



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

VESTNIK

OF SAMARA UNIVERSITY

NATURAL SCIENCE SERIES

ТОМ 31 • №1 • 2025 ГОД

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Подписной индекс 80307

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Математика*
- *Математическое моделирование*
- *Математические методы в естественных науках*
- *Физика*

ТОМ 31 • № 1 • 2025 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издаётся с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета»,

с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series»

Выходит 4 раза в год Т. 31, № 1, 2025

Главный редактор:

А.Б. Прокофьев, д-р тех. наук, доц., зав. кафедрой теории двигателей летательных аппаратов имени В.П. Лукачева, первый проректор — проректор по научно-исследовательской работе (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.А. Мурзиновой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель и учредитель: Самарский университет

Адрес издателя и учредителя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Периодическое печатное издание, журнал, зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном интернет-каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 27.05.2025. Дата выхода в свет 06.06.2025

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 14,75.

Тираж 200 экз. (первый завод — 30 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Н. Аязов, д-р физ.-мат. наук, директор (Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, РФ), профессор кафедры физики (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, РФ)

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горюхов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Ивашкин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Лёган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

С.А. Лычев, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Механики технологических процессов (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терезин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

К.Б. Устинов, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Геомеханики (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Subscription Index 80307

**VESTNIK
SAMARSKOGO UNIVERSITETA
ESTESTVENNONAUCHNAYA SERIYA**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mathematical
Modelling*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*
- *Physics*

VOL. 31 • № 1 • 2025

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
"Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series"
It is published 4 times a year V. 31, № 1, 2025

Chief editor:

A.B. Prokofiev, Dr. of Engineering Sci., associate professor, head of the Department of Theory of Aircraft Engines named after V.P. Lukacheva, first vice-rector — vice-rector for research (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., head of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, RF)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.A. Murzinova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher and Founder: Samara National Research University

Address publisher and founder:

34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial staff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara, 443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the United catalog of Internet «Press of Russia» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 27.05.2024. Date of publication 06.06.2025

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 14,75.

Circulation 200 copies (first printing – 30 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.N. Azyazov, Dr. of Phys.-Math. Sci., head (Samara Branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia), prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF)

S.A. Lychev, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Mechanics of Technological Processes (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov State University, Saratov, RF)

K.B. Ustinov, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Geomechanics (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Воскресенская Г.В.** Об арифметической природе коэффициентов мультипликативных эта-произведений 7
- Пулькина Л.С., Смирнова А.Н.** Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения 22

Математическое моделирование

- Шевелёв А.П., Гильманов А.Я., Скобликов Р.М.** Критериальный метод определения времени нагнетания пара при пароциклической обработке призабойных зон скважин 34

Математические методы в естественных науках

- Переварюха А.Ю.** Метод формирования логико-событийных вычислительных моделей трансформирующихся социобиологических процессов 51
- Суслов А.В.** Акустический метод определения толщины отложений в технологическом оборудовании 64

Физика

- Morozova S.D., Shipilova A.V.** Response simulation and primary vertex reconstruction in the SPD NICA straw tracker 75
- Осман А., Фархутдинова А.Р., Башкиров Е.К.** Влияние начальной атомной когерентности и прямого взаимодействия на перепутывание кубитов в двухкубитной модели Тависа — Каммингса 86
- Chipura A.S., Dolgoplov M.V., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Radenko V.V.** Development of energy converters in discrete ion-plasmodynamic installations with electronic control 99
- Требования к оформлению статей* 118

CONTENTS

Mathematics

- Voskresenskaya G.V.** On the arithmetic nature of coefficients of multiplicative eta-functions **7**
Pulkina L.S., Smirnova A.N. On solvability of a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in characteristic domain **22**

Mathematical Modelling

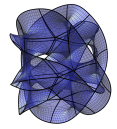
- Shevelev A.P., Gilmanov A.Ya., Skoblikov R.M.** Criterion-based method for determining the time of steam injection during steam cyclic stimulation of bottomhole zones of wells ... **34**

Mathematical Methods in Natural Sciences

- Perevaryukha A.Yu.** Method of constructing logical-event computational models of transforming social information processes **51**
Suslov A.V. Acoustic method for measuring the thickness of deposits on the inner wall of technological equipment **64**

Physics

- Morozova S.D., Shipilova A.V.** Response simulation and primary vertex reconstruction in the SPD NICA straw tracker **75**
Othman A., Farhutdinova A.R., Bashkirov E.K. Influence of initial atomic coherence and direct coupling on qubits entanglement in two-qubit Tavis — Cummings model **86**
Chipura A.S., Dolgoplov M.V., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Radenko V.V. Development of energy converters in discrete ion-plasmodynamic installations with electronic control **99**
Requirements to the design of articles **118**



Об арифметической природе коэффициентов мультипликативных эта-произведений

Воскресенская Г.В. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; galvosk@mail.ru; ORCID: 0000-0002-6288-5372 (Г.В.);

Поступила: 11.12.2024

Рассмотрена: 20.01.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. В статье изучается арифметическая природа коэффициентов мультипликативных эта-произведений, называемых также функциями МакКея. Для некоторых функций можно установить соответствие Гекке между коэффициентами функций МакКея и гроссен-характерами Гекке мнимых квадратичных полей. Для других функций МакКея такое соответствие невозможно, но их коэффициенты можно представить в виде сумм, содержащих характеры Гекке. Возникающие характеры Гекке выписываются явно. В статье приведены первые десять коэффициентов для всех функций МакКея. Вычисления основаны на пентагональной формуле Эйлера. В статье также рассказано о связи коэффициентов этих функций с суммами Шимуры.

Ключевые слова: модулярные формы; параболические формы; коэффициенты Фурье; квадратичные поля; характеры Гекке; q-ряды; мультипликативные функции; пентагональная формула Эйлера; суммы Шимуры.

1. Функции МакКея

Целью статьи является изучение связей между коэффициентами функций МакКея и гроссен-характерами Гекке мнимых квадратичных полей. Эти функции были впервые описаны в статье [1]. Мы используем факты из теории модулярных форм из монографий [2–4] и статьи [5] и факты теории чисел из книг [6–8]. В таблицах допускается типичное сокращение: вместо функции $\prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z)$ записывается $\prod_{j=1}^s (a_j z)^{t_j}$. Теоремы 1.1.1, 2.2.1 цитируются, все остальные результаты статьи получены автором. В различных задачах полезно знать первые коэффициенты функций МакКея, которые мы полностью приведем в первом параграфе. Далее мы будем использовать утверждения, приведенные в монографии [2].

Теорема 1.1.1.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \text{ и } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n, \quad f(z), g(z) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$$

для любого n ,

$$1 \leq n \leq M, \quad M = \frac{kN}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad a(n) = b(n).$$

Тогда $f(z) = g(z)$.

Для построения таблиц первых коэффициентов мы используем следующие тождества для рядов Фурье мультипликативных эта-произведений веса 1. Эти тождества получаются из пентагональной формулы Эйлера [9]:

$$\begin{aligned}\eta(23z)\eta(z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+23(6l+1)^2}{24}}, & \eta(22z)\eta(2z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+11(6l+1)^2}{12}}, \\ \eta(21z)\eta(3z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+7(6l+1)^2}{8}}, & \eta(20z)\eta(3z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+5(6l+1)^2}{6}}, \\ \eta(18z)\eta(6z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+3(6l+1)^2}{4}}, & \eta(16z)\eta(8z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+2(6l+1)^2}{3}}, \\ \eta^2(12z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+(6l+1)^2}{2}}.\end{aligned}$$

Это позволит найти коэффициенты функций МакКея веса 1, от форм веса 1 можно переходить к формам более высоких весов. В частности, мы используем следующий факт, доказанный автором в статье [10]: если функция $g(z)$ — мультипликативное η -произведение веса $k \geq 2$,

$$g(z) \neq \eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \quad \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),$$

тогда существует такое мультипликативное η -произведение $f(z)$ веса $\frac{k}{2}$, что $g((l+1)z) = f(lz)f(z)$, где $l+1 \mid 24$. Используя это, можно построить таблицы 1.1, 1.2, 1.3.

Таблица 1.1

Table 1.1

$a(n)$	$23 \cdot 1$	$22 \cdot 2$	$21 \cdot 3$	$20 \cdot 4$	$18 \cdot 6$	$16 \cdot 8$	$12 \cdot 12$	6^4	$8^2 \cdot 4^2$	$10^2 \cdot 2^2$	$12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$
$a(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a(2)$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(3)$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1
$a(4)$	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(5)$	0	-1	0	-1	0	0	0	0	-2	-1	-2
$a(6)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(7)$	0	0	-1	0	-1	0	0	-4	0	2	0
$a(8)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(9)$	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-3	1	1
$a(10)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 1.2

Table 1.2

$a(n)$	$15 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$	$14 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1$	$9^2 \cdot 3^2$	$11^2 \cdot 1^2$	$6^3 \cdot 2^3$	4^6	$8^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1^2$	$7^3 \cdot 1^3$	$6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$
$a(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a(2)$	-1	-1	0	-2	0	0	-2	-3	-2
$a(3)$	-1	-2	0	-1	-3	0	-2	0	-3
$a(4)$	-1	1	-2	2	0	0	4	5	4
$a(5)$	1	0	0	1	0	-6	0	0	6
$a(6)$	1	2	0	2	0	0	4	0	6
$a(7)$	0	1	-1	-2	2	0	0	-7	-16
$a(8)$	3	-1	0	0	0	0	-8	-3	-8
$a(9)$	1	1	0	-2	9	9	-5	9	9
$a(10)$	-1	0	0	-2	0	0	0	0	-12

Таблица 1.3

Table 1.3

$a(n)$	$5^4 \cdot 1^4$	3^8	$4^4 \cdot 2^4$	$4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4$	$3^6 \cdot 1^6$	2^{12}	$2^8 \cdot 1^8 \cdot 2 \cdot 1^2$	1^{24}
$a(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$a(2)$	-4	0	0	-4	-6	0	-8	-24
$a(3)$	2	0	-4	0	9	-12	12	252
$a(4)$	8	-8	0	16	4	0	64	-1472
$a(5)$	-5	0	-2	-14	6	54	-210	4830
$a(6)$	-8	0	0	0	-54	0	-96	-6048
$a(7)$	6	20	24	0	-40	-88	1016	-16744
$a(8)$	0	0	0	-64	168	0	-512	84480
$a(9)$	-23	0	-11	81	81	-99	0	-113643
$a(10)$	20	0	0	56	-36	0	1680	-115920

2. Характеры Гекке

В этом параграфе мы изложим необходимые сведения о характерах Гекке.

2.1. Определение характера Гекке

Сначала необходимо дать несколько предварительных определений.

Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля алгебраических чисел, $\mathfrak{M}$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{O}$. Классы вычетов элементов α по модулю $\mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{O}$, $(\alpha, \mathfrak{M}) = 1$, образуют мультипликативную группу $(\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^*$.

Характером Дирихле по модулю $\mathfrak{M}$ называется гомоморфизм $\chi : (\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Унитарным характером $\mathbb{C}^*$ — непрерывный гомоморфизм $\chi_\infty : \mathbb{C}^* \rightarrow S^1$, где $S^1 = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\}$. Такой характер задается формулой: $\chi_\infty(\alpha) = \frac{\alpha^l}{|\alpha|^l}$. Число l — частота характера χ_∞ .

Пусть I — мультипликативная группа ненулевых дробных идеалов, P — подгруппа главных идеалов, $H = I/P$ — группа классов идеалов. Для любого целого идеала $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}$ $I_{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{A} \subset I, (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = 1\} \subset I$, $P_{\mathfrak{M}} = \{(\alpha) \subset P : (\alpha, \mathfrak{M}) = 1\} \subset P$, $I_{\mathfrak{M}}/P_{\mathfrak{M}} \cong I/P \cong H$.

Всякий гомоморфизм из H в S^1 называется характером группы классов. Существует ровно $h = |H|$ характеров группы классов.

Определение.

Характером Гекке ("грессен-характером") по модулю $\mathfrak{M}$ называется непрерывный гомоморфизм $\psi : I_{\mathfrak{M}} \rightarrow S^1$, для которого существуют такие характеры $\chi : (\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^* \rightarrow S^1$, $\chi_\infty : \mathbb{C}^* \rightarrow S^1$, что $\psi((\alpha)) = \chi(\alpha) \cdot \chi_\infty(\alpha)$.

Для любого $\alpha \in \mathfrak{O}$, $(\alpha, \mathfrak{M}) = 1$, $l \equiv \frac{1}{2} \cdot (\chi(-1) - 1) \pmod{2}$. Характеры Гекке по модулю $\mathfrak{M}$ с частотой $l = 0$ — это в точности характеры группы классов.

Кондуктором характера Гекке по модулю $\mathfrak{M}$ считается наименьший из идеалов $\mathfrak{F} : \mathfrak{F}|\mathfrak{M}$, такой, что ψ продолжается до характера Гекке по модулю $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$, то характер Гекке называется примитивным.

2.2. Характеры Гекке и модулярные формы

Пусть ψ — примитивный характер Гекке с кондуктором $\mathfrak{M}$ и частотой l . Положим $\psi(\mathfrak{A}) = 0$ при $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \neq 1$. Получим продолжение до мультипликативной функции на множестве ненулевых целых идеалов.

Теорема 2.2.1. [7]

Пусть грессен-характер ψ по модулю $\mathfrak{M}$ имеет частоту $l \geq 0$, H — верхняя комплексная полуплоскость.

Тогда $f : H \rightarrow \mathbb{C}$, заданная формулой

$$f(z) = \sum_{\mathfrak{A}} \psi(\mathfrak{A}) (N\mathfrak{A})^{\frac{l}{2}} e^{2\pi i z N\mathfrak{A}},$$

принадлежит $M_{l+1}(\Gamma_0(N), \tilde{\chi})$, $N = |D| \cdot N\mathfrak{M}$.

Здесь $\tilde{\chi}(n) = \chi_D(n)\psi(n)$, $\chi_D(n)$ — символ Кронекера. Суммирование ведется по всем целым идеалам $\mathfrak{O}_K$, D — дискриминант поля K .

Если $l \geq 0$, то f — параболическая форма. Если $\mathfrak{M} = (1)$, то $N = |D|$, $\tilde{\chi} = \chi_D$.

3. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(i)$

Если $K = \mathbb{Q}(i)$, то $D = -4$, $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[i]$, имеются четыре единицы ± 1 , $\pm i$, число классов равно 1, все идеалы главные.

3.1. Коэффициенты функции $\eta^2(12z)$

Функция $\eta^2(12z) \in S_1(144, (\frac{-1}{d}))$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{M} = (6)$, $N\mathfrak{M} = 36$. Частота $l = 0$.

Мультипликативная группа фактор-кольца $(\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, так как с точностью до умножения на $\epsilon \in U = \{\pm 1, \pm i\}$ элемент $\alpha \in (\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^*$ имеет один из следующих типов α , эквивалентен $a + bi$, где

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 2 \pmod{6} \\ a \equiv 3 \pmod{6}, & b \equiv 2 \pmod{6} \\ a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 4 \pmod{6} \\ a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$$

В других случаях $(\alpha, \mathfrak{M}) \neq 1$.

Пусть $\beta \equiv 1 + 2i \pmod{6}$, если $\epsilon_1 \cdot \alpha \equiv \beta$, то

$$\begin{cases} \epsilon_2 \cdot \alpha^2 \equiv 3 + 2i \pmod{6}, \\ \epsilon_3 \cdot \alpha^3 \equiv 1 + 4i \pmod{6}, \\ \epsilon_4 \cdot \alpha^4 \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

Здесь $\epsilon_j \in U$.

$\chi_\infty(\alpha) = 1$, так как $l = 0$. Из условия согласования единиц $\forall \epsilon \in U \quad \chi(\epsilon) \cdot \chi_\infty(\epsilon) = 1$ получаем $\chi(\epsilon) = 1$, $\psi(\epsilon) = 1$.

Поэтому искомый характер Гекке определяется на идеале $(\alpha) = (a + bi)$, $(\alpha, 6) = 1$, в зависимости от условий на a и b следующим образом:

$$\psi_1((\alpha)) = \begin{cases} i, & a \equiv 1 \pmod{6}, \quad b \equiv 2 \pmod{6}, \\ -1, & a \equiv 3 \pmod{6}, \quad b \equiv 2 \pmod{6}, \\ -i, & a \equiv 1 \pmod{6}, \quad b \equiv 4 \pmod{6}, \\ 1, & a \equiv 1 \pmod{6}, \quad b \equiv 0 \pmod{6}. \end{cases}$$

$|D| = 4$, $N\mathfrak{M} = 36$, $\psi(n) = 1$, $\chi_D(n) = (\frac{-4}{n})$.

Так как $(d, 2) = 1$, то $\tilde{\chi}(d) = \chi_D(d) = (\frac{-1}{n})$. По теореме Гекке $f(z) \in S_1(\Gamma_0(144), (\frac{-1}{n}))$.

Так как размерность этого пространства равна 1 и первый коэффициент построенной формы равен 1, то $f(z) = \eta^2(12z)$. Получаем формулы для модулярной формы и ее коэффициентов:

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ (\alpha, 6) = 1}} \psi_1((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(12z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ (\alpha, 6) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_1((\alpha)).$$

3.2. Коэффициенты функции $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$

Уровень этой формы равен 32, следует найти модуль характера Гекке с нормой 8, частота $l = 1$.

Для любого нечетного целого гауссова числа β существует единственный элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, ассоциированный с β , такой, что $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$ [7].

В качестве модуля характера возьмем модуль $\mathfrak{M} = (1+i)^3 = (2+2i)$, $N\mathfrak{M} = 8$.

Искомый характер определяется на идеале (α) , где образующий элемент выбран с условием $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$, формулой

$$\psi_2((\alpha)) = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Получаем,

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} (N\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi_2((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} \alpha \cdot e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(8z)\eta^2(4z).$$

Коэффициенты $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$ равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \alpha.$$

3.3. Коэффициенты функции $\eta^6(4z)$

Уровень этой формы равен 16, следует найти модуль характера Гекке с нормой 4, частота $l = 2$.

Для любого нечетного целого гауссова числа β существует элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, ассоциированный с β , такой, что $\alpha \equiv 1 \pmod{(2)}$.

В качестве модуля характера возьмем идеал $\mathfrak{M} = (2)$, $N\mathfrak{M} = 4$.

Искомый характер определяется на идеале (α) , где образующий элемент выбран с условием $\alpha \equiv 1 \pmod{(2)}$, формулой

$$\psi_3((\alpha)) = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}.$$

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} N\alpha \cdot \psi_3((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} \alpha^2 \cdot e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(8z)\eta^2(4z).$$

Коэффициенты $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$ равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \alpha^2.$$

3.4. Коэффициенты функции $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$

Уровень этой формы равен 4, частота $l = 4$.

В качестве модуля характера возьмем модуль $\mathfrak{M} = (1)$, $N\mathfrak{M} = 1$.

Искомый характер определяется формулой

$$\psi_4((\alpha)) = \frac{\alpha^4}{|\alpha|^4}.$$

Получаем

$$\sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], N\alpha = n} (N\alpha)^2 \cdot \psi_4((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], N\alpha = n} \alpha^4 \cdot e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z).$$

Коэффициенты $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$ равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i] \\ N\alpha = n}} \alpha^4.$$

4. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

Если $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $D = -3$, $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$, где $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, имеется шесть единиц $\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$, число классов равно 1, все идеалы главные, $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$.

4.1. Коэффициенты функции $\eta(18z)\eta(6z)$

Уровень этой формы равен 108, частота $l = 0$.

В качестве модуля характера возьмем идеал $\mathfrak{M} = (6)$, $N\mathfrak{M} = 36$.

Искомый характер на простом идеале $(\pi) = (a + bi)$, $((\pi), (6)) = 1$, определяется формулой

$$\psi_5((\alpha)) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2}, \\ \omega, & a \equiv 0 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \\ \omega^2, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

На остальных идеалах характер определяется по мультипликативности.

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ (\alpha, 6) = 1}} \psi_5((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(18z)\eta(6z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ (\alpha, 6) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_5((\alpha)).$$

4.2. Коэффициенты функций $\eta^4(6z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^8(3z), \eta^2(9z)\eta^2(3z)$

Для каждой из этих функций мы найдем модуль $\mathfrak{M}$, при этом если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то порождающий элемент α можно выбрать с условием $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}$.

Искомый характер равен

$$\psi_j((\alpha)) = \frac{\alpha^l}{|\alpha|^l}, \quad j = \overline{6, 9}.$$

Получаем

$$f(z) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}}} \psi_j((\alpha))(N\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}}} \alpha^l e^{2\pi i N((\alpha))}.$$

Коэффициенты модулярной формы равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}} \\ N\alpha = n}} \psi_j((\alpha))(N\alpha)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}} \\ N\alpha = n}} \alpha^l.$$

В таблице 4.1 укажем явно l и $\mathfrak{M}$.

Таблица 4.1
Table 4.1

$f(z)$	l	ψ_j	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$
$\eta^4(6z)$	3	ψ_6	$(2\sqrt{-3}) = (2 + 4\omega)$	12
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	2	ψ_7	(2)	4
$\eta^8(3z)$	3	ψ_8	$(\sqrt{-3}) = (1 + 2\omega)$	3
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	1	ψ_9	(3)	9

5. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

Любой элемент из $\mathfrak{O}_K$ имеет вид $\alpha = a + b\sqrt{-2}$, $|D| = 8$, $N\alpha = a^2 + 2b^2$. В $\mathfrak{O}_K$ имеется две единицы ± 1 .

5.1. Коэффициенты функции $\eta(16z)\eta(8z)$

Уровень этой формы равен 128, норма искомого идеала 16.

Возьмем модуль $\mathfrak{M} = (4)$.

Если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то $\alpha \sim a + b\sqrt{-2}$, где a и b удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 0 \pmod{4}, \\ a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 1 \pmod{4}, \\ a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 2 \pmod{4}, \\ a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Искомый характер равен

$$\psi_{10}((\alpha)) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 0 \pmod{4}, \\ i, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 2 \pmod{4}, \\ -i, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ (\alpha, 4) = 1.}} \psi_{10}((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(16z)\eta(8z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ (\alpha, 4) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_{10}((\alpha)).$$

5.2. Коэффициенты функции $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$

Уровень этой формы равен 8, $l = 2$. Искомый модуль равен $\mathfrak{M} = (1)$.

Искомый характер определяется формулой

$$\psi_{11}((\alpha)) = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}.$$

Получаем

$$\sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]} \psi_{11}((\alpha)) N((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]} \alpha^2 e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z).$$

Коэффициенты модулярной формы равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ N\alpha = n}} \psi_{11}((\alpha)) N\alpha = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ N\alpha = n}} \alpha^2.$$

6. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры полей $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}), \mathbb{Q}(\sqrt{-7}), \mathbb{Q}(\sqrt{-11}), \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$

6.1. Коэффициенты функций $\eta(21z)\eta(3z), \eta^3(7z)\eta^3(z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$

Все идеалы кольца $\mathfrak{O}_K$ — главные, $\mathfrak{O}_K = \langle 1, \gamma \rangle$, где $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$.

Если $\alpha \in \mathfrak{O}_K$, то $\alpha = a + b\gamma, a, b \in \mathbb{Z}, N\alpha = a^2 - ab + 2b^2, |D| = 7$.

Найдем соответствие Гекке для модулярной формы $\eta(21z)\eta(3z)$.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M} = (3)$.

Уровень этой формы равен 63, частота $l = 0$.

Если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то $\alpha \sim a + b\gamma$, где a и b удовлетворяют одному из следующих четырех типов, характер определяется в зависимости от типа:

$$\psi_{12}((\alpha)) = \begin{cases} i, & a \equiv 1(\text{mod } 3), \quad b \equiv 1(\text{mod } 3), \\ -1, & a \equiv 0(\text{mod } 3), \quad b \equiv 1(\text{mod } 3), \\ -i, & a \equiv 1(\text{mod } 3), \quad b \equiv 2(\text{mod } 3), \\ 1, & a \equiv 1(\text{mod } 3), \quad b \equiv 0(\text{mod } 3). \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 3) = 1.}} \psi_{12}((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(21z)\eta(3z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 3) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_{12}((\alpha)).$$

Найдем соответствие Гекке для модулярной формы $\eta^3(7z)\eta^3(z)$.

Уровень этой формы равен 7, частота $l = 2$.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M} = (1)$.

Искомый характер определяется формулой

$$\psi_{13}((\alpha)) = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}.$$

Получаем

$$\sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma]} \psi_{13}((\alpha)) N((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma]} \alpha^2 e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^3(7z) \eta^3(z).$$

Коэффициенты модулярной формы равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ N\alpha = n}} \psi_{13}((\alpha)) N\alpha = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ N\alpha = n}} \alpha^2.$$

6.2. Коэффициенты функции $\eta(20z)\eta(4z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$

$N = 80, |D| = 5, h_K = 2, l = 0$.

Искомый идеал имеет норму 4. Возьмем идеал $\mathfrak{M} = (2)$.

Искомый характер ψ_{14} на главных идеалах $(\alpha), (\alpha, 2) = 1$, определяется по формуле

$$\psi_{14}((\alpha)) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2}, \\ -1, & a \equiv 0 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, не являющийся главным, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{M}) = 1$.

Тогда $\psi_{14}(\mathfrak{p}) = i, \psi_{14}(\bar{\mathfrak{p}}) = -i$, если $\mathfrak{p}^2 = (a + b\sqrt{-5}), a \equiv 0 \pmod{2}$.

Если $\mathfrak{p}^2 = (a + b\sqrt{-5}), a \equiv 1 \pmod{2}$, то $\psi_{14}(\mathfrak{p}) = -1$.

Получаем

$$\sum_{\substack{(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \\ (\mathfrak{A}, (2)) = 1}} \psi_{14}(\mathfrak{A}) e^{2\pi i N(\mathfrak{A})} = \eta(20z) \eta(4z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \\ (\mathfrak{A}, (2)) = 1, N\mathfrak{A} = n}} \psi_{14}(\mathfrak{A}).$$

6.3. Коэффициенты функций $\eta(22z)\eta(2z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$

Все идеалы кольца $\mathfrak{O}_K$ — главные, $\mathfrak{O}_K = \langle 1, \gamma \rangle$, где $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}$.

Если $\alpha \in \mathfrak{O}_K$, то $\alpha = a + b\gamma, a, b \in \mathbb{Z}, N\alpha = a^2 - ab + 3b^2, |D| = 11$.

Уровень этой формы равен 44, частота $l = 0$.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M} = (2)$.

Уровень этой формы равен 63, частота $l = 0$.

Если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то $\alpha \sim a + b\gamma$, где a и b удовлетворяют одному из следующих типов:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2}, & b \equiv 1 \pmod{2}, \\ a \equiv 0 \pmod{3}, & b \equiv 1 \pmod{2}, \\ a \equiv 1 \pmod{2}, & b \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Искомый характер равен

$$\psi_{15}((\alpha)) = \begin{cases} \zeta_3, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \\ \zeta_3^2, & a \equiv 0 \pmod{3}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 2) = 1.}} \psi_{15}((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(22z)\eta(2z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 2) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_{15}((\alpha)).$$

6.4. Коэффициенты функций $\eta(23z)\eta(z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$

Уровень формы равен 23, частота $l = 0$.

$$h_K = 3. \mathfrak{O}_K = \langle 1, \gamma \rangle, \text{ где } \gamma = \frac{-1 + \sqrt{-23}}{2}.$$

Пусть C_1 — класс главных идеалов, C_2, C_3 — другие классы идеалов.

Если идеал $\mathfrak{A} \in C_2$, то $\bar{\mathfrak{A}} \in C_3$.

Модуль характера $\mathfrak{M} = (1)$.

Искомый характер равен

$$\psi_{16}(\mathfrak{A}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{A} \in C_1, \\ \zeta_3, & \mathfrak{A} \in C_2, \\ \zeta_3^2, & \mathfrak{A} \in C_3. \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_{(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Z}[\gamma],} \psi_{16}((\mathfrak{A})) e^{2\pi i N((\mathfrak{A}))} = \eta(23z)\eta(z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ N\alpha = n}} \psi_{16}((\mathfrak{A})).$$

7. Коэффициенты мультипликативных эта-произведений и суммы по характерам Гекке

Для оставшихся двенадцати мультипликативных эта-произведений интерпретация прямо по теореме Гекке невозможна, так как должно выполняться условие $a(p) = 0$, если p инертно в $\mathfrak{O}_K$. Но для полей K , которые можно подобрать по уровню формы, это условие нарушается. Для коэффициентов всех остальных функций МакКея, кроме $\eta^{24}(z)$, можно найти формулы, содержащие суммы от характеров Гекке.

Теорема 7.1.1.

Пусть $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i z n}$ — одна из функций МакКея, указанных в таблице 7.1.

Тогда

$$a(n) = \sum_{\substack{j_1 + j_2(m-1) = nm, \\ j_1 \geq 1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{N\mathfrak{A} = j_1, \\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = 1}} \psi_j(\mathfrak{A})(N(\mathfrak{A}))^{\frac{l}{2}} \cdot \sum_{\substack{N\mathfrak{B} = j_2, \\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = 1}} \psi_j(\mathfrak{B})(N(\mathfrak{B}))^{\frac{l}{2}},$$

где характер Гекке описан в параграфах выше и ассоциирован (по соответствию Гекке) с коэффициентами параболической формы $f(z)$. В таблице 7.1 указаны идеалы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ в кольце целых поля K и параметры m и l .

Доказательство.

Эта формула следует из равенства $g(mz) = f((m-1)z)f(z)$ и найденных выше выражений коэффициентов $f(z)$ через характеры Гекке.

Замечание 1.

Так как одну и ту же параболическую форму можно выразить разными способами, то можно на основании теоремы 7.1.1 получить несколько равенств, содержащих суммы с характерами Гекке. Например, верна следующая формула.

Таблица 7.1

Table 7.1

$g(z)$	$f(z)$	K	$\mathfrak{M}$	m	l	ψ_j
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(6)	6	0	ψ_5
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	$\eta(20z)\eta(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	(2)	4	0	ψ_{14}
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	(4)	8	0	ψ_{10}
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	$\eta(21z)\eta(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	(3)	3	0	ψ_{12}
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	(4)	4	0	ψ_{10}
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(6)	3	0	ψ_5
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	$\eta(22z)\eta(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	(2)	2	0	ψ_{15}
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	$\eta^2(12z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(6)	12	0	ψ_{11}
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$\eta(20z)\eta(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	(2)	2	0	ψ_{14}
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$\eta^2(12z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(6)	6	0	ψ_1
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(3)	3	1	ψ_9
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$(1+i)^3$	4	1	ψ_2
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	$\eta^4(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$(2\sqrt{-3})$	6	1	ψ_6
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$(1+i)^3$	2	1	ψ_2
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$\eta^4(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$(2\sqrt{-3})$	3	1	ψ_6
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^6(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(2)	4	2	ψ_3
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(2)	2	2	ψ_7
$\eta^{12}(2z)$	$\eta^6(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(2)	2	2	ψ_3
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	$\eta^8(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$(\sqrt{-3})$	3	3	ψ_8

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{i_1 + 5i_2 = 6n, \\ i_1 \geq 1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{N\mathfrak{A}_1 = i_1, \\ (\mathfrak{A}_1, (6)) = 1}} \psi_5(\mathfrak{A}_1) \sum_{\substack{N\mathfrak{B}_1 = i_2, \\ (\mathfrak{B}_1, (6)) = 1}} \psi_5(\mathfrak{B}_1) = \\
 & = \sum_{\substack{j_1 + 3j_2 = 4n, \\ j_1 \geq 1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{N\mathfrak{A}_2 = j_1, \\ (\mathfrak{A}_2, (2)) = 1}} \psi_{14}(\mathfrak{A}_2) \sum_{\substack{N\mathfrak{B}_2 = j_2, \\ (\mathfrak{B}_2, (2)) = 1}} \psi_{14}(\mathfrak{B}_2).
 \end{aligned}$$

В первой тройной сумме рассматриваются идеалы в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, а во второй — в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Эта формула следует из того, что $g(6z) = f_1(5z)$, $g(4z) = f_2(3z)$, где $g(z) = \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$, $f_1(z) = \eta(18z)\eta(6z)$, $f_2(z) = \eta(20z)\eta(4z)$.

Замечание 2.

Используя соотношения между первыми 16 формами, можно получить соотношения между характеристиками Гекке.

Например, пусть $g(z) = \eta^2(8z)\eta^2(4z)$, $f(z) = \eta^2(12z)$.

Из равенства $g(3z) = f(2z)f(z)$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \sqrt{n} \psi_2((\alpha)) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \alpha = \\ & = \sum_{j_1 + j_2 = 3n} \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ ((\alpha), (6)) = 1, \\ N\alpha = j_1}} \psi_1((\alpha)) \sum_{\substack{(\beta) \in \mathbb{Z}[i], \\ ((\beta), (6)) = 1, \\ N\beta = j_2}} \psi_1((\beta)). \end{aligned}$$

8. Мультипликативные эта-произведения и суммы Шимуры

В статье автора [10] находятся арифметические формулы, включающие суммы Шимуры от коэффициентов этих форм.

Определение. Пусть $a(n)$ — арифметическая функция, c — натуральное число.

$\forall m \geq 1$ Сумма Шимуры $Sh(m, a, c)$ определяется формулой

$$Sh(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right).$$

Теорема 8.1.1.

Пусть p — нечетное простое число,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \\ f_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \end{aligned}$$

— мультипликативные η -произведения, указанные в таблице 8.1, тогда имеют место следующие соотношения для сумм Шимуры для $a(n)$ и $b(n)$.

В этой же статье получены теоремы, связывающие суммы Шимуры с арифметикой квадратичных полей. Например, там приведена следующая теорема.

Теорема 8.1.2.

Пусть

$$f(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(128, \chi).$$

1) Если p расщепляется в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ и в $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, то

$$p = 4Sh^2(p, a, 1) - 2Sh(p^2, a, 1) + 14Sh(p, a, 1) - 5.$$

2) Если p инертно в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, то

$$p = -2Sh(p^2, a, 1) - 1.$$

3) Если p расщепляется в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ и инертно в $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, то

$$p = 4Sh^2(p, a, 1) - 2Sh(p^2, a, 1) + 2Sh(p, a, 1) - 1.$$

В статье автора [11] получены теоремы, связывающие коэффициенты мультипликативных эта-произведений $\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$ с арифметикой целых кватернионов Гурвица и порядком в алгебре Кэли, имеющим структуру решетки E_8 .

Таблица 8.1

Table 8.1

$f_1(z)$	$f_2(z)$	Соотношение
$\eta(21z)\eta(3z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$Sh(3p, a, 8) + (\frac{-7}{p}) = Sh(4p, b, 7) + (\frac{-2}{p})$
$\eta(18z)\eta(6z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$Sh(3p, a, 8) + (\frac{-3}{p}) = Sh(2p, b, 3) + (\frac{-2}{p})$
$\eta(20z)\eta(4z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$Sh(2p, a, 3) + (\frac{-5}{p}) = Sh(3p, b, 5) + (\frac{-3}{p})$
$\eta^2(12z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$Sh(2p, a, 3) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^2(12z)$	$\eta(22z)\eta(2z)$	$Sh(6p, a, 11) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^2(12z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$Sh(3p, a, 8) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^2(12z)$	$\eta(20z)\eta(4z)$	$Sh(3p, a, 5) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^4(6z)$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$Sh(3p, a, 5) + p = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^4(6z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$Sh(3p, a, 8) + p = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^6(4z)$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	$Sh(2p, a, 3) + (\frac{-1}{p})p^2 = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^8(3z)$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$Sh(3p, a, 8) + p^7 = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$

Выводы

Таким образом, в статье показывается, что коэффициенты мультипликативных эта-произведений имеют интересную арифметическую интерпретацию. Их природа связана с арифметикой мнимых квадратичных полей и арифметикой гиперкомплексных систем.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

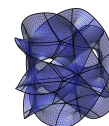
Цитирование. Воскресенская Г.В. Об арифметической природе коэффициентов мультипликативных эта-произведений // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 7–21. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-7-21.

© Воскресенская Г.В., 2025

Галина Валентиновна Воскресенская (galvosk@mail.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η - functions // Contemporary Mathematics. 1985. Vol. 45. P. 89–98.
- [2] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence: American Mathematical Society, 2004. 216 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/CBMS%2F102>.
- [3] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. Москва: Мир, 1988. 320 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Koblitz.htm>.
- [4] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. Москва: Факториал Пресс, 2004. 488 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Кнэпп.djv>.



- [5] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 136. С. 103–137. URL: <http://mi.mathnet.ru/into201>.
- [6] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. Москва: Мир, 1987. 415 с. URL: <https://djvu.online/file/gtiErm2FnInHw>.
- [7] Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. Москва: МЦНМО, 2014, 712 с. URL: http://i.uran.ru/WEBIRBIS/CGI/irbis64r_11/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=2&I21DBN=KNIGA&P21DBN=KNIGA&Z21ID=GUEST&Image_file_name=KART%2F221881.pdf.
- [8] Боревиц З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. Москва: Наука, 1972. 498 с. URL: [https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/\[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich\]_Teoriya_chisel\(libcats.org\).pdf](https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich]_Teoriya_chisel(libcats.org).pdf).
- [9] Эндрюс Г. Теория разбиений. Москва: Наука, 1982. 255 с. URL: <https://ega-math.narod.ru/Books/Andrews.htm>.
- [10] Воскресенская Г.В. Арифметические свойства сумм Шимур для некоторых модулярных форм // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 7–22. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20285252>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rbxlrz>.
- [11] Воскресенская Г.В. Гиперкомплексные числа, системы корней и модулярные формы // Арифметика и геометрия многообразий: межвузовский сборник научных трудов. Самара: Самарский университет. 1992. С. 48–59.

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-7-21

On the arithmetic nature of coefficients of multiplicative eta-functions

Voskresenskaya G. V. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; galvosk@mail.ru; ORCID: 0000-0002-6288-5372 (G. V.);

Received: 11.12.2024

Revised: 20.01.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. In the article we study the arithmetic nature of the coefficients of multiplicative eta-products, also called McKay functions. For some functions it is possible to establish Hecke correspondence between the coefficients of McKay and Hecke grossen-characters of imaginary quadratic fields. For other McKay functions such a correspondence is impossible but their coefficients can be represented as sums containing Hecke characters. The emerging Hecke characters are written out explicitly. In the article we write the first ten coefficients for all McKay functions. Calculations are based on Euler's pentagonal formula. The article also talks about the connection between the coefficients of these functions and Shimura sums.

Key words: modular forms; cusp forms; Fourier coefficients; quadratic fields; Hecke characters; q-series; multiplicative functions; Euler's pentagonal formula; Shimura sums.

Information about the conflict of interests: author and reviewers declared no conflicts of interest.

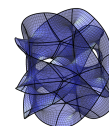
Citation. Voskresenskaya G.V. On the arithmetic nature of coefficients of multiplicative eta-functions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 7–21. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-7-21. (In Russ.)

© Voskresenskaya G.V., 2025

Galina V. Voskresenskaya (galvosk@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η – functions. *Contemporary Mathematics*, 1985, vol. 45, pp. 89–98.
- [2] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence: American Mathematical Society, 2004, 216 p. DOI: <http://doi.org/10.1090/CBMS%2F102>.
- [3] Koblitz N. Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms. Moscow: Mir, 1988, 320 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Koblitz.htm>. (In Russ.)
- [4] Knapp A. Elliptic Curves. Moscow: Faktorial Press, 2004, 488 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Knapp.djv>. (In Russ.)
- [5] Voskresenskaya G.V. Dedekind η -Function in Modern Research. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 235, pp. 788–822. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5>
- [6] Ireland K., Rosen M. A Classical Introduction to Modern Number Theory. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 415 p. Available at: <https://djvu.online/file/gtiErm2FnInHw>. (In Russ.)
- [7] Iwaniec H., Kowalski E. Analytic Number Theory. Moscow: MTsNMO, 2004, 712 p. Available at: http://i.uran.ru/WEBIRBIS/CGI/irbis64r_11/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=2&I21DBN=KNIGA&P21DBN=KNIGA&Z21ID=GUEST&Image_file_name=KART%2F221881.pdf. (In Russ.)
- [8] Borevich Z.I., Shavarevich I.R. Number theory. Moscow: Nauka, 1972, 498 p. Available at: [https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/\[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich\]_Teoriya_chisel\(libcats.org\).pdf](https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich]_Teoriya_chisel(libcats.org).pdf). (In Russ.)
- [9] Andrews G.E. The Theory of Partitions. Moscow: Nauka, 1982, 225 p. Available at: <https://ega-math.narod.ru/Books/Andrews.htm>. (In Russ.)
- [10] Voskresenskaya G.V. Arithmetic properties of Shimura sums related to several modular forms. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 182, issue 4, pp. 444–455. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0748-9>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pdnbnj>. (In English; original in Russian.)
- [11] Voskresenskaya G.V. Hypercomplex numbers, root systems and modular forms. In: *Arithmetic and geometry of varieties: interuniversity collection of scientific papers*. Samara: Samarskii universitet, 1992, pp. 48–59. (In Russ.)



Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения

Пулькина Л.С. , Смирнова А.Н. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; louise@samdiff.ru; ORCID: 0000-0001-7947-6121 (Л.С.); Na5anya@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-2925-1646 (А.Н.);

Поступила: 17.02.2025

Рассмотрена: 25.03.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. В статье рассматривается нелокальная задача для гиперболического уравнения в характеристической области. В качестве дополнительных условий заданы значения интегралов от искомого решения, что делает невозможным применение классических методов доказательства разрешимости задачи. Предложенный в статье подход позволяет найти условия, выполнение которых гарантирует существование не более одного решения задачи, а в частном случае — получить явный вид решения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение; задача Гурса; нелокальные условия.

Введение

Задачи с нелокальными условиями, одной из которых посвящена статья, активно изучаются в настоящее время. Причин интереса к таким задачам по крайней мере две: исследование разрешимости нелокальных задач требует разработки новых методов, к тому же, как стало ясно в последнее время, математические модели, основанные на нелокальных задачах для дифференциальных уравнений, точнее описывают некоторые процессы и явления, изучаемые современным естествознанием [1; 2]. Одним из удобных способов задания нелокальных условий является представление их в виде интегралов от искомого решения. Именно такие условия заданы в задаче, рассматриваемой в статье. Так как область, в которой ищется решение, представляет собой характеристический прямоугольник, то такую задачу принято называть интегральным аналогом задачи Гурса.

Отметим некоторые статьи, посвященные близким вопросам [3–11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $\Omega = (0, \alpha) \times (0, \beta)$ уравнение

$$u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu = f(x, y) \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\int_0^\beta u(x, y) dy = \varphi(x), \quad \int_0^\alpha u(x, y) dx = \psi(y). \quad (2)$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения, его правая часть, а также функции $\varphi(x), \psi(x)$ достаточно гладкие.

Исследование разрешимости задачи (1)–(2) начнем с вывода условий на данные, обеспечивающие существование не более одного решения.

2. Единственность решения задачи (1)–(2)

Теорема 1. Если $A_y, B_x, C_{xy} \in C(\overline{\Omega})$, $C_{xy} \geq 0$ и для любого вектора (p_1, p_2) выполняется неравенство $A_y p_1^2 - 2C p_1 p_2 + B_x p_2^2 \geq 0$, то существует не более одного решения задачи (1)–(2). Эта теорема доказана в [4], но для дальнейшего нам удобно привести вкратце ее доказательство.

Доказательство.

Пусть $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — два различных решения. Тогда u удовлетворяет уравнению (1) с $f = 0$ и

$$\int_0^\beta u(x, y) dy = 0, \quad \int_0^\alpha u(x, y) dx = 0. \quad (2^\circ)$$

Умножим равенство (1) на $\int_0^y \int_0^x u(\xi, \eta) d\xi d\eta$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\int_0^\beta \int_0^\alpha \left(u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu \right) \int_0^y \int_0^x u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy = 0.$$

Интегрируя по частям, получим, учитывая (2°):

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta \int_0^\alpha \left[u^2 + \frac{1}{2} A_y \left(\int_0^y u d\eta \right)^2 + \frac{1}{2} B_x \left(\int_0^x u d\xi \right)^2 - \right. \\ & \left. - C \int_0^y u d\eta \int_0^x u d\xi + \frac{1}{2} C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 \right] dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда и следует, что $u = 0$, тем самым утверждение доказано. Заметим, что условие единственности решения уравнения (1) в случае, если $A_y = 0, B_x = 0$, приводит к требованию $C = 0$. Действительно, если нет дополнительных условий, например ограничений на размер или конфигурацию области Ω , то нет и гарантии единственности решения для произвольной $C(x, y)$, что показывает пример в статье [4]. Найдем условия, при выполнении которых и в этом случае задача имеет не более одного решения.

Теорема 2. Если $\max_{\overline{\Omega}} C(x, y) < \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}$, то существует не более одного решения задачи (1)–(2).

Доказательство.

Рассмотрим теперь (3) в том случае, когда $A_y = B_x = 0$.

$$\int_0^\beta \int_0^\alpha \left[u^2 - C(x, y) \int_0^y u d\eta \int_0^x u d\xi + \frac{1}{2} C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 \right] dx dy = 0. \quad (4)$$

Из (4) при условии $C_{xy} \geq 0$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\beta \int_0^\alpha \left[u^2 + \frac{1}{2} C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 \right] dx dy \leq \\ & \leq \int_0^\beta \int_0^\alpha |C(x, y)| \left| \int_0^y u d\eta \right| \left| \int_0^x u d\xi \right| dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dx dy &\leq \int_0^\beta \int_0^\alpha \frac{1}{2} |C_{xy}| \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 dx dy + \\ &+ \int_0^\beta \int_0^\alpha |C(x, y)| \left| \int_0^y u d\eta \right| \left| \int_0^x u d\xi \right| dx dy, \end{aligned} \quad (6)$$

если условие $C_{xy} \geq 0$ не выполнено. Займемся сначала неравенством (5).

В силу условия теоремы 1 найдется число $C_0 > 0$ такое, что $\max_{\bar{\Omega}} |C(x, y)| \leq C_0$. Применим неравенство Коши:

$$\left| \int_0^y u d\eta \right| \left| \int_0^x u d\xi \right| \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^y u d\eta \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^x u d\xi \right)^2,$$

а затем неравенство Коши — Буняковского к каждому слагаемому правой части. Получим

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^y u d\eta \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^x u d\xi \right)^2 \leq \frac{\beta}{2} \int_0^\beta u^2 d\eta + \frac{\alpha}{2} \int_0^\alpha u^2 d\xi.$$

Тогда (5) принимает вид:

$$\int_0^\beta \int_0^\alpha \left[u^2 + \frac{1}{2} C_{xy} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 \right] dx dy \leq \int_0^\beta \int_0^\alpha \frac{C_0}{2} (\alpha^2 + \beta^2) u^2 d\xi d\eta,$$

и, следовательно, если

$$\gamma = 1 - \frac{C_0}{2} (\alpha^2 + \beta^2) > 0,$$

то $u = 0$ и единственность установлена.

Таким образом, если $A_y = B_x = 0$ и $C_{xy} \geq 0$, то не может существовать более одного решения, если

$$C_0 < \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Если неравенство $C_{xy} \geq 0$ не гарантировано, то рассмотрим неравенство (6).

Последнее слагаемое правой части мы оценили выше. Рассмотрим первое слагаемое. Если $C_{xy} \in C(\bar{\Omega})$, то найдется число $C_1 > 0$, такое, что $\max_{\bar{\Omega}} |C_{xy}| \leq C_1$. К интегралу

$$\left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2$$

применим неравенство Коши — Буняковского несколько раз:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 &\leq \int_0^y d\eta \int_0^y \left(\int_0^x u d\xi \right)^2 d\eta \leq \\ &\leq \int_0^y d\eta \int_0^y x \int_0^x u^2 d\xi d\eta \leq \alpha \beta \int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dx dy. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha |C_{xy}| \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 dx dy \leq C_1 \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dx dy.$$

Учитывая второе слагаемое в (6) и его оценку, получим

$$\int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dx dy \leq \left[\frac{1}{2} C_0 (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} C_1 \right] \int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dx dy.$$

Поэтому в этом случае единственность решения будет гарантирована, если выполнено неравенство

$$1 - \frac{1}{2} C_0 (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} C_1 > 0.$$

3. Существование решения задачи (1)–(2)

Существование решения задачи Гурса с интегральными условиями для уравнения (1) в весьма общем случае доказано в [4]. Здесь же мы рассмотрим частный случай (1) и получим формулу решения.

Рассмотрим в качестве частного случая уравнение

$$u_{xy}(x, y) + A(y)u_x + B(x)u_y + A(y)B(x)u = F(x, y), \quad (7)$$

а интегральные условия останутся прежними.

Пользуясь видом коэффициентов, запишем (7) так:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_y + A(y)u) + B(x)(u_y + A(y)u) = F(x, y).$$

Введем функцию

$$u_y + A(y)u = V(x, y).$$

Тогда имеем два уравнения:

$$V_x + B(x)V = F(x, y),$$

$$u_y + A(y)u = V(x, y).$$

Рассматривая каждое из них как обыкновенное дифференциальное уравнение, получим решения:

$$V(x, y) = \left(C_1(y) + \int_0^x F(\xi, y) e^{\int_0^\xi B(\xi') d\xi'} d\xi \right) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi}, \quad (8)$$

$$u(x, y) = \left(C_2(x) + \int_0^y V(x, \eta) e^{\int_0^\eta A(\eta') d\eta'} d\eta \right) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta}, \quad (9)$$

где $C_1(y), C_2(x)$ — произвольные функции. Преобразуем (9) с учетом (8). Приведем некоторые вычисления:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(C_2(x) + \int_0^y \left[C_1(\eta) + \int_0^x F(\xi, \eta) e^{\int_0^\xi B(\xi') d\xi'} d\xi \right] e^{\int_0^\eta A(\eta') d\eta'} e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} d\eta \right) \times \\ &\times e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} = C_2(x) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} + e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta - \int_0^x B(\xi) d\xi} \int_0^y C_1(\eta) e^{\int_0^\eta A(\eta') d\eta'} d\eta + \\ &+ e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta - \int_0^x B(\xi) d\xi} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) e^{\int_0^\xi B(\xi') d\xi' + \int_0^\eta A(\eta') d\eta'} d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$= e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi - \int_0^y A(\eta)d\eta} \left(C_2(x) e^{\int_0^x B(\xi)d\xi} + \int_0^y C_1(\eta) e^{\int_0^\eta A(\eta')d\eta'} d\eta \right) + \\ + e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta - \int_0^x B(\xi)d\xi} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) e^{\int_0^\xi B(\xi')d\xi' + \int_0^\eta A(\eta')d\eta'} d\xi d\eta.$$

Обозначим

$$C_2(x) e^{\int_0^x B(\xi)d\xi} = f(x), \\ \int_0^y C_1(\eta) e^{\int_0^\eta A(\eta')d\eta'} d\eta = g(y).$$

Тогда

$$u(x, y) = \left(f(x) + g(y) \right) e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi - \int_0^y A(\eta)d\eta} + \\ + e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta - \int_0^x B(\xi)d\xi} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) e^{\int_0^\xi B(\xi')d\xi' + \int_0^\eta A(\eta')d\eta'} d\xi d\eta. \quad (10)$$

Второе слагаемое правой части (10) известно. Обозначим его $R(x, y)$. Формула приобретает вид

$$u(x, y) = \left(f(x) + g(y) \right) e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi - \int_0^y A(\eta)d\eta} + R(x, y). \quad (11)$$

Найдем $f(x)$ и $g(y)$ из условий (2), применив их к (11):

$$e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi} dx + e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta} g(y) \int_0^\alpha e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi} dx + \\ + \int_0^\alpha R(x, y) dx = \psi(y), \\ e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi} f(x) \int_0^\beta e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta} dy + e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi} \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta} dy + \\ + \int_0^\beta R(x, y) dy = \phi(x),$$

откуда, обозначив

$$a = \int_0^\alpha e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi} dx, \quad b = \int_0^\beta e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta} dy,$$

$$S_\alpha(y) = \left(\psi(y) - \int_0^\alpha R(x, y) dx \right) e^{\int_0^y A(\eta)d\eta},$$

$$S_\beta(x) = \left(\phi(x) - \int_0^\beta R(x, y) dy \right) e^{\int_0^x B(\xi)d\xi},$$

получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{b} S_\beta(x) - \frac{1}{b} \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy, \\ g(y) &= \frac{1}{a} S_\alpha(y) - \frac{1}{a} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидный путь нахождения $f(x)$ и $g(y)$ — сведение (12) к интегральному уравнению относительно одной из функций. Но мы пойдем другим путем, заметив, что после подстановки (12) в (11) получим соотношение

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left[\frac{1}{b} S_\beta(x) + \frac{1}{a} S_\alpha(y) - \frac{1}{b} \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx \right] e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi - \int_0^y A(\eta) d\eta} + R(x, y), \end{aligned} \quad (13)$$

где присутствуют интегралы, содержащие произвольные функции $f(x)$ и $g(y)$. Определим сумму этих интегралов из (12). Умножим первое равенство (12) на $e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi}$, второе на $e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta}$ и проинтегрируем, соответственно, по $x \in [0, \alpha]$ и $y \in [0, \beta]$:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx &= \frac{1}{b} \int_0^\alpha e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} S_\beta(x) dx - \frac{1}{b} \int_0^\alpha e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy, \\ \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy &= \frac{1}{a} \int_0^\beta e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} S_\alpha(y) dy - \frac{1}{a} \int_0^\beta e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx. \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения и умножив, соответственно, на $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx &= \frac{1}{ab} \int_0^\alpha e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} S_\beta(x) dx - \frac{1}{b} \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy, \\ \frac{1}{b} \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy &= \frac{1}{ab} \int_0^\beta e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} S_\alpha(y) dy - \frac{1}{a} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^\alpha f(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx + \frac{1}{b} \int_0^\beta g(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy &= \\ &= \frac{1}{2ab} \int_0^\beta e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} S_\alpha(y) dy + \frac{1}{2ab} \int_0^\alpha e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} S_\beta(x) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь, подставив (14) в (13), получим решение задачи:

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{b} S_\beta(x) - \frac{1}{2ab} \int_0^\beta S_\alpha(y) e^{-\int_0^y A(\eta) d\eta} dy + \frac{1}{a} S_\alpha(y) - \right.$$

$$-\frac{1}{2ab} \int_0^{\alpha} S_{\beta}(x) e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi} dx \times e^{-\int_0^x B(\xi) d\xi - \int_0^y A(\eta) d\eta} + R(x, y).$$

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть $A = B = 0$, в этом случае задача (1)–(2) имеет не более одного решения, если

$$\frac{C_0}{2}(1 + \alpha^2 \beta^2) < 1, \quad C_0 = \max_{\Omega} |C(x, y)|.$$

Действительно, предполагая существование двух различных решений u_1, u_2 для их разности получим

$$u_{xy} + C(x, y)u = 0, \quad (15)$$

$$\int_0^{\beta} u(x, y) dy = 0, \quad \int_0^{\alpha} u(x, y) dx = 0.$$

Умножение равенства (15) на $\int_0^y \int_0^x u(\xi, \eta) d\xi d\eta$ и интегрирование по области Ω приводит к

$$\int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} \left[u^2 + Cu \int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right] dx dy = 0,$$

из которого следует неравенство

$$\int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} u^2 dx dy \leq \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} |C||u| \left| \int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right|.$$

Рассмотрим правую часть этого неравенства и оценим его:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} |C||u| \left| \int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right| \leq \\ & \leq \frac{C_0}{2} \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} u^2 dx dy + \frac{C_0}{2} \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 dx dy. \end{aligned}$$

Применив неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} \left(\int_0^y \int_0^x u d\xi d\eta \right)^2 dx dy \leq \alpha^2 \beta^2 \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} u^2 dx dy.$$

Следовательно, если

$$\frac{C_0}{2}(1 + \alpha^2 \beta^2) < 1,$$

то $u = 0$.

Пусть это условие выполнено. Покажем, что решение задачи (1)–(2) в этом случае существует. Уравнение (1) запишем в этом частном случае:

$$u_{xy} = F(x, y) - C(x, y)u.$$

Тогда, если существует его решение, то имеет место соотношение

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Применим условия (2) для определения $f(x)$ и $g(y)$:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx + \alpha g(y) + \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dx - \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx = \psi(y),$$

$$\beta f(x) + \int_0^{\beta} g(y)dy + \int_0^{\beta} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dy - \int_0^{\beta} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dy = \phi(x).$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \left[\phi(x) - \int_0^{\beta} g(y)dy - \int_0^{\beta} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dy + \int_0^{\beta} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dy \right],$$

$$g(y) = \frac{1}{\alpha} \left[\psi(y) - \int_0^{\alpha} f(x)dx - \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dx + \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx \right].$$

Проведя некоторые преобразования, получим

$$u(x, y) = -\frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dy +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + G(x, y), \quad (16)$$

где

$$G(x, y) = \frac{1}{\beta} \phi(x) - \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\beta} \psi(y) dy + \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dx dy -$$

$$- \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dy + \frac{1}{\alpha} \psi(y) - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dx + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Преобразуем первые три интеграла из (16)

$$\int_0^{\alpha} \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta dx = \int_0^y \int_0^{\alpha} \int_{\xi}^{\alpha} C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) dx d\xi d\eta = \int_0^y \int_0^{\alpha} (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Аналогично поступим с двумя другими интегралами и получим

$$u(x, y) = -\frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} (\beta - \eta)(\alpha - \xi) C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{\alpha} \int_0^y \int_0^{\alpha} (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\beta} \int_0^x \int_0^{\beta} (\beta - \eta) C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + G(x, y). \quad (17)$$

Таким образом, мы показали, что если $u(x, y)$ — решение задачи (1)–(2) в случае $A = B = 0$, то она удовлетворяет и уравнению (17). Пусть теперь $u(x, y)$ — решение уравнения (17) и имеет производные, входящие в уравнение (1). Тогда, дифференцируя равенство (17)

и учитывая введенные обозначения, приходим к (1)–(2). Тем самым мы показали, что задача (1)–(2) для случая $A = B = 0$ и операторное уравнение (17) эквивалентны.

Запишем (17) в виде

$$u - Tu = G.$$

Нетрудно убедиться в том, что оператор T вполне непрерывен. Действительно, пусть $\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y)| \leq M$, $u(x, y)$ — любая функция из $C(\bar{\Omega})$. Так как по условию теоремы коэффициент $C(x, y)$ непрерывен в $\bar{\Omega}$, то найдется $c_0 > 0$, такое, что $\max_{\bar{\Omega}} |C(x, y)| \leq c_0$. Рассмотрим множество функций $\omega(x, y) = Tu$ и покажем, что выполнены все условия теоремы Арцеля. Действительно, легко видеть, что

$$\begin{aligned} |\omega(x, y)| &\leq \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\beta \int_0^\alpha (\beta - \eta)(\alpha - \xi) |C(\xi, \eta)| |u(\xi, \eta)| d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^x (\beta - \eta) |C(\xi, \eta)| |u(\xi, \eta)| d\xi d\eta + \frac{1}{\alpha} \int_0^y \int_0^\alpha (\alpha - \xi) |C(\xi, \eta)| |u(\xi, \eta)| d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y \int_0^x |C(\xi, \eta)| |u(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq 4\alpha\beta c_0 M. \end{aligned}$$

Это означает, что функции $\omega(x, y)$ равномерно ограничены.

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} \omega(x_2, y_2) - \omega(x_1, y_1) &= \frac{1}{\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\alpha (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{\beta} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\beta (\beta - \eta) C(\xi, \eta) C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{x_2} C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{y_1} C(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\eta d\xi, \end{aligned}$$

откуда

$$|\omega(x_2, y_2) - \omega(x_1, y_1)| \leq 2c_0 M (\alpha |y_2 - y_1| + \beta |x_2 - x_1|)$$

и при $|x_2 - x_1| < \frac{\delta}{2}$, $|y_2 - y_1| < \frac{\delta}{2}$ $|\omega(x_2, y_2) - \omega(x_1, y_1)| \leq \varepsilon$, где δ выбрано так, что при $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta$ $2qc_0M\delta < \varepsilon$. Полученные оценки и проведенные рассуждения приводят к утверждению, что оператор T является вполне непрерывным.

Заключение

Заметим теперь, что однородная задача (1)–(2) описанным выше образом сводится к однородному операторному уравнению $u - Tu = 0$, которое в силу доказанной единственности решения задачи (1)–(2) может иметь только нулевое решение. Это означает, что в силу теоремы Фредгольма операторное уравнение (16) разрешимо, причем существует единственное его решение. Но тогда в силу эквивалентности разрешима и задача (1)–(2), так как легко видеть, что решение операторного уравнения, функция $u(x, y)$, имеет производную u_{xy} .

Цитирование. Пулькина Л.С., Смирнова А.Н. Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 22–33. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33.

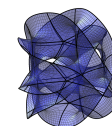
© Пулькина Л.С., Смирнова А.Н., 2025

Людмила Степановна Пулькина (louise@samdiff.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Анастасия Николаевна Смирнова (Na5anya@yandex.ru) – студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Самарский А.А. О некоторых задачах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. URL: https://samarskii.ru/articles/1980/1980_009ocr.pdf.
- [2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek, Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, no. 11. P. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Казанский университет, 2014. 385 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35064403>. EDN: <https://elibrary.ru/xpwdjb>.
- [4] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48156083>. EDN: <https://elibrary.ru/vokdva>.
- [5] Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. // Вестник Российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 139. С. 214–230. DOI: <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230>. EDN: <https://elibrary.ru/ahjfou>.
- [6] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: <https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl>.
- [7] Гилев А.В., Кечина О.М., Пулькина Л.С. Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 14–21. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21>.
- [8] Гилев А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2020. Т. 26, № 4. С. 25–35. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35>.
- [9] Кечина О.М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2017. Т. 23, № 1. С. 15–20. URL: <https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142>.
- [10] Gilev A.V., Pulkina L.S. Two Problems for Fourth Order Equations with Nonlocal Conditions in Characteristic Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 270. 547–555 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06365-6>.
- [11] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22 (1). P. 171–174. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de5770>.



DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33

On solvability of a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in characteristic domain

Pulkina L.S.^{}, Smirnova A.N.^{}

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; louise@samdiff.ru; ORCID: 0000-0001-7947-6121 (L.S.); Na5anya@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-2925-1646 (A.N.);

Received: 17.02.2025

Revised: 25.03.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. In this article, we study a nonlocal problem for hyperbolic equation in characteristic domain. Additional information on desired solution is given in the form of integrals. This implies that classical methods to justify existence and uniqueness of the solution do not apply. We suggest a slightly different approach. This method enable to find the conditions on data under which the nonlocal problem has at most one solution. We also demonstrate a way to prove the existence of the solution. More over, the explicit form of the solution is obtained for certain special case of the equation under consideration.

Key words: hyperbolic equation; Goursat problem; nonlocal conditions.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Pulkina L.S., Smirnova A.N. On solvability of a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in characteristic domain. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 22–33. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33. (In Russ.)

© Pulkina L.S., Smirnova A.N., 2025

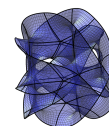
Ludmila S. Pulkina (louise@samdiff.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Anastasia N. Smirnova (Na5anya@yandex.ru) – student, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Samarskii A.A. On certain problems in modern thory of differential equations. *Differential Equations*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: https://samarskii.ru/articles/1980/1980_009ocr.pdf. (In Russ.)
- [2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, no. 11, pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A. Equations with dominant partial derivative. Kazan: Kazanskii universitet, 2014, 385 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=35064403>. EDN: <https://elibrary.ru/xpwdjb>. (In Russ.)

- [4] Pul'kina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 316–318. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754219>. EDN: <https://elibrary.ru/lfvpfh>. (In English; original in Russian).
- [5] Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. DOI: <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230>. EDN: <https://elibrary.ru/ahjfou>.
- [6] Nakhushev A.M. Loaded equations and their application. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: <https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl>. (In Russ.)
- [7] Gilev A.V., Kechina O.M., Pulkina L.S. Characteristic problem for a fourth-order equation with a dominant derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 14–21. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21>. (In Russ.)
- [8] Gilev A.V. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 25–35. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35>. (In Russ.)
- [9] Ketchina O.M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 15–20. Available at: <https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142>. (In Russ.)
- [10] Gilev A.V., Pulkina L.S. Two Problems for Fourth Order Equations with Nonlocal Conditions in Characteristic Domain. In: *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 270 (2023), pp. 547–555. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06365-6>.
- [11] Nahusheva Z.A. A nonlocal problem for partial differential equations. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 171–174. URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/de5770>. (In Russ.)



Критериальный метод определения времени нагнетания пара при пароциклической обработке призабойных зон скважин

Шевелёв А.П. , Гильманов А.Я. , Скобликов Р.М. 

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация; a.p.shevelev@utmn.ru; ORCID: 0000-0003-0017-4871 (А.П.); a.y.gilmanov@utmn.ru; ORCID: 0000-0002-7115-1629 (А.Я.); skoblikov.rodion@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-2241-246X (Р.М.);

Поступила: 18.01.2025

Рассмотрена: 03.03.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. Решение задач тепломассопереноса при циклической обработке паром призабойной зоны добывающих скважин позволяет управлять процессом извлечения высоковязкой нефти. На основе развития подходов механики многофазных систем сформулирована математическая модель и предложен критериальный метод определения времени нагнетания пара в призабойную зону. В рамках этого метода определяющими являются следующие процессы: теплоотдача в кровлю и подошву пласта, увеличение водонасыщенной зоны при непрерывной закачке и наличие предельного градиента давления у неньютоновской жидкости. Разработанная модель была апробирована на синтетических данных. Исследованы динамики развития теплового, пароводяного и водонефтяного фронтов при нагнетании в радиальной постановке задачи. Проведена верификация модели на основе сравнения полученных результатов с расчетами в гидродинамическом симуляторе.

Ключевые слова: тепломассоперенос; фазовые переходы; подземная гидромеханика; конвективные потоки; физико-математическое моделирование; методы увеличения нефтеотдачи.

Введение

Высокие темпы снижения запасов легкоизвлекаемой нефти обуславливают актуальность разработки месторождений с высоковязкой нефтью. Пароциклическая обработка (ПЦО) — один из широко используемых методов увеличения нефтеотдачи (МУН) в России и мире. Этот метод является одним из перспективных в будущей разработке месторождений с нефтью высокой вязкости. Данный метод применяется с середины двадцатого века, но, несмотря на продолжительную практику его применения, в качестве объектов разработки выступают месторождения, отвечающие устоявшимся критериям успешности таких мероприятий. Продолжаются работы по модификации и совершенствованию как самого метода (формирование математических, эмпирических и физических моделей, использование растворителей, анализ и учет влияния параметров на протекание физических процессов, анализ влияния физических процессов на параметры насыщенной пористой среды и т. д.) [1–7], так и подходов к его использованию (комбинирования методов), однако разработка с его применением имеет трудности и особенности. Основная проблема разработки месторождений с применением ПЦО — сложность и длительность определения технологических параметров, так как существующие модели не позволяют быстро, просто и качественно оценить необходимые параметры.

Пароциклическая обработка относится к тепловым методам увеличения нефтеотдачи. Термические (тепловые) методы главным образом основаны на существующей зависимости вязкости от температуры: с повышением температуры вязкость жидкостей снижается. Среди всех тепловых МУН в пароциклике наиболее эффективно используется тепловая энергия, но нацеленная на прогрев относительно небольших объемов пласта. Кроме того, идея циклической закачки теплоносителя применима на скважинах различных конструкций в сочетании с другими методами.

Помимо трудностей, которые встречаются при разработке месторождений с применением ПЦО, которые описывались выше, можно выделить проблемы: заводнение призабойной зоны, существенное падение дебита с течением времени на продуктивном этапе, потери тепловой энергии в ходе транспортировки теплоносителя в зону прогрева по стволу скважины. ПЦО наиболее распространен в таких странах, как: Канада, Китай, США, Россия, Кувейт, Таиланд [7–14].

В методе ПЦО выделяются три этапа применения. Первый этап — нагнетание теплоносителя в пласт. На данном этапе происходят прогрев пласта и вытеснение нефти паром и конденсатом. В качестве теплоносителя может выступать как смесь пара и воды, которая используется чаще всего, так и сложная многокомпонентная смесь с добавлением поверхностно-активных веществ, газа, гелей и т. д. [2; 7; 15]. В интегральной модели [3] предполагается, что оптимальным временем нагнетания является то, при котором мощность закачиваемого тепла равна мощности теплопотерь в кровлю и подошву пласта. Второй этап — закрытие скважины на период конденсации, который называют паротепловой пропиткой. При фазовом переходе в зоне конденсации происходит снижение давления, что приводит к ненулевому градиенту давления в призабойной зоне, и, как следствие, происходит "всасывание" нефти в зону прогрева. Также при фазовом переходе выделяется теплота парообразования, что приводит к дополнительному прогреву пласта и нефти (в зоне вытеснения). В рамках интегральной модели [3] эффективным временем на выдержку считается то, при котором мощность теплоты фазового перехода равна мощности теплопотерь. Третий этап — добыча разогретых флюидов. Время добычи тоже имеет эффективную продолжительность, которая связана с охлаждением пласта и, как следствие, ухудшением фильтрационных свойств.

Существует несколько основных моделей ПЦО: Маркса — Лангенхейма [16], Джонса [17], интегральная [3]. Модель Маркса — Лангенхейма описывает скорость распространения теплового фронта площадной охват тепловым воздействием. В ней используется радиальный подход определения расстояния теплового фронта и рассматривается идеализированный тепловой профиль, который представляет собой ступенчатую функцию с одинаковой температурой в зоне, охваченной теплом (возможно использовать приближение Ловерье [18]). Модель Джонса рассчитана на численное решение с применением в большей части эмпирических законов. Данная модель использует приближение Ловерье [18] и позволяет определять ряд динамических параметров. К преимуществам этой модели можно отнести учет остаточного тепла с прошлых циклов ПЦО и возможного влияния других скважин. Интегральная модель описывает температурный профиль в виде кусочно-постоянной функции (приближение Ловерье). Она показывает все этапы ПЦО и, в отличие от других методов, позволяет рассчитать необходимое (оптимальное) время закачки, выдержки и добычи. Все перечисленные модели используют относительно грубые приближения по отношению к распределению температуры и не учитывают конденсацию на этапе закачки теплоносителя в пласт, влияющую на рост обводненной зоны. Также данные модели, кроме интегральной, не позволяют определить конкретные технологические параметры, но способны оценить некоторые максимальные параметры.

Основным аспектом при формулировке математической модели для простого, быстрого и качественного расчета является определение наиболее влияющих параметров на протекание физических процессов. Существует ряд работ, направленных на анализ эффективных параметров, среди которых в основном выделяют: мощность пласта, проницаемость, пористость, вязкость, температуру, остаточные насыщенности, коэффициент теплопроводности, теплоемкость, коэффициент теплоотдачи, сухость нагнетаемого пара, скорость нагнетания, предельный градиент давления сдвига [6; 19–24].

Стоит отметить, что на эффективность технологического процесса ПЦО влияют геологические особенности разрабатываемого объекта. В работе [25] описано влияние расчлененности и коэффициента песчаности. Глинистые прослойки (глинистые перемычки, распростертые по латерали) аккумулируют большее количество тепловой энергии за счет большей теплоемкости, что может служить дополнительным источником энергии на втором и третьем этапах паротепловой обработки. Однако абсолютно понятно, что с увеличением мощности непроницаемых пород при неизменном коэффициенте песчаности разработка становится нерентабельной. Учет неоднородности и детализация применения технологии возможны при формировании и

решении математической модели, основанной на законах сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме. Целью работы является создание такой модели. Впервые предложен критериальный метод определения времени нагнетания пара в призабойную зону.

В работе [23] проведен ряд исследований, по результатам которых были получены важные выводы: увеличение температуры приводит к увеличению нефтеотдачи, причем скорость снижения вязкости также увеличивается за счет растворения асфальтеново-смолистых фракций нефти; увеличение интенсивности нагнетания пара приводит к снижению нефтеотдачи на безводных и маловодных периодах, однако может повысить его в период высокой обводненности; увеличение скорости закачки может вести к эффекту "прорыва" пара при вытеснении более вязких смесей; при ПЦО образуются эмульсии высокой вязкости за счет наличия воды и содержания в нефти парафино-смоло-асфальтеновых компонентов, откуда делается заключение о том, что продолжительность закачки влияет на эмульгирование в пласте; увеличение объемов воды в пласте увеличивает концентрацию смол и асфальтенов в добываемой продукции, что также способствует увеличению ее вязкости; повышение температуры может послужить катализатором образования эмульсий; с повышением скорости нагнетания может увеличиться вязкость вытесняемой жидкости. Полученные результаты согласуются с рядом других исследований и наблюдений [13; 26; 27], где были проведены работы по определению предела текучести нефти. Большим количеством исследований показано, что высоковязкие нефти обладают свойствами бингамовской жидкости, имеющей характерный градиент давления сдвига.

Данные факты подтверждают предположения о существовании оптимальных параметров закачки теплоносителя (скорость и температура нагнетания) в зависимости от конкретных параметров системы. Однако до конца неясно влияние описанных явлений при промышленной эксплуатации системы. При этом очевидно, что подобные исследования послужат развитию технологий и принципов разработки при добыче высоковязких углеводородных запасов.

1. Математическая модель

Математическая модель была сформирована на основе классических законов сохранения энергии, массы и импульса и позволяет исследовать динамику теплового фронта и фронта вытеснения (гидродинамического фронта). На основе результатов исследования развития фронтов станет возможным оценить технологические параметры: время закачки пара, время конденсации пара, расход пара, время добычи, дебит нефти. Эта модель учитывает основные эффективные параметры, определяющие протекание физических процессов:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_r \frac{\partial T}{\partial \tau} + H_s (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T - \frac{\alpha p'}{A_s} (T - T_0) = \lambda \Delta T, \quad (1) \\ m \frac{\partial S_s}{\partial \tau} + \text{div}(F(S_s) \vec{v}) = -I S_s, \quad (2) \\ \vec{v} = - \frac{k \cdot (\text{grad}(P) - \vec{g}(\rho_w - \rho_s))}{\mu_s} \\ m \frac{\partial S_w}{\partial \tau} + \text{div}(F(S_w) \vec{v}) = 0, \quad (4) \\ I = \frac{\alpha \cdot (T - T_0) + C_r \cdot (1 - m) \cdot v \cdot \rho_r \cdot (T^a - T)}{l \cdot h \cdot \rho_r}, \quad (5) \\ F(S_s) = \frac{S_s^2}{S_s^2 + \frac{\mu_s}{\mu_w} (1 - S_w)^2}, \quad (6) \\ F(S_w) = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o} (1 - S_w)^2}, \quad (7) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где m — пористость; S_s — паронасыщенность; $\vec{v}$ — скорость фильтрации пара; H, H_s — удельная объемная теплоемкость породы и пара соответственно; λ — теплопроводность породы; T — температура $T(\tau, r, h)$; I — поток конденсации; τ — время; $F(S_w), F(S_s)$ — функции Баклея — Леверетта; k — коэффициент проницаемости; μ_s — вязкость пара; P — давление; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения; ρ_w — плотность воды; ρ_s — плотность пара; α — коэффициент теплоотдачи насыщенной пористой среды в кровлю и подошву пласта; C_r — удельная теплоемкость породы; ρ_r — плотность породы; l — теплота конденсации; h — мощность пласта; ρ_s — плотность

пара; μ_o — вязкость нефти; μ_w — вязкость воды; Q_s — объемный расход теплоносителя; A_s — площадь латерального сечения прогретой зоны; p' — периметр сечения; $\frac{(\alpha p')}{A_s}(T - T_0)$ — член, отвечающий за теплоотдачу в неколлекторы из-за собственной конвекции; T_0 — температура кровли и подошвы; T^a — температура в точке $T(\tau + d\tau, r, h)$; $\vec{\nabla}$ — оператор набла; ΔT — лапласиан температурного поля.

Система уравнений (1.1) рассчитывается в цилиндрической или декартовой системах координат. Декартова система координат хорошо подходит для моделирования галереи скважин, а цилиндрическая — для одиночной скважины. Далее будет рассматриваться случай одиночной скважины.

Математическую модель удобно рассчитывать при помощи числительных методов. При этом вводится ряд допущений и уточнений: коллектор является анизотропным и однородным; решение не зависит от азимутального угла и протяженности галереи скважин; распределение и перемещение теплоносителя (пара) происходит при фиксированных значениях вязкости теплоносителя и воды при температуре T_1 ; кровля и подошва — непроницаемые среды; все флюиды считаются несмешивающимися и несжимаемыми; предполагается, что размеры зон, не подвергнутые тепловой обработке, много больше размеров разогретой зоны, поэтому отводимое тепло в кровлю и подошву пласта поглощается всем объемом незадействованных зон; в призабойной зоне поддерживается постоянное давление; водонасыщенность в пласте равна связанной водонасыщенности; основной вклад в образование конденсата вносят тепловые потоки, отводимые в кровлю, подошву и на нагрев пород; на этапе закачки поток тепла, вызванный фазовым переходом первого рода, не существен по отношению к "нагнетаемой" тепловой мощности; считается, что при применении ПЦО возникают 3 характерные зоны: тепловая, обводненная, нефтяная; в тепловой зоне отсутствуют все несвязанные флюиды, кроме пара, в обводненной — все, кроме воды; при нагнетании температура пара в пласте близка к температуре насыщения; весь образованный конденсат вытесняется теплоносителем в обводненную зону.

Определение эффективного времени прогрева на первом этапе ПЦО требует комплекса критериев, основанных на трех явлениях: теплоотдаче в кровлю и подошву пласта, увеличении водной зоны при непрерывной закачке и снижении фильтрационных способностей неньютоновской жидкости.

Предполагается, что эффективность прогревания резко падает при отсутствии фильтрации, так как основной вклад в прогрев вносит вынужденная конвекция, а не теплопроводность. Когда градиент давления на границе вытеснения нефти водой становится ниже предельного градиента давления сдвига, пар перестает распространяться вглубь пласта, в том случае, если считать воду несжимаемой и не смешивающейся с паром средой, что прекращает теплообмен посредством вынужденной конвекции. Из определения коэффициента пьезопроводности ясно, что давление на границе вытеснения из-за бингамовских свойств нефти будет претерпевать скачок. В идеальном случае граница вытеснения равномерно движется по мере стабилизации давления. Под стабилизацией давления в этом случае понимается приближение распределения давления к стационарному случаю. Стационарный (установившийся) режим является частным и предельным случаем, который описывается уравнением Лапласа. В стационарном случае расход агента нагнетания можно вычислить по уравнению Дюпюи, тогда скорость фильтрации и перепад давления могут быть рассчитаны, если известна площадь области вытеснения или дренирования:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (1.2)$$

$$Q = \frac{2\pi kh(P_c - P_b)}{\mu_o \ln\left(\frac{r_b}{r_c}\right)} \quad (1.3)$$

где r — радиальная координата; P — давление; z — координата абсолютной глубины; r_b — радиус скважины; r_c — радиус контура питания; P_c — давление на контуре питания; P_b — давление на забое скважины.

Уравнение Лапласа для пьезопроводности в цилиндрической системе координат без учета изменения азимутального угла (допущение о симметрии) записывается в виде (1.2). А уравнение Дюпюи в самом простом случае принимает вид (1.3).

Может возникнуть и такая ситуация, когда на границе вытеснения градиент давления ниже предельного градиента давления сдвига и при дальнейшей закачке возможно его превысить. Однако дальнейшая закачка или увеличение интенсивности могут оказаться неэффективными, нерентабельными или невозможными по техническим причинам. Поэтому при разработке технико-технологические аспекты являются опорными, которые, в свою очередь, должны подбираться исходя из параметров текучести нефти.

Тепловые потери в пласте происходят из-за собственной конвекции внутри паровой зоны, где пар циркулирует, охлаждаясь в основном на кровле и опускаясь до подошвы [28]. Очевидно, что при равных мощностях отвода и подвода тепла роста разогретой зоны не происходит. Сравнение мощностей подвода и отвода тепла может произойти до того момента, когда прекратится вытеснение нефти водой.

Необходимо также учитывать развитие обводненной зоны, которая на этапе добычи будет препятствовать притоку нефти в прогретую зону, и чем она больше, тем больше обводненность продукции. Скорость конденсации на начальной стадии нагнетания меньше скорости развития паровой зоны, из-за чего водяная оторочка истончается. Однако с увеличением радиуса прогретой области и площади ее теплообмена с кровлей и подошвой интенсивность образования конденсата вырастает, а скорость роста самой области уменьшается и в конечном итоге вовсе становится равной нулю. На оценочном этапе предлагается считать эффективным такое время закачки, при котором объем обводненной области не превосходит объем паровой.

Описанные явления могут фиксироваться в различных временных конфигурациях. Предполагается, что оптимальное время прогрева призабойной зоны находится в промежутке времени от начала нагнетания до достижения одного из описанных предельно-эффективных случаев.

Как было отмечено, при описании фильтрации нефти в пласте необходимо учитывать ее неньютоновские свойства. Исследованиями показано, что высоковязкая нефть обладает характерными свойствами, которые максимально приближенно описываются поведением бингамовской жидкости. В научной литературе существует описание поведения фильтрации бингамовской жидкости, которое принято записывать в виде:

$$v_{rk} = \begin{cases} -\frac{k}{\mu_o} \left(1 - \frac{\gamma}{|grad(p_k)|}\right), & |grad(p_k)| > \gamma, \\ 0, & |grad(p_k)| \leq \gamma, \end{cases} \quad (1.4)$$

где v_{rk} — радиальная скорость фильтрации на границе вытеснения нефти; $grad(p_k)$ — градиент давления на границе вытеснения; γ — предельный градиент давления нефти.

Основной недостаток уравнения (1.4), которое является модифицированным уравнением Дарси, — это отсутствие учета изменения вязкости от скорости сдвига, что может наблюдаться у некоторых типов флюидов. В таком случае зависимость текучести от градиента скорости в сечении будет носить нелинейный характер, а само уравнение (1.4) сведется к виду

$$v_{rk} = f(\mu(v_{rk}), P) \quad (1.5)$$

Причем нельзя утверждать, что уравнение (1.5) является алгебраическим, так как поведение вязкости может быть уточнено только по результатам лабораторных исследований. Поэтому в первом приближении предполагается отсутствие зависимости вязкости от скорости сдвига.

В качестве критерия по фильтрации был выбран безразмерный комплекс с условием

$$\omega = \frac{\gamma}{|grad(p_k)|} = 1. \quad (1.6)$$

Данный критерий определяет момент времени, когда дальнейшая закачка нецелесообразна, поскольку при выполнении условия (1.6) вытеснения нефти не происходит.

Поведение неньютоновской жидкости при необходимости может быть уточнено различными реологическими моделями: Шведова — Бингама, Освальда — де-Вааля, Гершеля — Балки,

Прандтля, Пауэлла — Эйринга, Рабиновича, Сиско, Де Хавена, Рейнера — Филиппова, Кросса, Мейера, Кэссона, Шульмана, Реймера [29; 30]. Такое разнообразие позволяет подобрать наиболее коррелирующую модель к конкретному случаю. В научной литературе большей популярностью пользуется закон Шведова — Бингама, что связано с его физичностью и простотой:

$$\delta = \delta_0 + \mu_p \frac{dv_r}{dr}, \quad (1.7)$$

где δ — текучесть; δ_0 — предел текучести (динамическое напряжение сдвига); μ_p — пластическая вязкость; v_r — скорость сдвига.

Кроме того, поведение, описываемое достаточно точным уравнением (1.7), встречается в природе наиболее часто. Текучесть в данном случае носит линейный характер зависимости.

При решении уравнения массопереноса пара необходимо помнить, что в уравнении не учтены термобарические условия фазового перехода, за счет чего распределение пара может быть ненулевым в области, где он не существует. Поэтому распределение, рассчитанное по уравнению (2) системы (1.1), описывается для пароводяной смеси. В дальнейшем, при расчете распределения водонасыщенности с учетом введенных допущений и уточнений, фронт пароводяной смеси разделяется на два: фронт пара и воды. Для оценки положения фронта пара предлагается принять его в положении фронта прогретой зоны. Решение уравнения (2) необходимо в первую очередь для нахождения количества образываемого конденсата.

2. Апробация на синтетических данных

Модель была апробирована на синтетических параметрах (таблица 2.1) и реализована при помощи численных методов на языке программирования Visual Basic for Applications (VBA). Решение было выполнено в цилиндрической системе координат. При решении явной конечно-разностной схемой уравнения теплопроводности и массопереноса воды оказались наиболее устойчивыми к повышению шага по времени. Так, при шаге между временными слоями в 1000 с ошибка относительно решения по неявной схеме и явной схеме с временным шагом в 1 (одну) с составила менее 1 %. Решение уравнения массопереноса пара оказалось менее устойчивое: максимальное значение временного шага, для которого в любой момент времени решение является устойчивым, — 50 с. Увеличение шага по времени при вычислении уравнения переноса пара стремительно приводило к нефизичным решениям, выходящим за пределы допустимых значений. Данный факт сильно ухудшает вычислительную эффективность еще и потому, что уравнение массопереноса пара зависит от распределения температуры и вычисляется одновременно с уравнением теплопроводности.

Результаты расчетов приведены на рисунках 2.1–2.3. На рисунке 2.1 показано распределение пара в пласте в различные моменты времени. Распределения температуры в разные моменты времени, а также положение фронта и распределение вязкости на 14 (четырнадцатые) сутки продемонстрированы на рисунке 2.2. Рисунок 2.3 отражает характерную динамику фронта обводненной зоны.

Распределение параметров на рисунках 2.1–2.3 приводится в центре мощности пласта. При решении уравнения массопереноса для пароводяной смеси скорость продвижения фронта снижается ввиду геометрических эффектов (решение в цилиндрической системе координат) и тепловых (точки стока за счет конденсации). Распространение фронта пара резко замедляется при достижении некоторого характерного времени (при поставленных условиях 50 000 с, рисунок 2.1), при этом фронт начинает развиваться преимущественно вдоль кровельной части пласта.

Скорость развития фронта воды снижается в меньшей степени, что связано с отсутствием стоков в уравнении (4) системы (1.1). На рисунке 2.3 представлено характерное развитие фронта воды. Важно отметить, что решение уравнения массопереноса воды решалось после решения уравнения теплопроводности, а не одновременно. Поэтому на рисунке 2.3 водонасыщенный фронт в первые сутки находится на уровне 3 м, хотя за следующие сутки фронт продвигался

Таблица 2.1

Параметры расчета

Table 2.1

Calculation parameters

Величина, ед. измерения	Значение	Величина ед. измерения	Значение
Длина пласта, м	500	Давление на забое, Па	200
Мощность пласта, м	20	Давление пласта, Па	100
Пористость, д. ед.	0.2	Вязкость воды, Па·с	10^4
Вязкость пара, Па·с	10^{-5}	Радиус скважины, м	0.1
Вязкость нефти, Па·с	$500 \cdot 10^{-3}$	Удельная теплоемкость воды, Дж/(кг·°C)	4200
Удельная теплота конденсации пара, Дж/кг	$2.3 \cdot 10^6$	Расход пара, м ³ /с	0.00769
Плотность пара, кг/м ³	56	Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м ² ·°C)	0.1
Плотность нефти, кг/м ³	856	Предел текучести, Па	7
Температура пласта, °C	70	Эффективный диаметр капилляра, м	10^{-5}
Температура нагнетаемого пара, °C	250	Удельная объемная теплоемкость породы, Дж/(кг·°C)	$1.6 \cdot 10^6$
Проницаемость пласта вдоль координаты г, м ²	10^{-13}	Удельная объемная теплоемкость пара, Дж/(кг·°C)	$45.3 \cdot 10^3$
Проницаемость по мощности пласта, м ²	10^{-13}	Теплопроводность породы, Вт/(м·°C)	2.431

менее чем на 1 м при примерном снижении скорости на 0.2 м/сут. Также стоит отметить, что расход воды посчитан исходя из объемов образовавшегося конденсата на конец расчета уравнений теплопроводности и массопереноса пара (за 14 суток). Поэтому сопоставление положения фронтов прогретой и водонасыщенной зон по полученным результатам интерпретируемо для последнего момента времени. Единовременное сопоставление развития тепловой и обводненной зон достигается путем определения объемов сконденсировавшегося пара за промежуток времени, по истечении которого исследуется прогретая область, и пересчета уравнения массопереноса воды. По сформулированной математической модели такой подход возможен, но требует большей вычислительной мощности или компилирования на другие языки программирования с возможностью оптимизации вычислений.

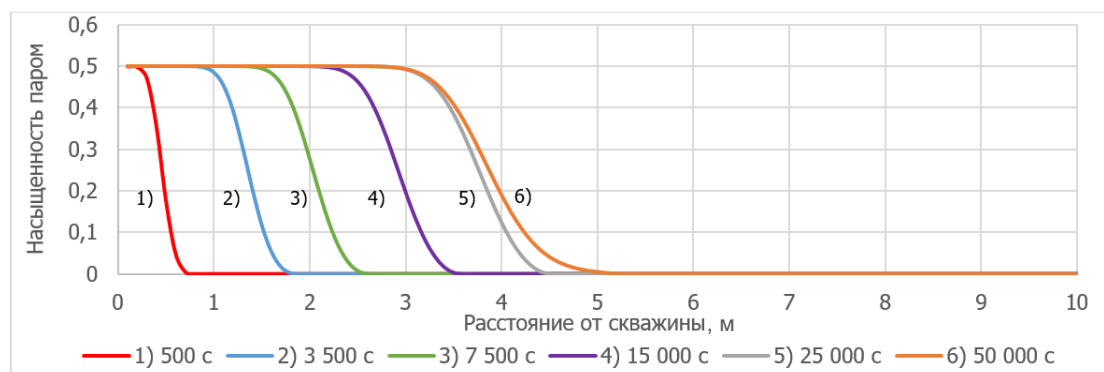


Рис. 2.1. Распределение паронасыщенности в пласте в различные моменты времени

Fig. 2.1. Distribution of vapor saturation in the reservoir at different time points

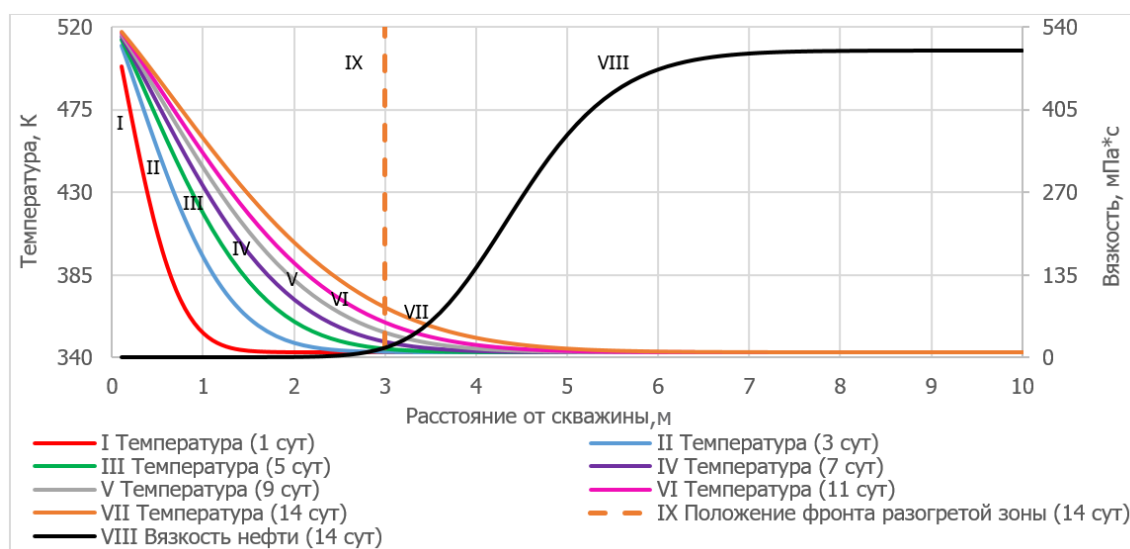


Рис. 2.2. Распределение температуры и вязкости в пласте
 Fig. 2.2. Distribution of temperature and viscosity in the reservoir

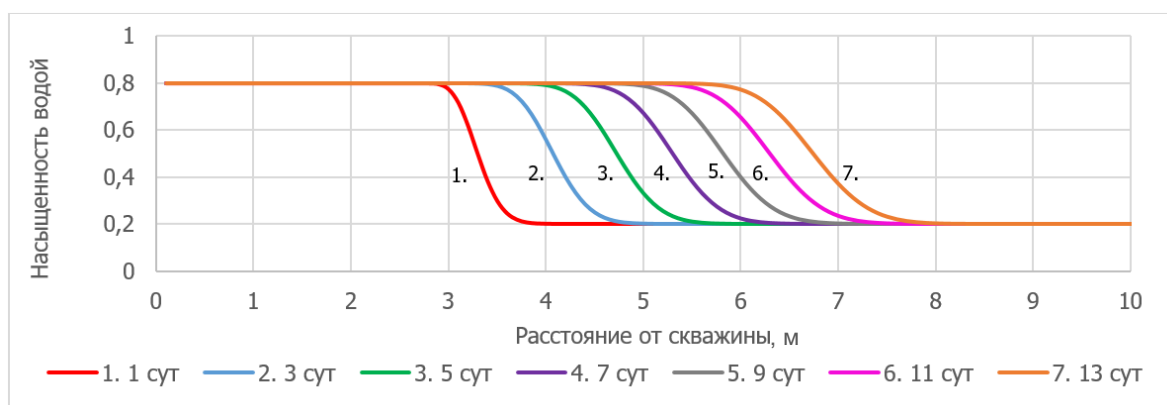


Рис. 2.3. Динамика фронта водонасыщенной зоны
 Fig. 2.3. Dynamics of the front of the saturated water zone

Распределения температуры в разные моменты времени представлены на рисунке 2.2. На графике также продемонстрировано распределение вязкости нефти от температуры, если поровый объем был бы заполнен только ей. Зависимость вязкости от температуры подобрана по характерным зависимостям, описанным в работах [21; 24; 31]. Моделирование распределения вязкости нефти и давления может быть осуществлено по методу, представленному в работе [32], что поможет улучшить качество симулятора. Предлагается определять фронт прогретой зоны там, где температура пласта достигает значения, при котором нефть по вязкости классифицируется как маловязкая или повышенной вязкости [33]. Определение фронта прогрева может быть уточнено при сопоставлении термобарических параметров системы с фазовой диаграммой воды: в том случае, когда фронт прогрева находится дальше области существования пара, стоит уточнить его положение в пространстве. Однако стоит отметить, что способ уточнения применим только для систем, где конвективный теплоперенос преобладает над кондуктивным, а необходимость уточнения обусловлена неоднородностью системы. В том случае, когда кондуктивный теплоперенос вносит большую значимость, чем конвективный, нагнетание пара непродуктивно и можно ограничиться только прогревом ствола скважины. Альтернативным методом определения локализации фронта разогретой зоны может служить критерий сниже-

ния температуры в e раз (аналогично декременту затухания). Определение фронта прогретой зоны в рамках поставленных условий по критерию классификации нефти не противоречит условиям существования пара.

Из рисунков 2.1 и 2.2 видно, что в области наибольших температур насыщенность пара максимальна и ее распределение однородно, что также сходится с допущением интегральной модели [3] и подтверждает ее правомерность.

За счет активного теплообмена прогретой зоны, преимущественно с кровлей, и собственной конвекции прогретая зона в поставленных условиях принимает форму цилиндра. При рассмотрении развития тепловой зоны за наибольший период времени влияние конвективного переноса проявляется визуально значительнее. На форму и размеры прогретой зоны главным образом влияет коэффициент теплоотдачи.

При выбранных параметрах расчета на 14 суток выполняются критерий отсутствия фильтрации на границе вытеснения вода — нефть и увеличение объема обводненной зоны до критического значения. Критерий равенства тепловых мощностей при отсутствии других критериев достигается только к 173 суткам (15 000 000 с) нагнетания, после чего положение теплового фронта практически не меняется со временем (рисунок 2.4).

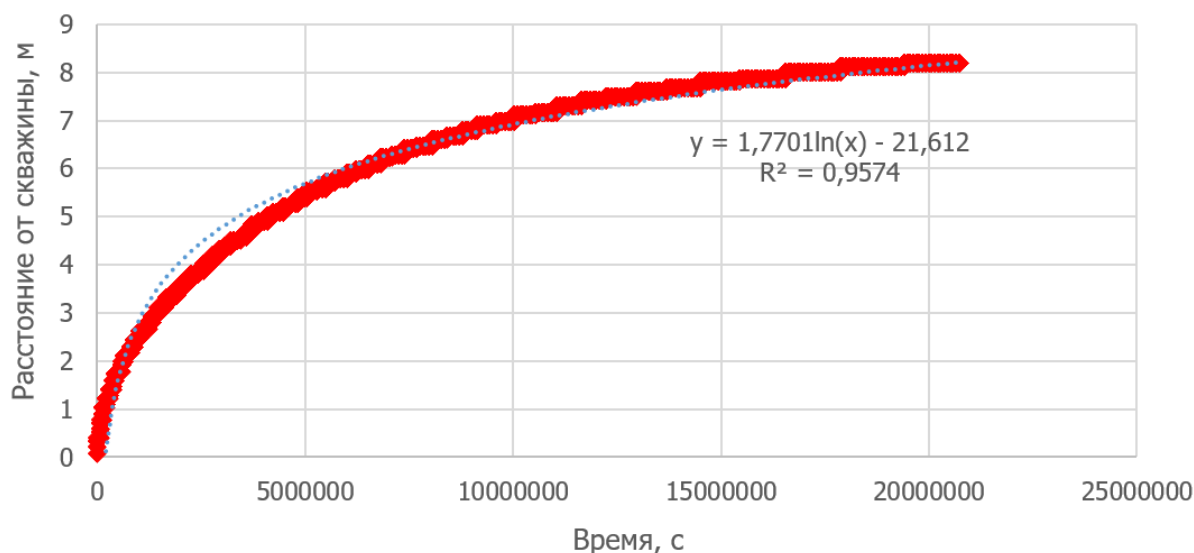


Рис. 2.4. Динамика теплового фронта

Fig. 2.4. Dynamics of the heat front

3. Верификация результатов математической модели с расчетами, проведенными в гидродинамическом симуляторе

Была произведена верификация модели при сопоставлении результатов, полученных по сформированной математической модели и на гидродинамическом симуляторе "тНавигатор", представленных в работе [6] (рисунок 3.1). При решении для сопоставления результатов были взяты параметры из работы авторов. Некоторые параметры, не раскрытые в работе [6], были подобраны таким образом, чтобы достигнуть геометрических размеров прогретой области. К таким параметрам относятся расход пара и коэффициент теплоотдачи. Визуально результаты повторяют друг друга, за исключением приграничных областей теплообмена. Основной причиной отличий являются разные размерности пространственных сеток (более мелкая сетка при решении сформированной модели) и различие в цветовом градиенте. Симулятором не предусмотрено определение теплового фронта, что также затрудняет верификацию данных.

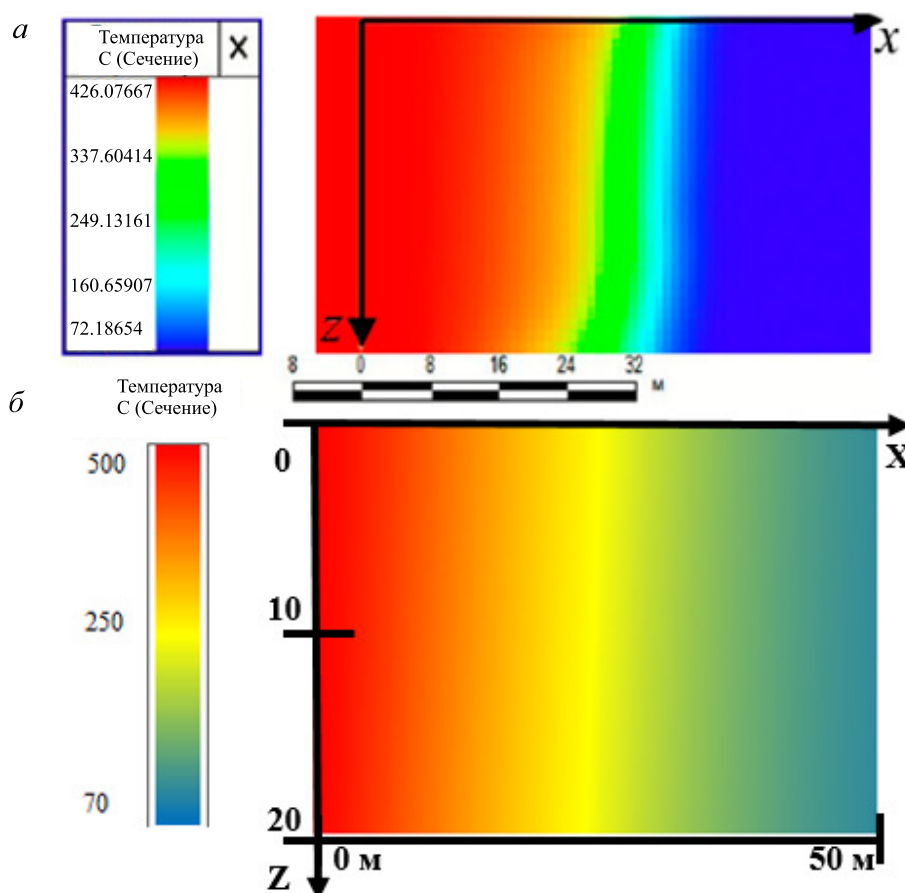


Рис. 3.1. Распределение температуры в сечении пласта: а) "tНавигатор"; б) сформированная математическая модель

Fig. 3.1. Temperature distribution in the reservoir section: а) tNavigator; б) formed mathematical model

Стоит отметить что гидродинамический симулятор "tНавигатор" не адаптирован под решения задач теплопроводности. Тепловые потоки в нем не претерпевают замедления, связанные с теплоотдачей и конвекцией, поэтому распределение температуры от времени аналогично распределению жидких фаз в задачах вытеснения. Данный симулятор отлично решает задачи гидромеханики, учитывая множество различных явлений. Однако также стоит отметить, что решения в нем приводятся в декартовой системе координат, что может вносить ошибку за счет ориентационных эффектов вычислений.

Закключение

По результату работы можно заключить:

- 1) Разработка первого этапа ПЦО должна сопровождаться учетом основных явлений, определяющих эффективные параметры нагнетания: замедления распространения тепловой зоны за счет активного теплообмена продуктивной части пласта с кровлей и подошвой, вызванного преимущественно собственной конвекцией; увеличения обводненной зоны, находящейся за пределами тепловой зоны, за счет образования конденсата, которая в дальнейшем будет влиять на обводненность продукции и оттеснять нефть в зону низких градиентов давлений; снижения скорости фильтрации неньютоновских жидкостей в процессе вытеснения нефти водой;
- 2) Каждый из описанных эффектов может приводить к предельно эффективным случаям: остановке роста тепловой зоны, увеличению обводненной зоны до критических объемов, прекращению вытеснения нефти;

3) Соотношение скоростей развития теплового и водного фронтов от времени носит нелинейный характер, за счет чего на ранних временах нагнетания обводненная зона постоянно истончается, представляя собой водяную оторочку уменьшающихся размеров. После достижения некоторого характерного времени, при котором обеспечивается достаточно большое количество конденсата, а тепловая область значительно замедляется, зона воды начинает расти;

4) Для конкретных систем существуют оптимальные параметры закачки теплоносителя, к которым относятся: расход теплоносителя, время закачки, температура нагнетаемого теплоносителя;

5) При конкретных заданных расходе и температуре теплоносителя существует оптимальное время нагнетания, которое находится в промежутке времени от начала нагнетания до достижения одного из описанных предельно эффективных случаев.

Сформированная математическая модель совместно с предложенными критериями позволяют оценивать необходимые эффективные технологические параметры первого этапа пароциклической обработки. Использование модели с записью законов сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме делает возможным учет геологических особенностей пласта при разработке залежей с применением ПЦО. Были отражены концептуальные основы протекания физических процессов при пароциклической обработке. Численное решение математической модели было сравнено с решением гидродинамического симулятора "tНавигатор".

Стоит отметить, что предложенная методика позволяет определить предельноэффективные параметры нагнетания теплоносителя при пароциклической обработке. Оптимальные же параметры возможно определить только при совместном моделировании всех стадий обработки и совокупном рассмотрении эффектов, характерных для этапов ПЦО.

Предложенная модель может быть модифицирована, доработана и адаптирована с учетом неоднородности пласта; изменения вязкости нефти, пара и воды; уточнения распределения давления; изменения относительных фазовых проницаемостей при неизотермической фильтрации; влияния температуры на остаточную насыщенность; сжимаемости и смешивания флюидов; условий фазового перехода флюидов; изменения петрофизических свойств горной породы.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Шевелёв А.П., Гильманов А.Я., Скобликов Р.М. Критериальный метод определения времени нагнетания пара при пароциклической обработке призабойных зон скважин // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 34–50. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-34-50.

© Шевелёв А.П., Гильманов А.Я., Скобликов Р.М., 2025

Александр Павлович Шевелёв (a.p.shevelev@utmn.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень ул. Володарского, 6.

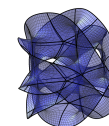
Александр Янович Гильманов (a.y.gilmanov@utmn.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования физических процессов и систем, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень ул. Володарского, 6.

Родион Максимович Скобликов (skoblikov.rodion@yandex.ru) – студент магистратуры Школы естественных наук, группа ТФ-23-01, Тюменский государственный университет, 625003, Российская Федерация, г. Тюмень ул. Володарского, 6.

Литература

- [1] Assessment of the impact of stress path and strain-dependent permeability on reservoir productivity in CSS / G.A. Alzate-Espinosa, E.F. Araujo-Guerrero, C.A. Benitez-Pelaez, M.C. Herrera-Schlesinger, C.A. Torres-Hernandez, E. Higueta-Carvajal, A. Naranjo-Agudelo, D.F. Cartagena-Perez. Paper presented at the ARMA/DGS/SEG International Geomechanics Symposium. November 2021. Paper Number: ARMA-IGS-21-077. URL: <https://search.spe.org/i2kweb/SPE/doc/onepetro:0C188027/>.
- [2] The Application of Complex Displacement in Cyclic Steam Stimulation CSS and Steam Flooding SF Development in Liaohe Oilfield: A Field Performance Study / Jianfeng Liu; Xiaoming Wu; Shouguo Sun; Ling Hao. Paper presented at the SPE Canadian Energy Technology Conference, Calgary, Alberta, Canada, March 2022. Paper Number: SPE-208940-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/208940-MS>.
- [3] Шевелев А.П., Федоров К.М., Гильманов А.Я. Оптимизация пароциклического воздействия на нефтяной пласт // XIII научно-практическая конференция "Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений". Тюмень, 2022. С. 181–195. URL: https://oil-industry.net/SD_PDF/2021/04/181-195%20Шевелев.pdf.
- [4] Chen F., Liu H., Dong X., Wang Y., Zhang Q., Zhao D., Gai P., Yin F., Qu L. A new analytical model to predict oil production for cyclic steam stimulation of horizontal wells // Paper presented at the SPE Western Regional Meeting (23–26 April 2019, San Jose, California, USA). Paper Number: SPE-195291-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/195291-MS>.
- [5] Assessment of the Effect of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Operational Variables on Well Productivity Including Geomechanical Modeling / Guillermo A. Alzate-Espinosa; Abel J. Naranjo-Agudelo; Edson F. Araujo-Guerrero; Carlos A. Torres-Hernandez; Daniel Felipe Cartagena-Perez; Camilo A. Benitez-Pelaez; Mario A. Hernandez-Ricaurte; Maria C. Herrera-Schlesinger; Elvis F. Higueta-Carvajal. Paper presented at the ISRM 9th International Symposium on Geomechanics. May 2021. Paper Number: ISRM-ISG-2021-03. URL: <https://search.spe.org/i2kweb/SPE/doc/onepetro:7B4F3D80>.
- [6] Гильманов А.Я., Ковальчук Т.Н., Скобликов Р.М., Федоров А.О., Ходжиев Е.Н., Шевелев А.П. Анализ влияния теплофизических параметров пласта и флюида на процесс пароциклического воздействия на нефтяные пласты // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2023. Т. 9, № 3 (35). С. 6–27. DOI: <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27>. EDN: <https://elibrary.ru/uelynd>.
- [7] Алтунина Л.К., Кувшинов В.А., Кувшинов И.В. Применение термотропных композиций для увеличения нефтеотдачи при пароциклических обработках скважин на пермо-карбоновой залежи Усинского месторождения // Журнал Сибирского федерального университета. Химия. 2019. Т. 12, № 1. С. 136–143. DOI: <http://doi.org/10.17516/1998-2836-0113>.
- [8] Wilson A. Cyclic Steam Stimulation Results in High Water Retention for Kuwaiti Heavy-Oil Field // Journal of Petroleum Technology. 2018. Vol. 70, issue 3. P. 80–82. DOI: [10.2118/0318-0080-JPT](https://doi.org/10.2118/0318-0080-JPT).
- [9] Xu Z.X., Li S.Y., Li B.F., Chen D.Q., Liu Z.M., Li Z.M. A review of development methods and EOR technologies for carbonate reservoirs // Petroleum Science. 2020. Vol. 17, № 3. P. 990–1013. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12182-020-00467-5>.
- [10] Seyed Mousa Mousavi Mirkalaei, Rahim Masoudi, Abdolrahim Ataei. Evaluation of Steam Flooding and Cyclic Steam stimulation (CSS) for a Fractured Carbonate Heavy Oil Reservoir. Paper presented at the International Petroleum Technology Conference, Bangkok, Thailand, November 2011. Paper Number: IPTC-15454-MS. DOI: <https://doi.org/10.2523/IPTC-15454-MS>.
- [11] Aguilar Maria G., Robles Eliseo Mares, Cabra Garduza Carlos M., Peralta Oscar Osorio. CSS Performance in Sands of Samaria Tertiary Field, Mexico. Paper presented at the SPE Heavy and Extra Heavy Oil Conference: Latin America, Medellin, Colombia, September 2014. Paper Number: SPE-171091-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/171091-MS>.
- [12] Jamaloei B.Y., Singh A., Solberg A. Opportunities and Challenges of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Development in Seal's Cadotte Area. Paper presented at the SPE Heavy Oil Conference-Canada, Calgary, Alberta, Canada, June 2014. Paper Number: SPE-170095-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/170095-MS>.
- [13] Chen H., Shen X., Yu. J., Yang S. Новый комплексный реагент для снижения вязкости сверхтяжелой нефти с анамально высоким кислотным числом при холодном способе добычи // Нефтехимия. 2020. Т. 60, № 5. С. 612–618. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0028242120050056>. EDN: <https://elibrary.ru/wwnkik>.

- [14] Вяткин К.А., Кочнев А.А., Лекомцев А.В. Анализ зонального распространения высоковязких нефтей и изучение реологических свойств водонефтяных эмульсий Пермского края // Экспозиция "Нефть. Газ". 2017. № 2(55). URL: <https://repository.geologyscience.ru/handle/123456789/13564?show=full>.
- [15] Trigos E.M., Lozano M.E., Jimenez A.M. Cyclic steam stimulation enhanced with nitrogen // Paper presented at SPE Improved Oil Recovery Conference (14–18 April, Tulsa, Oklahoma, USA). 2018. Conference paper SPE-190173-MS. 11 p. DOI: <http://doi.org/10.2118/190173-MS>.
- [16] Marx J.W., Langenheim R.H. Reservoir heating by hot fluid injection // Petroleum Transactions, AIME. 1959. Vol. 216, no. 1. P. 312–315. DOI: <https://doi.org/10.2118/1266-G>.
- [17] Jones J. Cyclic steam reservoir model for viscous oil, pressure depleted gravity drainage reservoirs // Paper presented at SPE California Regional Meeting (13–15 April 1977, Bakersfield, California). 1977. Paper Number SPE-6544-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/6544-MS>.
- [18] Lauwerier H.A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid // Applied Scientific Research, Section A. 1955. Vol. 5, no. 2. P. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03184614>.
- [19] Антониади Д.Г., Гарушев А.Р., Ишиханов В.Г. Настольная книга по термическим методам добычи нефти. Краснодар: Советская Кубань, 2000. 462 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23195297>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tnpdsb>.
- [20] Брусиловский А.И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. Москва: Грааль, 2002. 575 с. URL: <https://djuv.online/file/9NsfPZ7Ri5siJ?ysclid=m88erlrerf378944373>.
- [21] Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов. Москва: Недра, 1989. 422 с. URL: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-burzhe-termicheskie-metody-povysheniya-nefteotdachi-plastov.pdf>.
- [22] Temizel Cenk, Gorucu S. Emre, Erdogan Sinem Setenay, Tiwari Aditya. Optimization of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Under Geomechanics-Dependent Permeability. Paper presented at the SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October 2015. Paper Number: SPE-176716-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/176716-MS>.
- [23] Yang X., Zhao H., Zhang B., Zhao Q., Cheng Y., Zhang Y., Li Y. Displacement characteristics and produced oil properties in steam flood heavy oil process // Energies. 2022. Vol. 15, issue 17. Article 6246. DOI: <https://doi.org/10.3390/en15176246>.
- [24] Савчик М.Б., Ганеева Д.В., Распопов А.В. Повышение эффективности пароциклических обработок скважин верхнепермской залежи Усинского месторождения на основе гидродинамической модели // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. 2020. Т 20, № 2. С. 137–149. DOI: <http://doi.org/10.15593/2224-9923/2020.2.4>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qvizkw>.
- [25] Осипов А.В., Малофеев Г.Е., Соломатин А.Г., Нилов Ю. Закономерности влияния коэффициентов расчлененности и песчанистости пласта на технологическую эффективность паротепловых обработок призабойной зоны скважин // III Международный научный симпозиум "Теория и практика применения методов увеличения нефтеотдачи пластов", (20–21 сентября 2011; Москва): материалы: в 2 т./ ОАО "ВНИИнефть". Москва, 2011. Т. 1. С. 150–155.
- [26] Liu J., Zhong L., Hao T., Liu Y. Study on flow characteristics of produced fluid in Bohai Oilfield cycle steam stimulated heavy oil reservoir // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. Vol. 966. Article 012006. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/966/1/012006>.
- [27] Ремеев М.М. Исследования по определению градиентов давления сдвига и предельного разрушения структуры для высоковязкой нефти месторождений Татарстана. // Сборник научных трудов ТатНИПИнефть. Т. 83. Казань: Институт "ТатНИПИнефть", 2015. С. 87–90. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25473793>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vllngr>.
- [28] Суслов В.А. Тепломассообмен: учеб. пособие. Санкт-Петербург: СПбГУИТД ВШ ТиЭ, 2016. Ч. 1. 98 с.: ил. 58. ISBN 978-5-91646-057-5. URL: <https://nizrp.narod.ru/metod/kpte/19.pdf?ysclid=m88hgha7cx348574703>.
- [29] Закиров А.И. Обоснование режимов трубопроводного транспорта битуминозной нефти: дис. ... канд. техн. наук: 25.00.19. Санкт-Петербург, 2016. 170 с. URL: <https://www.dissercat.com/content/obosnovanie-rezhimov-truboprovodnogo-transporta-bituminoznoi-nefti>.



- [30] Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Этюды о моделировании сложных систем нефтедобычи. Нелинейность, неравновесность, неоднородность. Уфа: Гилем, 1999. 464 с. URL: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-etyudyomodelirovaniislozhnyhsistemneftedobychi.djvu>.
- [31] Зиганшин Р.Ш., Маргачев Д.А., Зиновьев А.М., Борисевич Ю.П., Никитин А.В., Шейкина М.А. Развитие технологий разработки месторождений высоковязкой нефти в современных условиях // Вестник евразийской науки. 2023. Т. 15, № 3. URL: <https://esj.today/PDF/30NZVN323.pdf>.
- [32] Шагапов В.Ш., Юмагулова Ю.А., Гиззатуллина А.А. Моделирование динамики давления и температуры в пласте с высоковязкой нефтью при нагревании // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. № 1–2. С. 62–68. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345218>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yseewh>.
- [33] Распоряжение Минприроды России от 01.02.2016 № 3-р (ред. от 19.04.2018) "Об утверждении методических рекомендаций по применению Классификации запасов и ресурсов нефти и горючих газов, утвержденной приказом Министерства природных ресурсов и экологии Российской Федерации от 01.11.2013 № 477". URL: <https://legalacts.ru/doc/rasporjazhenie-minprirody-rossii-ot-01022016-n-3-r-ob-utverzhdanii/?ysclid=m88jda5sgt278440247>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-34-50

Criterion-based method for determining the time of steam injection during steam cyclic stimulation of bottomhole zones of wells

Shevelev A.P. , Gilmanov A. Ya. , Skoblikov R.M. 

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation; a.p.shevelev@utmn.ru; ORCID: 0000-0003-0017-4871 (A.P.); a.y.gilmanov@utmn.ru; ORCID: 0000-0002-7115-1629 (A. Ya.); skoblikov.rodion@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-2241-246X (R.M.);

Received: 18.01.2025

Revised: 03.03.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. The problems' solving of heat and mass transfer during the cyclic steam stimulation of the bottom-hole zone of the production wells allows us to control the process of high-viscous oil extracting. Based on the mechanics of multiphase systems development approaches, a mathematical model is formulated and a criterion method for the steam injection time determining into the bottomhole zone is proposed. Within the framework of this method, the following processes are crucial: heat transfer to the roof and bottom of the reservoir, the water-saturated zone increase during continuous injection, and the presence of a limiting pressure gradient in a non-Newtonian fluid. The developed model was tested on the synthetic data. The development dynamics of thermal, steam-water and oil-water fronts during injection in the radial formulation of the problem are investigated. The model was verified based on a comparison of the results obtained with calculations in a hydrodynamic simulator.

Key words: heat and mass transfer; phase transitions; underground hydromechanics; convective flows; physical and mathematical modeling; methods of increasing oil recovery.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Shevelev A.P., Gilmanov A. Ya., Skoblikov R.M. Criterion-based method for determining the time of steam injection during steam cyclic stimulation of bottomhole zones of wells. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* / *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 34–50. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-34-50. (In Russ.)

© Shevelev A.P., Gilmanov A. Ya., Skoblikov R.M., 2025

Alexander P. Shevelev (a.p.shevelev@utmn.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

Alexander Ya. Gilmanov (a.y.gilmanov@utmn.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Modeling of Physical Processes and Systems, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

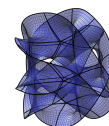
Rodion M. Skoblikov (skoblikov.rodion@yandex.ru) – graduate student of the School of Natural Sciences, TF-23-01 group, University of Tyumen, 6, Volodarskogo Street, Tyumen, 625003, Russian Federation.

References

- [1] Alzate-Espinosa G.A., Araujo-Guerrero E.F., Benítez-Peláez C.A., Herrera-Schlesinger M.C., Torres-Hernández C.A., Higueta-Carvajal E., Naranjo-Agudelo A., Cartagena-Pérez D.F. Assessment of the impact of stress path and strain-dependent permeability on reservoir productivity in CSS. Paper presented at the ARMA/DGS/SEG International Geomechanics Symposium. November 2021. Paper Number: ARMA-IGS-21-077. Available at: <https://search.spe.org/i2kweb/SPE/doc/onepetro:0C188027>.
- [2] Jianfeng Liu, Xiaoming Wu, Shouguo Sun, Ling Hao. The Application of Complex Displacement in Cyclic Steam Stimulation CSS and Steam Flooding SF Development in Liaohe Oilfield: A Field Performance Study. Paper presented at the SPE Canadian Energy Technology Conference, Calgary, Alberta, Canada, March 2022. Paper Number: SPE-208940-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/208940-MS>.
- [3] Shevelev A.P., Fedorov K.M., Gilmanov A.Ya. Optimization of cyclic steam stimulation of oil reservoir. In: *XIII Research and practical conference "Mathematical modeling and computer technologies in the processes of field development"*. Moscow, 2022, pp. 181–195. Available at: https://oil-industry.net/SD_PDF/2021/04/181-195%20Шевелев.pdf. (In Russ.)
- [4] Chen F., Liu H., Dong X., Wang Y., Zhang Q., Zhao D., Gai P., Yin F., Qu L. A new analytical model to predict oil production for cyclic steam stimulation of horizontal wells. Paper presented at the SPE Western Regional Meeting (23–26 April 2019, San Jose, California, USA). Paper Number: SPE-195291-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/195291-MS>.
- [5] Alzate-Espinosa Guillermo A., Naranjo-Agudelo A.J., Araujo-Guerrero Edson F., Torres-Hernández Carlos A., Cartagena-Pérez Daniel Felipe, Benítez-Peláez Camilo A., Hernández-Ricaurte Mario A., Herrera-Schlesinger Maria C., Higueta-Carvajal Elvis F. Assessment of the Effect of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Operational Variables on Well Productivity Including Geomechanical Modeling. Paper presented at the ISRM 9th International Symposium on Geomechanics, May 2021. Paper Number: ISRM-ISG-2021-03. Available at: <https://search.spe.org/i2kweb/SPE/doc/onepetro:7B4F3D80>.
- [6] Gilmanov A.Ya., Kovalchuk T.N., Skoblikov R.M., Fedorov A.O., Khodzhiev Ye.N., Shevelev A.P. Analysis of the influence of the thermophysical parameters of the reservoir and fluid on the process of cyclic steam stimulation. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 2023, vol. 9, no. 3 (35), pp. 6–27. DOI: <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-3-6-27>. EDN: <https://elibrary.ru/ueelynd>. (In Russ.)
- [7] Altunina L.K., Kuvshinov V.A., Kuvshinov I.V. Application of Thermotropic Compositions for EOR with Cyclic-Steam Stimulation at Permian-Carboniferous Deposits of Usinsk Oilfield. *Journal of Siberian Federal University. Chemistry*, 2019, vol. 12, issue 1, pp. 136–143. DOI: <http://doi.org/10.17516/1998-2836-0113>. (in Russian)
- [8] Wilson A. Cyclic Steam Stimulation Results in High Water Retention for Kuwaiti Heavy-Oil Field. *Journal of Petroleum Technology*, 2018, vol. 70, no. 3, pp. 80–81. DOI: <http://doi.org/10.2118/0318-0080-JPT>.
- [9] Xu Z.X., Li S.Y., Li B.F., Chen D.Q., Liu Z.M., Li Z.M. A review of development methods and EOR technologies for carbonate reservoirs. *Petroleum Science*, 2020, vol. 17, issue 3, pp. 990–1013. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12182-020-00467-5>.
- [10] Seyed Mousa Mousavi Mirkalaei, Rahim Masoudi, Abdolrahim Ataei. Evaluation of Steam Flooding and Cyclic Steam stimulation (CSS) for a Fractured Carbonate Heavy Oil Reservoir. Paper presented at the International Petroleum Technology Conference, Bangkok, Thailand, November 2011. Paper Number: IPTC-15454-MS. DOI: <https://doi.org/10.2523/IPTC-15454-MS>.

- [11] Aguilar Maria G., Robles Eliseo Mares, Cabra Garduza Carlos M., Peralta Oscar Osorio. CSS Performance in Sands of Samaria Tertiary Field, Mexico. Paper presented at the SPE Heavy and Extra Heavy Oil Conference: Latin America, Medellin, Colombia, September 2014. Paper Number: SPE-171091-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/171091-MS>.
- [12] Jamaloei B.Y., Singh A., Solberg A. Opportunities and Challenges of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Development in Seal's Cadotte Area. Paper presented at the SPE Heavy Oil Conference-Canada, Calgary, Alberta, Canada, June 2014. Paper Number: SPE-170095-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/170095-MS>.
- [13] Chen H., Yang S., Shen X., Yu. J. A new composite viscosity reducer for abnormal low temperature extra-heavy oil reservoir with high acid value. *Petroleum Chemistry*, 2020, vol. 60, no. 9, pp. 1003–1008. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965544120090054>. EDN: <https://elibrary.ru/xkyvvn>. (In English; original in Russian).
- [14] Vyatkin K.A., Kochnev A.A., Lekomtsev A.V. Evaluation of oil viscosity expansion and property investigation of oil-water emulsion in Perm region. *Exposition "Oil & Gas"*, 2017, no. 2(55). Available at: <https://repository.geologyscience.ru/handle/123456789/13564?show=full>. (In Russ.)
- [15] Trigos E.M., Lozano M.E., Jimenez A.M. Cyclic steam stimulation enhanced with nitrogen. Paper presented at the SPE Improved Oil Recovery Conference (14 – 18 April, Tulsa, Oklahoma, USA), 2018, conference paper SPE-190173-MS, 11 p. DOI: <http://doi.org/10.2118/190173-MS>.
- [16] Marx J.W., Langenheim R.H. Reservoir heating by hot fluid injection. *Petroleum Transactions, AIME*, 1959, vol. 216, no. 1, pp. 312–315. DOI: <https://doi.org/10.2118/1266-G>.
- [17] Jones J. Cyclic steam reservoir model for viscous oil, pressure depleted gravity drainage reservoirs. Paper presented at the SPE California Regional Meeting (13–15 April 1977, Bakersfield, California), 1977, Paper Number SPE-6544-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/6544-MS>.
- [18] Lauwerier H.A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. *Applied Scientific Research, Section A*, 1955, vol. 5, no. 2, pp. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03184614>.
- [19] Antoniadis D.G., Garushev A.R., Ishikhanov V.G. Reference book on thermal methods of oil production. Krasnodar: Sovetskaya Kuban', 462 p. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23195297>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tnpdsb>. (In Russ.)
- [20] Brusilovsky A.I. Phase transformations in the development of oil and gas fields. Moscow: Graal', 2002, 575 p. Available at: <https://djvu.online/file/9NsfPZ7Ri5siJ?ysclid=m88erlrerf378944373>. (In Russ.)
- [21] Burger J., Sourieau P., Combarnous M. Thermal methods of increased oil recovery. Moscow: Nedra, 1989, 422 p. Available at: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-burzhe-termicheskie-metody-povysheniya-nefteotdachi-plastov.pdf>. (In Russ.)
- [22] Temizel Cenik, Gorucu S. Emre, Erdogan Sinem Setenay, Tiwari Aditya. Optimization of Cyclic Steam Stimulation (CSS) Under Geomechanics-Dependent Permeability. Paper presented at the SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October 2015. Paper Number: SPE-176716-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/176716-MS>.
- [23] Yang X., Zhao H., Zhang B., Zhao Q., Cheng Y., Zhang Y., Li Y. Displacement characteristics and produced oil properties in steam flood heavy oil process. *Energies*, 2022, vol. 15, issue 17, Article 6246. DOI: <https://doi.org/10.3390/en15176246>.
- [24] Savchik M.B., Ganeeva D.V., Raspopov A.V. Improvement of the efficiency of cyclic steam stimulation of wells in the upper premian deposit of the Usinskoye field based on the hydrodynamic model. *Bulletin of PNRPU. Geology. Oil and Gas Engineering and Mining*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 137–149. DOI: <http://doi.org/10.15593/2224-9923/2020.2.4>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qvizkw>. (In Russ.)
- [25] Osipov A.V., Malofeev G.E., Solomatin A.G., Nllov Yu. Patterns of influence of the coefficients of fragmentation and sandiness of the formation on the technological efficiency of steam-thermal treatments of the bottom-hole zone of wells. In: *III International Scientific Symposium "Theory and Practice of Enhanced Oil Recovery Methods Application"*, (September 20–21, 2011; Moscow): materials: in 2 vols.. Moscow, 2011, vol. 1, pp. 150–155. (In Russ.)
- [26] Liu J., Zhong L., Hao T., Liu Y. Study on flow characteristics of produced fluid in Bohai Oilfield cycle steam stimulated heavy oil reservoir. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2022, vol. 966, Article number 012006. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/966/1/012006>.

- [27] Remeev M.M. Studies on the determination of shear pressure gradients and ultimate structural failure for high-viscosity oil of Tatarstan. In: *Collection of research works of TatNIPIneft*. Vol. 83. Kazan: Institut "TatNIPIneft", 2015, pp. 87–90. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25473793>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vllngr>. (In Russ.)
- [28] Suslov V.A. Heat and mass transfer: textbook. Saint Petersburg: SPbGUPTD VSh TiE, 2016, Part 1, 98 p.; illustrated 58. ISBN 978-5-91646-057-5. Available at: <https://nizrp.narod.ru/metod/kpte/19.pdf?ysclid=m88hgha7cx348574703>. (In Russ.)
- [29] Zakirov A.I. Justification of the modes of pipeline transport of bituminous oil: Candidate's of Technical Sciences thesis: 25.00.19. Saint Petersburg, 2016, 170 p. Available at: <https://www.dissercat.com/content/obosnovanie-rezhimov-truboprovodnogo-transporta-bituminoznoi-nefti>. (In Russ.)
- [30] Mirzajanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. Studies on modeling complex of oil production systems. Nonlinearity, disequilibrium, heterogeneity. Ufa: Gilem, 1999, 464 p. Available at: <https://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-etyudyomodelirovaniislozhnyhsistemneftedobychi.djvu>. (In Russ.)
- [31] Ziganshin R.Sh., Margachev D.A., Zinovev A.M., Borisevich Iu.P., Nikitin A.V., Sheikina M.A. Improvement of heavy oil field development technologies in modern conditions. *The Eurasian Scientific Journal*, 2023, vol. 15, no. 3. Available at: <https://esj.today/PDF/30NZVN323.pdf>. (In Russ.)
- [32] Shagapov V.Sh., Yumagulova Yu.A., Gizzatullina A.A. Modeling the dynamics of pressure and temperature in the reservoir with heavy oil when heated. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, vol. 1–2, pp. 62–68. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345218>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yseewh>. (In Russ.)
- [33] Order of the Ministry of Natural Resources of the Russian Federation dated 01.02.2016 № 3-r (as amended on 19.04.2018) "On approval of methodological recommendations for the application of the Classification of Reserves and Resources of Oil and Combustible Gases, approved by the Order of the Ministry of Natural Resources and Ecology of the Russian Federation dated 01.11.2013 № 477". Available at: <https://legalacts.ru/doc/rasporjazhenie-minprirody-rossii-ot-01022016-n-3-r-ob-utverzhdenii/?ysclid=m88jda5sgt278440247>. (In Russ.)



Метод формирования логико-событийных вычислительных моделей трансформирующихся социоинформационных процессов

Переварюха А.Ю. 

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация; madelf@rambler.ru; ORCID: 0000-0002-1049-0096 (А.Ю.);

Поступила: 23.02.2025

Рассмотрена: 26.03.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. В статье развивается метод организации логико-событийной гибридной модели для анализа социоинформационных процессов при их стадийности, событийных трансформациях и стремительных возмущениях. Специфические ситуации с нестационарным временем жизни у череды непересекающихся поколений не описываются непрерывными уравнениями математической биофизики. Применение многопараметрических функциональных итераций с воздействием $x_{n+1} = \psi(r; x_n) \zeta(a; x_{n-i}) + \Theta[n], x_{max} = \max \psi(x) \neq \max \zeta(x)$ приводит к каскаду бифуркаций с сосуществованием устойчивых циклов и множества точек $\{\hat{r}, \hat{a}\}$ переходов "хаос $\leftrightarrow$ цикл", что выходит за рамки сущностной интерпретации поведения траектории. Предложенный метод актуален для моделирования случаев, когда у поколений различается длина стадий ювенального онтогенеза. Модели важны для прогнозов инвазионных процессов у способных к массовым вспышкам размножения насекомых, где действует фактор зимовки поколений. Проводится построение гибридных структур уравнений, описывающих динамику поколений на смежных неравномерных отрезках онтогенеза в зависимости от изменения факторов смертности из-за конкуренции за ресурсы, регулируемой скоростью роста у организмов. Гибридная модель позволяет получить пульсирующую динамику численности, где переходы к состоянию избыточно многочисленных поколений "вспышек" взаимосвязаны с выживанием зимующего поколения и уровнем конкурентной смертности летнего поколения. Метод моделирования актуален для поддерживаемых искусственным воспроизводством популяций и для случаев, когда у разных социальных групп различается репродуктивная активность, что отражается в развитии демографических волн, нарушении социальных структур и нарушении традиционных взаимодействий при кризисе социальных структур.

Ключевые слова: гибридные вычислительные структуры; анализ вспышек численности; разрывные траектории; волнообразные социобиологические процессы; информационное общество; релаксационные циклы; пульсирующая траектория эволюции экодинамики.

Введение

В статье рассмотрим проблему методологии моделирования, связанную с тем аспектом, что непрерывное развитие в реальных биосистемах и социоинформационном пространстве — достаточно ограниченное во времени явление. Плавные протекающие процессы в экодинамике довольно редки и представляют скорее исключение, которое на самом деле нельзя считать общим случаем. Типичными при взаимодействии организмов и их среды являются процессы с изменениями: со стадийностью, пороговыми состояниями и событийными переходными режимами [1]. Стадийное развитие процессов с резкими переходами в системе взаимодействия социального, биофизического и информационного пространства, как, например, стадии выработки иммунного ответа при презентации антигенов мутировавшего вируса, требует изучения логики изменений. Для демографии характерны ступенчатые диаграммы смены поколений, так как в человеческом социуме отмечается явление периодов значительного роста рождаемости baby boom и социологи говорят про поколения "беби-бумеров". За беби-бумом часто следует

демографическая депрессия. Проходит старение населения эпохи взрыва рождаемости, живших в условиях высокой конкуренции начиная с переполненного родильного дома. В Японии такой пороговый эффект отмечен в 2007 г. как "выпуск детей Данкай"¹ — выхода на пенсию самого массового поколения. Как следствие смены трендов на графике², где отражаются текущая смертность и рождаемость новых поколений, мы видим "крест смерти когда кривая убыли вырывается выше, чем линия воспроизводства. Важный аспект проблемы прогнозирования в том, что подобные экстремальные явления эпизодические и скоро завершаются, как фронт скоро распадающейся популяционной волны при стремительной инвазии камчатского краба в Норвежском море. Другой наглядный пример — очередная весенняя волна активности COVID-19 в 2025 г. при появлении мутировавшего штамма *LB.8*. Даже длившиеся пять лет волны заражений коронавирусом оказываются не вечными, так как популяционный иммунитет медленно и неуклонно преодолевает кризис. Притом что новые штаммы возникают регулярно, они уже не столь заразны и вызывают только локальные вспышки — вирус SARS-CoV-2 вошел в состояние эволюционного цугцванга. Пандемия COVID-19 поставила перед математической биологией теоретическую проблему, так как известные эпидемические модели "SIRS-схемы" оказались несостоятельны в прогнозах завершения активности вируса и строились без учета многих событийных факторов, импульсной эволюции возбудителя и гетерогенности иммунного ответа.

1. Теоретическая проблема моделирования переходной экодинамики

Часто для ограниченного и регулируемого плотностью роста группы организмов используют "логистические уравнения", забывая, что это феноменологическое описание и справедливое для простых систем в условиях равновесия со средой колонии микроорганизмов при фиксированном поступлении питательных веществ. Описываемую гладкими кривыми динамику для любых начальных условий $\forall N(0) > 0$ могут демонстрировать простейшие размножающиеся делением организмы в лабораторных условиях. Если в колонию лабораторных бактерий внести вирус-бактериофаг, то будет запущен переходный и нестационарный режим существования эволюционирующих видов [2]. Возникший после инвазионного кризиса процесс развивается совсем не так, как предсказывает другая известная гладкая модель осцилляций Лотки — Вольтерра. В реальных экспериментах после кризиса и переходных колебаний будет с большой вероятностью достигнуто новое равновесие из-за событийного эффекта — действия возникшей у одной бактерии и переданной другим эволюционной адаптации. В альтернативном сценарии последует полная гибель колонии бактерий, если адаптации к вирусу вовремя не последует, так как успех выработки ответа имеет некоторую вероятностную составляющую. Исследования механизмов адаптации вирусов и бактерий в лабораторных опытах привели к открытию знаменитого метода геномного редактирования *CRISPR/Cas-9*. Эта эндонуклеаза изначально выполняла функцию настраиваемого по сигнатуре участка ДНК бактериального антивируса. Бактерии приобретали способность распознавать и разрывать чужеродную ДНК. Теперь ученые с помощью этого антивирусного механизма могут исправлять опасные генетические дефекты и создавать ГМО-популяции. Соответственно, бактериофаг должен накапливать мутации, уклоняясь от связывания с белком Cas-9 бактерий, либо вирус исчезнет в эксперименте, если вирус попал в эволюционный тупик, сравнимый с шахматным цугцвангом и все возможные мутации ухудшают его приспособленность. Именно поэтому казавшаяся когда-то перспективной терапия с бактериофагами имеет ограниченную эффективность. Проблема моделирования в том, что лабораторные системы противоборства бактерии — бактериофаг до и после возникновения опосредованной CRISPR-адаптации существенно отличаются и эти ситуации не описываются одними модельными уравнениями.

¹В Японии Dankai по Sedai называют родившихся в годы необычно высокой рождаемости 1947–1949 г.

²График демографической пирамиды Японии с двумя поколениями Dankai представлен в статье "Википедии". URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Demographics_of_Japan.

Устойчивое циклическое поведение в реальных экспериментах с небыстро эволюционирующими антагонистами получить довольно проблематично, что было показано 1934 г. Г.Ф. Гаузе [3] в серии лабораторных экспериментов "хищник/жертва". Возникшие колебания у популяций двух видов были недолгими. Опыты заканчивались последовательной их гибелью и нулевым равновесием. Однако известно, что в тропических лесах, где в почве конкурируют сотни видов простых организмов, поддерживается стабильная ситуация. Масштабные всплески численности вредителей и знаменитые "циклы леммингов" характерны для северных широт, где биоразнообразие невелико, а лимитирующий фактор — низкая скорость восстановления растительности. В плотном тропическом сообществе ни один новый вид-хищник не может размножиться так быстро, чтобы уничтожить вид-жертву, так как его избыточная репродуктивная активность быстро компенсируется. У эффективных видов-паразитов появляются свои паразиты второго порядка. После начала инвазии в адаптивную среду изменяются не только параметры, но и форма регуляции процесса, где важную роль играет фактор запаздывания реакции. Так хрестоматийная модель приводит к противоречивому выводу, что в простой системе может сохраняться стабильный циклический режим. В реальности стабильность сообщества видов растёт с увеличением контуров обратных связей, но при увеличении фазового пространства вольтерровских моделей как раз возможно получение сложной неупорядоченной динамики и аperiодических колебаний.

При возникновении эпидемий и инвазий развиваются очень разнородные по своим динамическим признакам процессы, которые не описываются одним изначально заданным набором уравнений. Факторы противодействия волатильны и изменчивы, так как виды-агрессоры и среда их распространения претерпевают разнообразные эволюционные изменения. В результате конкурентной борьбы возникают специфические адаптации, которые необходимо учитывать при построении модели с алгоритмом переопределения структуры. Из описанных противоречий возник парадоксальный принцип управляемой экодинамики: чтобы получить более простое поведение саморегулируемой биосистемы, эту систему необходимо усложнить.

В статье мы продолжим развивать ранее предложенные в серии работ в журнале СГУ [4] методы гибридного моделирования для специфических биофизических явлений [5] и пороговых процессов экодинамики [6]. Для разных объектов и ситуаций автором использовались различные классы моделей, как дискретные, так и непрерывные. Для задач описания структуры взаимодействия процессов в Каспийском море в цепочках передачи воздействия [7] и установления роли факторов в деградации биоресурсов Каспия модифицирован формализм когнитивных графов [8]. Цель настоящей работы — разработка метода моделирования воспроизводства популяций в специфическом случае адаптации инвазионного вида при образовании смежных поколений с гетерогенным жизненным циклом. По опыту автора актуальная задача моделирования биосистем требует развития оригинального подхода, так как в противном случае не потребовалась бы прогностических расчетов. Понятие гибридности модели стало слишком широким, потому мы говорим о логико-событийном и динамически переопределяемом способе построения вычислительных структур.

2. Обоснованность трансформаций поведения дискретных моделей социобиологических систем

Рассмотрим теоретически важные свойства и нелинейные эффекты динамики траектории, возникавшие в заданных в форме итерационной динамики экодинамических моделях. Это популярный формализм, так как поведение [9] итераций значительно разнообразнее при малой размерности фазового пространства. Варианты фазовых портретов итерационных моделей обширны: точки равновесия, циклы, несколько типов аттракторов и репеллеров в форме канторовского множества — компактного, совершенного и вполне разрывного множества, где нет ни внутренних, ни изолированных точек. При этом есть несколько механизмов образования в итерационной динамике таких фрактальных объектов. Более того, фрактальные объекты как аттракторы $\Lambda : f(\Lambda) \in \Lambda, \partial\Lambda \notin \Lambda$ могут моментально терять свойство инвариантности

$\exists x_k \in \Lambda : f(x_k) \notin \Lambda$, соприкасаясь со своей границей, при этом инвариантная граница области притяжения $\forall x_0 \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) \in \Lambda$ сама тоже может быть канторовским множеством.

Для итераций $x_{n+1} = f(\underbrace{\dots}_n(x_0) \dots)$ установлены свойства хаотизации поведения, которые универсальны и относятся к целым классам отображений отрезка в себя. Проблема хаотизации в том, что если один из режимов поведения итераций получает трактовку, то с этим режимом ассоциирован ряд избыточных бифуркаций или кризисов хаотического аттрактора Λ . Хаотизация в имитационном сценарии может внезапно завершиться устойчивым циклом периода $p \neq 2^i, i = 0 \dots \infty$.

Метод моделирования поколений в итерациях с возмущением $\Xi_n: x_{n+1} = \psi(x_n) - \Xi_n$ выглядит нагляднее. В истории известны примеры неудачного применения для оптимизации промысла запасов рыб модели на основе нелинейной функции связи существующего запаса взрослых с нормой вылова q и производимого запасом пополнения, например $x_{n+1} = ax_n \exp(-bx_n)$, $a > 1$, $0 < b < 1$, если глобальная точка $x^* = \psi(x^*)$, $1 < a < \hat{a}$, $\forall x_0 > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(x_0) = x^*$ теряет устойчивость при $a = e^2 + \epsilon$, $|\psi'(x^*)| > 1$. Именно в уже известных популяционных моделях была обнаружена цикличность и теоретически исследована хаотизация траектории, определяемая как сценарий каскада бифуркаций удвоения периода $p = 2^i, i \rightarrow \infty, a = a_\infty < \infty$ с общими для всех итераций константами М. Фейгенбаума [10]. В параметрических диапазонах $a > a_\infty$ наблюдаются переходы хаос $\rightarrow$ цикл, образующие бесконечное число "окон периодичности" в силу свойства существования n пар точек пересечения с прямой $\psi(x) = x$ у любой n раз вычисленной унимодальной функции $\psi^n(\dots \psi(x) \dots)$. Хаотизация — следствие возникшего замкнутого множества, не содержащего никаких внутренних и изолированных точек. В фазовой плоскости итераций такое множество образовано последовательной процедурой из-за несчетного числа неустойчивых точек всех 2^i -циклов и всех их прообразов: $\mathcal{F} = \bigcup_j^{2^n} \psi^{-n}(x_j^*)$. Образование нигде не плотного множества из-за исключения континуума периодических траекторий всех периодов — сугубо математическое явление. Для прогнозов эксплуатации популяций требуется расширить свойства модели. Актуально было бы получить у $\psi(x)$ две стационарные точки $0 < x_1^* < x_{\max} < x_2^*$ и ненулевую горизонтальную асимптоту, сделав поведение $\psi^n(x_0)$ менее разнообразным и, значит, нехаотическим. Целесообразно для моделирования реальности нарушить данные в работе [11] рамки условий сценария с $p = 2^i, i \rightarrow \infty$ с $\exists x, 0 < x < x_{\max} : \mathcal{H}_{\psi(x)} > 0$, избегая таким способом для унимодальных итераций с $f'(x) \neq 0, x \neq x_{\max}$ основного критерия неограниченности каскада удвоений — отрицательности шварциана:

$$\mathcal{H}_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2 < 0.$$

Для популяционных циклов $x_i^* < x_{i+1}^*$ у видов с кратким онтогенезом характерен максимум при завершении периода, но циклы после бифуркаций удвоения $p = 2^{i+1}$ нужным расположением точек $x_1^* < x_{i+1}^* < x_p^*, \sum_{i=1}^{p-1} x_i^* < x_p^*$ обладать не могут. По обходу точек различают возникшие при разных значениях a циклы $p = 4 \times 2$ и $p = 2^4$. Согласно теореме Шарковского [12], в модели возможно получение циклов периодов $p \neq 2^i$, но в малых параметрических диапазонах из $a \in [1, \infty]$ и множестве: $\mathfrak{A} = \bigcup_{p=3}^{\infty} \{\mathcal{A}_p\}$ периодических окон при $\mathcal{A}_p = [a_p, a_{p*}] \rightarrow 0, p = 3 \dots \rightarrow \infty$. Границы параметрического окна $[a_p, a_{p*}]$ цикла периода p среди хаотических интервалов $[a_p, a_{p*}] \rightarrow \max$ при $p = 3$. Порядком чисел А.Н. Шарковского указано сосуществование периодов циклов, и нечетные периоды следуют после всех четных [13]. Порядок чисел сосуществующих циклов начинается со всех степеней числа 2, но заканчивается на цикле $p = 3$. В тот момент, когда получаем в имитационном эксперименте цикл длины три, то, значит, уже существуют циклические траектории всех периодов при данном значении параметров (но эти циклы в данной конфигурации параметров неустойчивые). В имитационном сценарии при любом возмущении коэффициентов траектория станет перемежающейся, так как сам цикл длины три в рамках периодического окна претерпевает удвоения с возникновением четных циклов, но не степеней двойки. Траектория будет практически ламинарной в окрестностях точек этих циклов, но внезапно покидающей их. Сущностный вывод в том, что модель

для регулируемого процесса с циклом нечетного периода при небольшом возмущении сможет демонстрировать любое поведение со спонтанными и резкими переходами между хаосом и циклами в "окнах периодичности" которые существуют для каждого периода. Для практических задач прогнозирования такой вариант поведения не является достоинством математического аппарата, и на самом деле более актуальны модели для описания пороговой эффективности воспроизводства смежных поколений промысловых популяций и нелинейного эффекта Олли, чем хаотических режимов. Согласно расширенным результатам о потере устойчивости возникающих циклов в работе "Период три приводит к хаосу" [15], популяция с нечетным циклом не будет существовать стабильно в волатильной среде, хотя число поколений $p \neq 2^i$ до пика активности встречается часто у мелких млекопитающих. Колеблющиеся популяции с циклом из трех поколений известны [14], но следует ли из этого вывод о нестабильности и хаотичности этой биосистемы? Многие популяции действительно демонстрируют переходные режимы, стадии повышенной активности, сменяющиеся депрессиями, но эти явления не подходят под признаки описанных качеств итерационной динамики.

Таким образом, некоторые из свойств у популярного математического аппарата в популяционной интерпретации избыточны, так как приводят к непредсказуемому увеличению сложности фазовых портретов и вариативной последовательности бифуркаций и кризисов аттрактора. В результате свойства моделей управляемых популяционных процессов при некоторых накладываемых на $f()$ условиях в сущностном рассмотрении проблемы оказываются противоречивыми. Решения и выводы при сопоставлении расчетов при возникновении каскада бифуркаций с реальностью выходят из критериев применимости и единицы составляющих биосистем всегда счетные множества, а популяция представляется как конечное множество различных объектов. Имитационное представление цикличности для реальных ситуаций экоддинамики необходимо модифицировать с целью соблюдения действительно существующих популяционных ограничений.

3. Интерпретация свойств колебаний при включении запаздывания

Запаздывающая регуляция — важное свойство многих биофизических процессов, например выработки иммунного ответа. Включение запаздывания $x_{n+1} = \psi(x_n)\varphi(x_{n-i})$ или $x_{n+1} = ax_n \exp(-\sum_{i=0}^m b_i x_{n-i}) - qx_n$ нарушает важный критерий из теоремы Дж. Синджера о единственности ω -предельного множества траектории унимодальной $\psi^n(x_0)$, но появление альтернативных притягивающих циклов создает динамический эффект в тонком диапазоне параметров. Включение запаздывания — удобный способ описания цикличности в непрерывных моделях.

Флуктуации численности возникали у изолированных популяций в контролируемых условиях лабораторных опытов из-за конкуренции поколений за медленно возобновляющиеся ресурсы [16]. Сложные колебательные и аperiodические режимы возможно получить в одновидовых непрерывных моделях с включением нелинейной запаздывающей регуляции $dN/dt = rF(N(t-\tau)) - \mathfrak{F}(N(t-h), N(t))$. Логистическое уравнение $dN/dt = rN(t)(1 - N(t)/K)$ с монотонным приближением к порогу ниши $\forall t, r, N(0) < K : N(t) \leq K, \lim_{t \rightarrow \infty} N(r, t) = K$ актуально для обобщения с целью моделирования сценариев регулярных колебаний, но не для пульсирующих всплесков и агрессивных инвазий. Например, можно получить затухающий циклический режим в варианте уравнения Хатчинсона с зависящей от плотности популяции обратной связью:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t - \tau))}{K} - \theta \frac{N(t)^2}{(E^2 + N(t - \tau_1)^2)}.$$

Для описания динамики нерегулярных колебаний лабораторных насекомых при сосуществовании имаго и всех стадий личинок предложено уравнение [17] со сосредоточенным запаздыванием h и с постоянной смертностью q :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-h) \exp(-bN(t-h)) - N(t)q, \quad r, b, q, \tau > 0. \quad (1)$$

Установлено [18], что в решении (1) с ростом rh появляется цикл релаксационной формы и при увеличении значений аperiodическая динамика большей амплитуды. Подобные (1) уравнения сохраняют важный недостаток для популяционных прогнозов: $\exists \hat{t}, \lim_{t \rightarrow \hat{t}} \min N_*(rh > B, t) = 0 + \epsilon$, так как если минимумы цикла $N_*(rh)$ стремятся к нулю, то длительный режим флуктуаций численности нереалистичен. При небольших rh в (1) можно получить временное перенасыщение со стабилизацией роста: $\exists t, r, h \forall N(0) : N(t, rh) > K : \lim_{t \rightarrow \infty} N(rh, t) = K$. Величина экологической ниши K нетождественна действующему уровню насыщения лабораторных условий K .

С целью моделирования ситуации появления адаптивного воздействия у атакуемой все-ленцем среды предложим модификацию модели (1) с $-F(N(t-h))$ и с действующим на биотическую среду порогом A :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-h) \exp(-bN(t-h)) - \frac{\theta N^2(t-h)}{(A - N(t-h))^2}. \quad (2)$$

Предложенная модификация (2) описывает актуальную для инвазий ситуацию — однократного прохождения состояния малой, приближающейся к критическому порогу выживания численности, так называемый экологический эффект "бутылочного горлышка". Кризисные явления при инвазиях связаны со стремительно адаптивно возникшим ростом активного биотического противодействия, что можно использовать для выработки мер подавления опасных видов. Форма нелинейности в разных экологических ситуациях должна быть разная. Для задач анализа инвазий логично подбирать соответствующие ситуации функции $\mathfrak{F}(N - l(h))$, чем менять и дополнять параметры модели. Свойства реальных вспышек трудно описать даже моделями с $F(N(t-h_1), \dots, (N(t-l(h_j))))$. Инвазионные процессы состоят из нескольких стадий и вариативны, потому целесообразно включать алгоритмически переопределяемые структуры в правых частях уравнений.

4. Метод непрерывно-событийного моделирования последовательности поколений

На основе проведенного анализа свойств и недостатков итераций и уравнений типа $dN/dt = rF(N(t-\tau)) - \mathfrak{F}(N(t-h), N(t))$ предложим вариант непрерывной вычислительной модели переходных популяционных режимов. Оригинальная гибридная структура должна включать аспекты с событийными трансформациями функций нелинейной регуляции воспроизводства поколений, а не только параметров в правых частях уравнений с $N(t-h)$. Практическая задача прогноза активности чужеродных насекомых в бореальных лесах определила альтернативный итерациям метод представления череды поколений — формализацию скорости убыли поколения от $t = 0$ на стадиях до полового созревания и нового размножения. Учтем естественные факторы жизни популяций и включим развитие каждого поколения непосредственно. Из-за долгой зимней диапаузы "спячки" длительность онтогенеза поколений различна (обозначим эти интервалы времени как τ или $\mathcal{T}$) в зависимости от сезона и, более того, бывает непостоянной между сезонами, так как зависит от погоды. Логично, что для сравнения сценариев инвазий и вспышек эта длительность послужит управляющим параметром. Событийные модели выделяют из пространства состояний предикативно по истинности набора условий точки трансформаций. Точки разрыва в расчетах правых частей легче задать алгоритмом с внешними воздействиями, но мы предлагаем рассчитывать моменты перехода из других связанных уравнений. Метод моделирования позволит разделить момент размножения и дальнейшую убыль полученного поколения $N_n(t_n = 0)$, которая замедляется к моменту размножения и появления другого сезонного поколения $N_{n+1}(t_{n+1} = 0)$. Меняя в сценарных экспериментах величины τ или $\mathcal{T}$, можно оценить влияние продолжительности зимовки находящихся в спячке

особей зимнего поколения из-за погодных условий на частоту появления генераций высокого уровня выживаемости и необычных всплесков численности летнего.

Традиционно у насекомых с полным циклом превращений поколения не перекрываются и имеют различные условия развития, что не выполнялось в упомянутых экспериментах Николсона. Соответственно, у них проявляются иные механизмы, контролирующие формирование итогового половозрелого поколения. Свойства различаются биофизически: так, самки зимних сезонных поколений часто обладают разной плодовитостью и миграционной активностью. Отложенные яйца, нимфы или куколки зимнего поколения находятся в долгом анабиозе до весны. Их поколения-сменщики развиваются в весенних условиях. Учтем, что интервал времени между появлением половозрелых генераций может не быть постоянным. Учет численности опасных насекомых проводят по вредящей стадии, обычно нимф или гусениц старших возрастов, но не по взрослой стадии. Статистикой фиксируется состояние поколения $N(\mathfrak{T})$ в определенный момент $\mathfrak{T}$ незавершенного цикла развития. Во время запуска всплесков численности вредителей состояние популяции оценивается мониторингом по размерам пораженных площадей леса. Предложенная методика расчетов сопряженных краевых задач на последовательности интервалов времени — это естественное предикативное описание для анализа развития насекомых, которые отличаются выраженной стадийностью развития, и их поколения строго последовательные. Например, у цикад поколения появляются на поверхности, размножаются не каждый год, и такой жизненный цикл позволяет уходить от атак специфических паразитов.

5. Структура уравнений разрывного жизненного цикла

Исследовать нелинейные особенности эффективности размножения можно, рассчитывая убыль численности каждого поколения $N(0)$ до его размножения на интервале времени, раздельно учтя факторы смертности в модели динамики плавной убыли:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (3)$$

где α — компенсирующий избыток яиц параметр убыли; β — коэффициент независимой от плотности смертности.

Для весеннего поколения сильнее зависимость его убыли от начальной численности $N(0) = \lambda N(\mathcal{T})$ из-за действия негативных факторов активности естественных врагов. На развивающееся весной поколение оказывают давление массовые паразитические перепончатокрылые, избирательно атакующие ранние стадии развития. Действие паразитов становится эффективным при высокой плотности жертв, что характерно для планового выпуска паразитических наездников против бабочек-вредителей. Можно было подавить выпусками выращенных миниатюрных ос всех вредных для культурных растений чешуекрылых, но самих наездников при их высокой плотности атакуют еще более мелкие паразиты отряда веерокрылые — в природе системы регуляции многоуровневые.

Непосредственное интегрирование (3) даст унимодальную функцию, свойства итераций которой полностью рассмотрены нами в § 1:

$$\int_{N(0)}^{N(t)} \frac{dN}{-(\alpha N(0) + \beta)N(t)} = \int_0^t dt \ln \frac{N(0)}{N(t)} = t(\alpha N(0) + \beta), N(t) = \frac{N(0)}{\exp(t(\alpha N(0) + \beta))}.$$

Для сценариев рассчитаем $N(0)$ из плодовитости, а время определено длиной стадий. Важно, что непрерывную модель (3) легче целенаправленно модифицировать и избегать ее избыточного поведения.

Включим в модель то обстоятельство, что на выживаемость личинок насекомых влияет скорость развития из-за необходимости своевременного перехода на их следующую стадию онтогенеза. Учтем, что способность к избеганию атак доминирующего паразита сопровождается достижением стадии развития, переменами физиологии и поведения, и включим показатель размерного развития $w(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \mathfrak{F}[w(t)]N(0) + \beta)N(t), \quad t \in [0, \tau]. \quad (4)$$

Скорость роста $w(t) = l(N^{-k}(t)), k \notin \mathbb{Z}$ отражается на выживаемости поколения в благоприятных условиях и при меньшей продолжительности онтогенеза. Связь темпов роста личинок $\mathfrak{F}[w(t)]$ будет разной для поколений, потому выберем две формализации $\mathfrak{F}$.

Примем, что метаморфозы могут происходить только после накопления достаточного уровня весового роста $w(t_s)$. Средняя обеспеченность кормом группы особей, в свою очередь, зависит от $N(t)$ и часто предшествующего $N(t - \mathfrak{h})$, что определяет динамику темпов роста особей поколения. Обоснован метод взаимосвязанного описания скорости убыли поколения в зависимости от темпов роста. Для скорости роста $w(t)$ многих видов на периоде жизни после личинки известно балансовое уравнение активности анаболизма ζ и катаболизма σ :

$$\frac{dw}{dt} = \zeta \sqrt[3]{w(t)^2} - \sigma w(t), \quad w(0) = w_0.$$

Балансовое уравнение хорошо описывает рост ряда животных на асимптотике приближения к $w \rightarrow W_\infty$, но исключая период раннего онтогенеза для видов со стадиями жизни и метаморфозами. Для рыб или насекомых данное уравнение необходимо модифицировать. Достаточно сильно действует влияние скученности особей, и первые стадии развития проходят при эндогенном питании. При увеличении плотности возникает асимметричное распределение размерной структуры популяции, остаются либо очень крупные, либо слишком мелкие особи [20], что влияет на размножение.

6. Структура уравнений для динамики первой генерации

С целью алгоритмического описания структуры с переходами необходимо описание изменения поколений от момента его генерации до его единственного момента репродуктивной активности. Опишем динамику убыли численности поколения на интервале $t \in [0, \tau]$ объединенными в систему уравнениями с учетом оптимального роста $\hat{w}$:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = - \left(\alpha \sqrt{\frac{\hat{w}}{w(t)}} N(0) + \beta \right) N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \zeta \frac{w(t)^{2/3}}{\sqrt{N(t)}} - \sigma w(t). \end{cases} \quad (5)$$

В сегменте модели (5) включение запаздывания из-за исчерпания пищевых ресурсов неактуально, так как темп пополнения ресурсов питания в этой фазе обычно компенсирует активное потребление [21]. В начале расчетов из-за включения $N(0)$ убыль в (5) очень стремительна.

7. Структура уравнений для динамики второй сезонной генерации

Смежное поколение испытывает другие факторы давления, что отразим в структуре. Синхронизированная с первичной численностью атака паразитов — короткое сезонное явление [22]. Опишем выживаемость второго поколения $t \in [0, \mathcal{T}]$ системой уравнений, связанной по начальным условиям с (5) и оптимальным значением размерного развития $\tilde{w}$ для зимующего поколения:

$$\begin{cases} \frac{dN_2}{dt} = - \left(\alpha \sqrt{(\tilde{w} - w(t))^2} N(t) + \beta \right) N(t - \mathfrak{h}), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{Q}{\sqrt[3]{N^2 + \zeta}}. \end{cases} \quad (6)$$

В сегменте (6) $w(t)$ отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей и действующий негативно при возможном исчерпании пищевых ресурсов. Q — параметр, учитывающий ограниченность количества доступных ресурсов; ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящее от численности, и отражающий уровень конкуренции за ресурсы [23]. α — аналогично коэффициент смертности от скученности, но при $N(t)$. β — коэффициент независимой смертности, учтем небольшое запаздывание η . Начальные условия: $N(0) = \lambda N(\tau)$, $w(0) = w_0$, λ — средняя плодовитость особей. Вспышку в форме краткого пика активности в предложенной модели запускает повышенная выживаемость зимующего поколения при сокращении времени зимовки на фоне сниженного конкурентного фактора для весеннего поколения при его высокой плодовитости, но исчерпание ресурсов прошлой генерацией снижает возможности массового размножения. Перспективным вариантом развития метода видится отдельная модель восстановления ресурсов после всплесков массовых размножений, за которые отвечает второе поколение.

Выводы

Таким образом, в данной работе нами проведен анализ интерпретируемости и границ биологической адекватности свойств бифуркационной динамики функциональных унимодальных итераций $x_{n+1} = \psi x_n$ и показаны пути развития противоречивых форм поведения траектории при смене циклических и хаотических режимов. Предложена методика построения сопряженных гибридных структур уравнений для расчетов численности смежных поколений на последовательных временных интервалах разной длительности. В вычислительной среде проводится стыковка решений на последовательных кадрах гибридного $T = [0, \tau] \cup [0, T]$ времени. Отрезками траекторий, эволюционирующих по разным законам, можно описывать нерегулярную смену сезонов с высокой и низкой численностью и пилообразные всплески активности. Организация гибридных структур естественно следует экологии зимующих видов со стадиями развития [24]. Метод представления модели с событийными переходами между вариантами правой части (5) $\leftrightarrow$ (6) формализует различия плотностной и паразитической регуляции. Факторы выживаемости всегда меняются при смене сезонов, в том числе играет роль плотность особей как зависящая или от $N^2(t)$ текущей, или от исходного обилия $N(0)$, как включено в уравнение для динамики выживаемости всегда более обильной летней генерации. Сформирована модель динамики выживаемости слабо конкурирующих поколений с различными условиями метаморфозов стадий и продолжительностью онтогенеза, разделяющая действие плотностной регуляции на выживаемость особей во взаимосвязи с темпами их развития. Предложенный метод актуален для моделирования динамики многих стадийных процессов и разрывных биофизических явлений как развития регулируемого цитокинами иммунного ответа, проходящего как стадии презентации антигена, активации и пролиферации лимфоцитов, так и фазу подавления выработки ответа и торможения воспалительных реакций средствами самой иммунной системы.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках бюджетной темы СПб ФИЦ РАН FFZF-2025-0006 (руководитель д.т.н. А.С. Гейда).

Благодарность: автор выражает благодарность профессору Василию Юрьевичу Осипову.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Переварюха А.Ю. Метод формирования логико-событийных вычислительных моделей трансформирующихся социоинформационных процессов // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 51–63. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-51-63.

© Переварюха А.Ю., 2025

Андрей Юрьевич Переварюха (madelf@rambler.ru) – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, 199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, 14-я Линия В.О., 39.

Литература

- [1] Borisova T.Yu. On the Physicochemical Method of Analysis of the Formation of Secondary Immunodeficiency as a Bioindicator of the State of Ecosystems Using the Example of Seabed Biota of the Caspian Sea // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, issue 7. P. 251–257. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785022090012>.
- [2] Mikhailov V.V., Trofimova I.V. Computational Modeling of the Nonlinear Metabolism Rate as a Trigger Mechanism of Extreme Dynamics of Invasion Processes // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, issue 12. P. 301–304. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785022110013>.
- [3] Gauze G.F. The struggle for existence. Baltimore: The Williams Wilkins, 1934. 129 p. URL: <https://www.gause-inst.ru/sites/default/files/2019-02/The%20Struggle%20for%20Existence.pdf>.
- [4] Переварюха А.Ю. Моделирование темпов роста чужеродных видов насекомых, дифференцированное по стадиям онтогенеза // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25, № 2. С. 100–109. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-100-109>. EDN: <https://elibrary.ru/xfoxot>.
- [5] Переварюха А.Ю. Сценарная модель эффекта временного резкого сокращения численности популяции с большим репродуктивным параметром // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 80–90. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-80-90>.
- [6] Переварюха А.Ю. Моделирование флуктуаций агрессивных чужеродных видов в непрерывных моделях с независимой регуляцией // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24, № 4. С. 48–58. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-48-58>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sqmnkh>.
- [7] Переварюха А.Ю. Нелинейная модель перелома волжских популяций на основе когнитивного графа взаимодействия экологических факторов // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2016. № 1–2. С. 92–106. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345221>. EDN: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345221>.
- [8] Переварюха А.Ю. Графовая модель взаимодействия антропогенных и биотических факторов в продуктивности каспийского моря // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2015. № 10 (132). С. 181–198. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25377165>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vjinwb>.
- [9] Hoang M. A generalized model for the population dynamics of a two stage species with recruitment and capture using a nonstandard finite difference scheme // Computational and Applied Mathematics. 2024. Vol. 43. Article number 54. P. 47–57. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40314-023-02539-9>.
- [10] Feigenbaum M. Universal Behavior in Nonlinear Systems // Los Alamos Science. 1980. Vol. 1, no. 1. P. 4–27.
- [11] Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1978. Vol. 35, no. 2. P. 260–267. DOI: <http://doi.org/10.1137/0135020>.
- [12] Sharkovski A.N. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1995. Vol. 5, no. 5. P. 1263–1273. DOI: <http://doi.org/10.1142/s0218127495000934>.
- [13] Kloeden P. On Sharkovsky's cycle coexistence ordering // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1979. Vol. 20, issue 2. P. 171–177. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700010819>.
- [14] Andreassen H. Population cycles and outbreaks of small rodents: ten essential questions we still need to solve // Oecologia. 2021. Vol. 195. P. 601–622. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00442-020-04810-w>.

- [15] Lee H., York J. Period three implies chaos // The American Mathematical Monthly. 1975. Vol. 82, no. 10. P. 985–992. Available at: <https://yorke.umd.edu/papers/Li-Yorke%20Period%20Three%20Implies%20Chaos.pdf>.
- [16] Shorrocks B. Population Fluctuations in the Fruit Fly (*Drosophila melanogaster*) Maintained in the Laboratory // Journal of Animal Ecology. 1970. Vol. 39, no. 1. P. 229–253. DOI: <http://doi.org/10.2307/2897>.
- [17] Brillinger D. The Nicholson blowfly experiments: some history and EDA // Journal of Time Series Analysis. 2012. Vol. 33, issue 5. P. 718–723. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.2012.00787.x>.
- [18] Abbas S., Niezabitowski M., Grace S. Global existence and stability of Nicholson blowflies model with harvesting and random effect // Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 103. P. 2109–2123. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06196-z>.
- [19] Trofimova I.V., Manvelova A.B. Adequacy Of Interpretation Of Monitoring Data On Biophysical Processes In Terms Of The Theory Of Bifurcations And Chaotic Dynamics // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48. P. 305–310. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785022110025>.
- [20] Переварюха А.Ю. Динамическая модель популяционной инвазии с эффектом депрессии // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21, № 3. С. 604–623. DOI: <https://doi.org/10.15622/ia.21.3.6>.
- [21] Дубровская В.А., Трофимова И.В. Модель динамики структурированных субпопуляций осетровых рыб Каспия с учетом отклонений в темпах развития молоди // Журнал Белорусского государственного университета. Биология. 2017. № 3. С. 76–86. URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/193312>.
- [22] Михайлов В.В., Переварюха А.Ю., Решетников Ю.С. Модель динамики популяции рыб с расчетом темпов роста особей и сценариев гидрологической обстановки // Информационно-управляющие системы. 2018. № 4. С. 31–38. DOI: <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2018-4-31-38>.
- [23] Mikhailov V.V., Trofimova I.V. Principles of simulation of invasion stages with allowance for solar cycles // Technical Physics Letters. 2023. Vol. 49, no. 9. P. 97–105. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785023700049>.
- [24] Mikhailov V.V., Spesivtsev A.V., Perevaryukha A.Yu. Evaluation of the Dynamics of Phytomass in the Tundra Zone Using a Fuzzy-Opportunity Approach // Kotenko I., Badica C., Desnitsky V., El Baz D., Ivanovic M. (eds.) Intelligent Distributed Computing XIII. IDC 2019. Studies in Computational Intelligence. Vol. 868. Springer, Cham., 2019. P. 449–454. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-32258-8_53.

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-51-63

Method of constructing logical-event computational models of transforming social information processes

Perevaryukha A. Yu. 

Saint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation; madel@rambler.ru; ORCID: 0000-0002-1049-0096 (A. Yu.);

Received: 23.02.2025

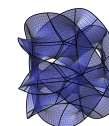
Revised: 26.03.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. The article develops a method for organizing a logical-event hybrid model for analyzing socioinformational processes in their stages, event transformations and rapid disturbances. Specific situations with a non-stationary lifetime y of a series of non-overlapping generations are not described by continuous equations of mathematical biophysics. The use of multiparameter functional iterations with the effect of $x_{n+1} = \psi(r; x_n) \xi(a; x_{n-i}) + \Theta[n]$, $x_{max} = \max \psi(x) \neq \max \xi(x)$ leads to a cascade of bifurcations with the coexistence of stable cycles and a set of transition points $\{\hat{r}, \hat{a}\}$ "chaos $\leftrightarrow$ cycle", which goes beyond the essential interpretation of the trajectory behavior. The proposed method is relevant for modeling cases when y generations have different lengths of juvenile ontogenesis stages. The models are important for forecasting invasive processes of insects capable of mass outbreaks of



reproduction, where the factor of generation wintering is in effect. Hybrid structures of equations are constructed that describe the dynamics of generations on adjacent uneven segments of ontogenesis depending on changes in mortality factors due to competition for resources, regulated by the growth rate of organisms. The hybrid model allows one to obtain pulsating dynamics of numbers, where transitions to the state of excessively numerous generations of "outbreaks" are interconnected with the survival of the wintering generation and the level of competitive mortality of the summer generation. The modeling method is relevant for populations supported by artificial reproduction and for cases where different social groups exhibit varying reproductive activity, which is reflected in the development of demographic waves, the disruption of social structures and the disruption of traditional interactions during the crisis of social structures.

Key words: hybrid computing structures; population outbreak analysis; discontinuous trajectories; wave-like sociobiological processes; information society; relaxation cycles; pulsating trajectory of ecodynamics evolution.

Funding. The research was conducted within the framework of a budget-funded project FFZF-2025-0006 at the St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPB FRC RAS) (supervised by A.S. Geyda).

Acknowledgements: The author are grateful to prof. Osipov V.Yu.

Information about the conflict of interests: author and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Perevaryukha A.Yu. Method of constructing logical-event computational models of transforming social information processes. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 51–63. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-51-63. (In Russ.)

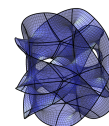
© Perevaryukha A.Yu., 2025

Andrey Yu. Perevaryukha (madelf@rambler.ru) – Candidate of Technical Sciences, senior research worker of the Laboratory of Applied Informatics, Saint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 39, 14-Line of the Vasilyevsky Island, Saint Petersburg, 199178, Russian Federation.

References

- [1] Borisova T.Yu. On the Physicochemical Method of Analysis of the Formation of Secondary Immunodeficiency as a Bioindicator of the State of Ecosystems Using the Example of Seabed Biota of the Caspian Sea *Technical Physics Letters*, 2022, vol. 48, issue 7, pp. 251–257. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785022090012>.
- [2] Mikhailov V.V., Trofimova I.V. Computational Modeling of the Nonlinear Metabolism Rate as a Trigger Mechanism of Extreme Dynamics of Invasion Processes. *Technical Physics Letters*, 2022, vol. 48, issue 12, pp. 301–304. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785022110013>.
- [3] Gauze G.F. The struggle for existence. Baltimore: The Williams Wilkins, 1934, 129 p. Available at: <https://www.gause-inst.ru/sites/default/files/2019-02/The%20Struggle%20for%20Existence.pdf>.
- [4] Perevaryukha A.Yu. Modeling the growth rates of alien insect specified differentiated by stages of ontogenesis. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 100–109. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-100-109>. EDN: <https://elibrary.ru/xfoxot>. (In Russ.)
- [5] Perevaryukha A.Yu. Scenarios model of the effect of a temporary sharp reduction of population with a large reproductive parameter. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 80–90. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-80-90>. (In Russ.)
- [6] Perevaryukha A.Yu. Simulation of fluctuations of aggressive alien species in continuous models with independent regulation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 48–58. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-48-58>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sqmnkh>. (In Russ.)

- [7] Perevaryukha A.Yu. Nonlinear model of overfishing for the Volga sturgeon based on cognitive graph of interaction of environmental factors. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, no. 1–2, pp. 92–106. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345221>. EDN: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345221>. (In Russ.)
- [8] Perevaryukha A.Yu. Graph model of interaction of anthropogenic and biotic factors in the productivity of the Caspian Sea. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2015, no. 10, pp. 181–198. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25377165>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vjinwb>. (In Russ.)
- [9] Hoang M. A generalized model for the population dynamics of a two stage species with recruitment and capture using a nonstandard finite difference scheme. *Comp. Appl. Math.*, 2024, vol. 43, Article number 54, pp. 47–57. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40314-023-02539-9>.
- [10] Feigenbaum M. Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Los Alamos Science*, 1980, vol. 1, no. 1, pp. 4–27.
- [11] Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1978, vol. 35, no. 2, pp. 260–267. DOI: <http://doi.org/10.1137/0135020>.
- [12] Sharkovski A.N. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1995, vol. 5, no. 5, pp. 1263–1273. DOI: <http://doi.org/10.1142/s0218127495000934>.
- [13] Kloeden P. On Sharkovsky's cycle coexistence ordering. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1979, vol. 20, issue 2, pp. 171–177. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972700010819>.
- [14] Andreassen H. Population cycles and outbreaks of small rodents: ten essential questions we still need to solve. *Oecologia*, 2021, vol. 195, pp. 601–622. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00442-020-04810-w>.
- [15] Lee H., York J. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 1975, vol. 82, no. 10, pp. 985–992. Available at: <https://yorke.umd.edu/papers/Li-Yorke%20Period%20Three%20Implies%20Chaos.pdf>.
- [16] Shorrocks B. Population Fluctuations in the Fruit Fly (*Drosophila melanogaster*) Maintained in the Laboratory. *Journal of Animal Ecology*, 1970, vol. 39, no. 1, pp. 229–253. DOI: <http://doi.org/10.2307/2897>.
- [17] Brillinger D. The Nicholson blowfly experiments: some history and EDA. *Journal of Time Series Analysis*, 2012, vol. 33, issue 5, pp. 718–723. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.2012.00787.x>.
- [18] Abbas S., Niezabitowski M., Grace S. Global existence and stability of Nicholson blowflies model with harvesting and random effect. *Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 103, pp. 2109–2123. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06196-z>.
- [19] Trofimova I.V., Manvelova A.B. Adequacy Of Interpretation Of Monitoring Data On Biophysical Processes In Terms Of The Theory Of Bifurcations And Chaotic Dynamics. *Technical Physics Letters*, 2022, vol. 48, pp. 305–310. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785022110025>.
- [20] Perevaryukha A.Yu. Dynamic Model of Population Invasion with Depression Effect. *Informatics and Automation*, 2022, vol. 21, no. 3, pp. 604–623. DOI: <https://doi.org/10.15622/ia.21.3.6>. (In Russ.)
- [21] Dubrovskaya V.A., Trofimova I.V. Model of dynamics of structured subpopulations of sturgeon fish in the Caspian Sea takes into account deviations in the rate of development of immature fish. *Journal of the Belarusian State University. Biology*, 2017, no. 3, pp. 76–86. Available at: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/193312?ysclid=m8zysw66cn860236954>. (In Russ.)
- [22] Mikhailov V.V., Perevaryukha A., Reshetnikov Yu.S. Model of Fish Population Dynamics with Calculation of Individual Growth Rate and Hydrological Situation Scenarios. *Information and control systems*, 2018, no. 4, pp. 31–38. DOI: <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2018-4-31-38>. (In Russ.)
- [23] Mikhailov V.V., Trofimova I.V. Principles of simulation of invasion stages with allowance for solar cycles. *Technical Physics Letters*, 2023, vol. 49, no. 9, pp. 97–105. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785023700049>.
- [24] Mikhailov V.V., Spesivtsev A.V., Perevaryukha A.Yu. Evaluation of the Dynamics of Phytomass in the Tundra Zone Using a Fuzzy-Opportunity Approach. In: *Kotenko I., Badica C., Desnitsky V., El Baz D., Ivanovic M. (eds.) Intelligent Distributed Computing XIII. IDC 2019. Studies in Computational Intelligence, vol. 868*. Springer, Cham., 2019, pp. 449–454. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-32258-8_53.



Акустический метод определения толщины отложений в технологическом оборудовании

Суслов А.В. 

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация;
a.v.suslov@inbox.ru; ORCID: 0009-0004-1076-1257 (А.В.);

Поступила: 14.12.2024

Рассмотрена: 18.01.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. Проведены исследования акустического метода измерения толщины отложений на внутренней стенке технологического оборудования; экспериментальные исследования по изучению совместного влияния толщины стенки, диаметра трубопровода и толщины отложений на параметры колебаний стенки трубопровода; измерения неизвестных толщин отложений с использованием метода, основанного на анализе параметров колебаний стенки трубопровода. Осуществлены исследования по измерению неравномерного распределения отложений. Полученные результаты позволяют с хорошей точностью измерять толщину асфальтосмолопарафиновых отложений в технологическом оборудовании.

Ключевые слова: колебания; технологическое оборудование; отложения, метод акустического неразрушающего контроля.

Введение

Одной из серьезных проблем, сопровождающей процесс добычи нефти и нефтепродуктов, является образование асфальтосмолопарафиновых отложений на внутренних стенках трубопроводов и технологического оборудования. Наличие отложений приводит к уменьшению пропускной способности трубопроводов, что, в свою очередь, увеличивает энергозатраты на перекачку нефти. Кроме этого, закупорка трубопроводов повышает износ оборудования и может приводить к возникновению аварийных ситуаций [1]. Неочевидным является негативный эффект, связанный с учетом нефти и нефтепродуктов. Сужение проходного сечения приводит к изменению скорости потока среды, что ведет к погрешности в работе расходомеров на станциях учета нефти и нефтепродуктов. Исследованиям в данном направлении посвящены работы [2; 3].

Ежегодно страны тратят огромные средства на очистку трубопроводов от отложений, а в научной сфере проводятся новые исследования, посвященные вопросам образования и борьбы с отложениями. Так, остается актуальным вопрос построения моделей образования отложений, позволяющих не только объяснить осаждение отложений на внутренних стенках, но и предсказывать такое осаждение во времени. Из последних исследований можно выделить работу [4], также хочется отметить использование нейросетей для прогнозирования отложений в работе [5]. В плане борьбы с отложениями продолжается поиск эффективного растворителя и внутреннего покрытия трубопровода, способного предотвращать образование асфальтосмолопарафиновых отложений [6].

В настоящее время актуальной остается задача измерения толщины отложений. Этот вопрос поднимается как при процессах транспортировки нефти и нефтепродуктов, например с целью планирования очистных мероприятий, так и при проведении лабораторных исследований.

На текущий момент предложено много способов определения толщины отложений: по измерению температуры, электрического сопротивления, методы прохождения ультразвуковой волны, методы падения давления, измерения объема продукта, использования радиации и др. [7]. Предложенные методы обладают рядом недостатков, ограничивающих их повсеместное применение: в одних случаях необходимо нарушить целостность трубопровода, в других необходимы остановка трубопровода и его очистка от продукта, некоторые способы имеют

ограничение ввиду их небезопасности для персонала. Таким образом, простого и эффективного метода, который бы получил распространение на практике, не существует.

В настоящей статье описано экспериментальное исследование, посвященное новому методу измерения толщины отложений, основанному на изучении параметров колебаний стенки трубопровода. В работах [8] и [9] установлена взаимосвязь между параметрами колебаний стенки трубопровода и толщиной отложений: наличие отложений приводит к смещению резонансной частоты колебаний, уменьшению амплитуды, энергии и длительности колебаний. Чем больше толщина отложений, тем больше идет изменение указанных параметров. Аналогичные результаты с отложениями на поверхности теплообменного оборудования получены исследователями в работе [10].

Проведены новые экспериментальные исследования с целью изучения влияния на колебания дополнительных факторов, таких как диаметр и толщина трубопровода. Проведена апробация предложенного в [11] метода измерения толщины отложений.

1. Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования проводились с целью изучения факторов, влияющих на акустические колебания стенки трубопровода. Основные параметры, по которым проводилась проверка, следующие: диаметр трубопровода; толщина трубопровода; толщина отложений на внутренней стенке трубопровода.

В процессе исследования с помощью электромагнитного вибратора возбуждались свободные колебания на участках трубопроводов без отложений и на тех же участках трубопроводов, но с отложениями 3, 6, 9 и 12 мм (рис. 1.1). Для исключения случайных погрешностей в каждом случае проводилось не менее 100 измерений. Колебания регистрировались и подвергались дальнейшей обработке в разработанном специальном программном обеспечении. Найденные параметры (частота, амплитуда, энергия, длительность) в дальнейшем были подвергнуты двухфакторному дисперсионному анализу.

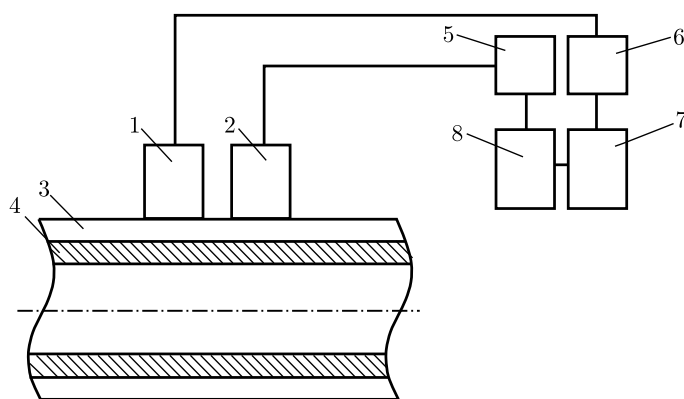


Рис. 1.1. Схема измерения: 1 — возбудитель колебаний, 2 — приемник, 3 — стенка трубы, 4 — отложения, 5 — усилитель, 6 — генератор, 7 — микроконтроллер, 8 — АЦП

Fig. 1.1. Measurement scheme: 1 — oscillation exciter, 2 — receiver, 3 — pipe wall, 4 — deposits, 5 — amplifier, 6 — generator, 7 — microcontroller, 8 — ADC

Первая серия равнозначных экспериментов проводилась на трубопроводах одного диаметра, но разной толщины стенки. В первом исследовании использованы участки труб $\varnothing 159 \times 10$ мм, $\varnothing 159 \times 8$ мм и $\varnothing 159 \times 6$ мм.

Вторая серия осуществлялась на трубопроводах одной толщины стенки, но разных диаметров. Во втором эксперименте использованы участки труб $\varnothing 159 \times 6$ мм, $\varnothing 108 \times 6$ мм и $\varnothing 73 \times 6$ мм.

Третья серия экспериментов была нацелена на апробацию предложенного акустического метода. В данной серии толщины отложений были неизвестны. По результатам обработки

измерительных сигналов, полученных от трубопровода $\varnothing 159 \times 8$ мм, составлены уравнения зависимости энергии колебаний от толщины отложений и длительности колебаний от толщины отложений. Далее, на участке этого же трубопровода нанесены отложения неизвестной толщины и проведены измерения параметров колебаний стенки трубопровода для трех различных слоев. По установленным в процессе измерения параметрам энергии и длительности определена толщина отложений в каждом из трех случаев.

Дополнительно была проведена *четвертая серия* экспериментальных исследований. Данные эксперименты направлены на измерение толщины отложений в случае неравномерного их распределения по сечению трубопровода. На участке трубопровода $\varnothing 159 \times 8$ мм нанесены отложения согласно рис. 1.2. Распределение отложений следующее: сечение 1 — 5 мм, сечения 2 и 8 — 8 мм, сечения 3 и 7 — 10 мм, сечения 4 и 6 — 12 мм, сечение 5 — 15 мм. Зафиксированы измерения в 8 точках по периметру трубопровода.

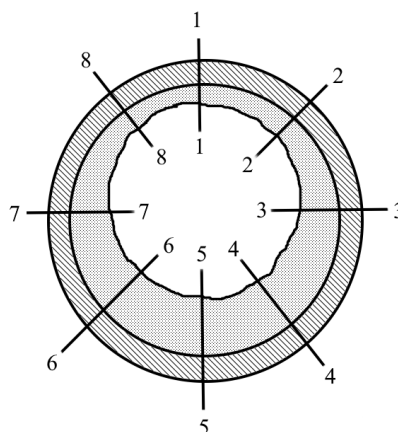


Рис. 1.2. Схема измерения при неравномерном распределении толщины отложений
Fig. 1.2. Measurement scheme for uneven distribution of deposit thickness

2. Результаты и обсуждения

Результаты двухфакторного дисперсионного анализа влияния на отдельные параметры колебаний взаимосвязи таких факторов, как толщина отложений и толщина стенки трубопровода, представлены в таблице 2.1.

Во всех рассматриваемых случаях проверялись следующие гипотезы: H_0 — толщина отложений не влияет на исследуемый параметр; H_1 — толщина стенки не влияет на исследуемый параметр. Гипотезы отвергнуты во всех случаях, кроме параметра "амплитуда", т. к. p -значение параметра "амплитуда" для толщины отложений составляет 0.122, что больше 0.05.

Результаты двухфакторного дисперсионного анализа определения зависимости влияния таких факторов, как толщина отложений и диаметр трубопровода на параметры колебаний, отражены в таблице 2.2.

Во всех рассматриваемых случаях проверялись следующие гипотезы: H_0 — толщина отложений не влияет на исследуемый параметр, H_1 — диаметр трубопровода не влияет на исследуемый параметр. Гипотезы отвергнуты во всех случаях, кроме параметра "частота", т. к. p -значение параметра "частота" для толщины отложений составляет 0.182, что больше 0.05.

На рис. 2.1 и 2.2 представлены гистограммы результата проведенного двухфакторного анализа для анализа взаимосвязи параметров толщины отложений от толщины стенки и диаметра трубопровода соответственно.

Как видно из построенных диаграмм, наибольший вклад в изменение частоты и амплитуды колебаний вносят толщина стенки и диаметр трубопровода, а в изменении параметров энергии и длительности колебаний большую роль начинает играть толщина отложений.

Таблица 2.1

Анализ параметров колебаний в зависимости от толщины отложений
и толщины стенки трубопровода

Table 2.1

Analysis of vibration parameters depending on the thickness of deposits
and the thickness of the pipeline wall

Исследуемые параметры	Толщина отложений / Толщина стенки трубы / Частота колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	8.206	0.006	3.838
Толщина стенки	16241.541	$3.675 \cdot 10^{-15}$	4.459
	Толщина отложений / Толщина стенки трубы / Амплитуда колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	2.536	0.122	3.838
Толщина стенки	19.586	$8.272 \cdot 10^{-4}$	4.459
	Толщина отложений / Толщина стенки трубы / Энергия колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	59.589	$5.416 \cdot 10^{-6}$	3.838
Толщина стенки	15.088	0.002	4.459
	Толщина отложений / Толщина стенки трубы / Длительность колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	80.452	$1.697 \cdot 10^{-6}$	3.838
Толщина стенки	26.548	$2.939 \cdot 10^{-4}$	4.459

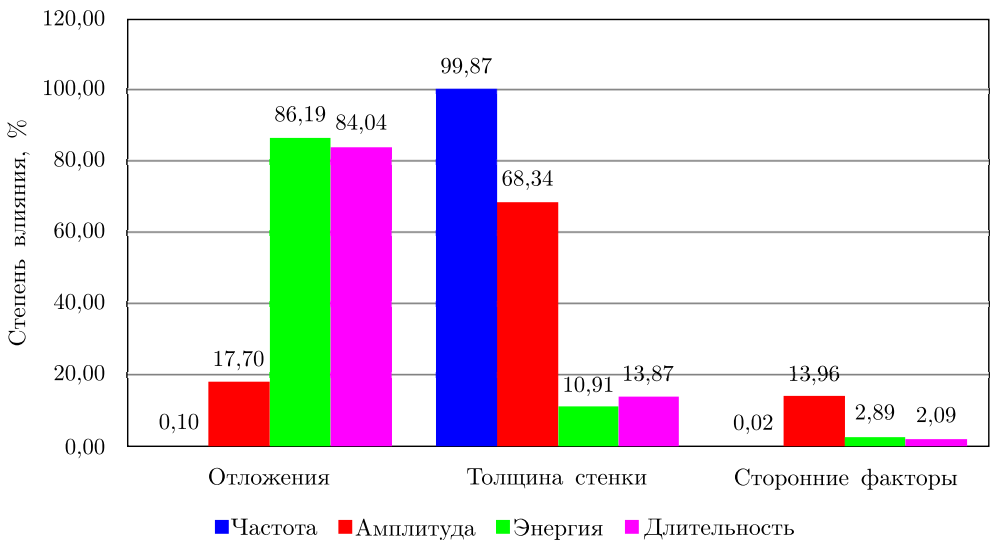


Рис. 2.1. Двухфакторный дисперсионный анализ взаимосвязи параметров колебаний от толщины отложений и толщины стенки трубопровода

Fig. 2.1. Two-way ANOVA of the relationship between the oscillation parameters and the thickness of the deposits and the thickness of the pipeline wall

Таблица 2.2

Анализ параметров колебаний в зависимости от толщины отложений
 и диаметра трубопровода

Table 2.2

Analysis of vibration parameters depending on the thickness of deposits
 and the diameter of the pipeline

Исследуемые параметры	Толщина отложений / Диаметр трубы / Частота колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	2.038	0.182	3.838
Диаметр стенки	4677.451	$5.330 \cdot 10^{-13}$	4.459
	Толщина отложений / Диаметр трубы / Амплитуда колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	8.518	0.006	3.838
Диаметр стенки	21.077	0.001	4.459
	Толщина отложений / Диаметр трубы / Энергия колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	14.835	$0.901 \cdot 10^{-4}$	3.838
Диаметр стенки	17.445	0.001	4.459
	Толщина отложений / Диаметр трубы / Длительность колебаний		
	Значение F	p -значение	F критическое
Толщина отложений	12.120	0.002	3.838
Диаметр стенки	28.172	$0.238 \cdot 10^{-4}$	4.459

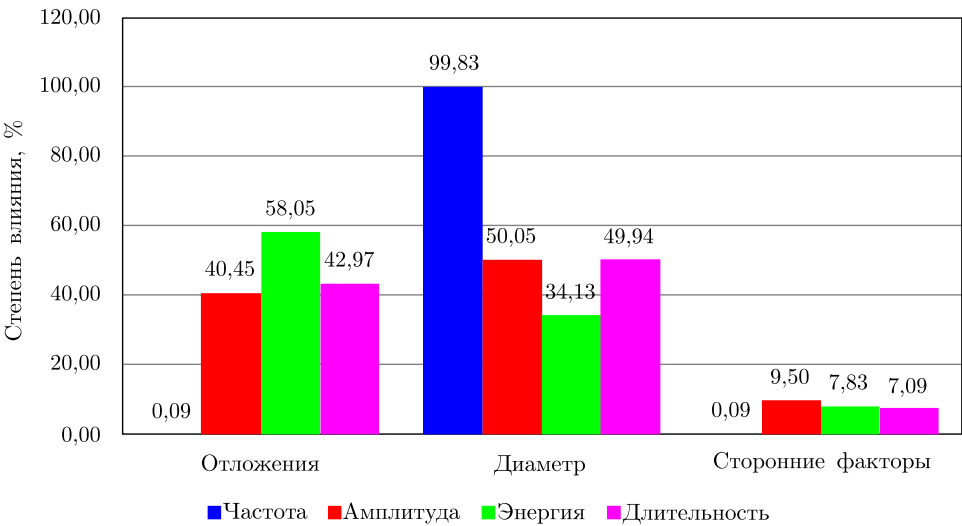


Рис. 2.2. Двухфакторный дисперсионный анализ взаимосвязи параметров колебаний от толщины отложений и диаметра стенки трубопровода

Fig. 2.2. Two-way ANOVA of the relationship between the oscillation parameters and the thickness of the deposits and the diameter of the pipeline wall

Влияние толщины стенки и диаметра трубопровода на частоту и амплитуду колебаний объясняется тем, что наряду с упругими свойствами материала это основные характеристики, входящие в систему дифференциальных уравнений колебаний замкнутой цилиндрической оболочки [12; 13]:

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{1}{Eh}\Delta\Delta\chi - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

где ρ — плотность; h — толщина; R — радиус; w — перемещение; E — модуль упругости; χ — функция напряжений; D — цилиндрическая жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Поэтому изменение данных параметров приводит к изменению частоты и амплитуды колебаний.

Уменьшение энергии системы и длительности колебаний можно объяснить демпфированием колебаний, которое вносит в колебательную систему слой отложений. Чем больше слой отложений, тем больше демпфирование свободных колебаний.

Таким образом, по результатам работы [9] и текущего исследования в качестве основных информативных параметров выбраны энергия и длительность колебаний.

Составленные графики зависимости энергии и длительности колебаний по результатам исследований на участке трубопровода $\varnothing 159 \times 8$ мм представлены на рис. 2.3 и 2.4.

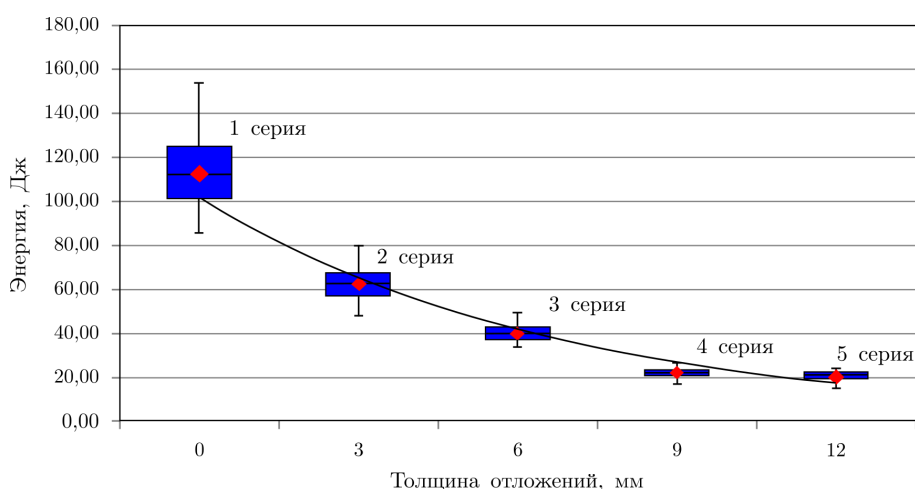


Рис. 2.3. График зависимости энергии колебаний от толщины отложений

Fig. 2.3. Graph of the dependence of the vibration energy on the thickness of the deposits

Установленные зависимости энергии и длительности колебаний от толщины отложений в дальнейшем использовались для определения неизвестной толщины отложений. Результаты измерений показаны в таблице 2.3.

Стоит отметить, что совместное использование параметров, а именно нахождение толщины отложений как среднее значение по обоим параметрам энергии и длительности колебаний, позволило снизить погрешность измерений. Максимальное значение составило 2 %.

Результаты измерения при неравномерном распределении толщины отложений представлены в таблице 2.4.

Как видно из таблицы 2.4, в реализуемом акустическом методе измерения определение толщины отложений осуществляется не по конкретному сечению в месте расположения датчика, а

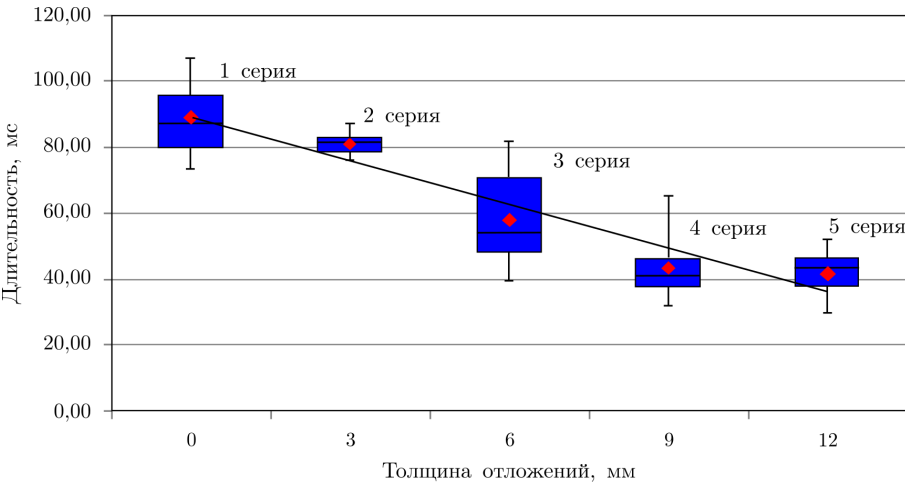


Рис. 2.4. График зависимости длительности колебаний от толщины отложений
Fig. 2.4. Graph of the dependence of the duration of oscillations on the thickness of deposits

Таблица 2.3

Результаты измерений толщины отложений

Table 2.3

Results of deposit thickness measurements

Параметры	Измеренный параметр	Расчетное значение толщины, мм	Реальное значение толщины, мм	Относительная погрешность, %
1-я серия экспериментов				
Энергия	45.91 Дж	5.37	5.00	2.00
Длительность	67.99 мс	4.82		
Обобщенный параметр		5.10		
2-я серия экспериментов				
Энергия	34.74 Дж	7.23	8.00	0.25
Длительность	50.77 мс	8.73		
Обобщенный параметр		7.98		
3-я серия экспериментов				
Энергия	17.55 Дж	11.87	11.00	0.36
Длительность	44.34 мс	10.20		
Обобщенный параметр		11.04		

по среднему значению толщины отложений. Это можно объяснить следующим фактом: колебания системы пропорциональны не толщине входящих в систему компонентов, а распределению массы по толщине или массовой плотности:

$$m_0 = \rho h.$$

Среднее значение распределенной массы показано на рис. 2.5.
Расчет совокупности отдельных датчиков показал, что оптимальным является использование двух датчиков: одного, расположенного по верхней образующей трубы (на самом "тонком" слое), и второго, размещенного на нижней образующей трубы (на самом "толстом"

Таблица 2.4

Результаты измерения неравномерно распределенных отложений

Table 2.4

Results of measurement of unevenly distributed deposits

Номер датчика	Показатель энергии, Дж	Показатель длительности, мс	Измеренное значение толщины, мм
1	11.16	7.93	9.60
2	12.03	10.21	11.10
3	13.02	10.12	11.60
4	13.14	11.96	12.60
5	12.29	9.87	11.10
6	12.20	11.80	12.00
7	10.92	7.66	9.30
8	11.02	10.3	10.70

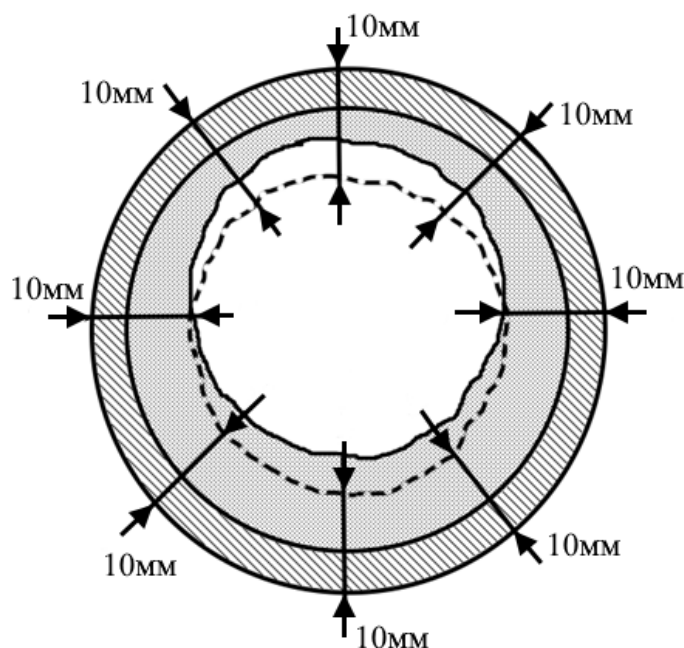


Рис. 2.5. Определение "среднего" значения распределения отложений по сечению трубопровода
 Fig. 2.5. Determination of the "average" value of the distribution of deposits across the pipeline cross-section

слое). Специфика образования отложений такова, что по нижней образующей трубы будет образовываться толстый слой. При использовании такой (сечения 1 и 5 на рис. 1.2) пары датчиков погрешность измерения составила 3,1 %.

Закключение

Анализ предыдущих и проведенных новых экспериментальных исследований определил наиболее значимые параметры колебаний стенки трубопровода, зависящие от толщины отложений. Такими параметрами выступают энергия и длительность колебаний.

Измерение неизвестной толщины отложений показало работоспособность предложенного метода определения толщины отложений на практике с достигнутой хорошей точностью измерений.

Измерения на участке трубопровода с неравномерным распределением отложений выявили зависимость колебаний от среднего значения толщины отложений, что позволяет использовать для измерений с достаточной степенью точности два датчика — одного, расположенного на верхней образующей трубы, и второго, размещенного на нижней образующей трубы.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

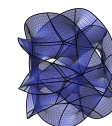
Цитирование. Суслов А.В. Акустический метод определения толщины отложений в технологическом оборудовании // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 64–74. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-64-74.

© Суслов А.В., 2025

Антон Владимирович Суслов (a.v.suslov@inbox.ru) – старший преподаватель кафедры информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Литература

- [1] Хасанов И.И., Каширина Д.А. Влияние состава асфальтосмолопарафиновых отложений на процесс парафинизации магистральных нефтепроводов // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2022. № 3–4. С. 26–31. DOI: <https://doi.org/10.24412/0131-4270-2022-3-4-26-31>.
- [2] Krasnov A.N., Prakhova M.Yu., Novikova Yu.V. Measurement of Oil Consumption by Turbine Flow Meters in Conditions of Wax Deposition // International Conference on Automatics and Energy (ICAE 2021). 2021. Vol. 2096. P. 012065. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012065>.
- [3] Неинвазивные методы контроля расхода жидкостей с применением накладных преобразователей и учетом отложений в трубопроводах // ИСУП. 2022. № 3 (99). С. 68–71. URL: [https://isup.ru/upload/pdf-zhurnala/2022/3/03\(99\)%202022_068_071_Konstanta.pdf](https://isup.ru/upload/pdf-zhurnala/2022/3/03(99)%202022_068_071_Konstanta.pdf).
- [4] Ilushin P., Vyatkin K., Kozlov A. Development of a New Model for the Formation of Wax Deposits through the Passage of Crude Oil within the Well // Sustainability. 2023. Vol. 15, issue 12. Article number 9616. DOI: <https://doi.org/10.3390/su15129616>.
- [5] Chen Zh., Wang N., Jin W., Li D. Prediction Model of Wax Deposition Rate in Waxy Crude Oil Pipelines by Elman Neural Network Based on Improved Reptile Search Algorithm // Energy Engineering. 2024. Vol. 121, no. 4. P. 1007–1026. DOI: <https://doi.org/10.32604/ee.2023.045270>.
- [6] Богатов М.В., Юдин П.Е., Вережкин А.Г., Берков Д.В. Предотвращение образования асфальтосмолопарафиновых отложений на поверхности насосно-компрессорных труб путем нанесения внутренних покрытий // Нефтегазовое дело. 2022. Т. 20, № 1. С. 74–81. DOI: <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2022-1-74-81>.
- [7] Alnaimat Fadi, Ziauddin Mohammed. Wax deposition and prediction in petroleum pipelines // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2020. Vol. 184. P. 106385. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106385>.
- [8] Суслов А.В. Ярославкина Е.Е. Теоретико-экспериментальное исследование зависимости собственных частот колебаний пластины от толщины отложений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2021. Т. 29, Вып. № 2. С. 88–99. DOI: <https://doi.org/10.14498/tech.2021.2.6>.



- [9] Суслов А.В., Ярославкина Е.Е. Применение статистических исследований при выявлении зависимости параметров акустических колебаний на участке трубопровода от толщины отложений // Автоматизация в промышленности. 2023. Март. С. 13–16. DOI: <https://doi.org/10.25728/avtprom.2023.03.02>.
- [10] Гарнышова Е.В., Измайлова Е.В., Ваньков Ю.В. Оценка толщины отложений на внутренней поверхности теплообмена по затуханию собственных колебаний // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2020. Т. 22, № 4. С. 106–114. DOI: <http://doi.org/10.30724/1998-9903-2020-22-4-106-114>.
- [11] Суслов А.В., Ярославкина Е.Е. Способ определения толщины отложений на внутренней стенке трубопроводов и технологического оборудования // Патент РФ на изобретение №2804261 от 26.09.2023. URL: <https://patents.google.com/patent/RU2804264C1/ru>.
- [12] Вибрации в технике: справочник: в 6 т. / ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. Москва: Машиностроение, 1978. 352 с.
- [13] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. Москва: Наука, 1972. 432 с. URL: <https://djvu.online/file/nAycMFOD1SE33?ysclid=m85vrkx0gn669043016>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-64-74

Acoustic method for measuring the thickness of deposits on the inner wall of technological equipment

Suslov A. V. 

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation; a.v.suslov@inbox.ru;
ORCID: 0009-0004-1076-1257 (A. V.);

Received: 14.12.2024

Revised: 18.01.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. In the paper researches of the acoustic method for measuring the thickness of wax deposits on the inner wall of technological equipment are carried out. Experimental studies were conducted to study the combined effect of wall thickness, pipeline diameter and deposit thickness on the parameters of pipeline wall oscillation. Measurements of unknown deposit thicknesses have been carried out using a method based on the analysis of the parameters of pipeline wall oscillation. Experimental studies have been conducted to measure the irregular distribution of deposits. The obtained results allow, with good accuracy, to measure the thickness of wax deposits in technological equipment.

Key words: oscillations; technological equipment; wax deposits; acoustic non-destructive testing method.

Information about the conflict of interests: author and reviewers declared no conflict of interest.

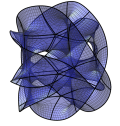
Citation. Suslov A.V. Acoustic method for measuring the thickness of deposits on the inner wall of technological equipment. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 64–74. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-64-74. (In Russ.)

© Suslov A.V., 2025

Anton V. Suslov (a.v.suslov@inbox.ru) – senior lecturer of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Khasanov I.I., Kashirina D.A. Effect of the composition of asphaltene deposits on the process of waxing of main oil pipelines. *Transport and storage of Oil Products and hydrocarbons*, 2022, no. 3–4, pp. 26–31. DOI: <https://doi.org/10.24412/0131-4270-2022-3-4-26-31>. (In Russ.)
- [2] Krasnova A.N., Prakhova M.Yu., Novikova Yu.V. Measurement of Oil Consumption by Turbine Flow Meters in Conditions of Wax Deposition. *International Conference on Automatics and Energy (ICAE 2021)*, 2021, vol. 2096, p. 012065. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012065>.
- [3] Non-invasive methods of monitoring liquid flow using clamp-on transducers and taking into account deposits in pipelines. *ISUP*, 2022, no. 3 (99), pp. 68–71. Available at: [https://isup.ru/upload/pdf-zhurnala/2022/3/03\(99\)%202022_068_071_Konstanta.pdf](https://isup.ru/upload/pdf-zhurnala/2022/3/03(99)%202022_068_071_Konstanta.pdf). (In Russ.)
- [4] Ilushin P., Vyatkin K., Kozlov A. Development of a New Model for the Formation of Wax Deposits through the Passage of Crude Oil within the Well. *Sustainability*, 2023, vol. 15, issue 12, Article number 9616. DOI: <https://doi.org/10.3390/su15129616>.
- [5] Zhuo Chen, Ningning Wang, Wenbo Jin, Dui Li. Prediction Model of Wax Deposition Rate in Waxy Crude Oil Pipelines by Elman Neural Network Based on Improved Reptile Search Algorithm. *Energy Engineering*, 2024, vol. 121, no. 4, pp. 1007–1026. DOI: <https://doi.org/10.32604/ee.2023.045270>.
- [6] Bogatov M.V., Yudin P.E., Verevkin A.G., Berkov D.V. Prevention of asphalt resin paraffin deposition on pump and compressor pipe surfaces by internal coating application. *Petroleum Engineering*, 2022, vol. 20, no. 1, pp. 74–81. DOI: <https://doi.org/10.17122/ngdelo-2022-1-74-81>. (In Russ.)
- [7] Alnaimat Fadi, Ziauddin Mohammed. Wax deposition and prediction in petroleum pipelines. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2020, vol. 184, p. 106385. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106385>.
- [8] Suslov A.V., Yaroslavkina E.E. Theoretical-experimental study of dependence of natural frequencies of oscillations plates from application thickness. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, 2021, vol. 29, no. 2, pp. 88–99. DOI: <https://doi.org/10.14498/tech.2021.2.6>. (In Russ.)
- [9] Suslov A.V., Yaroslavkina E.E. Application of statistical methods for investigating the relationship between the parameters of acoustic oscillations in a pipeline section and the thickness of deposits. *Automation in industry*, 2023, March, pp. 13–16. DOI: <https://doi.org/10.25728/avtprom.2023.03.02>. (In Russ.)
- [10] Garnyshova E.V., Izmaylova E.V., Vankov Yu.V. Control of thickness of deposits of heat exchange equipment by hardware and software complex. *Power engineering: research, equipment, technology*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 106–114. DOI: <http://doi.org/10.30724/1998-9903-2020-22-4-106-114>. (In Russ.)
- [11] Suslov A.V., Yaroslavkina E.E. Method for determining thickness of deposits on the inner wall of pipelines and process equipment. Industrial patent RF №2804261, 26.09.2023. Available at: <https://patents.google.com/patent/RU2804264C1/ru>. (In Russ.)
- [12] Chelomey V.N. (ed.) Vibrations in technology: reference book: in 6 vols. Vol. 1. Bolotin V.V. (ed.) Oscillations of linear systems. Moscow: Mashinostroenie, 1978, 352 p. Available at: <https://djvu.online/file/qvRpag0IArFL8?ysclid=m85vlf8vh252268323>. (In Russ.)
- [13] Volmir A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells. Moscow: Nauka, 1972, 432 p. Available at: <https://djvu.online/file/nAycMFOD1SE33?ysclid=m85vrkx0gn669043016>. (In Russ.)



Response simulation and primary vertex reconstruction in the SPD NICA straw tracker

Morozova¹ S.D. , Shipilova^{1,2} A.V. 

¹ Samara National Research University, Samara, Russian Federation; svtmorozova09@gmail.com; ORCID: 0009-0009-1168-8529 (S.D.); shipilova.av@ssau.ru; ORCID: 0000-0003-3965-3757 (A.V.);

² Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation;

Received: 30.01.2025

Revised: 18.03.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. In this work we investigate the temporal structure of the events in the spin physics detector (SPD) straw tracker at the JINR NICA. Using the Geant4 toolkit we simulate the response of the straw layers sensitive elements in the trigger-free regime of SPD. Using the simulation results we present a simple algorithm for the fast primary-vertex finding and estimate the efficiency and purity of the reconstruction.

Key words: Monte Carlo simulation; track approximation; primary vertex reconstruction; reconstruction efficiency; Geant4; SPD NICA; straw tube; detector.

Introduction

At the present time, the spin structure of the nucleon is one of the challenging topics of high-energy physics. Nowadays, a new accelerator complex, the NICA (Nuclotron based Ion Collider fAcility) collider, is being built at the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, Russia). The Spin Physics Detector (SPD) is proposed to be placed in one of the two interaction points of the NICA to study the nucleon spin structure and other spin-related phenomena with polarized proton and deuteron beams [1]. The SPD physics program is described in detail in [2–4] and mainly aimed to extract information on the gluon Transverse-Momentum-Dependent Parton Distribution Functions (TMD PDFs) in the proton and deuteron, as well as the gluon transversity distribution and tensor PDFs in the deuteron, via the measurement of specific single- and double-spin asymmetries using such complementary probes as charmonia, open charm, and prompt photon production processes. These phenomena are planned to study at the center-of-mass collision energy $\sqrt{s}$ up to 27 GeV and a total luminosity up to $10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Since the $\sqrt{s}$ exceeds the typical hard scale of the studied processes moderately, the 4π geometry resolution of the SPD is planned, together with triggerless data acquisition system (DAQ), purposed to minimize systematic uncertainties of the measurements. For the effective data recognition under specified conditions, the related software should provide fast data processing, event selection, and primary vertex reconstruction at the online data filtering stage. Particularly, for the rational use of memory and high-performance the simplest procedure of track fitting and further primary vertex recovery is anticipated [5–7].

1. Straw tracker simulation

The straw tracker (ST) is the inner part of the SPD detector aimed at reconstructing tracks of primary and secondary particles with high efficiency for the precise measurements of their momenta and to identify particles via their energy deposition. Its construction includes the barrel part and two end-caps [1], constituted of two different kinds of the low-mass straw tubes, similar to those used in such modern experiments as NA64 [8], COMPASS [9; 10] and others [1]. The most of the produced particles will be registered in the barrel part consisting of the 8 azimuthal modules, each containing the 31 double layers of straw tubes, which schematic view is presented at the Fig. 1 [1].

The geometrical ST model used in this study was developed by A. Allakhverdieva using the GeoModel toolkit [11; 12], which is a class library for the description of detector geometry. The designed ST geometry is stored in the local GeoModel SQLite file (.db) being the input of the Geant4 package [13–15], generating the detector model automatically. Such an approach for the detector simulation provides the flexibility of the model, simplifying the purely construction changes. To describe the ST geometry, we use a global coordinate system, where the z -axis is oriented along the nominal beam direction, the y -axis is vertical, and the x -axis is perpendicular to them and is directed toward the center of the collider ring. The origin of the coordinate system is the nominal center of the setup being the ideal interaction point. The ST model of the present study is specified by the setup with inner and outer radii of 270 and 867 mm, respectively, consisting of 8 octants filled with layers of cylindrical tubes, to be shown in the XOY plane in the Fig. 2. The base of the detector, the ST tubes, are constructed from a thick polyethylene shell and an inner cylindrical volume of radius $R = 4.78$ mm filled by the gas mixture of $Ar(70\%) + CO_2(30\%)$. The internal volume of each tube is represented by the GEANT4 sensitive detector object ConstructSDandField and the HitsCollection array, which elements (Hits) are recorded every time a particle loses energy in the sensitive volume, and contain information about the particle type, energy loss, coordinates, track data, and the unique number of the tube where the hit is arised.

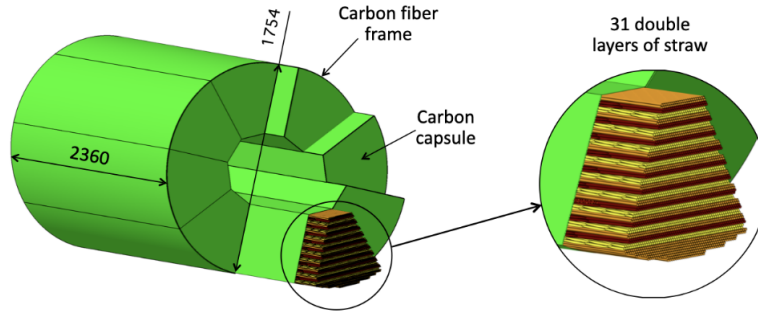


Fig. 1. Schematic representation of the Straw Tracker (ST) [1]

Рис. 1. Схематичное представление строу-трекера (ST) [1]

2. Experiment simulation

We consider the p - p mode of the experiment where the proton beams collide at the energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV in the center-of-mass system. We suppose the proton bunch crossing every 76 ns, while the temporal interval of the data storing (timeslice), defined by the DAQ system, to be 10 μ s. The heavy charged primary particles are simulated by positive muons with a given energy of $E = 1$ GeV and momentum $\vec{p}$, which direction has a uniform spatial distribution, using the G4PrimaryVertex object of the Geant4. The such choice of primary particles has been made due to their small cross section of interaction with ST material resulting the small number of secondary tracks while the major energy loss of a muon is due to a gas ionization, which is favourable to initiate the electron avalanche into a straw drift chamber.

The probability of a hard interaction between two protons in a given beam crossing is simulated by the Poisson distribution $f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ with the expected value $\lambda = 0.3$. We impose the coordinates of the interaction point and the corresponding primary vertex to be the same and equal to $(0, 0, z)$, where z is normally distributed around the central value $z_0 = 0$ by a Gaussian distribution $f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-z_0}{\sigma}\right)^2}$ with $\sigma = 30$ cm. The number of muons produced in the one pp hard interaction is determined by a Poisson distribution with the expected value $\lambda = 7$. The propagation of a charged particle through a gas leads to energy loss due to ionization. The snapshot of the

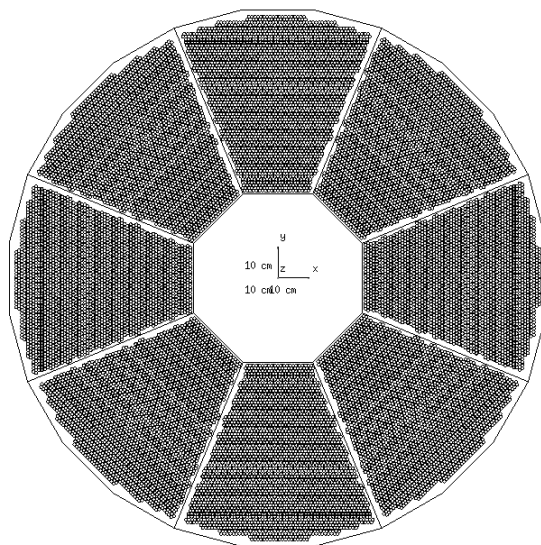


Fig. 2. The ST model used in this work in XOY plane

Рис. 2. Модель строу-трекера, используемая в представленной работе, в плоскости XOY

particle state at the moment of energy loss within the sensitive volume was recorded as a hit. The visualization of launch of one event into the ST is shown in Fig. 3, where the hits and tracks are illustrated by green dots and blue lines, respectively.

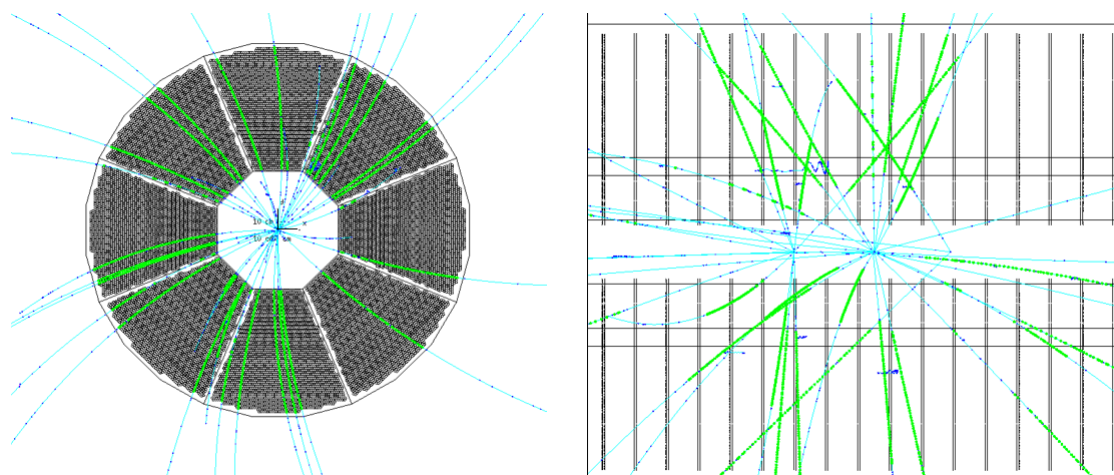


Fig. 3. Visualization of launch of one event into the ST: XOY plane (left), ZOY plane (right). Hits and tracks are illustrated by green dots and blue lines, respectively (see the color online on the website)

Рис. 3. Визуализация запуска одного события в строу-трекере: в плоскости XOY (слева), в плоскости ZOY (справа). Зеленые точки — точки потери энергии в чувствительном объеме, голубые линии — треки (цвет см. в онлайн-варианте на сайте)

We collected the hits into hit arrays applying the following selection criteria: only the energy loss of primary particles were considered with the threshold for the total energy loss of $E_{tot} > 100$ MeV, and all the secondary particles are neglected. The set of coordinates of each muon energy loss points were used to determine the shortest distance to the tube axis, anode wire, to calculate the response time of the straw tube. This time depends on the electron avalanche drift time from the ionization point to the anode wire $t(r)$, where r is the shortest distance from the track to the anode. Using

the complete hit collection array for a given muon we can reconstruct its track and apply this procedure for all the muons in the simulation. If there are several points of muon energy loss in one logical volume, we approximate the muon track by a straight line connecting the first and the last hits, then r is calculated as the shortest distance between this line and tube axis. The hit reconstruction step was omitted for the transparency of the simulation results, that means the 3D coordinates of particle hits are assumed to be known. The distance from the hit to the anode wire is calculated using the local coordinates, relatively to the axis of a particular tube, and the tracks are approximated in global coordinates, relative to the entire detector. Since each particle is tracked individually in GEANT4, it is not suitable to simulate interactions for a large number of particles, as the electron avalanche is. Thus, we used the $t(r)$ dependence [1] simulated using the GARFIELD software [16; 17]), for which we found the analytical approximation: $t(r) = 2.7101 + 1.2156r + 6.8287r^2$. We present the resulting temporal distribution averaged by 100 time slices in the Fig. 4, where grey area corresponds to the times of the sensitive volume intersections by the sample particle, and colored area is straw tubes response time distribution. Here and after all the histograms were generated using the CERN ROOT [18] tools. We obtain the significant overlap between the straw tubes response times from the different bunch crossings appearing in the same time slice. This fact indicates the problem of signal decoding for track and primary vertex reconstruction during data collection in a real experiment.

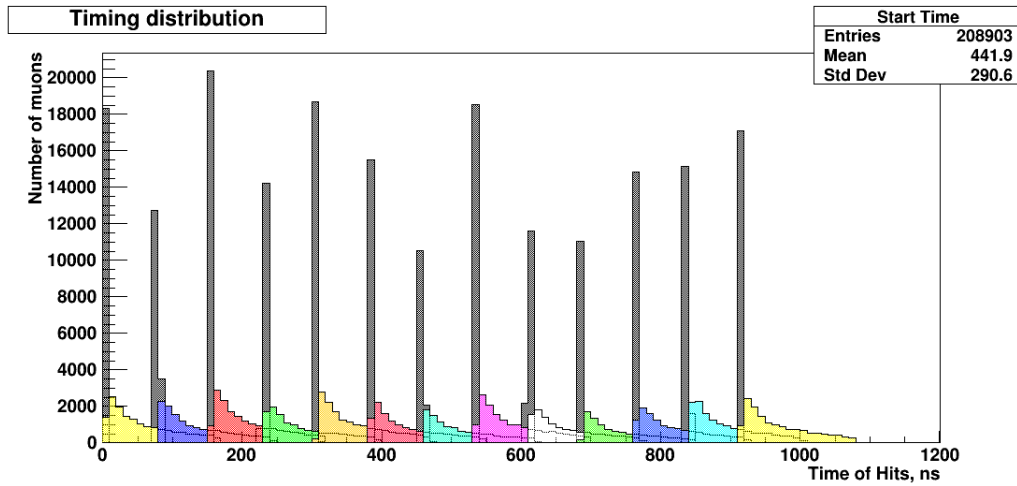


Fig. 4. Temporal distribution averaged by 100 time slices, grey area – times of the sensitive volume intersections by the sample particle, colored area – straw tubes response time distribution

Рис. 4. Временное распределение, усредненное по 100 временным срезам. Серая область – время пересечения чувствительного объема частиц из выборки, цветная область – распределение времен отклика строу-трубок

3. Primary vertex reconstruction

To reconstruct primary vertices assigned with bunch crossings points, we develop an algorithm based on the simplest approximation of particle tracks, making it suitable in the online evaluations for the triggerless regime of ST. For the pure examination of the algorithm, we omit the step of hit reconstruction, and reconstruct the tracks using the direct coordinates of the hits collected in Sec. 1. In our simulation we suppose a magnetic field oriented along z-axis to be equal to $B = 1$ T and uniform everywhere inside the ST, providing a spiral trajectory of a charged particle. We approximate the muon motion in the XOY plane by the parabola and a straight line in the ZOY or YOZ planes, see Fig. 3. The set of hits $\{x_i, y_i\}_N$ in the XOY plane for the each track numbered N is approximated by the parabolic function $\tilde{y} = a_{2,N}\tilde{x}^2 + a_{1,N}\tilde{x} + a_{0,N} = f(\tilde{x})$ where the coefficients $a_{i,N}$ are determined using the least-squares method. Since the system has a rotational symmetry in the XOY plane, but the coordinate system is fixed, we should choose the desired approximation

function to be $Y(X)$ or $X(Y)$ for the each track. It is done by the following procedure: if any of the sets $\{x_i\}_N, \{y_i\}_N$ is not ordered by ascending or descending, its elements correspond to function values $\tilde{y}(\tilde{x})$ while the elements of another to argument values $\tilde{x}$. In the case whether both sets are ordered, the adjusted R square values are calculated using the following formulas:

$$R_{Adj}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(k - 1)}{k - n - 1} \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k (y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2}. \quad (1)$$

Then we compare values of R_{Adj}^2 for $\{x_i, y_i\}_N$ corresponding to choices $(\tilde{x}, \tilde{y})$ and $(\tilde{y}, \tilde{x})$ to adopt one providing the higher R_{Adj}^2 .

The coefficients a_i for each primary particle determine the arc length of the parabolic segment L_N which is calculated using a simple formula

$$\begin{aligned} L_N(\tilde{x}_{i,N}) &= \int_0^{\tilde{x}_{i,N}} \sqrt{1 + (f'(\tilde{x}))^2} d\tilde{x} = \\ &= \frac{1}{4a_{2,N}} \left(\ln \left| \sqrt{(f'(\tilde{x}_{i,N}))^2 + 1} + f'(\tilde{x}_{i,N}) \right| + f'(\tilde{x}_{i,N}) \sqrt{(f'(\tilde{x}_{i,N}))^2 + 1} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Then we can use it to obtain the dependence $z(L)_N = b_{1,N}L_N + b_{0,N}$, where $z(L)_N$ can be approximated by a linear function, which must be extrapolated to intersect with the Z -axis in order to determine the position of the primary vertex. The simulated tracks and hits in the ZOY plane from the primary particles in one time slice are shown in Fig. 3.

The coordinates of the hit are approximated assuming that the particle is produced at the point $\{0, 0, Z_0\}$. The approximated tracks are passed then through the two selection criteria. The first one is based on the polar angle θ of the track, which is determined as the angle between the line connecting the start point of the track with the first hit and the Z axis.

Analysing the distribution of the vertex reconstruction error by polar angle, we can conclude that particle tracks close to Z -axis do not intersect a sufficient number of detector layers, resulting a decrease in the reconstruction accuracy, since the extrapolation error multiplies the approximation error. Therefore, we decided to exclude all tracks with polar angle $\theta < 0.5$ and $\theta > \pi - 0.5$, and this reduces the number of tracks to 80 % from the initial one. In the Fig. 5 we present the distance distribution between the reconstructed vertex and the true vertex depending on the polar angle.

The second track selection criterion is derived by the RSS (regression residuals squares) parameter value stated by the formula:

$$RSS_z = \sum_{i=1}^n (z_{i,N} - (b_{0,N} + b_{1,N}L_N(\tilde{x}_{i,N})))^2. \quad (3)$$

Tracks with an RSS below the value of 1.0 are discarded. This critical value was chosen as corresponding to the optimal ratio of discarded to actually poorly reconstructed tracks, leading to the 56% of the remaining from the initial number of tracks.

The obtained distortion of the distribution relative to $\theta = \pi$, see Fig. 5, is due to the asymmetry of the trajectories of positive muons propagating in and against the direction of the magnetic induction lines. Assuming the $Z_0 - Z_{nach}$ data are normally distributed within a certain range of θ values, we defined the parameters of Gaussian distribution corresponding to the each θ interval:

$$f(Z_0, \theta) = \frac{1}{\sigma(\theta)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Z_0 - \mu(\theta)}{\sigma(\theta)} \right)^2}. \quad (4)$$

The obtained parameters $\mu(\theta)$ and $\sigma(\theta)$ will be used for further track processing. The obtained dependence of the standard deviation and the mean value on the polar angle is shown in Fig. 6.

Using the mean value, the reconstructed Z_0 s were corrected. The $\sigma(\theta)$ is the corresponding reconstruction error of a particular vertex, which was used for vertex clustering and for

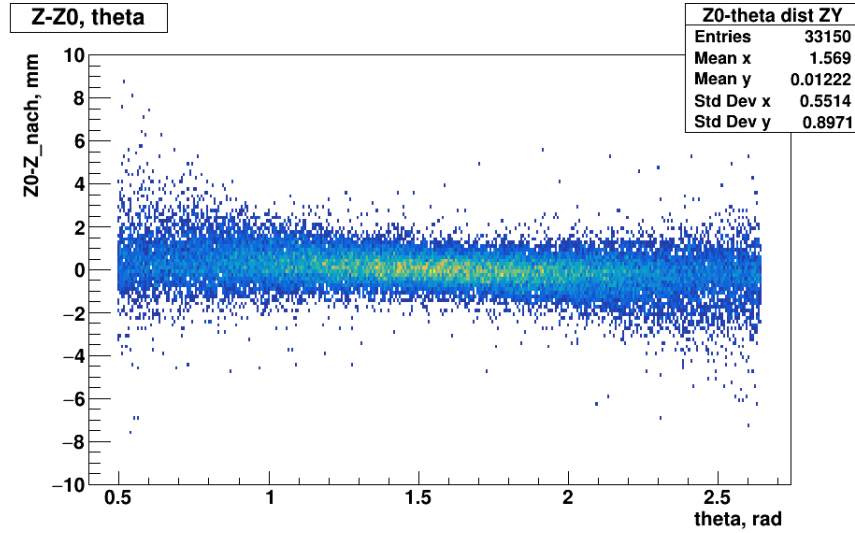
Fig. 5. Distance distribution between the reconstructed vertex and the true vertex versus the polar angle θ

Рис. 5. Распределение расстояния между реконструированной вершиной и истинной вершиной в зависимости от полярного угла θ

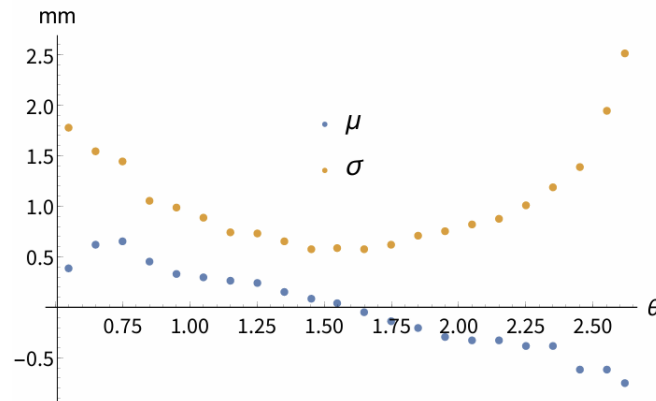
Fig. 6. Dependence of the standard deviation (σ) and the mean value (μ) on the polar angle

Рис. 6. Зависимость стандартного отклонения (σ) и среднего значения (μ) от полярного угла (θ)

correcting the reconstructed vertices. The adjusted distance distribution between the reconstructed vertex and the true vertex are shown in Fig. 7.

The next step is to group the tracks into clusters with common vertices expected as primary vertices. The set of initial coordinate values Z_0 was sorted in ascending order. The reconstructed Z_0 values were taken into account with a corresponding error interval $\{Z_{0,k} \pm \sigma_k\}$. In case error intervals overlap, all Z_0 s in a given region are considered as one cluster treated as reconstructed primary vertex with the coordinate $Z_{0,C} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K Z_{0,k}$. After all the clusters has been found by this procedure we compare their coordinates with true primary vertices. In case of two or more vertices are present within a single cluster they are combined into one primary vertex only if the distance between them does not exceed $3\sigma_0$, where $\sigma_0 = 1$ mm. If several vertices within a cluster are at a greater distance, they are all considered to be reconstructed incorrectly. A correctly reconstructed vertex is one that can be distinguished in the cluster, and all assigned tracks actually belong to it. To determine this, we used the ID of the track (TrackID), which is matched between the reconstructed and true vertex in this algorithm. Among all the incorrectly reconstructed vertices N_{wr} the fraction related to indistinguishability $\frac{N_{wr.vert}}{N_{wr}} = 96\%$. The vertex reconstruction efficiency was calculated as the

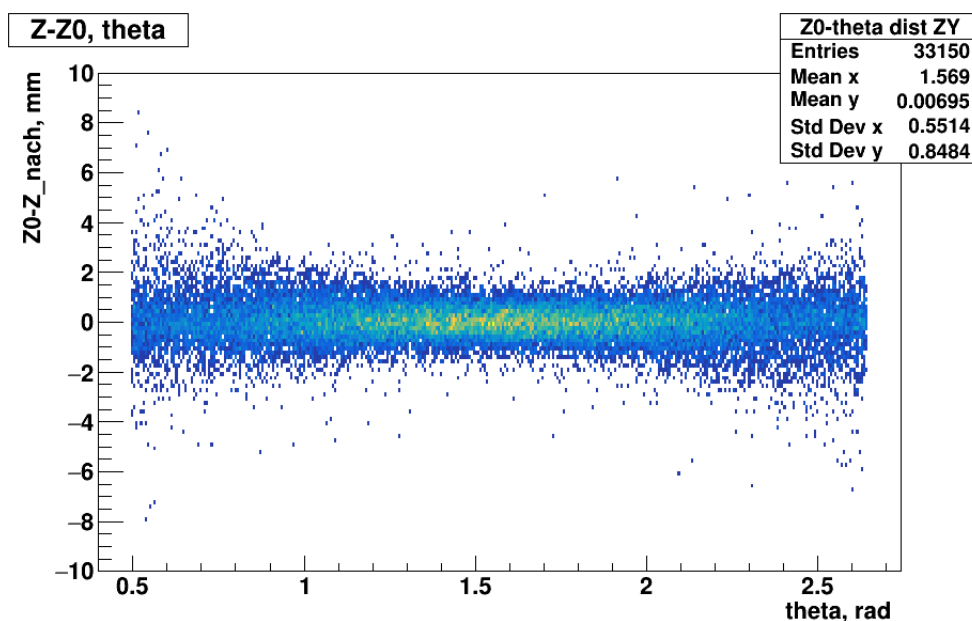


Fig. 7. Adjusted distribution of the distance between the reconstructed vertex and the true vertex versus polar angle θ

Рис. 7. Скорректированное распределение расстояния между реконструированной вершиной и истинной вершиной в зависимости от полярного угла θ

ratio of the number of correctly reconstructed true vertices to the total number of true vertices in the dataset. The efficiency obtained by this method is $\frac{N_{reco}}{N_{all}} = 97.1\%$.

As a result, if the initial vertices are far enough apart each other, they are easily distinguishable and can be correctly reconstructed. However, if the primary vertices are closely located, the error regions in the reconstructed Z_0 can overlap, reducing the efficiency of the reconstruction process.

In the Fig. 8, left, we present the dependence of primary vertex reconstruction efficiency which is defined as the ratio of all the reconstructed vertices to the all initial true vertices in the simulation, against the critical value of the RSS_z parameter. While on the right panel we demonstrate the percentage of the vertices lost by use the RSS_z -related criterion. One can find the maximal efficiency is achieved at the $RSS_z = 1$ being equal to 77.1 %.

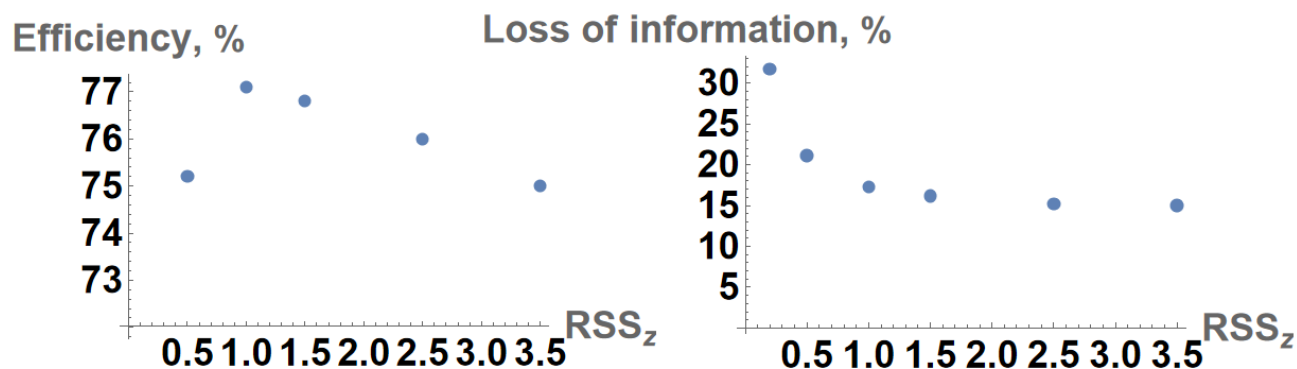


Fig. 8. Efficiency dependence (left) and vertices information loss (right) on RSS_z of $z(l)$ approximation
Рис. 8. Зависимость эффективности реконструкции вершин (слева) и потери информации о вершинах (справа) от порогового значения RSS_z аппроксимации $z(l)$

Conclusions

We present the algorithm for the primary vertex reconstruction in the SPD NICA straw tracker which gives an opportunity to resolve a complicated temporal structure of the ST response within the timeslice. Due to the simplicity of the algorithm it is fast and can be used for the online data processing in the triggerless regime of the detector operation. We found the optimal parameters providing the maximal efficiency with minimal information loss, and a good quality of the vertex reconstruction on the conditionally-reduced sample of the true vertices.

The further study implies the verification of the algorithm performance using the hit data with less purity and using more complicated functions for track approximations.

Funding. The work was supported by the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, № FSSS-2025-0003.

Acknowledgements: the authors are grateful to A. Allahverdiyeva for providing the detector model, to I.I. Denisenko, A.S. Zhemchugov and other participants of the SPD NICA Collaboration for useful comments and fruitful discussions.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Morozova S.D., Shipilova A.V. Response simulation and primary vertex reconstruction in the SPD NICA straw tracker. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 75–85. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-75-85.

© Morozova S.D., Shipilova A.V., 2025

Svetlana D. Morozova (svtmorozova09@gmail.com) – Master’s degree student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Aleksandra V. Shipilova (shipilova.av@ssau.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation; senior research fellow, Joint Institute for Nuclear Research, 6, Joliot-Curie Street, Dubna, 141980, Russian Federation.

References

- [1] Abazov V. [et al.] Technical Design Report of the Spin Physics Detector at NICA. *Natural Science Review*, 2024, vol. 1, p. 1. URL: <https://nsr-jinr.ru/index.php/nsr/article/view/35>.
- [2] Abazov V.M. [et al.] Conceptual design of the Spin Physics Detector. arXiv: 2102.00442. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.00442>.
- [3] Arbuzov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, vol. 119, P. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.
- [4] Abramov V.V. [et al.] Possible Studies at the First Stage of the NICA Collider Operation with Polarized and Unpolarized Proton and Deuteron Beams. *Physics of Particles and Nuclei*, 2021, vol. 52, issue 6, pp. 1044–1119. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063779621060022>.
- [5] Andreev V.F. Comparison of Algorithms for Reconstructing the Primary Interaction Vertex for the SPD Experiment. *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, 2021, vol. 48, pp. 301–306. DOI: <https://doi.org/10.3103/S106833562110002X>.
- [6] Andreev V.F., Gerassimov S.G., Terkulov A.R. Software for Tracks and Primary Vertex Reconstruction for the SPD Experiment. *Physics of Particles and Nuclei*, 2021, vol. 52, pp. 793–796. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063779621040055>.

- [7] Morozova S.D., Shipilova A.V. The Simulation of Interactions in the Straw-Based SPD Track Detector and Primary Vertex Reconstruction. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2024, vol. 21, pp. 727–730. DOI: <https://doi.org/10.1134/S154747712470119X>.
- [8] Volkov V. [et al.] Straw Chambers for the NA64 Experiment. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2019, vol. 16, pp. 847–858. DOI: [10.1134/S1547477119060554](https://doi.org/10.1134/S1547477119060554).
- [9] Bychkov V. [et al.] Construction and manufacture of large size straw-chambers of the COMPASS spectrometer tracking system. *Particles and Nuclei, Letters*, 2002, no. 2 (111), pp. 64–73. Available at: <https://inis.iaea.org/records/38dgc-vqj08>.
- [10] Platzer K. [et al.] Mapping the large area straw detectors of the COMPASS experiment with Xrays. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2005, vol. 52, issue 3, pp. 793–98. DOI: <https://doi.org/10.1109/NSSMIC.2004.1462189>.
- [11] Merkt S.A. [et al.] Going standalone and platform-independent, an example from recent work on the ATLAS Detector Description and interactive data visualization. *EPJ Web of Conferences*, 2019, vol. 214, p. 02035. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201921402035>.
- [12] Bandieramonte M., Bianchi R. M., Boudreau J., Dell’Acqua A., Tsulaia V. The new GeoModel suite, a lightweight detector description and visualization toolkit for HEP. *Journal of Physics Conference Series*, 2023, vol. 2438, p. 012051. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2438/1/012051>.
- [13] Agostinelli S. [et al.] GEANT4 – a simulation toolkit. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2003, vol. 506, issue 3, pp. 250–303. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(03\)01368-8](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(03)01368-8).
- [14] Allison J. [et al.] Geant4 developments and applications. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2006, vol. 53, issue 1, pp. 270–278. DOI: <https://doi.org/10.1109/TNS.2006.869826>.
- [15] Allison J. [et al.] Recent developments in Geant4. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2016 vol. 835, pp. 186–225. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2016.06.125>.
- [16] Veenhof R. Garfield, a drift chamber simulation program. *Conference Proceedings*, 1993, C 9306149, pp. 66–71. Available at: <https://inspirehep.net/literature/370078>.
- [17] Veenhof R. GARFIELD, recent developments. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1998, vol. 419, pp. 726–730. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(98\)00851-1](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(98)00851-1).
- [18] Brun R., Rademakers F. ROOT – An Object Oriented Data Analysis Framework. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1997, vol. 389, pp. 81–86. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(97\)00048-X](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(97)00048-X).

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-75-85

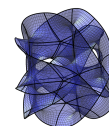
УДК 539.1; 621.384.6

Моделирование отклика и восстановление первичных вершин в трековом строу-детекторе SPD NICA

Морозова¹ С.Д., Шпилова^{1,2} А.В.

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; svtmorozova09@gmail.com; ORCID: 0009-0009-1168-8529 (С.Д.); shipilova.av@ssau.ru; ORCID: 0000-0003-3965-3757 (А.В.);

² Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Российская Федерация;



Поступила: 30.01.2025

Рассмотрена: 18.03.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. В данной работе мы изучаем временную структуру событий в строу-детекторе спиновой физики (SPD) ускорителя NICA в ОИЯИ. С помощью программного пакета Geant4 мы моделируем отклик чувствительных элементов слоев строу-трубок при бестриггерном режиме работы SPD. Используя результаты моделирования, мы представляем простой алгоритм быстрого поиска первичных вершин и оцениваем его эффективность и чистоту реконструкции.

Ключевые слова: Монте-Карло моделирование; аппроксимация треков; реконструкция первичных вершин; эффективность восстановления; Geant4; SPD NICA; строу-трубка; детектор.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, № FSSS-2025-0003.

Благодарность: авторы выражают благодарность А. Аллахвердиевой за предоставленную модель детектора, И.И. Денисенко, А.С. Жемчугову и другим участникам коллаборации SPD NICA за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Morozova S.D., Shipilova A.V. Response simulation and primary vertex reconstruction in the SPD NICA straw tracker // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series 2025. Т. 31, № 1. С. 75–85. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-75-85.

© Морозова С.Д., Шипилова А.В., 2025

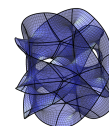
Светлана Денисовна Морозова (svtmorozova09@gmail.com) – магистрант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Александра Викторовна Шипилова (shipilova.av@ssau.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34; старший научный сотрудник, Объединенный институт ядерных исследований, 141980, Российская Федерация, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6.

Литература

- [1] Abazov V. [et al.] Technical Design Report of the Spin Physics Detector at NICA // Natural Science Review. 2024. Vol. 1. P. 1. Available at: <https://nsr-jinr.ru/index.php/nsr/article/view/35>.
- [2] Abazov V.M. [et al.] Conceptual design of the Spin Physics Detector. arXiv: 2102.00442. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.00442>.
- [3] Arbuzov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2021. Vol. 119. P. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.
- [4] Abramov V.V. [et al.] Possible Studies at the First Stage of the NICA Collider Operation with Polarized and Unpolarized Proton and Deuteron Beams // Physics of Particles and Nuclei. 2021. Vol. 52, issue 6. P. 1044–1119. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063779621060022>.
- [5] Andreev V.F. Comparison of Algorithms for Reconstructing the Primary Interaction Vertex for the SPD Experiment // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. 2021. Vol. 48. P. 301–306. DOI: <https://doi.org/10.3103/S106833562110002X>.
- [6] Andreev V.F., Gerassimov S.G., Terkulov A.R. Software for Tracks and Primary Vertex Reconstruction for the SPD Experiment // Physics of Particles and Nuclei. 2021. Vol. 52. P. 793–796. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063779621040055>.

- [7] Morozova S.D., Shipilova A.V. The Simulation of Interactions in the Straw-Based SPD Track Detector and Primary Vertex Reconstruction // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2024. Vol. 21. P. 727–730. DOI: <https://doi.org/10.1134/S154747712470119X>.
- [8] Volkov V. [et al.] Straw Chambers for the NA64 Experiment // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2019. Vol. 16. P. 847–858. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1547477119060554>.
- [9] Bychkov V. [et al.] Construction and manufacture of large size straw-chambers of the COMPASS spectrometer tracking system // *Particles and Nuclei, Letters*. 2002. № 2 (111). P. 64–73. URL: <https://inis.iaea.org/records/38dge-vqj08>.
- [10] Platzer K. [et al.] Mapping the large area straw detectors of the COMPASS experiment with Xrays // *IEEE Transactions on Nuclei Science*. 2005. Vol. 52, issue 3. P. 793–98. DOI: <http://doi.org/10.1109/NSSMIC.2004.1462189>.
- [11] Merkt S.A. [et al.] Going standalone and platform-independent, an example from recent work on the ATLAS Detector Description and interactive data visualization // *EPJ Web of Conferences*. 2019. Vol. 214. P. 02035. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201921402035>.
- [12] Bandieramonte M., Bianchi R.M., Boudreau J., Dell’Acqua A., Tsulaia V. The new GeoModel suite, a lightweight detector description and visualization toolkit for HEP // *Journal of Physics Conference Series*. 2023. Vol. 2438. P. 012051. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2438/1/012051>.
- [13] Agostinelli S. [et al.] GEANT4 – a simulation toolkit // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2003. Vol. 506, issue 3. P. 250–303. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(03\)01368-8](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(03)01368-8).
- [14] Allison J. [et al.] Geant4 developments and applications // *IEEE Transactions on Nuclei Science*. 2006. Vol. 53, issue 1. P. 270–278. DOI: <https://doi.org/10.1109/TNS.2006.869826>.
- [15] Allison J. [et al.] Recent developments in Geant4 // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2016. Vol. 835. P. 186–225. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2016.06.125>.
- [16] Veenhof R. Garfield, a drift chamber simulation program // *Conference Proceedings*. 1993. C 9306149. P. 66–71. Available at: <https://inspirehep.net/literature/370078>.
- [17] Veenhof R. GARFIELD, recent developments // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 1998. Vol. 419. P. 726–730. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(98\)00851-1](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(98)00851-1).
- [18] Brun R., Rademakers F. ROOT – An Object Oriented Data Analysis Framework // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 1997. Vol. 389. P. 81–86. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0168-9002\(97\)00048-x](https://doi.org/10.1016/s0168-9002(97)00048-x).



Влияние начальной атомной когерентности и прямого взаимодействия на перепутывание кубитов в двухкубитной модели Тависа — Каммингса

Осман А. , Фархутдинова А.Р. , Башикиров Е.К. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; ali.oth@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-8811-2521 (А.); adehy.010k@gmail.com; ORCID: 0009-0006-2391-6320 (А.Р.); bashkirov.ek@ssau.ru; ORCID: 0000-0001-8682-4956 (Е.К.);

Поступила: 11.01.2025

Рассмотрена: 09.02.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. Найдена точная динамика модели, состоящей из двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных переходов, при наличии прямого изинговского взаимодействия кубитов. Точное решение использовано для расчета двухкубитной отрицательности кубитов в случае когерентного начального состояния кубитов и теплового состояния поля резонатора. Показано, что в случае резонансного взаимодействия кубитов с полем начальная атомная когерентность приводит к значительному увеличению максимальной степени перепутывания. Включение прямого изинговского взаимодействия кубитов может существенно усиливать перепутывание кубитов как в случае когерентных, так и некогерентных начальных состояний кубитов. В случае нерезонансного взаимодействия кубитов и поля резонатора расстройка приводит к ослаблению влияния атомной когерентности на динамику перепутывания кубитов.

Ключевые слова: кубиты; когерентное состояние кубитов; резонатор; тепловое поле; расстройка; перепутывание; отрицательность; изинговское взаимодействие.

Введение

Перепутанные состояния играют центральную роль во многих процессах квантовой обработки информации [1–3]. Явление перепутывания составных частей сложной системы неразрывно связано с принципом суперпозиции квантовой механики. Очевидно, что квантовая когерентность атомных систем, также непосредственно вытекающая из принципа квантовой суперпозиции, тесно связана с явлением перепутывания. Это позволяет сделать вывод, что атомная когерентностью может быть использована для усиления перепутывания атомных систем. Работа современных устройств квантовой обработки информации основана на использовании перепутанных состояний естественных или искусственных атомов (кубитов). Для создания и управления перепутанными состояниями кубитов обычно используют электромагнитные поля резонаторов. При теоретическом описании систем кубитов, взаимодействующих с выделенными модами резонаторов, обычно используют модель Джейнса — Каммингса и ее расширения и обобщения [4–6]. При реализации реальных сценариев квантовой обработки информации возникает квантовая декогеренция, которая является следствием неизбежного взаимодействия между квантовой системой и внешним шумом. Наличие внешней среды при описании эволюции систем кубитов в резонаторах во многих случаях можно смоделировать с помощью наличия теплового поля резонатора. При этом, как впервые было показано в работе [7], взаимодействие кубитов с тепловым шумом резонатора может приводить не к разрушению, а к генерации высокой степени перепутывания кубитов. Связь между атомной когерентностью и перепутыванием в рамках модели типа Джейнса — Каммингса была рассмотрена впервые в работе [8].

Авторы показали, что при прохождении трехуровневого атома через двухмодовый тепловой резонатор наличие начальной атомной когерентности между возбужденными состояниями атома может привести к перепутыванию состояний двух тепловых полей. В работе [9] в рамках двухатомной модели Джейнса — Каммингса в тепловом резонаторе было показано, что перепутывание атомов в процессе их эволюции может значительно усиливаться благодаря начальной когерентности атомов по сравнению со случаем, когда атомы изначально готовятся в некогерентных состояниях. При этом было определено, что возможно управление степенью перепутывания кубитов при изменении относительных фаз и амплитуд поляризованных атомов. Впоследствии указанный эффект был предсказан для различных обобщений и расширений двухатомной модели Джейнса — Каммингса [10–12]. В последнее время были разработаны квантовые системы кубитов, между которыми можно организовать сильное взаимодействие, в частности сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами. В ряде теоретических работ исследовалось влияние начальной атомной когерентности на степень перепутывания кубитов при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия в различных двухатомных моделях Джейнса — Каммингса [13; 14]. В нашей работе [15] исследовалась динамика теплового перепутывания в двухатомной модели Джейнса — Каммингса при наличии прямого взаимодействия изинговского типа для сепарабельных некогерентных и перепутанных состояний кубитов. Представляет интерес обобщить результаты работы [15] на случай когерентных начальных состояний кубитов.

В настоящей работе мы исследовали влияние начальной атомной когерентности на динамику перепутывания двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с одномодовым тепловым полем идеального резонатора, при наличии прямого изинговского взаимодействия кубитов. В качестве критерия перепутывания кубитов использовалась отрицательность. В результате показано, что при наличии прямого взаимодействия начальная атомная когерентность кубитов приводит к существенному возрастанию максимальной степени перепутывания в случае резонансного взаимодействия кубитов и поля. При этом в случае нерезонансного взаимодействия имеет место обратный эффект.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим систему, состоящую из двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с одномодовым электромагнитным полем идеального резонатора. Предположим, что между кубитами имеется прямое взаимодействие изинговского типа. Для организации такой связи между, например, сверхпроводящими кубитами используют так называемые пассивные элементы. Под пассивными элементами подразумеваются элементы цепи, для которых резонансная частота намного больше, чем частота перехода между основным и первым уровнями энергии кубитов. В результате при взаимодействии с кубитами пассивные элементы всегда будут оставаться в своем основном состоянии. Для организации различных типов взаимодействий между кубитами в качестве пассивных элементов используют емкости и индуктивности [16–18].

Тогда в системе отсчета, вращающейся с частотой поля резонатора, гамильтониан модели можно записать в виде

$$\Omega H = (1/2) \sum_{j=1}^2 \hbar \Omega \mu_j^z + \sum_{j=1}^2 \hbar \gamma (\mu_j^+ \eta + \mu_j^- \eta^\dagger) + \hbar \Sigma \mu_1^z \mu_2^z, \quad (1)$$

где μ_j^z — оператор инверсии населенностей в i -м кубите ($i = 1, 2$); $\mu_j^+ = |+\rangle_{ii} \langle -|$ и $\mu_j^- = |-\rangle_{ii} \langle +|$ — операторы перехода между возбужденным $|+\rangle_j$ и основным состояниями $|-\rangle_j$ j -го кубита ($j = 1, 2$); $\eta^\dagger$ и η — операторы рождения и уничтожения фотонов поля резонатора; γ — константа кубит-фотонного взаимодействия; Ω — расстройка частоты поля и частоты резонансного перехода в кубите и Σ — константа изинговского взаимодействия кубитов.

Выберем в качестве начального состояния кубитов когерентные сепарабельные состояния, которые представляют собой суперпозиции возбужденного и основного состояния:

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = \cos \theta_1 |+\rangle_1 + \sin \theta_1 |-\rangle_1,$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = \cos \theta_2 |+\rangle_2 + \sin \theta_2 |-\rangle_2, \quad (2)$$

где θ_1 и θ_2 — параметры, определяющие степень начальной когерентности кубитов Q_1 и Q_2 соответственно.

Такие начальные состояния можно получить для кубитов в резонаторе с помощью микроволновых импульсов определенной длительности. Выбирая определенным образом параметры θ_1 и θ_2 , мы можем получить четыре некогерентных сепарабельных начальных состояния кубитов: $|+, +\rangle$, $|+, -\rangle$, $|-, +\rangle$, $|-, -\rangle$. Например, состоянию $|+, -\rangle$ соответствуют параметры $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$.

Начальное состояние поля резонатора выберем в виде теплового состояния с матрицей плотности

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|.$$

Здесь весовые коэффициенты есть

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ — среднее число фотонов в моде

$$\bar{n} = (\exp [\hbar\omega_{cav}/k_B T] - 1)^{-1},$$

k_B — постоянная Больцмана и T — температура резонатора.

Прежде чем рассматривать взаимодействие двух кубитов с тепловым полем, сначала изучим динамику двух кубитов, взаимодействующих с электромагнитным полем резонатора в фоковских состояниях. Для получения точной динамики рассматриваемой модели в данном случае мы используем так называемые "одетые" состояния или собственные функции гамильтониана взаимодействия (1). Предположим, что число возбуждения системы "кубиты + поле" равно n ($n \geq 1$). Тогда эволюция вектора состояния рассматриваемой системы будет происходить в гильбертовом пространстве с базисом

$$|-, -, n+2\rangle, |+, -, n+1\rangle, |-, +, n+1\rangle, |+, +, n\rangle.$$

Тогда, собственные состояния гамильтониана (1) могут быть записаны в виде

$$|\Phi_{in}\rangle = w_{in}(X_{i1n} |-, -, n+2\rangle + X_{i2n} |+, -, n+1\rangle + X_{i3n} |-, +, n+1\rangle + X_{i4n} |+, +, n\rangle) \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$w_{in} = 1/\sqrt{|X_{i1n}|^2 + |X_{i2n}|^2 + |X_{i3n}|^2 + |X_{i4n}|^2}$$

$$X_{11,n} = 0, \quad X_{12,n} = -1, \quad X_{13,n} = 1, \quad X_{14,n} = 0,$$

$$X_{i1,n} = -\left(\left(2\sqrt{1+n}\sqrt{2+n}\right) / \left(4 + \zeta^2 + 2n - \zeta\bar{\zeta} - \delta\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i,n}^2\right)\right),$$

$$X_{i2,n} = \left(\sqrt{1+n}(\zeta - \delta - \epsilon_{i,n})\right) / \left(4 + \zeta^2 + 2n - \zeta\bar{\zeta} - \delta\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i,n}^2\right),$$

$$X_{i3,n} = \left(\sqrt{1+n}(\zeta - \delta - \epsilon_{i,n})\right) / \left(4 + \zeta^2 + 2n - \zeta\bar{\zeta} - \delta\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i,n}^2\right),$$

$$X_{i4,n} = 1,$$

$$\zeta = \Sigma/\gamma, \quad \bar{\zeta} = \Omega/\gamma.$$

Соответственно, безразмерные значения энергетических уровней есть

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,n} &= E_{1,n}/(\hbar\gamma) = -\zeta, \\ \varepsilon_{2,n} &= E_{2,n}/(\hbar\gamma) = \frac{\zeta}{3} + \operatorname{Re} \left[\frac{-6B_n + 2(\zeta)^2 + 2^{1/3}C_n^{2/3}}{3 \cdot 2^{2/3}C_n^{1/3}} \right], \\ \varepsilon_{3,n} &= E_{3,n}/(\hbar\gamma) = \frac{\zeta}{3} + \operatorname{Re} \left[\frac{(6 + 6i\sqrt{3})B_n + i(2(i - \sqrt{3})(\zeta)^2 + 2^{1/3}(i + \sqrt{3})C_n^{2/3})}{6 \cdot 2^{2/3}C_n} \right], \\ \varepsilon_{4,n} &= E_{4,n}/(\hbar\gamma) = \frac{\zeta}{3} + \operatorname{Re} \left[\frac{(6 - 6i\sqrt{3})B_n + 2i(i + \sqrt{3})(\zeta)^2 + 2^{1/3}(-1 - i\sqrt{3})C_n^{2/3}}{6 \cdot 2^{2/3}C_n^{1/3}} \right],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_n &= -27A_n - 9B_n(\zeta) + 2(\zeta)^3 + \sqrt{27} + \\ &+ \sqrt{27A_n^2 + B_n^2(4B_n - (\zeta)^2) - 2A_n(\zeta)(2(\zeta)^2 - 9B_n)}, \\ A_n &= 6\zeta + \zeta^3 + 4\zeta n + 2\zeta - \zeta\zeta^2, \quad B_n = -6 - \zeta^2 - 4n - \delta^2.\end{aligned}$$

Поставим перед собой задачу найти динамику рассматриваемой модели для начального когерентного состояния кубитов (2) и теплового поля резонатора. В качестве первого шага для решения поставленной задачи как уже было сказано выше, рассмотрим решение уравнения эволюции рассматриваемой системы в случае фоковских начальных состояний электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим полученные результаты на случай теплового состояния поля резонатора.

Предположим, что рассматриваемая система приготовлена изначально в состоянии $|+, -, n+1\rangle$ ($n \geq 0$). В этом случае в момент времени t полная временная волновая функция системы есть

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{12,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{22,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{32,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{42,n}|+, +, n\rangle, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}Z_{i2,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} w_{1n} Y_{2in} X_{1in} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} w_{2n} Y_{2in} X_{2in} + \\ &+ e^{-iE_{3n}t/\hbar} w_{3n} Y_{2in} X_{3in} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} w_{4n} Y_{2in} X_{4in} \quad (i = 1, 2, 3, 4)\end{aligned} \quad (5)$$

и

$$Y_{ijn} = w_{jn} X_{jin}^*.$$

Если начальное состояние системы $|-, +, n+1\rangle$ ($n \geq 0$), то временная волновая функция может быть записана как

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{13,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{23,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{33,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{43,n}|+, +, n\rangle, \quad (6)$$

где коэффициенты $Z_{i3,n}$ могут быть получены из (5) путем замены Y_{2in} на Y_{3in} ($i = 1, 2, 3, 4$).

Для числа фотонов в резонаторе $n = 0$ и начальных состояний кубитов $|+, -\rangle$ и $|-, +\rangle$ временные волновые функции системы есть

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 0} = G_{12}(t)|+, -, 0\rangle + G_{22}(t)|-, +, 0\rangle + G_{32}(t)|-, -, 1\rangle, \quad (7)$$

и

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 0} = G_{13}(t)|+, -, 0\rangle + G_{23}(t)|-, +, 0\rangle + G_{33}(t)|-, -, 1\rangle \quad (8)$$

соответственно. Временные коэффициенты в формулах (7) и (8) есть

$$G_{12} = G_{13} = -\frac{2ie^{\frac{1}{2}it\zeta} \sin \left[\frac{1}{2}t\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right]}{\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}},$$

$$G_{22} = G_{23} = \frac{1}{4\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} e^{-\frac{1}{2}it(-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} \times$$

$$\times \left(\left(-1 + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \right) (2\zeta - \delta) + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + \right.$$

$$\left. + 2e^{\frac{1}{2}it(2\zeta J + 3\alpha - \delta + \sqrt{8 + (-2J + \alpha + \delta)^2})} \sqrt{8 + (-2 + \delta)^2} \right),$$

$$G_{32} = G_{33} = \frac{1}{4\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} e^{-\frac{1}{2}it(-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} \times$$

$$\times \left(\left(-1 + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \right) (2\zeta - \delta) + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} - \right.$$

$$\left. - 2e^{\frac{1}{2}it(2\zeta - \delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right).$$

Для начальных состояний $|+, +, n\rangle$ и $|-, -, n+2\rangle$ ($n \geq 0$) временные волновые функции системы могут быть представлены в следующем виде:

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{11, n} |-, -, n+2\rangle + Z_{21, n} |+, -, n+1\rangle + Z_{31, n} |-, +, n+1\rangle + Z_{41, n} |+, +, n\rangle, \quad (9)$$

и

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{14, n} |-, -, n+2\rangle + Z_{24, n} |+, -, n+1\rangle + Z_{34, n} |-, +, n+1\rangle + Z_{44, n} |+, +, n\rangle \quad (10)$$

соответственно. Коэффициенты $Z_{i1, n}$ ($Z_{i4, n}$) могут быть получены из (5) путем замены Y_{2in} на Y_{1in} (Y_{4in}) ($i = 1, 2, 3, 4$).

Для начального состояния $|-, -, 1\rangle$ временная волновая функция есть

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 1} = G_{14}^{(t)} |-, -, 1\rangle + G_{24}^{(t)} |+, -, 0\rangle + G_{34}^{(t)} |-, +, 0\rangle, \quad (11)$$

где

$$G_{14}(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}it(-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} (-2(-1 + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}}) \zeta -$$

$$- \frac{-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} (\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}))}{2\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}},$$

$$G_{24}(t) = -\frac{2ie^{\frac{1}{2}it\zeta} \sin \left[\frac{1}{2}t\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right]}{\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}},$$

$$G_{34}(t) = -\frac{2ie^{\frac{1}{2}it\zeta} \sin \left[\frac{1}{2}t\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right]}{\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}}.$$

Наконец, для начального состояния $|-, -, 0\rangle$ мы имеем

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 0} = G_{44}(t) |-, -, 0\rangle, \quad (12)$$

где $G_{44}(t) = 1$.

Используя выражения (3)–(10), мы можем получить временную матрицу плотности для полной системы "два кубита + мода поля" $\rho_{Q_1, Q_2, F}(t)$ в случае теплового состояния поля резонатора и когерентных состояний кубитов (2). Усредняя полную матрицу плотности по переменным поля, мы можем получить редуцированную двухкубитную матрицу плотности

$$\rho_{Q_1, Q_2}(t) = \text{Tr}_F \rho_{Q_1, Q_2, F}(t). \quad (13)$$

В двухкубитном базисе

$$|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle$$

матрица плотности (11) имеет вид

$$\rho_{Q_1, Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & \rho_{23}^* & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{14}^* & \rho_{24}^* & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{41,n}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{42,n-1}|^2 + bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{42,n-1} Z_{43,n-1}^* + \\ &+ cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{43,n-1} Z_{42,n-1}^* + |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{43,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{44,n-2}|^2, \\ \rho_{12} &= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{22,n-1}^* + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{23,n-1} + \\ &+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{42,n-1} Z_{24,n-2} + cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{43,n-1} Z_{24,n-2}^* + \\ &+ p_1 (bd^* Z_{42,0} G_{24}^* + cd^* Z_{43,0} G_{24}^*) + p_0 (ab^* Z_{41,0} G_{22}^* + ac^* Z_{41,0} G_{23}^*), \\ \rho_{13} &= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{32,n-1} + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{33,n-1}^* + \\ &+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{42,n-1} Z_{34,n-2}^* + cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{43,n-1} Z_{34,n-2} + \\ &+ p_1 (bd^* Z_{42,0} G_{34}^* + cd^* Z_{43,0} G_{34}^*) + p_0 (ab^* Z_{41,0} G_{32}^* + ac^* Z_{41,0} G_{33}^*), \\ \rho_{14} &= ad^* \sum_{n=2} p_n Z_{41,n} Z_{14,n-2}^* + p_1 ad^* Z_{41,1} G_{14}^* + p_0 ad^* Z_{41,0}, \\ \rho_{22} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{21,n}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{24,n-2}|^2 + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{23,n-1}^* + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{22,n-1}^* + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{23,n-1}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{22,n-1}|^2 + \\ &+ p_1 |d|^2 |G_{24}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{22}|^2 + bc^* G_{22} G_{23}^* + p_0 (cb^* G_{23} G_{22}^* |c|^2 |G_{23}|^2)), \\ \rho_{23} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n Z_{21,n} Z_{31,n}^* + |d|^2 \sum_{n=2} p_n Z_{24,n-2} Z_{34,n-2}^* + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{33,n-1}^* + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{32,n-1} + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{33,n-1}^* + |b|^2 \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{32,n-1}^* + \\ &+ p[1] |d|^2 G_{24} G_{23}^* + p[0] (|b|^2 G_{22} G_{32}^* + bc^* G_{22} G_{33}^* + cb^* G_{23} G_{32}^* + |c|^2 G_{23} G_{33}^*), \\ \rho_{33} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{31,n}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{32,n-1}|^2 + bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{32,n-1} Z_{33,n-1}^* + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{33,n-1} Z_{32,n-1}^* + |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{33,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{34,n-2}|^2 + \\
 & + p_1 |d|^2 |G_{34}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{32}|^2 + bc^* G_{32} G_{33}^* + cb^* G_{33} G_{32}^* + |c|^2 |G_{33}|^2, \\
 & \rho_{34} = ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{31,n} Z_{12,n-1} + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{31,n} Z_{13,n-1} + \\
 & + bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{32,n-1} Z_{14,n-2}^* + cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{33,n-1} Z_{14,n-2}^* + \\
 & + p_1 (bd^* Z_{32,0} G_{14}^* + cd^* Z_{33,0} G_{14}^*) + p_0 (ab^* Z_{31,0} G_{12}^* + ac^* Z_{31,0} G_{13}^*) + \\
 & + p_0 (bd^* G_{32} + cd^* G_{33}, \\
 & \rho_{44} = |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{11}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{12,n-1}|^2 + bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{12,n-1} Z_{13,n-1}^* + \\
 & + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{13,n-1} Z_{12,n-1}^* + |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{13,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{14,n-2}|^2 + \\
 & + p_1 |d|^2 |G_{14}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{12}|^2 + bc^* G_{12} G_{13}^* + cb^* G_{13} G_{12}^* + |c|^2 |G_{13}|^2 + |d|^2).
 \end{aligned}$$

Здесь $a = \cos \theta_1 \cos \theta_2$, $b = \cos \theta_1 \sin \theta_2$, $c = \sin \theta_1 \cos \theta_2$, $d = \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной матрицей плотности (12) в качестве количественной меры перепутывания кубитов, может быть выбран параметр, называемый отрицательностью [19; 20]. Указанный параметр можно представить в виде

$$\varepsilon = -2 \sum_i \chi_i^-, \quad (15)$$

где χ_i – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной матрицы $\rho_{Q_1, Q_2}^{T_1}(t)$.

Для когерентных начальных состояний кубитов рассматриваемая матрица имеет вид

$$\rho_{Q_1, Q_2}^{T_1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}^* & \rho_{23}^* \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{14}^* & \rho_{24}^* \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Собственные значения матрицы плотности (14) могут быть найдены в аналитическом виде. Однако они имеют настолько громоздкий вид, что в настоящей работе указанные матричные элементы и отрицательность вычислялись посредством численных расчетов.

2. Результаты расчетов

На рис. 2.1 представлена временная зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для случая резонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора, различных значений параметра изинговского взаимодействия кубитов и фиксированного значения среднего числа тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 10$. Сплошные кривые на рисунках соответствуют когерентным начальным состояниям кубитов $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, а штриховые линии – сепарабельным состояниям кубитов вида $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle$. Численное моделирование, показало, что временные зависимости отрицательности $\varepsilon(t)$ для случая ферромагнитного типа связи кубитов ($\zeta < 0$) и антиферромагнитного типа связи кубитов ($\zeta > 0$) полностью совпадают для любых значений параметров модели.

Из рисунка 2.1 хорошо видно, что в случае резонансного взаимодействия максимальная степень перепутывания существенно возрастает при наличии начальной когерентности состояний кубитов. При этом зависимость максимальной степени перепутывания кубитов от безразмерного параметра изинговского взаимодействия кубитов в случае когерентных начальных состояний кубитов носит немонотонный характер. Для малых значений константы изинговского взаимодействия ($0 \leq \zeta < 0.05$) увеличение указанного параметра приводит к быстрому росту максимальной степени перепутывания. В области же значений безразмерного параметра изинговского взаимодействия $\zeta > 0.05$ увеличение интенсивности изинговского взаимодействия практически не влияет на максимальную степень перепутывания кубитов. Указанный параметр существенно влияет на период осцилляций Раби отрицательности.

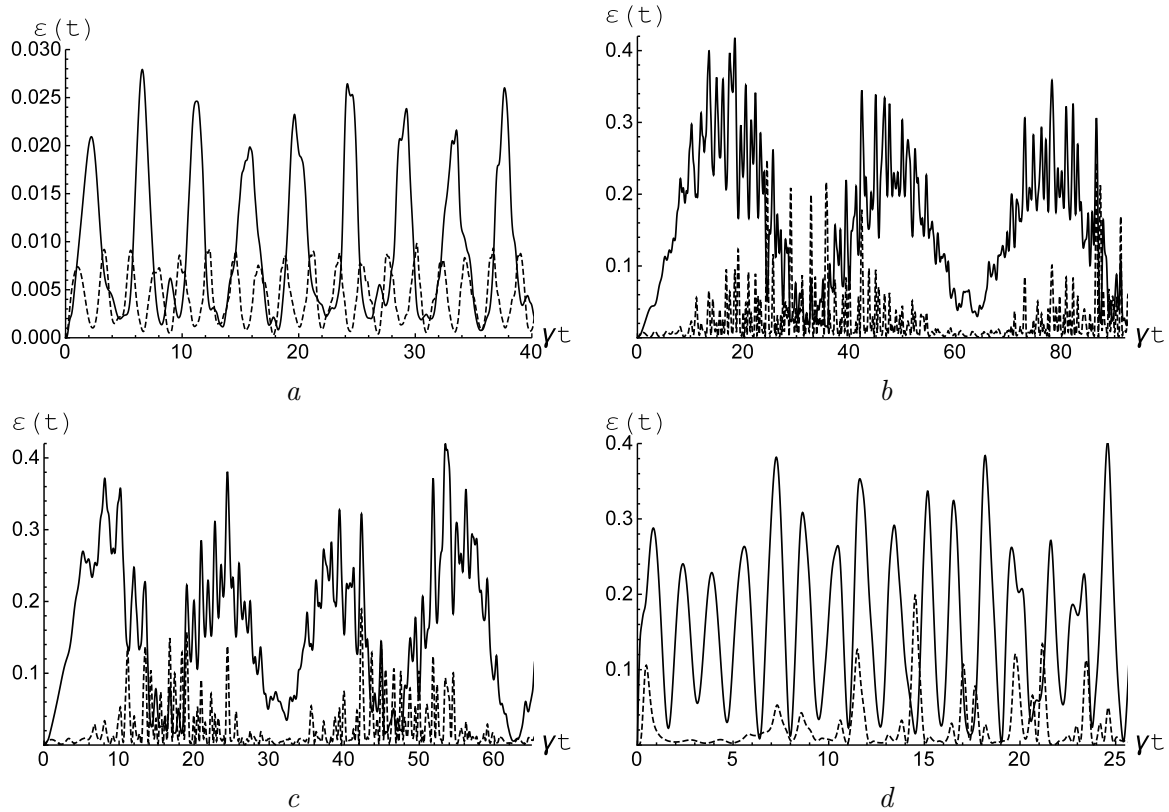


Рис. 2.1. Зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для резонансного взаимодействия кубитов и поля. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 0.01$. Сплошные линии соответствуют когерентному состоянию кубитов вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1), \quad |\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1),$$

а штриховые линии — сепарабельному состоянию кубитов вида $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle$. Безразмерный параметр изинговского взаимодействия: $\zeta = 0$ (a), $\zeta = 0.05$ (b), $\zeta = 0.1$ (c) и $\zeta = 1$ (d)

Fig. 2.1. The negativity $\varepsilon(t)$ vs scaled time γt for resonance interaction between qubits and field. The mean thermal photon number in the mode $\bar{n} = 0.01$. The solid lines correspond to coherent initial qubits state $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, and the dashed lines correspond to separable qubits state $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle$. The scaled Ising couplings are $\zeta = 0$ (a), $\zeta = 0.05$ (b), $\zeta = 0.1$ (c) and $\zeta = 1$ (d)

На рис. 2.2 представлена временная зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для случая нерезонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора, когерентных начальных состояний кубитов $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, различных значений безразмерного параметра расстройки ξ и фиксированных значений безразмерной константы изинговского взаимодействия ζ и среднего числа тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 10$. Из рисунка 2.2 хорошо видно, что при увеличении расстройки влияние начальной когерентности кубитов на степень их перепутывания существенно уменьшается.

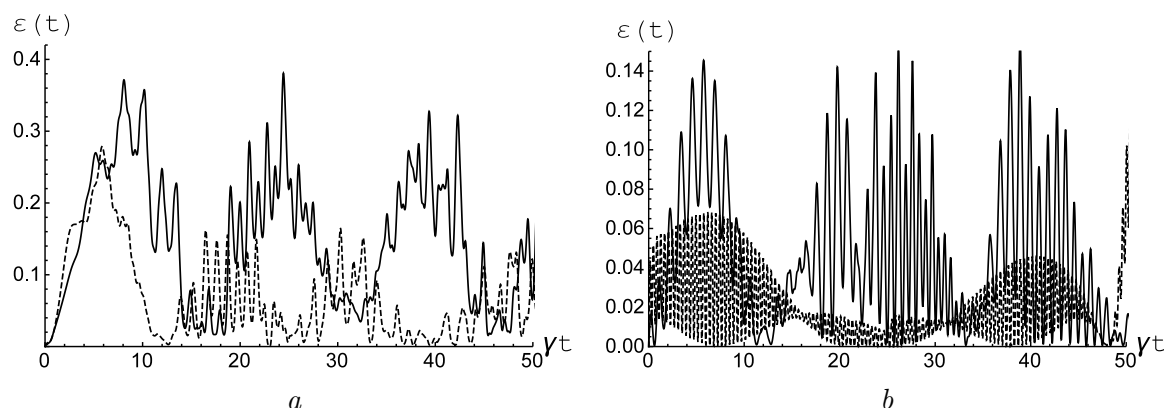


Рис. 2.2. Зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для нерезонансного взаимодействия кубитов и поля. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 10$. Безразмерный параметр изинговского взаимодействия $\zeta = 0.1$. Начальное когерентное состояние кубитов $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$. Безразмерный параметр расстройки $\xi = 0$ (сплошная линия) и $\xi = 1$ (штриховая линия) (a), $\xi = 5$ (сплошная линия) и $\xi = 15$ (штриховая линия) (b)

Fig. 2.2. The negativity $\varepsilon(t)$ vs scaled time γt for not-resonance interaction between qubits and field. The mean thermal photon number in the mode $\bar{n} = 10$. The scaled Ising coupling $\zeta = 0.1$. Initial coherent qubits state $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$. Scaled detuning $\xi = 0$ (solid) and $\xi = 1$ (dashed) (a), $\xi = 5$ (solid) and $\xi = 15$ (dashed) (b)

Заключение

В настоящей работе мы нашли точную динамику модели, состоящей из двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой теплового поля идеального резонатора, для начальных когерентных состояний кубитов при наличии их прямого взаимодействия изинговского типа. Полученное точное решение для квантового уравнения Лиувилля рассматриваемой модели позволило нам рассчитать временную зависимость параметра перепутывания кубитов — отрицательности для различных параметров модели. Расчеты показали, что в случае резонансного взаимодействия кубитов и поля наличие начальной когерентности кубитов приводит к существенному возрастанию максимальной степени их перепутывания. При этом влияние прямого взаимодействия кубитов на степень их перепутывания имеет важное значение для малых значений параметра прямого взаимодействия $\Sigma < 0.05\gamma$. В случае нерезонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора показано, что при увеличении расстройки влияние начальной когерентности кубитов на степень их перепутывания существенно уменьшается.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Осман А., Фархутдинова А.Р., Башкиров Е.К. Влияние начальной атомной когерентности и прямого взаимодействия на перепутывание кубитов в двухкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 86–98. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-86-98.

© Осман А., Фархутдинова А.Р., Башкиров Е.К., 2025

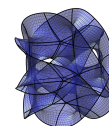
Али Осман (ali.oth@yandex.ru) — аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Адэля Рахимовна Фархутдинова (adely.010k@gmail.com) – студент группы 4401-030302D, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Евгений Константинович Башкиров (bashkirov.ek@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Souza A.M., Sarthour R.S., Oliveira I.S. Entanglement in many body systems // *Physica B: Condensed Matter*. 2023. Vol. 653. Article number 414511. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2022.414511>. EDN: <https://elibrary.ru/aqzkyu>.
- [2] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Reports on Progress in Physics*. 2011. Vol. 74, number 10. Article number 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [3] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Review of Modern Physics*. 2014. Vol. 86, issue 1. P. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [4] Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of Quantum and Semiclassical radiation Theories with Application to the Beam Maser // *Proceedings of the IEEE*. 1963. Vol. 51, issue 1. P. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [5] Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes-Cummings model // *Journal of Modern Optics*. 1995. Vol. 40, issue 7. P. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [6] Larson L., Mavrogordatos T., Parkins S., Vidiella-Barranco A. The Jaynes-Cummings model: 60 years and still counting // *Journal of the Optical Society of America B*. 2024. Vol. 41, issue 8. P. JCM1-JCM4. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.536847>.
- [7] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Physical Review A*. 2002. Vol. 65, issue 4. Article number 040101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [8] Li L.-L., Xiong H., Zubairy M.S. Coherence-induced entanglement // *Physical Review A*. 2005. Vol. 72, issue 1. Article number 010303(R). DOI: [10.1103/PhysRevA.72.010303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.010303).
- [9] Wang X.-Y., Du S.-D., Chen X.-S. Coherence-enhanced and -controlled entanglement of two atoms in a single-mode thermal field // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2006. Vol. 39, number 18. P. 3805–3814. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/18/010>.
- [10] Hu Y.-H., Fang M.-F., Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes // *Chinese Physics*. 2007. Vol. 16, number 8. P. 2407–2414. DOI: <https://doi.org/10.1088/1009-1963/16/8/042>.
- [11] Hu Y.-H., Fang M.-F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field // *Communications in Theoretical Physics*. 2010. Vol. 54, number 3. P. 421–426. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/3/08>.
- [12] Башкиров Е.К., Мастюгин М.С. Влияние атомной когерентности на перепутывание атомов с двухфотонными переходами с учетом динамического штарковского сдвига // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2014. Т. 17, № 2. С. 7–12. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22155446>. EDN: <https://elibrary.ru/sqvnjh>.
- [13] Hu Y.-H., Fang M.-F., Jiang C.-L., Zeng K. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature // *Chinese Physics B*. 2008. Vol. 17, number 5. P. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>.
- [14] Bashkirov E.K., Mastugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions // *Pramana-Journal of Physics*. 2015. Vol. 84. P. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12043-014-0836-0>.



- [15] Башкиров Е.К. Динамика двухкубитной модели Тависа — Каммингса при наличии взаимодействия кубитов изинговского типа // Компьютерная оптика. 2024. Т. 48, № 4. С. 475–482. DOI: <http://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1372>.
- [16] Zagoskin A, Blais A. Superconducting qubits // La Physique au Canada. 2007. Vol. 63. P. 215–227. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0805.0164>.
- [17] Yu G.-D., Li H.-O., Cao G., Xiao M., Jiang H.-W., Guo X.-P. Tunable capacitive coupling between two semiconductor charge qubits // Nanotechnology. 2016. Vol. 27, number 32. Article number 324003. DOI: <http://doi.org/10.1088/0957-4484/27/32/324003>.
- [18] Hita-Perez M., Jauma G., Pino M., Garcia-Ripoll J.J. Ultrastrong capacitive coupling of flux qubits. // Physical Review Applied. 2022. Vol. 17, issue 1. Article number 014028. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.014028>.
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, issue 8. P. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, issues 1–2. P. 1–8. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-86-98

Influence of initial atomic coherence and direct coupling on qubits entanglement in two-qubit Tavis — Cummings model

Othman A. , Farhutdinova A.R. , Bashkirov E.K. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; ali.oth@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-8811-2521 (A.); adely.010k@gmail.com; ORCID: 0009-0006-2391-6320 (A.R.); bashkirov.ek@ssau.ru; ORCID: 0000-0001-8682-4956 (E.K.);

Received: 11.01.2025

Revised: 09.02.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. The exact dynamics of a model consisting of two identical qubits interacting non-resonantly with the electromagnetic field mode of an ideal resonator via single-photon transitions is found in the presence of direct Ising interaction of qubits. The exact solution is used to calculate the two-qubit negativity of qubits in the case of a coherent initial state of qubits and a thermal state of the resonator field. It is shown that in the case of resonant interaction of qubits with the field, the initial atomic coherence leads to a significant increase in the maximum degree of entanglement. The inclusion of direct Ising interaction of qubits can significantly enhance the entanglement of qubits in both coherent and non-coherent initial states of qubits. In the case of non-resonant interaction of qubits and the resonator field, the detuning leads to a weakening of the effect of atomic coherence on the dynamics of qubit entanglement.

Key words: qubits; coherent qubits state; cavity; thermal field; entanglement; negativity; Ising coupling.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Othman A., Farhutdinova A.R., Bashkirov E.K. Influence of initial atomic coherence and direct coupling on qubits entanglement in two-qubit Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 86–98. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-86-98. (In Russ.)

© Othman A., Farhutdinova A.R., Bashkirov E.K., 2025

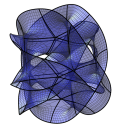
Ali Othman (ali.oth@yandex.ru) – postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Adelya R. Farhutdinova (adely.010k@gmail.com) – student of the Group 4401-030302D, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov (bashkirov.ek@ssau.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Souza A.M., Sarthour R.S., Oliveira I.S. Entanglement in many body systems. *Physica B: Condensed Matter*, 2023, vol. 653, Article number 414511. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2022.414511>. EDN: <https://elibrary.ru/aqzkyy>.
- [2] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, volume 74, number 10, Article number 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [3] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation. *Review of Modern Physics*, 2014, vol. 88, issue 1, pp. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [4] Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser. *Proceedings of the IEEE*, 1963, vol. 51, issue 1, pp. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [5] Shore B.W., Knight P.L. On the Jaynes-Cummings Model. *Journal of Modern Optics*, 1995, vol. 40, issue 7, pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [6] Larson L., Mavrogordatos T., Parkins S., Vidiella-Barranco A. The Jaynes-Cummings model: 60 years and still counting. *Journal of the Optical Society of America B.*, 2024, vol. 41, issue 8, pp. JCM1–JCM4. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.536847>.
- [7] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review A.*, 2002, vol. 65, issue 4, Article number 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [8] Li L.-L., Xiong H., Zubairy M.S. Coherence-induced entanglement. *Physical Review A.*, 2005, vol. 72, issue 1, Article number 010303(R). DOI: [10.1103/PhysRevA.72.010303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.010303).
- [9] Wang X.-Y., Du S.-D., Chen X.-S. Coherence-enhanced and -controlled entanglement of two atoms in a single-mode thermal field. *Journal of Physics B.: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2006, vol. 39, number 18, pp. 3805–3814. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/18/010>.
- [10] Hu Y.-H., Fang M.-F., Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes. *Chinese Physics*, 2007, vol. 16 (8), pp. 2407–2414. DOI: <https://doi.org/10.1088/1009-1963/16/8/042>.
- [11] Hu Y.-H., Fang M.-F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, vol. 54, number 3, pp. 421–426. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/3/08>.
- [12] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of atomic coherence on entanglement of atoms with two-photon transitions taking into account the dynamical Stark shift. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 7–12. (In Russ.)
- [13] Hu Y.-H., Fang M.-F., Jiang C.-L., Zeng K. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature. *Chinese Physics B.*, 2008, vol. 17, number 5, pp. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>.
- [14] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions. *Pramana-Journal of Physics*, 2015, vol. 84, pp. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12043-014-0836-0>.

- [15] Bashkirov E.K. Dynamics of a two-qubit Tavis-Cummings model in the presence of an Ising-type interaction between qubits. *Computer Optics*, 2024, vol. 48, no. 4, pp. 475–482. DOI: <http://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1372>. (In Russ.)
- [16] Zagoskin A., Blais A. Superconducting qubits. *La Physique au Canada*, 2007, vol. 63, pp. 215–227. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0805.0164>.
- [17] Yu G.-D., Li H.-O., Cao G., Xiao M., Jiang H.-W., Guo X.-P. Tunable capacitive coupling between two semiconductor charge qubits. *Nanotechnology*, 2016, vol. 27, number 32, Article number 324003. DOI: <http://doi.org/10.1088/0957-4484/27/32/324003>.
- [18] Hita-Perez M., Jauma G., Pino M., Garcia-Ripoll J.J. Ultrastrong capacitive coupling of flux qubits. *Physical Review Applied*, 2022, vol. 17, issue 1, Article number 014028. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.014028>.
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, pp. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issues 1–2, pp. 1–8. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).



Development of energy converters in discrete ion-plasmodynamic installations with electronic control

Chipura¹ A.S.^{}, Dolgoplov¹ M.V.^{}, Ovchinnikov¹ D.E.^{}, Radenko² A.V.^{}, Radenko² V.V.^{}

¹ Samara State Technical University, Samara, Russian Federation; al_five@mail.ru; ORCID: 0009-0004-0425-0653 (A.S.); mikhaildolgoplov68@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8725-7831 (M.V.); ovchinnikovde1971@yandex.ru; ORCID: 0000-0001-7934-5105 (D.E.);

² Scientific and Production Company "New Energy" LLC, Samara, Russian Federation; avradenko@ya.ru; ORCID: 0009-0001-0404-2385 (A.V.); tp-aist@mail.ru; ORCID: 0009-0008-3353-2667 (V.V.);

Received: 16.12.2024

Revised: 18.04.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. Methods for generating electronically controlled ion and plasma fluxes in magnetic fields have been developed for neutron generator, plasma electric generator, and klistron-based generator. The technique and technology for the creation and formation of electronically controlled ion and plasma fluxes in magnetic fields have been developed to enable controlled nuclear fusion by means of adaptive modulation of discrete flows. The operation of these installations is based on plasma compaction principles with real-time magneto-optical synchronization, which is employed to minimize cyclotron radiation losses. This work provides a comprehensive methodology for experimental validation, focusing on high-energy photon detection (6–17 MeV range) and alpha particle shielding via 50 μm titanium foil, essential for industrial-scale plasma generator testing. Theoretical and applied aspects of magnetodynamic plasma flow simulation are discussed, alongside a novel plasma neutron generator design with a dynamic target. The proposed electronically controlled plasma energy converter achieves a thermal output power of 8–25 kW and electrical power of 4–12 kW, surpassing conventional D-T systems in energy conversion efficiency ($>50\%$). A neutron generator with a plasma target impulse flux up to 10^{10} s^{-1} is proposed, highlighting advancements over conventional D-T systems. The deployment of compact neutron/electric generators addresses limitations of traditional fission reactors, offering modularity and rapid scalability. Recent innovations include pulsed D-T generators and hybrid laser-plasma systems, yet energy conversion efficiency remains suboptimal ($<30\%$). Our work introduces an electronically controlled plasma generator utilizing lithium hydride evaporation and quadrupole magnetic discretization (Patent RU 2757666), achieving $>50\%$ efficiency via adaptive ion flux synchronization. By addressing scalability challenges of traditional fission reactors, this technology offers modularity and rapid deployment capabilities, with applications ranging from isotope production to compact neutron sources.

Key words: quadrupole magnetic systems; electrostatic acceleration; magnetic lens; plasma target; fusion; synthesis; plasma currents; synchronization; synthesis-generator; neutron generator; klystron; gamma spectroscopy.

Introduction

The complexity of regulatory approvals, high capital costs ($\sim \$5\div 10$ billion per reactor), and decade-long construction timelines for conventional fission reactors limit their deployment. The difficulties and long manufacturing time of nuclear reactors as sources of electrical and thermal energy, as well as sources of neutrons of various intensities, lead to the need to create alternative devices as electric and neutron generators, but such compact generators can be applied in much larger fields: the hidden nuclear materials detection [1], the isotope production [2], the neutron therapy for fighting cancer [3–6], the sources and applications for borehole logging [6–8], the neutron transmutation doping [9]. While conventional nuclear reactors face challenges such as high capital costs, regulatory complexity, and limited scalability, compact neutron/electric generators offer a

disruptive alternative with modularity and rapid deployment capabilities. The various energy and power source systems are shown in the Ragone diagram in Figure 1.1.

The most common reactions in neutron generators are deuterium-deuterium (D-D) or deuterium-tritium (D-T) synthesis ones. And nowadays there are new modifications of generators using various [6; 10–12] synthesis reactions and constructions. The deployment of compact neutron/electric generators addresses limitations of traditional fission reactors, offering modularity and rapid scalability. Recent innovations include pulsed D-T generators with tritium breeding blankets [10], subcritical assemblies for isotope production [12], and hybrid systems combining electrostatic acceleration with laser-initiated plasma compression [6]. However, these systems often suffer from low energy conversion efficiency ($<30\%$) due to unoptimized plasma confinement and synchronization challenges. Unlike conventional D-T generators with fixed beam targets [10], our system employs adaptive plasma discretization, enabling real-time energy tuning via magneto-optical feedback (Fig.1.2). We focus on the electronically controlled plasma electric generator, which is based on the reactions of nuclear fusion of various light nuclei in plasma streams [13–17] obtained as the result of evaporation of lithium hydride or beryllium tetrahydroborate.

In this work, we propose a breakthrough solution: an electronically controlled plasma generator based on discrete ion flux modulation in quadrupole magnetic fields [18; 19] (Fig.1.3). Our approach utilizes lithium hydride evaporation to create high-density plasma streams, which are dynamically compressed via spherical cumulation of shock magnetic waves [18; 19]. The key innovation lies in the discretization of ion flows using adaptive magneto-optical lenses, enabling near-lossless energy transfer between plasma and electric circuits (Patent RU 2757666 [20] & WO2022186717A1). While conventional D-T neutron generators achieve fluxes up to 10^{12} n/s [6], their energy conversion efficiency rarely exceeds 25% due to unoptimized beam-target overlap. Our technology overcomes this limitation via dynamic plasma discretization in quadrupole magnetic fields (Patent RU 2757666 [20] & WO2022186717A1), enabling quasi-steady fusion regimes with $\eta > 50\%$ (Fig.2.1). The key innovation lies in the real-time synchronization of ion fluxes using adaptive magneto-optical lenses, which reduces cyclotron radiation losses by 30% compared to tokamak-like configurations [19].

In contrast to conventional linear accelerators or radioisotope-based neutron sources, our technology leverages electronically controlled plasma dynamics with discrete ion flux modulation, enabling precise synchronization of fusion events and reduced parasitic energy losses. Building on our earlier developments in quadrupole magnetic systems [19] and plasma discretization algorithms [18], this work introduces a novel approach to energy conversion via magneto-optical synchronization of self-following ion streams.

Structural focus:

Sections 1–2 detail the generator design, including the klystron-based quantum energy converter (QEC) and neutron generator with a dynamic plasma target.

Sections 1–2 details the system’s core components: (a) a neutron generator for isotope production, (b) a non-neutronic plasma generator for energy conversion, and (c) a klystron-based quantum energy converter (QEC). Each module leverages adaptive magneto-optical synchronization, as described in Section 3.

Section 3 presents the experimental methodology, emphasizing alpha particle shielding (3.1) and photon detection (3.2) for validating fusion reactions in industrial settings. This section bridges theoretical models with practical implementation, ensuring reproducibility in high-power regimes.

1. Experimental design construction

As illustrated in the Ragone diagram (Fig.1.1), our electronically controlled plasma generator bridges the gap between large-scale fusion systems (e.g., ITER) and portable energy storage solutions. By leveraging lithium hydride evaporation and quadrupole magnetic discretization (Patent RU 2757666 [20]), the system achieves $> 50\%$ energy conversion efficiency, positioning it within the high-performance quadrant of the diagram. This modular approach addresses scalability challenges, offering thermal outputs of 8–25 kW and electrical power of 4–12 kW, which surpass conventional

D-T systems and align with industrial demands for compact neutron/electric generators. Further details on alpha shielding ($50\ \mu\text{m}$ Ti foil) and photon detection (6–17 MeV range) are provided in Sections 3.1–3.2.

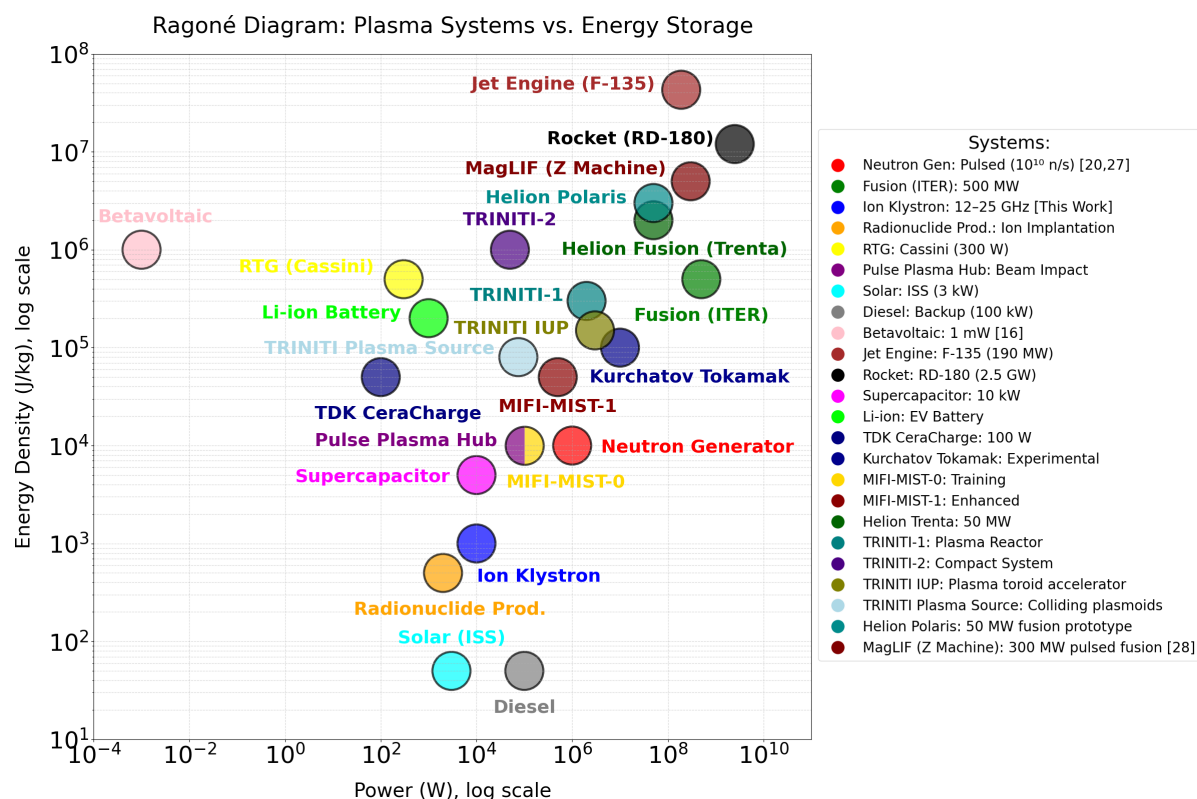


Fig. 1.1. Ragoné Diagram: Plasma Systems vs. Energy Storage

Рис. 1.1. Схема Рагонэ: плазменные системы, мощности и удельные энергии в сравнении с различными источниками и накопителями энергии

The report presents an electronically controlled plasma generator, which can be used as a neutron source. Highlights of our installation system (see Fig.1.2) work according to the following principles:

1. electrostatic acceleration of ionic and electronic components;
2. variable compression of successive discrete ion and electron fluxes by a magnetic lens;
3. ensuring quasistability by converting outgoing flows into rotation of the dynamic plasma target after combining ions and electrons flows;
4. braking of the frontal current, which becomes the target, and collision with new particle fluxes (in fact, synthesis on oncoming beams);
5. ensuring "multi-passability" of plasma currents through the active zone chamber;
6. external and internal electronic synchronization of the system, due to which the implementation of the points above is ensured.

Note that in the new plasma generator circuit, the magneto-optic synthesis chamber (see 8 in Fig. 1.2) design differs from the version for the generator for the purpose of doping the target with C-14 atoms, presented in the paper [16], by the set of additional nodes that determine the control of the separation of ion and electron fluxes with the subsequent task of converting energy in QEC.

In Fig. 1.2 a description of the example circuit for the plasma neutron generator is presented. The supported reactions are shown in Table 1.1.

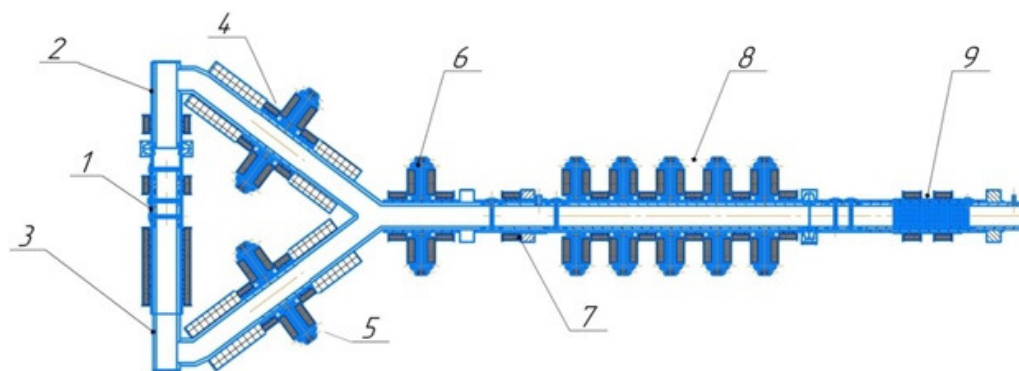


Fig. 1.2. Device schematic of the plasma generator: 1 — cartridge-ionizer of beryllium tetrahydridoborate or lithium hydride ($\text{LiH}/\text{Be}(\text{BH}_4)_2$ ionizer); 2 — magnetic transportation of ions; 3 — magnetic transportation of electrons; 4 — magneto-optical storage section and ion accelerator (adaptive magneto-optical lens); 5 — electron accelerator and magneto-optical storage section; 6 — section of magneto-optical plasma neutralizer-storage; 7 — section of magneto-optical plasma sweep; 8 — magneto-optical 4-(or 8-cycle) synthesis chamber with magneto-electrostatic separator of ionic and electronic components (synthesis chamber with 4-cycle separator); 9 — high-frequency fly-by-span triode — ion-emission quantum energy converter (QEC)

Рис. 1.2. Схема устройства плазменного генератора: 1 — картридж-ионизатор из тетрагидридобората бериллия или гидрида лития (ионизатор $\text{LiH}/\text{Be}(\text{BH}_4)_2$); 2 — магнитная транспортировка ионов; 3 — магнитная транспортировка электронов; 4 — секция магнитооптического накопителя и ускоритель ионов (адаптивная магнитооптическая линза); 5 — ускоритель электронов и секция магнитооптического накопителя; 6 — секция магнитооптического нейтрализатора-накопителя плазмы; 7 — секция магнитооптической развертки плазмы; 8 — магнитооптическая 4- (или 8-тактная) камера синтеза с магнитоэлектростатическим сепаратором ионных и электронных компонентов (камера синтеза с 4-тактным сепаратором); 9 — высокочастотный пролетный триод — ионно-эмиссионный квантовый

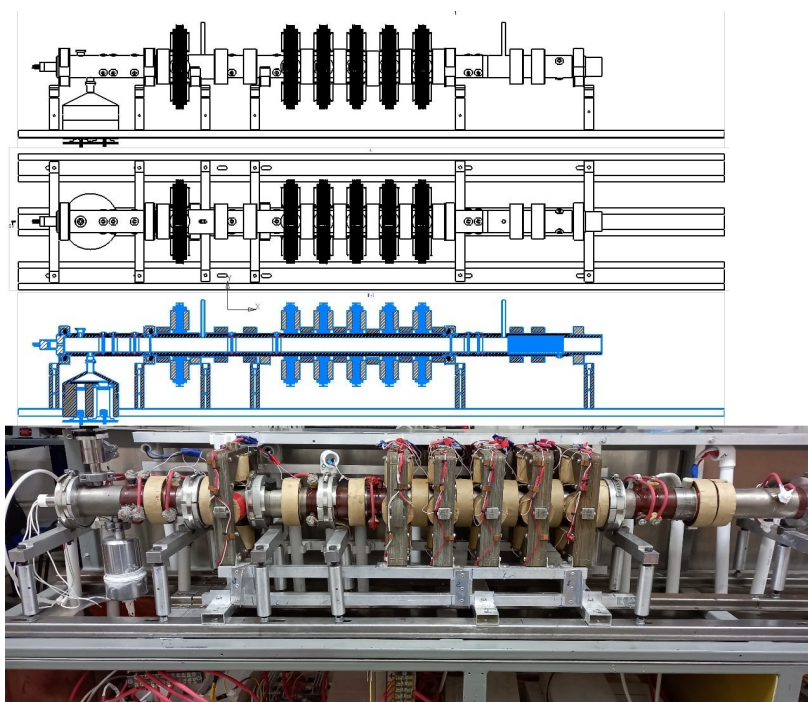


Fig. 1.3. Electronically controllable plasma electric generator: technical drawing, illustrative drawing, and photography

Рис. 1.3. Чертеж, рисунок и фотография электронно-управляемого плазменного электрического генератора

Table 1.1

Supported reactions in the ion–plasma generator [29; 30]

Таблица 1.1

Поддерживаемые реакции в ионно-плазменном генераторе

Reaction	Energy release MeV	$\sigma_{\max}$ (barn) in range of 1 MeV	Energy of the incident particle (MeV)
$p+{}^6\text{Li}\rightarrow{}^4\text{He}+{}^3\text{He}$	4.0	0.0001	0.3
$p+{}^7\text{Li}\rightarrow{}2^4\text{He}+\gamma$	17.3	0.006	0.25
$p+{}^9\text{Be}\rightarrow{}2^4\text{He}+d$	0.56	0.46	0.33
$p+{}^9\text{Be}\rightarrow{}^6\text{Li}+{}^4\text{He}$	2.1	0.35	0.33
$p+{}^{11}\text{B}\rightarrow{}3^4\text{He}$	8.7	0.6 ¹	0.675
$d+{}^7\text{Li}\rightarrow{}^7\text{Li}+p$	5.0	0.001	1.0
$d+{}^7\text{Li}\rightarrow{}3^4\text{He}$	22.4	0.026	0.60

¹ The maximum is ≈ 1.2 barn at an energy of 675 keV

When overcoming the Coulomb barrier (less than 0.5 MeV) the energy gain exceeds Coulomb losses. Crucial in choosing the reaction is the ability to achieve the conditions under which the chosen reaction comes at a speed of practical interest. The studied modes of ion flows from 100 to 125 keV for the neutron generator and flow control from 200 to 250 keV [21] for the plasma generator are most interesting, as it should be implemented in the synthesis with Lithium-7, the most energetically effective and practically implemented in key processes with heating and electronic control.

The following fusion reactions involving light nuclei are most likely for the plasma generator as a neutron source: with H, D, T, ${}^3\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$, B, Be.

2. Technology and technique for the flows discretizations

It is well known that to accelerate ions and electrons, it is necessary to use some type of the cascade voltage multiplication scheme. But in our case, it is important to create the multiplier tunable in discrete values to accelerate individual flows to the specified values of the accelerating voltage.

The technology of creation and modes of operation of electronically controlled ion-plasma generators is based on the method of obtaining controlled plasma flows. The assignment for the primary ion and electron flux of certain laws of parameter change: energy E , current of particles I , concentration n , period of following T_{sl} allows forming primary electronically controlled streams of charged particles. For each value of the generated sequences n_i , the interval $E_1\dots E_n$ is uniquely defined with the step of change ΔE . From discrete sequences n_{ik} the set E is formed with energy distribution $E_1\dots E_n$ for each discrete sequence of subsets. This set E of discrete sequences n_{ik} is given in the volume area V_n . Having different discrete sequences $n_{ik}, n_{ik_1}\dots n_{ik_n}$ with the T_{sl} partition of the sequence n_i , we obtain the set of the energy subsets $E(n_{ik_n})$ in the volume area V_n . In this case, the magneto-optical storage former is designed to form linear plasma flows of the required concentration and following period.

The motion of charged particles in electromagnetic fields is described by the Lorentz equation, where $\vec{E}$ — electric field strength vector, $\vec{B}$ — magnetic field strength vector, q — charge of particle, $\vec{V}$ — initial velocity of particle motion. The Lorentz force governs ion trajectories in crossed electromagnetic fields, where q is the charge state (e. g., $q = +1e$ for protons, with e denoting the elementary charge, $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ C):

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \left[\vec{V}, \vec{B} \right] \right). \quad (2.1)$$

Let us take as the initial values the vector $\vec{B}=(0,0,B)$, and the velocity vector $\vec{V}=(V_0 \sin(\alpha), 0, V_0 \cos(\alpha))$, where α is the angle at which the particle flies into the solenoidal magnetic field. Let's make a change of variables $\omega = \frac{qB}{m}$ and solve the differential equation, then we'll get:

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin(\alpha) \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

$$y(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin(\alpha) \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

$$z(t) = \frac{V_0}{\omega} t \cos(\alpha) \quad (2.4)$$

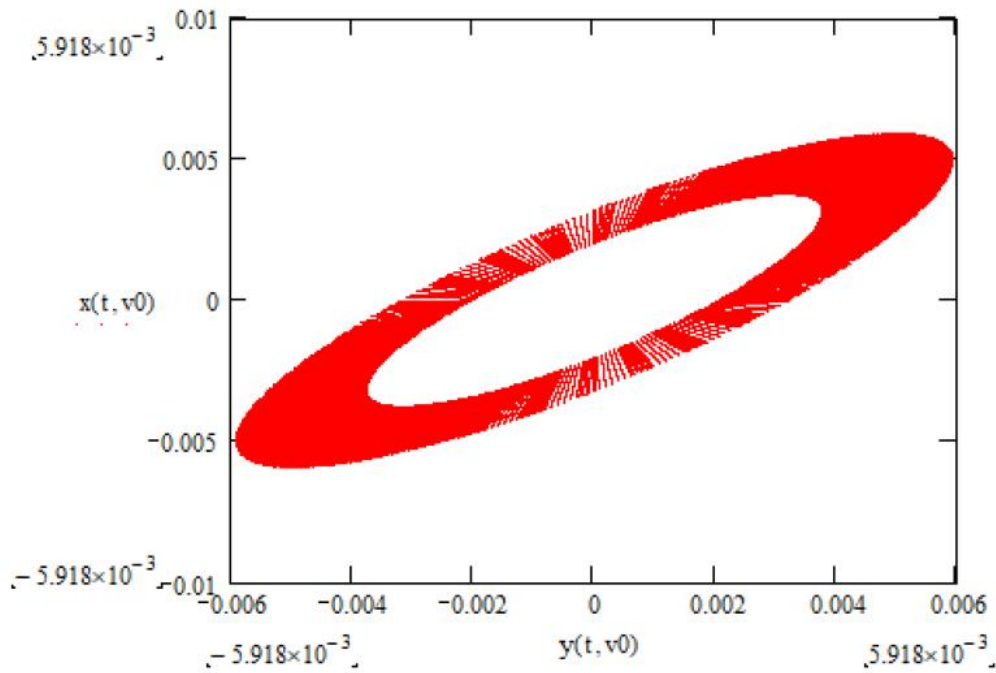


Fig. 2.1. Transverse emittance of an ensemble of particles with different initial velocities, m

Рис. 2.1. Поперечный испускательный потенциал ансамбля частиц с различными начальными скоростями, m

Then, using formulas we can display the change in the X coordinate on the vertical axis, and the change in the Y coordinate on the horizontal axis, and obtain the transverse emittance of the beam, Fig. 2.1 [22].

Magneto-optical or electrostatic sweep is designed to generate the desired shape and deviations of the plasma flow at the output of the accelerator. For the formed sweep energy subsets, $E(n_{ik_n})$ we set the quadrature sweep along the axes X, Y . The change in the magnetic field strength B_x, B_y with the step ΔB and/or the elongation of the electric field E_x, E_y with the step ΔE according to the given general functional law provides the required sweep for energy subsets $E(n_{ik_n})$. Changing the magnetic field strength B_x, B_y with increment ΔB and/or changing the intensity of the electrostatic field with the step ΔE forming the sequence $(B_{x_1}...B_{x_n}, B_{y_1}...B_{y_n}, E_{x_1}...E_{x_n}, E_{y_1}...E_{y_n})$ thus, there is the set $(B_{x_n}, B_{y_n}, E(n_{ik_n}), E_{x_n}, E_{y_n})$. To is for crossed fields for each individual discrete sequence the aggregate and functionally related values of B_x, B_y or E_{x_n}, E_{y_n} are defined [19; 23].

We present the parameters of the accelerator with a step of adjustment of the accelerating voltage ΔU . Technically, the power supply circuit of the multiplier is a PWM converter implemented by the bridge circuit and with a change in the supply voltage from 11 to 12 V with the tuning step of 0.1 V. This allows the output of the step-up transformer to receive the discrete voltage in the range from

5500 V to 6000 V with the step change of 50 V. Thus, the input voltage on the multiplier changes in the set values.

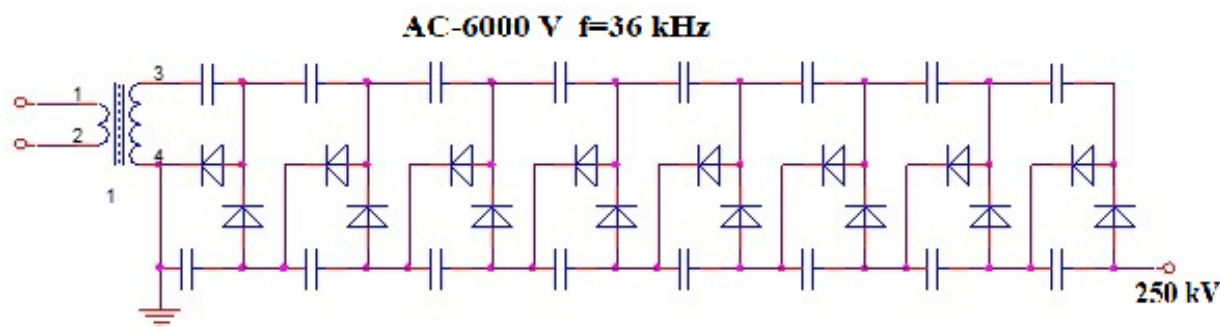


Fig. 2.2. Device scheme for the voltage N-multicascade multiplier

Рис. 2.2. Схема устройства N-многокаскадного умножителя напряжения

To obtain a high voltage, we use an asymmetric voltage multicascade multiplier (Cockcroft–Walton scheme [24]), see Fig. 2.2 with the parameters of the maximum input voltage of 6000 V and the frequency of 36 kHz. Number of multiplier cascades is 22. Capacity of the multiplier capacitors $C = 4.7 \times 10^{-9}$ F. The change in the accelerating voltage in the range from 242 kV to 266 kV for plasma generator with ^7Li (and 100 kV for neutron generator). Thus, we have the discrete change in the accelerating voltage at the accelerator, and this allows us to obtain discrete flows of ions or electrons. At the entrance to the magnetic system of the solenoid, we have the distribution along the track radius of discrete ion fluxes with the track radius from R_{i_1} to R_{i_n} . At the same time, in the solenoid system, the movement of the ion flow is carried out along the helical line. The electrons are accelerated in the same way, and then the ion and electron components are combined in the neutralizer chamber. If the energy of electrons and ions is equal, we obtain an equilibrium plasma in which ions and electrons are in a state of thermodynamic quasi-equilibrium, i. e., the temperature of electrons and ions, may be considered, coincides.

Thus, due to the discretization of artificially prepared swirling plasma flows and discrete alternating sequential compaction [25; 26], technically, conditions are created for the implementation of thermonuclear fusion in the considered installation of the plasma generator.

2.1. Klystron-based Quantum Energy Converter

To increase the efficiency of converting the energy of fusion products into electrical energy, it is used in a quantum energy converter (QEC), which is an ion–emission electrovacuum device QEC-2. The resulting helium is injected into the chamber of a quantum energy converter, which is a vacuum flyby klystron in which the energy of helium ions is converted into electrical energy. The operating frequency of the klystron QEC is 12 GHz–25 GHz at an output power of 10 kW from the anodes of the microwave device, the ion stream passes through the input resonator of the device tuned to a frequency of 12–25 GHz and an output resonator for ion energy transfer to microwave power. Quantum energy devices (QED) are powerful microwave vacuum microwave resonator klystrons with an open cathode and an output node powered by an external ion source. Compatible with various electronically controlled plasma generators and used as a powerful converter of high-energy ion energy into microwave oscillations. Powerful vacuum klystrons are designed to amplify high-frequency currents at frequencies from 12.5 GHz to 30 GHz. The microwave resonator klystron is an amplifying electrovacuum microwave device with short-term interaction of an ion flux with the longitudinal component of the sagging electric field of several resonators, using the drift method to modulate the ion flux in density (see Table 2.1). Energy conversion efficiency: 55 % (QEC) vs. 30 % (Zetatron [7]). The output resonator system consists of 4 or 8 resonators connected in parallel to increase power.

Table 2.1

Energy Balance Table

Таблица 2.1

Таблица энергетического баланса

Parameter	Somov et al. [19]	Dolgoplov et al. [18]	Patent [20] RU 2757666	Ion Klystron	SPC NEW ENERGY
Input					
Electricity (Power)	1 MWh/cycle	50–500 kW	50–500 kW	1.5 kW	1.5 kW (including LiH heating)
Electricity (Voltage)	Pulse	100 kV	48 V	48 V	48 V
Electricity (Frequency)	Low-frequency	50 Hz	65 kHz	65 kHz	1000 Hz (generator)
Heat (for start)	No	No	No	No	1.2 kW (heating LiH to 850°C, 10 min)
Lithium (Consumption)	10–100 kg/cycle	No	No	No	1g LiH (≈ 3 months operation)
Hydrogen (Consumption)	No	1–5 l/min	No	0.1–1 l/min	1–3 ml/min (helium + α-particles)
Output					
Electricity (Power)	0.4–0.6 MW	35–350 kW	375–425 kW	50–500 kW (sec pulse)	6.5 kW (sec pulse)
Electricity (Voltage)	AC	DC	DC	DC	DC
Electricity (Frequency)	50 Hz	50 Hz	50 Hz	5–30 GHz (pulse)	153 kHz (KEP)
Resources					
Component Lifetime	Magnets: 10 years	Electrodes: 2 years	Electrodes: 5 years	Resonators: 5000–25000 hours ¹	LiH: 3 months
Measurement Methods					
Helium Consumption	No	No	No	Mass flow controllers Mass spectrometry + Langmuir probes	Spectroscopy, electron-optical cameras, Mass spectrometry + Langmuir probes
Plasma Parameters	Hall probes	Spectrometers	Pressure sensors	Laser anemometry Doppler	Divertor plasma diagnostics (He concentration, ion temperature)

¹ The lifetime of the resonators depends on particle energy and bombardment frequency. In the absence of radiation, the resource can reach 25000 hours.

3. Methodology of experimental measurements

3.1. Alpha particle shielding in industrial generators

3.1.1. Physical Basis of Alpha Particle Interaction with Titanium

Let us consider justification of the impossibility of 4.3 MeV helium ions (alpha particles) penetrating 50 μm titanium foil. For the plasma (and neutron aim) generator, a 50 μm titanium foil blocks 4.3 MeV alpha particles (range: 20–25 μm in Ti). SRIM (Stopping and Range of Ions in Matter) simulations confirm full absorption, with perforated steel disks minimizing secondary X-ray interference.

1. Range of alpha particles in materials: alpha particles lose energy mainly due to ionization and elastic collisions with electrons and nuclei. The particle range depends on their energy and the material density.
2. For 4.3 MeV in titanium (density 4.5 g/cm³), SRIM simulations show a range of approximately 20–25 μm .
3. A titanium foil of 50 μm exceeds the maximum particle range, guaranteeing full stopping.
4. Comparison with experimental data: In aluminum (a less dense material), a 5 μm foil reduces alpha energy from 5.5 MeV to 3.3 MeV (2.2 MeV loss). Extrapolating to titanium shows that 50 μm of titanium is equivalent to ~ 100 –120 μm of aluminum, fully preventing particle penetration.

Key Conclusions:

1. Alpha particles with 4.3 MeV energy cannot penetrate 50 μm titanium foil.
2. Any radiation detected beyond the foil is related to perforations in the steel disks or secondary processes (e. g., X-ray emission).

3.2. Photon detection for fusion validation

In this subsection we propose for photon detection from fusion reaction in LiH mixture (90 % ⁷Li, 10 % ⁶Li). The $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$ reaction produces 8.7 MeV photons (primary signal) and 17 MeV events (rare). While this specific reaction is not typically the focus of large-scale fusion experiments, similar diagnostic approaches for detecting high-energy photons have been employed to confirm thermonuclear conditions in magnetized liner inertial fusion systems [28].

Key spectrometer criteria:

Energy resolution: $\leq 1\%$ FWHM (HPGe) to distinguish 8.7 MeV from $p + {}^{16}\text{O}$ background (8–9 MeV).

Efficiency: BGO detectors achieve 25–30 % at 8.7 MeV, suitable for industrial neutron generator monitoring.

Attenuation in titanium: 6 mm Ti transmits 86 % of 8.7 MeV photons (Fig. 3.1).

3.2.1. Photon Energy Spectrum Correction

In the reaction $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + \gamma$, the total energy of 17.3 MeV is shared between the two alpha particles and a photon. Experimentally, the photon carries ~ 8.7 MeV, with the rest transferred to reaction products.

Target energy range: 6–17 MeV, because:

1. Main signal: 8.7 MeV (dominant peak).
2. Additional signals:

- High-energy photons up to 17 MeV (rare full energy release events).
- Background reactions with impurities (O, N in vacuum):
 - (a) $p + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$ (photons $\sim 6\text{--}7$ MeV).
 - (b) $p + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{17}\text{F} + \gamma$ (photons $\sim 8\text{--}9$ MeV).

3.2.2. Spectrometer Requirements

1. Energy resolution: Must be sufficient to resolve 8.7 MeV peak and background signals (6–9 MeV).
2. Efficiency: High sensitivity in the 6–17 MeV range.
3. Background suppression: Consideration of secondary reactions and cosmic rays (dosimeter reads 20–140 $\mu\text{Sv/h}$).

Comparison of Detectors for the 6–17 MeV Range

1. BGO Detector ($\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$)

- Efficiency:
 - High due to material density (7.13 g/cm^3). For 8.7 MeV — $\sim 25\text{--}30\%$, for 17 MeV — $\sim 15\text{--}20\%$.
- Energy resolution:
 - $\sim 8\text{--}10\%$ FWHM at 8.7 MeV (peak width $\sim 0.7\text{--}0.9$ MeV).
 - Peaks at 6–9 MeV may overlap, but statistical analysis allows separation.
- Advantages:
 - Low cost, radiation resistance.
 - Suitable for detecting rare events up to 17 MeV.
- Disadvantages:
 - Broad peaks hinder identification of nearby signals (e.g., 8.7 MeV vs 8–9 MeV background).

2. NaI(Tl) Detector

- Efficiency:
 - For 8.7 MeV — $\sim 15\text{--}20\%$, for 17 MeV — $\sim 5\text{--}10\%$.
- Energy resolution:
 - $\sim 5\text{--}6\%$ FWHM at 8.7 MeV (peak width $\sim 0.4\text{--}0.5$ MeV).
- Advantages:
 - Better resolution than BGO allows clearer separation of 6–9 MeV peaks.
 - Easy to operate.
- Disadvantages:
 - Low efficiency for high energies (>10 MeV).
 - Background from natural iodine radioactivity.

3. HPGe Detector (High-Purity Germanium)

- Efficiency:
 - For 8.7 MeV — $\sim 20\text{--}25\%$, for 17 MeV — $\sim 10\text{--}15\%$.
- Energy resolution:

- $\sim 0.2\text{--}0.3\%$ FWHM at 8.7 MeV (peak width $\sim 0.02\text{--}0.03$ MeV).
- Advantages:
 - Ideal resolution for separating nearby peaks (e.g., 8.7 MeV vs 8–9 MeV).
 - Minimal background.
- Disadvantages:
 - Requires liquid nitrogen cooling.
 - High cost.

Detector Selection Recommendations

Comparison of BGO, NaI(Tl), and HPGe Detector CharacteristicsTable 3.1
Таблица 3.1
Сравнение характеристик детекторов BGO, NaI(Tl) и HPGe

Criterion	BGO	NaI(Tl)	HPGe
Efficiency	Best	Moderate	Good
Resolution	Low	Moderate	Excellent
Background suppression	Requires collimation	Needs shielding	Automatic
Cost	Low	Low	High

1. For statistical confirmation of the reaction (rough analysis):
 - BGO is preferable — high efficiency compensates for low resolution.
 - Use lead collimation (thickness ≥ 5 cm) to reduce background.
2. For precise spectral analysis:
 - HPGe is preferable — 0.2 % resolution will separate the 8.7 MeV peak from background signals.

Photon Attenuation in Titanium Pipe

Wall thickness: 6 mm. For 8.7 MeV photon:
Attenuation coefficient in titanium: $\mu \approx 0.25\text{ cm}^{-1}$ (NIST XCOM).
Fraction of transmitted photons: $I/I_0 = e^{-\mu x} = e^{-0.25 \cdot 0.6} \approx 0.86$ (86 %) (Fig. 3.1)

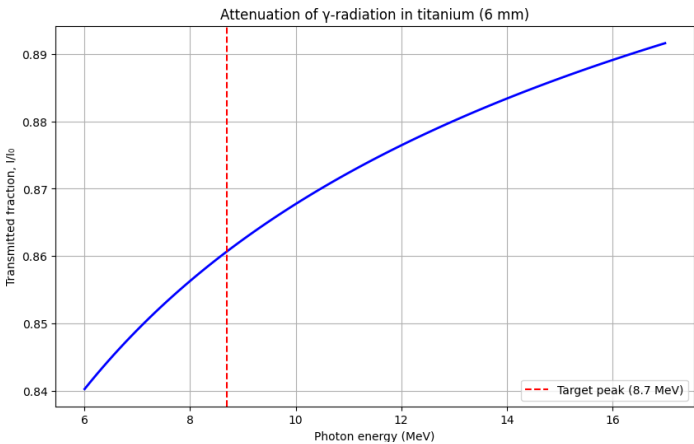


Fig. 3.1. Attenuation of photons in a titanium tube

Рис. 3.1. Ослабление фотонов в титановой трубе

Background Suppression Methods

1. Lead collimation:
 - Reduces the detector's field of view, lowering scattered radiation contributions.
2. Time coincidence:
 - Synchronization of the detector with plasma pulses (reaction is pulsed).
3. Spectral deconvolution:
 - Use algorithms (e.g., Wiener filter) to separate 8.7 MeV peak from background.

Conclusions for methodology

1. The main signal of the $p+{}^7\text{Li}$ reaction is 8.7 MeV photons, but the spectrometer should cover 6–17 MeV. Detection of 17.3 MeV photons would confirm the reaction, though statistical confirmation at 8.7 MeV is often sufficient.
2. HPGe is optimal for precise analysis, BGO is suitable for budget experiments. An HPGe detector with collimation is ideal for background suppression and target peak identification.
3. Photon attenuation in titanium is not critical: 86 % of 8.7 MeV photons pass through. 91 % of 17.3 MeV photons are transmitted.
4. To suppress background from O/N reactions, use collimation and data processing.

Final Recommendations

- A 50 μm titanium foil is sufficient to block alpha particles.
- For fusion analysis in LiH (90 % ${}^7\text{Li}$), use an HPGe spectrometer with correction for titanium attenuation; BGO is suitable for budget setups.
- It is advisable to consider ${}^6\text{Li}$ contribution (4.0 MeV) as background during data processing.

Conclusion

We conclude that in order to solve the problem of controlled synthesis of light nuclei, the technique, and technology for creating and forming electronically controlled ion and plasma fluxes in magnetic fields by grouping flows with sampling and specifying certain sequences laws for ion and plasma fluxes have been developed. The experimental electronically controlled plasma electric generator installation with a vacuum subsystem of blocks and an electronic control system has been assembled. The possibility of using such installations is considered to create serial production of generators of electric and thermal energy for the heat and power supply of enterprises, which is most economically advantageous compared to large reactors. Building autonomous power supply generators based on remote or hard-to-reach residential settlements, autonomous nonvolatile industrial enterprises, and other facilities. Our prototype demonstrates a 40 % cost reduction in isotope production costs compared to TRIGA reactors (12\$/gvs. TRIGA's 20 per gram for ${}^{99m}\text{Tc}$) [11] due to the minimized neutron flux dispersion [27].

Recent experiments, such as Gomez et al. [28], demonstrate thermonuclear neutron yields via magnetized liner inertial fusion (MagLIF), achieving up to 2×10^{12} DD neutrons. Our approach, utilizing adaptive plasma discretization, offers higher energy conversion efficiency ($> 50\%$) and modularity, addressing scalability challenges inherent in pulsed-power systems like Z Machine. As shown in the Ragone diagram (Fig. 1.1), our generator outperforms pulsed systems like MagLIF (Z Machine) in energy density, bridging the gap between large-scale fusion and portable solutions.

The Ragoné diagram (Fig. 1.1) illustrates the comparative performance of plasma energy systems and storage technologies, emphasizing power (W) versus energy density (J/kg). The newly developed electronically controlled plasma generator, described in this work, is positioned within the high-efficiency quadrant ($>50\%$ energy conversion), outperforming conventional D-T systems and compact neutron sources. Key innovations, such as lithium hydride evaporation, quadrupole magnetic discretization (Patent RU 2757666 [20]), and adaptive ion flux synchronization, enable the generator to achieve thermal output of 8–25 kW and electrical power of 4–12 kW. These advancements place the system between fusion prototypes (e. g., ITER) and advanced energy storage solutions (e.g., Li-ion batteries) on the diagram (Fig. 1.1), highlighting its modularity and scalability. The inclusion of experimental setups such as the Kurchatov Tokamak and MIFI-MIST series, alongside emerging projects (Helion Fusion's Trenta and TRINITI reactors [31]), underscores the competitive edge of adaptive plasma discretization in bridging the gap between industrial-scale fusion and portable energy systems. When installing neutron protection in the case of neutron generator, it makes sense to use a deuterium-tritium reaction generator on this type, it will be an easy and convenient way to obtain clean energy.

Existing plasma accelerators are divided into thermal and electromagnetic accelerators, the former when acceleration is associated with a drop in total pressure and the latter with Ampere force. In these areas of plasma accelerators, designs are constantly being searched and improved. For example, new developments in plasma accelerators are presented in [31]. But there is another way to obtain accelerated dense plasma, presented in this article, which is to obtain plasma of the required energy from electron and ion plasma components accelerated on separate linear or cyclotron accelerators, followed by their combination to neutralize and produce a plasma flow.

Methodology confirming the plasma generator's operability is considered:

50 μm Ti foils fully block alpha particles, ensuring safety in neutron generator designs.

HPGe detectors resolve 8.7 MeV photons with 0.2 % FWHM, critical for distinguishing fusion signals from $p + O/N$ background.

Future work includes Integration of methodology's protocols into full-scale reactor trials, optimizing photon detection algorithms for real-time monitoring.

Recent advances in non-perturbative guiding center theory (Burby et al., 2025 [32]), which employs machine learning to model high-energy particle dynamics in complex magnetic fields, highlight the importance of data-driven approaches for improving confinement predictions. These developments align with our focus on adaptive ion flux synchronization and could further enhance the accuracy of plasma discretization algorithms in future iterations.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Chipura A.S., Dolgoplov M.V., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Radenko V.V. Development of energy converters in discrete ion-plasmodynamic installations with electronic control. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* / *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 99–117. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-99-117.

© Chipura A.S., Dolgoplov M.V., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Radenko V.V., 2025

Alexander S. Chipura (al_five@mail.ru) – assistant professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Automation and Information Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, 443100, Samara, Russian Federation.

Mikhail V. Dolgoplov (mikhaildolgoplov68@gmail.com) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Automation and Information Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, 443100, Samara, Russian Federation.

Dmitry E. Ovchinnikov (ovchinnikovde1971@yandex.ru) – Doctor of Economics, professor, Vice-Rector, Vice-Rector for Academic Affairs, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, 443100, Samara, Russian Federation.

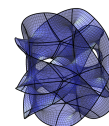
Alexander V. Radenko (avradenko@ya.ru) – chief technologist, Scientific and Production Company "New Energy" LLC, 25/2, Zavodskoye shosse, Samara, 443022, Russian Federation.

Vitaly V. Radenko (tp-aist@mail.ru) – chief designer, Scientific and Production Company "New Energy" LLC, 25/2, Zavodskoye shosse, Samara, 443022, Russian Federation.

References

- [1] Uesaka M., Kobayashi H. Compact Neutron Sources for Energy and Security. *Reviews of Accelerator Science and Technology*, 2015, vol. 08, pp. 181–207. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793626815300108>.
- [2] Leung K.N., Leung J.K., Melville G. Feasibility study on medical isotope production using a compact neutron generator. *Applied Radiation and Isotopes*, 2018, vol. 137, pp. 23–27. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2018.02.026>.
- [3] Battermann J.J., Mijneer B.J. The amsterdam fast neutron therapy project: A final report. *International Journal of Radiation Oncology Biology Physics*, 1986, vol. 12, issue 12, pp. 2093–2099. DOI: [https://doi.org/10.1016/0360-3016\(86\)90007-6](https://doi.org/10.1016/0360-3016(86)90007-6).
- [4] Kreiner A.J. et al. Present status of Accelerator-Based BNCT. *Reports of Practical Oncology & Radiotherapy*, 2016, vol. 21, issue 2, pp. 95–101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rpor.2014.11.004>.
- [5] Metwally W.A. et al. Utilizing neutron generators in boron neutron capture therapy. *Applied Radiation and Isotopes*, 2021, vol. 174, p. 109742. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2021.109742>.
- [6] Leung K.N. New Compact Neutron Generator System for Multiple Applications. *Nuclear Technology*, 2020, vol. 206, issue 10, pp. 1607–1614. DOI: <https://doi.org/10.1080/00295450.2020.1719800>.
- [7] Shope L.A. et al. Operation and Life of the Zetatron: A Small Neutron Generator for Borehole Logging. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 1981, vol. 28, issue 2, pp. 1696–1699. DOI: <http://doi.org/10.1109/TNS.1981.4331501>.
- [8] Altukhov A.A. et al. Monitoring the yield of a borehole neutron generator. *Russian Engineering Research*, 2016, vol. 36, pp. 607–610. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X16070030>.
- [9] Shimura F. Single-Crystal Silicon: Growth and Properties. In: Kasap, S., Capper, P. (eds) Springer Handbook of Electronic and Photonic Materials. Springer Handbooks. Springer, Boston, MA., 2017, pp. 255–269. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-29185-7_13.
- [10] Chichester D., Simpson J., Lemchak M. Advanced compact accelerator neutron generator technology for active neutron interrogation field work. *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, 2007, vol. 271, issue 3, pp. 629–637. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10967-007-0318-7>.
- [11] Mausolf E.J. et al. Fusion-Based Neutron Generator Production of Tc-99m and Tc-101: A Prospective Avenue to Technetium Theranostics. *Pharmaceuticals*, 2021, vol. 14, issue 9, p. 875. DOI: <https://doi.org/10.3390/ph14090875>.
- [12] Pudjorahardjo D.S., Wahyono P.I., Syarip. Compact neutron generator as external neutron source of subcritical assembly for Mo-99 production (SAMOP). *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2296, issue 1, p. 020115. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0030345>.
- [13] Brown I.J. The Physics and Technology of Ion Sources, 2nd Revised and Extended Edition. Wiley-VCH, 2004, 396 p.
- [14] Mesyats Gennady A. Pulsed power. Springer, 2005. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b116932>.
- [15] Forrester A.T. Large Ion Beams: Fundamentals of Generation and Propagation. *Physics Today*, 1989, vol. 42, issue 6, pp. 77–78. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2811058>.
- [16] Akimchenko A. et al. Betavoltaic device in por-SiC/Si C-Nuclear Energy Converter. *EPJ Web of Conferences*, 2017, vol. 158, Article number 06004. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715806004>.
- [17] Datta R. et al. Radiatively Cooled Magnetic Reconnection Experiments Driven by Pulsed Power. *Physics of Plasmas*, 2024, vol. 31, issue 5, p. 052110. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0201683>.

- [18] Dolgoplov M.V., Radenko V.V., Zanin G.G., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Svirkov V.B., Chipura A.S., Gurskaya A.V. Electronically Controlled Plasma Power Devices for Sustainable and Environmentally Friendly Electric Energy Technologies. *Advances in Engineering Research. Volume 210. Proceedings of the Conference on Broad Exposure to Science and Technology 2021 (BEST 2021)*. Atlantis Press, 2021, pp. 197–205. DOI: <http://doi.org/10.2991/aer.k.220131.033>.
- [19] Somov A.I., Radenko V.V., Svirkov V.B., Dolgoplov M.V., Vasiliev I.V., Bagrov A.R. On the Possibility of Initialization of Synthesis in Small-sized Installations with Quadrupole Magnetic Systems with Spherical Cumulation of Shock Magnetic Waves in the Blanket Configuration of Plasma Discrets. *Computational Nanotechnology*, 2023, vol. 10, issue 2, pp. 70–88. DOI: <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2023-10-2-70-88>. (In Russ.)
- [20] Dolgoplov M.V., Zanin G.G., Ovchinnikov D.E., Radenko V.V., Svirkov V.B. Patent RU 2 757 666 C1, 20.10.2021. Electronically controlled plasma electric generator. No. 2021105186 dated 01.03.2021. Available at: https://yandex.ru/patents/doc/RU2757666C1_20211020?ysclid=m98552hxjf308596075. (In Russ.)
- [21] Burtebaev N. et al. Systematic Study of the p, d and ^3He Elastic Scattering on ^6Li . *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 73–75. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1076606>.
- [22] Elisov M.V. Lithium ions with energy 250–360 keV in the system of solenoidal and quadrupole magnetic fields. *9th International School and Conference on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures*. Saint Petersburg, 2022, pp. 590–591. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=55666293>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sxyzii>.
- [23] Dolgoplov M., Gurskaya A., Privalov A., Radenko V., Radenko A., Svirkov V. Electronically driven neutrons synthesis-generator with the magneto-optical flow seal. *EPJ Web of Conferences. The XXIV International Workshop "High Energy Physics and Quantum Field Theory" (QFTHEP 2019)*, 2019, vol. 222, Article number 02014. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201922202014>.
- [24] Cockcroft J.D., Walton E.T.S. Experiments with High Velocity Positive Ions. (I) Further Developments in the Method of Obtaining High Velocity Positive Ions. *Proceedings of the Royal Society A*, 1932, vol. 136, pp. 619–630. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1932.0107>.
- [25] Dolgoplov M.V., Zanin G.G., Radenko A.V., Radenko V.V., Svirkov V.B. Mathematical modeling of ion and plasma multiphase flow in the plasma electric synthesis generator. In: *Mathematical modeling and boundary value problems: Proceedings of the XI All-Russian scientific conference with international participation: in 2 vol. Vol. 1*. Samara: Samarskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2019, pp. 258–263. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38559765>. EDN: <https://www.elibrary.ru/unwnjf>. (In Russ.)
- [26] Chepurnov V.I., Dolgoplov M.V., Gurskaya A.V., Akimchenko A.A., Kuznetsov O.V., Radenko A.V., Radenko V.V., Mashnin A.S. C-betavoltaic energyconverter in por-SiC/Si. *Materials Science. Non-Equilibrium Phase Transformations*, 2017, year III, issue 3, pp. 119–120. Available at: https://www.researchgate.net/publication/386111461_C-betavoltaic_energyconverter_in_por-SiCSi.
- [27] Radenko V.V., Dolgoplov M.V., Chipura A.S., Radenko A.V., Svirkov V.B., Somov A.I. Plasma neutron generator on a plasma target for activation semiconductor materials. *Physics of Particles and Nuclei*, 2025, vol. 56, no. 3.
- [28] Gomez M.R. et al. Demonstration of thermonuclear conditions in magnetized liner inertial fusion experiments. *Physics of Plasmas*, 2015, vol. 22, no. 5, pp. 056306. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4919394>.
- [29] Hsu S.C. et al. Progress toward fusion energy breakeven and gain as measured against the Lawson criterion. *Phys. Plasmas*, 2022, vol. 29 (6), pp. 062103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083990>.
- [30] Lerner E.J. et al. Focus fusion: overview of progress towards p-B¹¹ fusion with the dense plasma focus. *J. Fusion Energ.*, 2023, vol. 42, pp. 7. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10894-023-00345-z>.
- [31] Zhitlukhin A.M. The current state of research on pulsed thermonuclear devices based on dense magnetized plasma flows. *Open Scientific seminar Controlled Thermonuclear Fusion and Plasma Technologies, conducted by Rosatom State Corporation on June 30*, 2023. Available at: <https://fusion.rosatom.ru/upload/iblock/421/421898e77a472e4670493568677e3831.pdf> abstracts and presentations. SSC RF TRINITI.
- [32] Burby J.W., Maldonado I.A., Ruth M., et al. Nonperturbative Guiding Center Model for Magnetized Plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 2025, vol. 134, pp. 175101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.175101>.



Развитие преобразователей энергии в дискретных ионно-плазмодинамических установках с электронным управлением

Чипура¹ А.С. , Долгополов¹ М.В. , Овчинников¹ Д.Е. , Раденко² А.В. , Раденко² В.В. 

¹ Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация; al_five@mail.ru; ORCID: 0009-0004-0425-0653 (А.С.); mikhaildolgopolov68@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8725-7831 (М.В.); ovchinnikovde1971@yandex.ru; ORCID: 0000-0001-7934-5105 (Д.Е.);

² Научно-производственная компания "Новая энергия" ООО, г. Самара, Российская Федерация; avradenko@ya.ru; ORCID: 0009-0001-0404-2385 (А.В.); tp-aist@mail.ru; ORCID: 0009-0008-3353-2667 (В.В.);

Поступила: 16.12.2024

Рассмотрена: 18.04.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. Разработаны методы создания электронно-управляемых потоков ионов и плазмы в магнитных полях для нейтронного генератора, плазменного электрогенератора и генератора на основе клистрона. Методика и технология создания и формирования электронно-управляемых потоков ионов и плазмы в магнитных полях были разработаны для реализации управляемого термоядерного синтеза посредством адаптивной дискретной модуляции потоков. Работа блоков установок основана на принципах уплотнения плазмы с магнито-оптической синхронизацией в реальном времени, критически важной для минимизации потерь на циклотронное излучение. В работе представлена комплексная методология экспериментальной валидации, включающая детектирование высокоэнергетических фотонов (6–17 МэВ) и экранирование альфа-частиц титановой фольгой толщиной 50 мкм, необходимые для испытаний промышленных плазменных генераторов. Рассмотрены теоретические и прикладные аспекты моделирования магнитодинамических потоков плазмы, а также новая конструкция плазменного нейтронного генератора с динамической плазменной мишенью. Предложенный электронно-управляемый генератор-преобразователь энергии плазмы демонстрирует тепловую мощность 8–25 кВт и электрическую мощность 4–12 кВт, превышая эффективность преобразования энергии (>50 %) традиционных D-T систем. Предлагается нейтронный генератор с плазменной мишенью, обеспечивающий импульсный поток до 10^{10} с^{-1} , что демонстрирует преимущества по сравнению с традиционными D-T системами. Использование компактных нейтронных и электрогенераторов позволяет преодолеть ограничения традиционных ядерных реакторов деления, обеспечивая модульность и быструю масштабируемость. Недавние разработки включают импульсные D-T генераторы и гибридные лазерно-плазменные системы, однако эффективность преобразования энергии в них остаётся низкой (<30%). Плазменный электрический генератор реализован на основе испарения гидрида лития и квадрупольной магнитной дискретизации (Патент RU 2757666). Технология решает проблему масштабируемости традиционных реакторов деления, предлагая модульность и быстрое развертывание, с перспективой применения в производстве изотопов и в компактных нейтронных источниках.

Ключевые слова: квадрупольные магнитные системы; электростатическое ускорение; магнитная линза; плазменная мишень; термоядерный синтез; плазменные токи; синхронизация; генератор синтеза; нейтронный генератор; клистрон; гамма-спектроскопия.

Цитирование. Chipura A.S., Dolgoplov M.V., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Radenko V.V. Development of energy converters in discrete ion-plasmodynamic installations with electronic control // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series 2025. Т. 31, № 1. С. 99–117. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-99-117.

© Чипура А.С., Долгополов М.В., Овчинников Д.Е., Раденко А.В., Раденко В.В., 2025

Александр Сергеевич Чипура (al_five@mail.ru) – ассистент кафедры высшей математики, институт автоматики и информационных технологий, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Михаил Вячеславович Долгополов (mikhaildolgoplov68@gmail.com) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, институт автоматики и информационных технологий, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Дмитрий Евгеньевич Овчинников (ovchinnikovde1971@yandex.ru) – доктор экономических наук, профессор, первый проректор — проректор по учебной работе, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Александр Владимирович Раденко (avradenko@ya.ru) – главный технолог, НПК "Новая энергия ООО", 443022, Самара, Заводское шоссе, 25/2.

Виталий Владимирович Раденко (tp-aist@mail.ru) – главный конструктор, НПК "Новая энергия ООО", 443022, Самара, Заводское шоссе, 25/2.

Литература

- [1] Uesaka M., Kobayashi H. Compact Neutron Sources for Energy and Security // Reviews of Accelerator Science and Technology. 2015. Vol. 08. P. 181–207. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793626815300108>.
- [2] Leung K.N., Leung J.K., Melville G. Feasibility study on medical isotope production using a compact neutron generator // Applied Radiation and Isotopes, 2018. Vol. 137. P. 23–27. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2018.02.026>.
- [3] Battermann J.J., Mijneer B.J. The amsterdam fast neutron therapy project: A final report // International Journal of Radiation Oncology Biology Physics. 1986. Vol. 12, issue 12. P. 2093–2099. DOI: [https://doi.org/10.1016/0360-3016\(86\)90007-6](https://doi.org/10.1016/0360-3016(86)90007-6).
- [4] Kreiner A.J. et al. Present status of Accelerator-Based BNCT // Reports of Practical Oncology & Radiotherapy. 2016. Vol. 21, issue 2. P. 95–101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rpor.2014.11.004>.
- [5] Metwally W.A. et al. Utilizing neutron generators in boron neutron capture therapy // Applied Radiation and Isotopes. 2021. Vol. 174. P. 109742. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2021.109742>.
- [6] Leung K.N. New Compact Neutron Generator System for Multiple Applications // Nuclear Technology. 2020. Vol. 206, issue 10. P. 1607–1614. DOI: <https://doi.org/10.1080/00295450.2020.1719800>.
- [7] Shope L.A. et al. Operation and Life of the Zetatron: A Small Neutron Generator for Borehole Logging // IEEE Transactions on Nuclear Science. 1981. Vol. 28, issue 2. P. 1696–1699. DOI: <http://doi.org/10.1109/TNS.1981.4331501>.
- [8] Altukhov A.A. et al. Monitoring the yield of a borehole neutron generator // Russian Engineering Research. 2016. Vol. 36. P. 607–610. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X16070030>.
- [9] Shimura F. Single-Crystal Silicon: Growth and Properties. In: Kasap, S., Capper, P. (eds.) Springer Handbook of Electronic and Photonic Materials. Springer Handbooks. Springer, Boston, MA. 2017. P. 255–269. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-29185-7_13.
- [10] Chichester D., Simpson J., Lemchak M. Advanced compact accelerator neutron generator technology for active neutron interrogation field work // Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry. 2007. Vol. 271, issue 3. P. 629–637. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10967-007-0318-7>.
- [11] Mausolf E.J. et al. Fusion-Based Neutron Generator Production of Tc-99m and Tc-101: A Prospective Avenue to Technetium Theranostics // Pharmaceuticals. 2021. Vol. 14, issue 9. P. 875. DOI: <https://doi.org/10.3390/ph14090875>.

- [12] Pudjorahardjo D.S., Wahyono P.I., Syarip. Compact neutron generator as external neutron source of subcritical assembly for Mo-99 production (SAMOP) // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2296, issue 1. P. 020115. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0030345>.
- [13] Brown I.J. The Physics and Technology of Ion Sources, 2nd Revised and Extended Edition. Wiley-VCH, 2004. 396 p.
- [14] Mesyats Gennady A. Pulsed power. Springer, 2005. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/b116932>.
- [15] Forrester A.T. Large Ion Beams: Fundamentals of Generation and Propagation // Physics Today. 1989. Vol. 42, issue 6. P. 77–78. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2811058>.
- [16] Akimchenko A. et al. Betavoltaic device in por-SiC/Si C-Nuclear Energy Converter // EPJ Web of Conferences. 2017. Vol. 158. Article number 06004. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715806004>.
- [17] Datta R. et al. Radiatively Cooled Magnetic Reconnection Experiments Driven by Pulsed Power // Physics of Plasmas. 2024. Vol. 31, issue 5. P. 052110. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0201683>.
- [18] Dolgoplov M.V., Radenko V.V., Zanin G.G., Ovchinnikov D.E., Radenko A.V., Svirkov V.B., Chipura A.S., Gurskaya A.V. Electronically Controlled Plasma Power Devices for Sustainable and Environmentally Friendly Electric Energy Technologies // Advances in Engineering Research. Vol. 210. Proceedings of the Conference on Broad Exposure to Science and Technology 2021 (BEST 2021). Atlantis Press, 2021. P. 197–205. DOI: <http://doi.org/10.2991/aer.k.220131.033>.
- [19] Сомов А.И., Свирков В.Б., Раденко В.В., Долгополов М.В., Васильев И.В., Багров А.Р. О возможности инициализации синтеза в малогабаритных установках с квадрупольными магнитными системами со сферической кумуляцией ударных магнитных волн в бланкетной конфигурации дискретов плазмы // Computational nanotechnology. 2023. Т. 10, вып. 2. С. 70–88. DOI: <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2023-10-2-70-88>.
- [20] Электронно-управляемый плазменный электрический генератор / Долгополов М.В., Занин Г.Г., Овчинников Д.Е., Раденко А.В., Раденко В.В., Свирков В.Б. Патент на изобретение RU 2 757 666 C1, 20.10.2021. Заявка № 2021105186 от 01.03.2021. URL: https://yandex.ru/patents/doc/RU2757666C1_20211020?ysclid=m98552hxjf308596075.
- [21] Burtebaev N. et al. Systematic Study of the p, d and ^3He Elastic Scattering on ^6Li // International Journal of Physical and Mathematical Sciences. 2011. Vol. 5, no. 2, P. 73–75. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.1076606>.
- [22] Elisov M.V. Lithium ions with energy 250-360 keV in the system of solenoidal and quadrupole magnetic fields // 9th International School and Conference on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures. Saint Petersburg, 2022. P. 590–591. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=55666293>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sxyzii>.
- [23] Dolgoplov M., Gurskaya A., Privalov A., Radenko V., Radenko A., Svirkov V. Electronically driven neutrons synthesis-generator with the magneto-optical flow seal // EPJ Web of Conferences. The XXIV International Workshop "High Energy Physics and Quantum Field Theory" (QFTHEP 2019). 2019. Vol. 222, Article number 02014. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201922202014>.
- [24] Cockcroft J.D., Walton E.T.S. Experiments with High Velocity Positive Ions. (I) Further Developments in the Method of Obtaining High Velocity Positive Ions // Proceedings of the Royal Society A, 1932. Vol. 136. P. 619–630. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1932.0107>.
- [25] Долгополов М.В., Занин Г.Г., Раденко А.В. и др. Математическое моделирование ионного многофазного потока в плазменном электрическом синтез-генераторе // Математическое моделирование и краевые задачи: материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием: в 2 т. Т. 1. Самара: Самарский государственный технический университет, 2019. С. 258–263. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=38559765>. EDN: <https://www.elibrary.ru/unwnjf>.
- [26] Chepurnov V.I., Dolgoplov M.V., Gurskaya A.V., Akimchenko A.A., Kuznetsov O.V., Radenko A.V., Radenko V.V., Mashnin A.S. C-betavoltaic energyconverter in por-SiC/Si // Materials Science. Non-Equilibrium Phase Transformations. 2017. Year III. Issue 3. P. 119–120. URL: https://www.researchgate.net/publication/386111461_C-betavoltaic_energyconverter_in_por-SiCSi.
- [27] Раденко В.В., Долгополов М.В., Чипура А.С., Раденко А.В., Свирков В.Б., Сомов А.И. Плазменный нейтронный генератор на плазменной мишени для активации полупроводниковых материалов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2025. Т. 56, вып. 3.

- [28] Gomez M.R. et al. Demonstration of thermonuclear conditions in magnetized liner inertial fusion experiments // *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22, № 5. P. 056306. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4919394>.
- [29] Hsu S.C. et al. Progress toward fusion energy breakeven and gain as measured against the Lawson criterion // *Phys. Plasmas* 2022. Vol. 29 (6). P. 062103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0083990>.
- [30] Lerner E.J. et al. Focus fusion: overview of progress towards p-B¹¹ fusion with the dense plasma focus // *J. Fusion Energ.* 2023. Vol. 42. P. 7. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10894-023-00345-z>.
- [31] Житлухин А.М. Современное состояние исследований импульсных термоядерных устройств на базе потоков плотной замагниченной плазмы // Открытый научный семинар "Управляемый термоядерный синтез и плазменные технологии", проведённый Госкорпорацией "Росатом" 30 июня 2023 года: тезисы, доклады. ГНЦ РФ ТРИНИТИ. URL: <https://fusion.rosatom.ru/upload/iblock/421/421898e77a472e4670493568677e3831.pdf> abstracts and presentations. SSC RF TRINITI.
- [32] Burby J.W., Maldonado I.A., Ruth M., et al. Nonperturbative Guiding Center Model for Magnetized Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* 2025. Vol. 134. P. 175101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.175101>.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ REQUIREMENTS TO THE DESIGN OF ARTICLES

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <https://journals.ssau.ru/est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакции журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегией журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются через сайт <https://journals.ssau.ru/est>.
2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.
3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.
4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.
5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.
6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.
7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.
8. Текст статьи должен быть подготовлен с использованием стиля "VesSamUn.sls". Стил "VesSamUn.sls" и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций $\text{\LaTeX}$ крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\text{\LaTeX}$. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.
9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:
 - а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("==")¹, тройной дефис ("===")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;
 - б) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;
 - в) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;
 - г) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11–15 см по горизонтали и 5–15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисунковые подписи. Сами подрисунковые подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;
 - д) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;
 - е) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;
 - ж) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;
 - з) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;
 - и) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.
- Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы. Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.
- В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`