_0^a \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_n}{EJ_0} \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{EJ_0} \left[ \frac{m^3}{3} \left( 1 - \nu - \frac{4gv}{l} + \frac{4gf}{l^2} - t + tv + \frac{4gtf}{l} - \frac{4cf}{l} + \frac{4cvf}{l} + \frac{16cgf^2}{l^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m^4}{4} \left( \frac{4cf}{l^2} - \frac{4cvf}{l^2} - \frac{16cf}{l^3} - \frac{4gft}{l^2} - \frac{cgf^2}{l^3} \right) + \frac{m^5}{5} \left( \frac{16cgf^2}{l^4} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{k^2 - a^2}{2} \left( av - \frac{4gaf}{l} \right) + \frac{k^3 - a^3}{3} \left( tv - \frac{4gtf}{l} - \frac{4fcv}{l} + \frac{16f^2gc}{l^2} - \nu + \right. \right. \tag{2}$$

$$\left. + \frac{4fg}{l} + \frac{4fga}{l^2} \right) + \frac{k^4 - a^4}{4} \left( \frac{4ftg}{l^2} - \frac{16f^2gc}{l^3} + \frac{4fcv}{l^2} - \frac{16f^2gc}{l^3} - \frac{4fg}{l^2} \right) + \frac{k^5 - a^5}{5} \left( \frac{16f^2gc}{l^4} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{a^3}{3} \left( vt - \frac{4gft}{l} - \frac{4fcv}{l} + \frac{16f^2cg}{l^2} \right) + \frac{a^4}{4} \left( \frac{4fgt}{l^2} - \frac{16f^2cg}{l^3} + \frac{4cvf}{l^2} - \frac{16f^2gc}{l^3} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^5}{5} \left( \frac{16f^2cg}{l^4} \right) \right]$$

4. Рассмотрим случай, когда сила  $P_n$  находится правее ключевого шарнира  $C$  и левее опоры  $B$  ( $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ).

$$H_a = c, \quad \text{здесь } c = \frac{l-b}{2f}; \quad R_a = \frac{b}{l} = t;$$

$$R_b = (1-t).$$

4.1. Опорные реакции от единичной силы  $P_k = 1$ , приложенной в точке определения вертикальных перемещений ( $k$ ), были вычислены в пункте 1.1:

4.2. Вычислим опорные реакции от единичной силы  $P_n = 1$ , расположенной на расстоянии  $x$  от правой опоры ( $0 \leq x \leq l/2$ ) (см. рис. 3):

$$\sum M_b = 0; \quad R_a \cdot l - P_n \cdot m = 0; \quad R_a = \frac{P_n \cdot m}{l} = \frac{m}{l};$$

$$\sum M_c = 0; \quad R_a \cdot \frac{l}{2} - H_a \cdot f = 0; \quad H_a = \frac{R_a \cdot l}{2f} = \frac{m}{l} \cdot \frac{l}{2f} = \frac{m}{2f} = H_a = H_b;$$

$$\sum M_c^{np} = 0, \quad -P_n(x-m) + R_b \cdot \frac{l}{2} - H_b \cdot f = 0; \quad R_b = \frac{H_b \cdot f + x - m}{l/2};$$

$$-P_n \cdot k + R_b \cdot l = 0; \quad R_b = \frac{k}{l} = \frac{l-m}{l} = 1 - \frac{m}{l}.$$

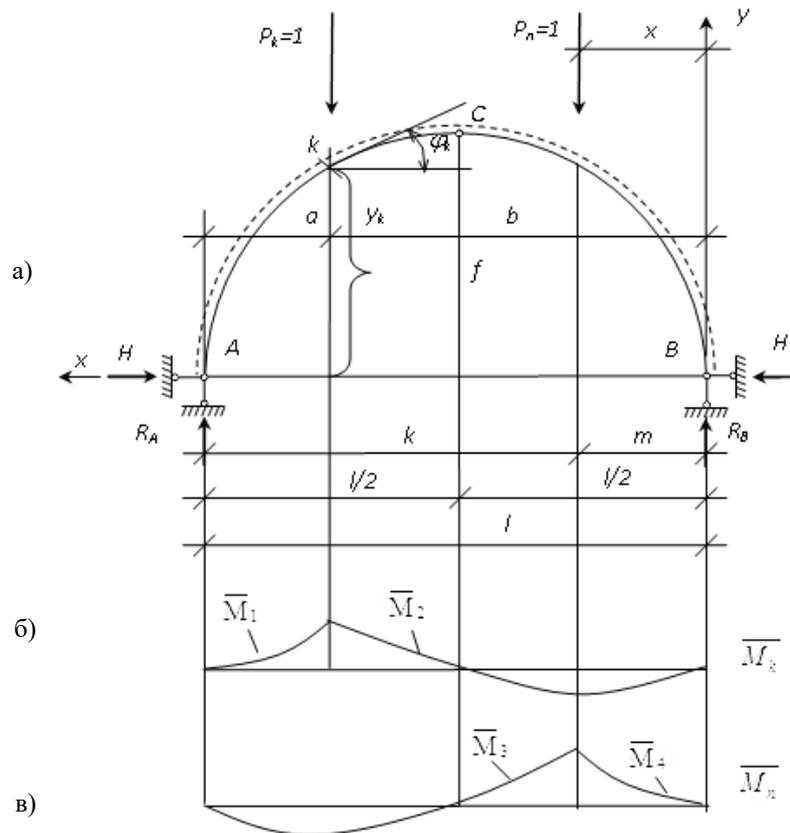


Рис. 3. Исходная расчетная схема трехшарнирной арки для определения усилий при  $0 \leq x \leq l/2$  (а); эпюра моментов  $\bar{M}_k$  от действия единичной силы  $P_k = 1$ , приложенной в сечении  $k$  (б); эпюра моментов  $\bar{M}_n$  от действия единичной силы  $P_n = 1$ , приложенной в произвольном сечении  $n$  (в)

Fig. 3. The initial calculation scheme of a three-hinged arch for determining forces at  $0 \leq x \leq l/2$  (a); the plot of moments from the action of a single force  $P_k = 1$  applied in section  $k$  (b); the plot of moments from the action of a single force  $P_n = 1$  applied in an arbitrary section  $n$  (c)

4.3. Запишем уравнения моментов (рис. 3) на участках 3 ( $\bar{M}_3$ ) и 4 ( $\bar{M}_4$ ):

$$\bar{M}_3 = R_a(l-x) - H_a \cdot y = \frac{m}{l}(l-x) - \frac{m}{2f} \left( \frac{4fx(l-x)}{l^2} \right) = \frac{m}{l}(l-x) - \frac{2mx(l-x)}{l^2};$$

$$\bar{M}_4 = R_b \cdot x - H_b \cdot y = \frac{k}{l} \cdot x - \frac{m}{2f} \cdot \frac{4fx(l-x)}{l^2} \quad \text{в пределах от нуля до } m;$$

$$\bar{M}_4 = R_b \cdot x - H_b \cdot y - P_n(x-m) = \frac{k}{l} \cdot x - \frac{m}{2f} \cdot \frac{4fx(l-x)}{l^2} - x + m \quad \text{в пределах от } m \text{ до } b.$$

4.4. Для определения перемещения сечения ( $k$ ) от действия единичной силы, приложенной в произвольном сечении ( $n$ ) на расстоянии  $x$  от правой опоры ( $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ ),

$$\delta^3_{kn} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx = \int_0^m \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx + \int_m^b \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx + \int_b^l \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx.$$

Почленно проинтегрируем каждое слагаемое.

В итоге для третьего случая, когда

снова воспользуемся интегралом Мора.

Определим перемещения сечения ( $k$ ), проинтегрировав соответствующие выражения моментов:

единичная сила  $P_n = 1$  находится между ключевым шарниром  $C$  и опорой  $B$  (см. рис. 3), получим выражение (3).

$$\begin{aligned} \delta^3_{kn} &= \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx = \int_0^m \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx + \int_m^b \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx + \int_b^l \frac{\overline{M}_k \overline{M}_n}{EJ_0} dx = \\ &= \frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{m^3}{3} \left( \frac{a(2m-k)}{l^2} \right) + \frac{x^4}{4} \left( \frac{2a(k-3m)}{l^3} \right) + \frac{4m^6}{5l^4} \right] + \frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \frac{b^3 - m^3}{3} \left( \frac{am}{l^2} + \frac{3am}{l^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{b^4 - m^4}{4} \left( \frac{-6am}{l^3} - \frac{2am}{l^3} \right) - \frac{b^2 - m^2}{2} \cdot \frac{am}{l} + \frac{b^5 - m^5}{5} \cdot \frac{4am}{l^4} \left. \right] + \frac{1}{EJ_0} \cdot \left[ \left( \frac{a^3}{3} \cdot \frac{m(2a-b)}{l^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{a^4}{4} \left( \frac{2m(b-3a)}{l^3} \right) + \frac{4ama^5}{5l^4} \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

### Выводы

Получены аналитические выражения для построения линии влияния перемещения произвольного сечения ( $k$ ) трехшарнирной арки при движении единичной силы в интервалах: в первом случае –  $b \leq x \leq l$ ; во втором –  $l/2 \leq x \leq b$ ; в третьем случае –  $0 \leq x \leq l/2$ .

Проведенный численный анализ полученных результатов с помощью про-

граммного комплекса LIRA дает хороший итог.

Внедрение новой методики осуществляется при подготовке инженеров строительных специальностей в вузах, а также при проведении проверочных расчетов в работах по обследованию технического состояния строительных конструкций, при разработке способов восстановления их работоспособности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bresse. Cours de mecanique appliquee. 2-е изд. Париж, 1866. 536 с.
2. Winkler E. Die Lehre von der Elasticitat und Festigkeit. Prag, 1867. 388 с.
3. Кирсанов М. Н. Индуктивный метод решения статики и динамики стержневых систем // Международный форум информатизации. МФИ–2001. С. 163–166.
4. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет, предельный и сравнительный анализ плоской балочной фермы // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2015. № 3(39). С. 86–93.
5. Dong Xiaomeng, Kirsanov M. N. The dependence of the deflection of the truss from the position

of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4(5). С. 6-7.

6. Бутенко Ю. И., Засяцько Н. А. Строительная механика: учеб. для вузов. Киев: Выща шк., 1989. 479 с.

7. Ежов Е. Ф., Мишин М. В. Построение линии влияния перемещений в сечении ( $K$ ) шарнирно-опертой, статически определимой балки // Актуальные вопросы строительства. Вторые Соломатовские чтения: материалы Всерос. науч.-техн. конф. Саранск: Изд-во Морд. ун-та, 2003. С. 277–281.

8. Киселев В. А. Расчет двухшарнирных арок с очертанием по веревочной кривой // Труды Мос-

ковского автомобильно-дорожного института. 1957. Вып. 20. С. 21-94.

9. Построение линии влияния в трехшарнирных арках / Е. Ф. Ежов, Ю. В. Юркин, В. Д. Антошкин, В. Е. Ежов // Современные технологии строительных материалов и конструкций: материалы Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 150 летию со дня рождения

академика В.Г. Шухова. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2003. С. 160-164.

10. Построение линий влияния в трехшарнирных арках для решения актуальных практических задач / Е. Ф. Ежов, Ю. В. Юркин, В. Д. Антошкин, М. В. Мишин // Вестник Мордовского университета: научно-публицистический журнал. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2003. № 3-4. С. 139-144.

Статья поступила в редакцию 31.05.2024; одобрена после рецензирования 07.06.2024; принята к публикации 23.06.2024

### Информация об авторах

*БИКБАЕВ Ринат Арифович* – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики Института архитектуры и строительства, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск. Сфера научных интересов связана с проблемами обеспечения безопасности эксплуатации зданий и сооружений. Автор более 100 научных и учебно-методических трудов. E-mail: bikbaevra@yandex.ru

*ЕЖОВ Егор Федорович* – кандидат технических наук, доцент, пенсионер, г. Саранск. Сфера научных интересов – статические и динамические осадки сооружений. Автор более 100 научных и учебно-методических трудов. E-mail: eef1950@mail.ru

**Вклад авторов:** авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

---

Scientific article

UDC 624.041.63

DOI: <https://doi.org/10.25686/2542-114X.2024.1.66>

EDN: MDWCVE

### Development of the theoretical model to construct the lines of influence of vertical displacements in a three-hinged arch section

*R. A. Bikbaev\*, E. F. Ezhov*

National Research Mordovia State University (Saransk)

bikbaevra@yandex.ru\*

**Abstract. Introduction.** The paper considers theoretical methods for calculating three-hinged arches. Methods for determining and building influence lines for core systems are described, along with their historical background. Literature review on this issue has revealed the benefits and drawbacks of current methods and approaches for building three-hinged arches' lines of influence. The authors' advances in theory and practice allow for the elimination of the drawbacks associated with existing approaches.

*The aim of the research* is to develop theoretical methods for calculating three-hinged arches. The analysis arch calculation sources reveals a lack of data regarding the lines of influence affecting the movements of the arches' cross sections.

*Research results.* It is possible to develop a line of influence for the displacements of each section  $k$  of a three-hinged arch under the influence of a single moving force using mathematical computations. The fundamental guidelines of this methodology are outlined, along with relevant equations that help develop influencing paths. It is possible to compute three-hinged arches using the derived analytical equations.

*Conclusion.* Reliable findings are produced from the numerical analysis of the data acquired with the LIRA software package. This approach is used in the training of construction engineers when they study structural mechanics and in the verification calculations made when assessing the technical state of building structures and devising strategies to make them operational again.

**Keywords:** line influence; move; fully articulated arch support reaction; equation; bending moment; Maura integral; hinge; a single force; transverse force; longitudinal force.

**Funding:** this research received no external funding.

---

**For citation:** Bikbaev R. A., Ezhov E. F. Development of the theoretical model to construct the lines of influence of vertical displacements in a three-hinged arch section. *Vestnik of Volga State University of Technology. Series: Materials. Constructions. Technologies.* 2024;(1):66–75. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.25686/2542-114X.2024.1.66>; EDN: MDWCVE

---

#### REFERENCES

1. Bresse. Cours de mecanique appliquee. 2nd ed. Paris; 1866. 536 p.
2. Winkler E., Die Lehre von der Elasticitat und Festigkeit. Prag; 1867. 388 p.
3. Kirsanov M. N. Inductive method for solving statics and dynamics of core systems. International informatization forum. MFI–2001. P. 163-166. (In Russ.).
4. Kirsanov M. N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of flat girder trusses. *Scientific Bulletin of Voronezh State Agrarian Academy of Management Systems. Construction and architecture.* 2015;(3):86-93. (In Russ.).
5. Dong Xiaomeng, Kirsanov M. N. Annotation of the number of panels. *Bulletin of scientific conferences.* 2016;(1-4):6-7.
6. Butenko Y. I., Zasyatko N. A. Construction mechanics: proc. for high schools. Kiev: Publishing Vyshcha School; 1989. 479 p. (In Russ.).
7. Ezhov E. F., Mishin M. V. Construction of the line of influence of displacements in the section (K) of a hinged-supported, statically determinate beam. *Actual Issues of Construction. Second Solomat Readings: Materials Vseros. scientific-techn. conf.* Saransk: Publishing house of the Mordovian University; 2003. P. 277-281. (In Russ.).
8. Kiselev V. A. Calculation of double-hinged arches with an outline along a rope curve. *Proceedings of the Moscow Automobile and Road Institute.* 1957;issue 20:21-94. (In Russ.).
9. Ezhov E. F., Yurkin Y. V., Antoshkin V. D., Ezhov V. E. Construction of the influence line in the three-hinged arches. *Proceedings of the All-Russian Scientific and Technical Conference, dedicated to the 150th anniversary of the birth of Academician V.G. Shukhov. Modern technologies of building materials and structures.* Saransk: Publishing house of the Mordovian University; 2003. P. 160-164. (In Russ.).
10. Ezhov E. F., Yurkin Y. V., Antoshkin V. D., Mishin M. V. Construction of influence lines in three-hinged arches for solving actual practical problems. *Bulletin of the Mordovian University. Scientific journalistic journal. Saransk. Publishing house of the Mordovian University.* 2003;(3-4):139-144. (In Russ.).

The manuscript was submitted on 15.05.2024; reviewed on 30.05.2024; adopted for publication on 03.06.2024

#### Information about the authors

**BIKBAEV Rinat Arifovich** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mechanics of the Institute of Architecture and Construction, National Research Mordovia State University, Saransk. Research interests – safety of operation of buildings and structures. Author of more than 100 publications. E-mail: [bikbaevra@yandex.ru](mailto:bikbaevra@yandex.ru)

**EZHOV Egor Fedorovich** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, retired, Saransk. Research interests – static and dynamic precipitation of structures. Author of more than 100 publications. E-mail: [eef1950@mail.ru](mailto:eef1950@mail.ru)

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this paper.

**Conflict of interests:** the authors declare no conflict of interest.

The authors reviewed the results and approved the final version of the manuscript.