



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ISSN 2541-7525

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ
СЕРИЯ**

ТОМ 29 • №4 • 2023 ГОД

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Подписной индекс 80307

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Механика*
- *Математическое моделирование*
- *Математические методы в естественных науках*
- *Физика*

ТОМ 29 • № 4 • 2023 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета»,
с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series»
Т. 29, № 4, 2023

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель: Самарский университет

Адрес издателя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-67328 от 05.10.2016

Подписной индекс в Объединенном интернет-каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.
0+

Цена свободная

Подписано в печать 25.12.2023. Дата выхода в свет 30.12.2023
Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 18.

Тираж 200 экз. (первый завод — 25 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Н. Аяззов, д-р физ.-мат. наук, директор (Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, РФ), профессор кафедры физики (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, РФ)

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Ивашник, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

С.А. Лычев, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Механики технологических процессов (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

Константин Панкрашикин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

К.Б. Устинов, д-р физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник лаборатории Геомеханики (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2023

ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online
Subscription Index 80307

**VESTNIK
SAMARSKOGO UNIVERSITETA
ESTESTVENNONAUCHNAYA SERIYA**

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mechanics*
- *Mathematical
Modelling*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*
- *Physics*

VOL. 29 • № 4 • 2023

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education

«Samara National Research University»

(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —

"Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series"

V. 29, № 4, 2023

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher: Samara National Research University

Address publisher:

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial stuff: 1, Akademika Pavlova Street, Samara, 443011, Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС 77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the United catalog of Internet «Press of Russia» 80307

ISSN 2541-7525 Print

ISSN 2712-8954 Online

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 25.12.2023.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 18.

Circulation 200 copies (first printing – 25 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.N. Azyazov, Dr. of Phys.-Math. Sci., head (Samara Branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia), prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of General and Theoretical Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy (Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, RF)

S.A. Lychev, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Mechanics of Technological Processes (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay, France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the Department of Algebra and Geometry (Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Differential Equations and Control Theory (Samara National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty of Biotechnology and Biology, head of the Department of Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Differential Equations and Control Theory, prof. of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov State University, Saratov, RF)

K.B. Ustinov, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate professor, leading research worker at the Laboratory of Geomechanics (Institute for Problems in Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

© Samara University, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Механика

Быкова Ю.С., Степанова Л.В. Влияние процесса накопления повреждений на асимптотическое поведение полей напряжений в условиях ползучести образца с центральной трещиной ...	7
Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть I. Геометрические методы	26
Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть II. Второй градиент и микроструктура	54
Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране	77

Математическое моделирование

Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Опыт моделирования наклонных трещин в материалах с кубической кристаллической структурой	106
--	------------

Математические методы в естественных науках

Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик линии визирования подвижной антенны космического аппарата при ее наведении на пункт приема информации.....	117
Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик подвижной антенны космического аппарата в двухстепенном опорно-поворотном устройстве	125

Физика

Долгополов М.В., Чипура А.С. Моделирование бетавольтаического элемента на наногетеропереходах GaN и GaP на подложках Si и 3C-SiC/Si	133
--	------------

<i>Требования к оформлению статей</i>	143
---	------------

CONTENTS

Mechanics

Bykova Y.S., Stepanova L.V. Influence of the process of damage accumulation on the asymptotic behavior of stress fields under creep conditions of a sample with a central crack	7
Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part I. Geometric methods	26
Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part II. Second gradient and microstructure	54
Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A. Bending of a circular disk: from cylinder to ultrathin membrane	77

Mathematical Modelling

Mushankova K.A., Stepanova L.V. Experience in modeling inclined cracks in materials with cubic crystal structure	106
---	------------

Mathematical Methods in Natural Sciences

Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of the line of sight of a mobile antenna of a spacecraft when it is pointed at an information reception point	117
Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of a mobile antenna of a spacecraft in a two-stage pivoting device.....	125

Physics

Dolgoplov M.V., Chipura A.S. Modeling of nanoheterojunction betavoltaic cell on GaN and GaP with Si and 3C-SiC/Si.....	133
---	------------

<i>Requirements to the design of articles</i>	143
---	------------

МЕХАНИКА

MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25

УДК 539.42

Дата: поступления статьи: 11.08.2023
после рецензирования: 24.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

Ю.С. Быкова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bykova.yus@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7347-8553>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanova.lv@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

**ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ
НА АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ
В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ОБРАЗЦА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ
ТРЕЩИНОЙ¹**

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена оценке влияния эффекта накопления повреждений на поле напряжений у вершины центральной трещины в пластине, подверженной действию растягивающей нагрузки. Задачей исследования является анализ полей у вершины трещины в условиях ползучести, в программном комплексе конечно-элементного анализа и автоматизированного проектирования Simulia ABAQUS с использованием пользовательской процедуры UMAT (User material), основу которой составляют определяющие соотношения степенного закона Бейли — Нортон и эволюционное уравнение Качанова — Работнова, описывающее процесс накопления повреждений. Анализ полученных результатов показал, что в зонах ползучести и упругости в расчетах без учета эффекта повреждений присутствуют асимптотики полей напряжений, которые соответствуют известным аналитическим решениям механики разрушения (асимптотика Хатчинсона — Райса — Розенгрена для зоны ползучести, асимптотика линейной механики разрушения, соответствующая зависимости напряжений, обратно пропорциональной квадратному корню из расстояния от кончика трещины для зоны упругого поведения материала. Наличие поврежденности в материале влияет на асимптотическое поведение механических величин у вершины дефекта в зоне ползучести. Численные расчеты показали, что параметр сплошности обладает асимптотическим поведением. Обнаружена степенная асимптотика функции поврежденности на тех же интервалах, где выявлено асимптотическое поведение напряжений в зоне активного накопления повреждений. Проведенный конечно-элементный анализ четко показывает, что процесс накопления повреждений сказывается в изменении асимптотического поведения поля напряжений в окрестности вершины трещины и приводит к новому асимптотическому распределению компонент тензора напряжений. Предложенная процедура может проложить путь к аналитическому решению краевой задачи и позволит определить структуру асимптотического решения задачи.

Ключевые слова: асимптотика полей напряжений и сплошности; трещина; конечно-элементное моделирование; напряжения; поврежденность; ползучесть; пользовательская подпрограмма UMAT; комплекс SIMULIA ABAQUS.

Цитирование. Быкова Ю.С., Степанова Л.В. Влияние процесса накопления повреждений на асимптотическое поведение полей напряжений в условиях ползучести образца с центральной трещиной // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 7–25. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25>.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ в рамках научного проекта № 21-11-00346).

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Быкова Ю.С., Степанова Л.В., 2023

Юлия Сергеевна Быкова — ассистент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Лариса Валентиновна Степанова — заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Проектирование и создание изделий, обладающих хорошей надежностью и работоспособностью, являются неотъемлемым требованием в машиностроении и промышленности [1; 2]. Элементы авиационных конструкций, электростанций, тепловых и газовых турбин, детали автомобильной промышленности обычно подвергаются механическим нагрузкам при высокой температуре. В этой неблагоприятной среде скорость деградации механических свойств материала возрастает из-за комбинированного воздействия механической и температурной нагрузки. Поэтому несомненно актуальным является изучение влияния таких неблагоприятных условий на компоненты для обеспечения их безопасности и долговечности. Правильный выбор материала или их совокупности позволяет достичь высоких прочностных и эксплуатационных характеристик изготавливаемых деталей или конструкций. Так, например, в авиационной отрасли для создания высоконагруженных деталей используются алюминиевые и титановые сплавы, а для снижения веса и продления срока эксплуатации — композитные материалы [3].

Положения и представления континуальной механики поврежденности являются одними из современных авторитетных подходов, которые привлекают внимание исследователей к изучению разрушения в условиях ползучести посредством учета влияния накопления повреждений [4; 5]. Основы континуальной механики поврежденности были заложены Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым, впоследствии она сформировалась в самостоятельную область механики [4; 5] и вобрала в себя основополагающие концепции [6–8] и новые результаты [9–14].

В настоящее время особый интерес представляют исследования деформационного поведения новых материалов, подверженных сложным температурно-механическим видам нагружения [15; 16]. Проведение натурных испытаний и экспериментов не позволяет в полной мере получить данные о механизмах деформации и изменении внутренней структуры материала в условиях активного нагружения, так как большинство экспериментальных методик основано на анализе состояния структуры материала только после снятия всех внешних нагрузок [17]. Исходя из этого, в дополнение к эксперименту важным инструментом в изучении поведения материалов становится использование цифровых расчетных моделей. Создание таких моделей осуществляется с помощью расчетных программных комплексов (Computer-Aided Engineering), в основе которых лежат численные методы и методы конечно-элементного моделирования [8; 11–14; 18–21].

Ввиду ограниченности вычислительных мощностей долгое время расчеты производились на основе упрощенных физических моделей материалов, которые не учитывали их реальные свойства (нелинейные, термические, анизотропия и т. п.). Сегодня стремительное развитие информационных и компьютерных технологий открыло большие возможности для моделирования сложных процессов и позволило применять на практике разнообразные теоретические исследования, которые создавались не одно десятилетие известными учеными [11–14]. Современные расчетные программные комплексы как иностранные (ANSYS, Siemens Simcenter 3D, Simulia ABAQUS), так и отечественные (ЛОГОС [22], APM WinMachine [23], FIDESYS [24]) содержат достаточно широкую базу данных о материалах и законах их поведения, а также обладают инструментом для внедрения пользовательских подпрограмм и модулей. Они представляют собой мощный инструмент для инженеров и исследователей в области механики твердого тела, биомеханики, строительной механики и материаловедения. В частности, с помощью пользовательской подпрограммы UMAT (Simulia ABAQUS) [25; 26] можно инкорпорировать в расчет собственную модель поведения материала. Таким образом, объединение возможностей современных расчетных комплексов с теоретическими знаниями позволяет создавать новые методики для оценки напряженно-деформированного состояния изделий с использованием реальных свойств материалов.

В представленной работе анализируются результаты, полученные для пластины с центральной трещиной, рассчитанные с помощью созданной пользовательской подпрограммы UMAT программного комплекса Simulia ABAQUS. В основе данной подпрограммы лежат определяющие соотношения, описываю-

щие изотропное поведение материала в условиях ползучести, включающие в себя скалярную величину — параметр сплошности, определяющий процесс накопления повреждений. В работе построены распределения полей напряжения на продолжении трещины с учетом процесса накопления повреждений в материале, определены асимптотики напряжений и сплошности в областях установившейся ползучести и в областях чисто упругого поведения материала.

1. Понятие ползучести материалов и процесса накопления повреждений

Появление трещин и разрушение конструкций во многих случаях вызваны явлением ползучести, где под термином «ползучесть» понимается процесс нарастания остаточной деформации во времени при постоянном значении нагрузки [27]. В технической литературе часто встречается термин «вязкоупругость», что является аналогом эффекта ползучести [28]. Так, например, обрушение Всемирного торгового центра было связано с ползучестью в условиях высоких температур [29]. Ползучесть эпоксидного анкерного клея стала причиной разрушения потолка туннеля Big Dig в Бостоне, штат Массачусетс, которое произошло в июле 2006 года [30]. В газотурбинных двигателях, где температура может достигать значений более чем 1000 °С, могут возникать деформации ползучести даже в турбинных лопатках, изготовленных из высокопрочных сплавов. Исходя из этого, для анализа напряженно-деформированного состояния детали или конструкции важно учитывать эффект ползучести.

Так как процесс накопления деформаций ползучести происходит в течение достаточно большого диапазона времени, то экспериментальные тесты материала и натурные испытания в реальных условиях эксплуатации могут быть нереализуемыми и достаточно дорогостоящими, поэтому при решении подобных задач актуально использование расчетных программных комплексов. Для описания ползучести обычно используется закон зависимости скорости деформации $\dot{\epsilon}^c$ от напряжения σ , времени t и температуры T :

$$\dot{\epsilon}^c = f(\sigma, t, T). \quad (1.1)$$

При действии постоянной нагрузки для большинства материалов можно выделить три стадии ползучести. На первой стадии, которая наблюдается в течение достаточно небольшого промежутка времени, происходит уменьшение скорости деформации ползучести со временем, на второй стадии скорости деформации ползучести приобретают постоянные значения, и уже на третьей стадии наблюдается быстрое увеличение скорости деформации до значений, при которых происходит полное разрушение материала. Особый интерес представляет вторая стадия ползучести, или стадия установившейся ползучести.

Предполагается, что на стадии установившейся ползучести существует зависимость между скоростью деформаций ползучести $\dot{\epsilon}^c$ и напряжением σ , которая носит название степенного закона Нортона — Бейли и имеет вид:

$$\dot{\epsilon}^c = B\sigma^n, \quad (1.2)$$

где B — постоянная материала, показатель степени n — постоянная материала, значение которой, например для сталей, находится в диапазоне от 3 до 8 (для чистых металлов значение данного показателя равно примерно 4) [31].

При проведении инженерных расчетов на статическую прочность и долговечность вводят некоторые допущения, одним из которых является идеализация материала и использование только его упругих свойств. В реальности в любом материале, сплаве на микроструктурном уровне присутствуют дефекты, наличие которых существенно влияет на прочностные характеристики, образование и рост трещин и тем самым — на ресурс изделия.

Для описания процесса накопления повреждений добавляется в определяющие соотношения поведения материала скалярная величина $1 \geq \psi \geq 0$. Такая математическая модель поведения материала была представлена в работах Качанова — Работнова [32–34]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (1.3)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ — компоненты тензора скоростей деформации ползучести, B, A, n, m — материальные константы, ψ — скалярная величина, описывающая поврежденность материала, $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность касательных напряжений.

Для решения задач с применением модели материала, наиболее приближенной к реальности и учитывающей процессы накопления повреждений (1.3), была разработана пользовательская процедура UMAT программного комплекса Simulia ABAQUS [25; 26]. Подпрограмма UMAT написана с использованием

языка программирования FORTRAN, программ Parallel Studio, Visual Studio, а также настроенной компиляцией кода между ними и расчетным программным комплексом Simulia ABAQUS [25]. Основные элементы кода, параметры и функции пользовательских подпрограмм различного вида хорошо представлены в руководстве для пользователя программного комплекса Simulia ABAQUS. Созданная подпрограмма UMAT задается в модуле *Jobs* меню *General* → *UserSubroutinefile*. Константы материала, определенные в коде программы через параметры *PROPS()*, задаются в модуле *Material* → *UserMaterial* [25; 26].

2. Задача об одноосном растяжении плоскости с горизонтальным дефектом в условиях ползучести

2.1. Постановка задачи

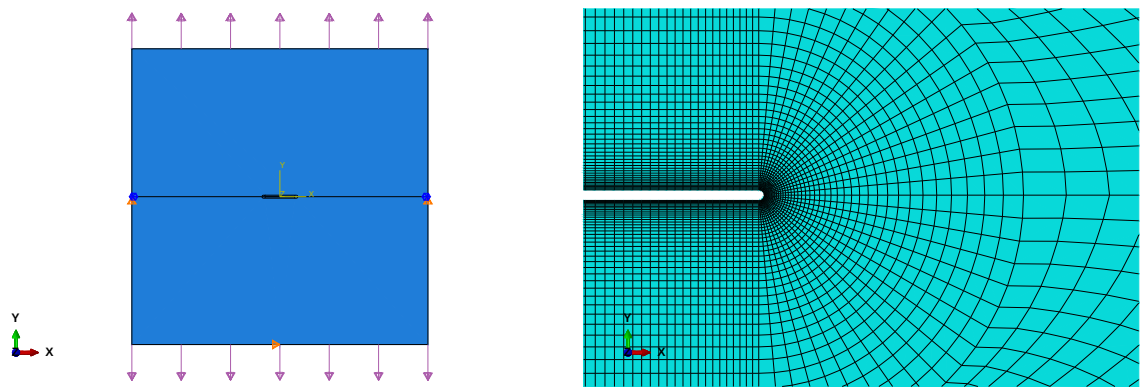


Рис. 2.1. Модель пластины с закругленным вырезом: геометрия, приложенная нагрузка и конечно-элементная сетка

Fig. 2.1. Model of a plate with a rounded crack: geometry, applied load and finite element mesh

Анализ влияния процесса накопления повреждений на напряженно-деформированное состояние тела был выполнен для конечно-элементной модели пластины с дефектом в виде трещины, подверженной одноосному растяжению усилием $P = 10$ МПа.

На рис. 2.1 представлена исследуемая пластина и приложенные на нее граничные условия. Геометрические параметры рассматриваемой модели следующие: длина и ширина пластины — 100 мм; длина выреза и его радиус, соответственно, 10 и 0.001 мм. Пластина изготовлена из материала, определяемого следующими материальными постоянными: модуль упругости (модуль Юнга) $E = 121000$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$. Ползучесть моделируется с помощью степенного закона Нортон — Бейли (1.3), который был описан пользовательской подпрограммой UMAT. Сеточная модель построена на основе геометрии, представленной на рис. 2.1, и выполнена преимущественно квадратными элементами первого порядка. Количество элементов на четверть окружности у основания выреза — 16, размер которых равен 0.0002 мм.

В рамках выполненной работы была проведена серия расчетов со значениями материальных констант B и n согласно табл. 2.1. Используемые значения постоянных материала, которые были получены в ходе натурных испытаний образцов, представлены в работе [31].

Таблица 2.1

Материальные константы

Table 2.1

Material constants

№ материала	Модуль Юнга, E , МПа	Коэффициент Пуассона, ν	n	m	$B, (H/мм^2)^{-n}(ч)^{-1}$
1	121000	0.34	5	3.5	$2.2 \cdot 10^{-17}$
2	121000	0.34	7	4.9	$1.9 \cdot 10^{-22}$
3	121000	0.34	9	6.3	$1.6 \cdot 10^{-27}$

Расчеты выполнялись на временном интервале от 1 ч до 10 000 ч с шагом по времени в 500 ч для каждой из трех моделей материала согласно табл. 2.1. Для анализа результатов были выбраны следующие временные расчетные точки: 2 000 ч, 4 000 ч, 6 000 ч, 8 000 ч и 10 000 ч.

2.2. Верификация пользовательской подпрограммы UMAT

Для оценки возможности использования созданной пользовательской подпрограммы UMAT и корректности ее работы на первом этапе была проведена ее верификация, которая заключается в проведении серии сравнительных расчетов. Конечно-элементная модель пластины была рассчитана с материалом, входящим в стандартную библиотеку программного комплекса Simulia ABAQUS (модель № 1), и с тем же самым материалом, но описанным с помощью подпрограммы UMAT (модель № 2). В проведенных вычислениях не учтен эффект накопления повреждений, поскольку в стандартной библиотеке такого свойства не предусмотрено.

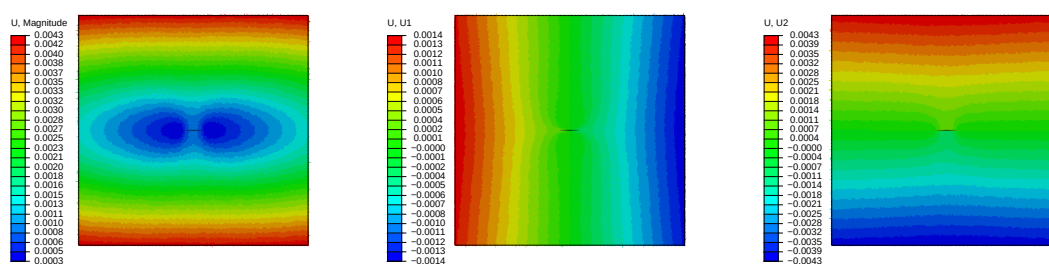


Рис. 2.2. Распределение полей перемещений: полное смещение, смещение в горизонтальном направлении, смещение в вертикальном направлении

Fig. 2.2. Distribution of displacement fields: total displacement, horizontal displacement, vertical displacement

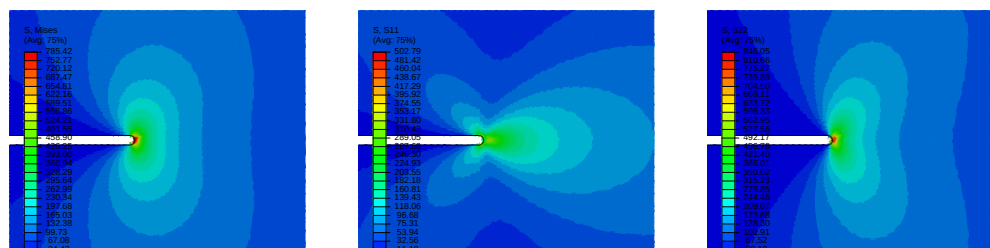


Рис. 2.3. Распределение полей напряжений: интенсивность напряжений, компонента σ_{11} , компонента σ_{22}

Fig. 2.3. Stress field distribution: stress intensity, σ_{11} component, σ_{22} component

Верификация полученных результатов основана на сравнении полей перемещений и эквивалентных напряжений двух моделей (модель № 1 и модель № 2), которые оказались абсолютно идентичными как по числовым значениям, так и по распределению изопараметрических контуров. Результаты расчетов приведены на рис. 2.2, 2.3. Таким образом, достоверность написанной пользовательской процедуры UMAT была проверена и подтверждена сравнительными расчетами.

3. Исследование асимптотического поведения полей напряжений $\sigma_{22}(x, y = 0)$ без учета и с учетом процесса аккумуляции повреждений

Функционал созданной пользовательской подпрограммы UMAT, описывающей поведение материала в условиях ползучести и верифицированной проверочными расчетами, был расширен с помощью введения соотношений, учитывающих процесс накопления повреждений (1.3). В результате выполненных серий расчетов исследованы поля эквивалентных напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести. На рис. 3.1 изображен путь, вдоль которого приведены распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(x, y = 0)$, длина которого равна 1.05 мм.

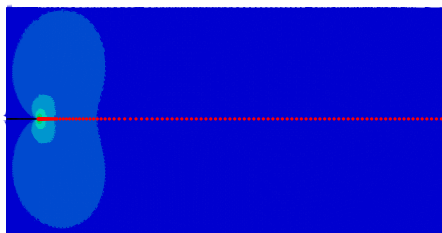


Рис. 3.1. Выборка узлов конечно-элементной модели для построения распределения напряжений $\sigma_{22}(x, y = 0)$

Fig. 3.1. Sampling of finite element model nodes for constructing stress distribution $\sigma_{22}(x, y = 0)$

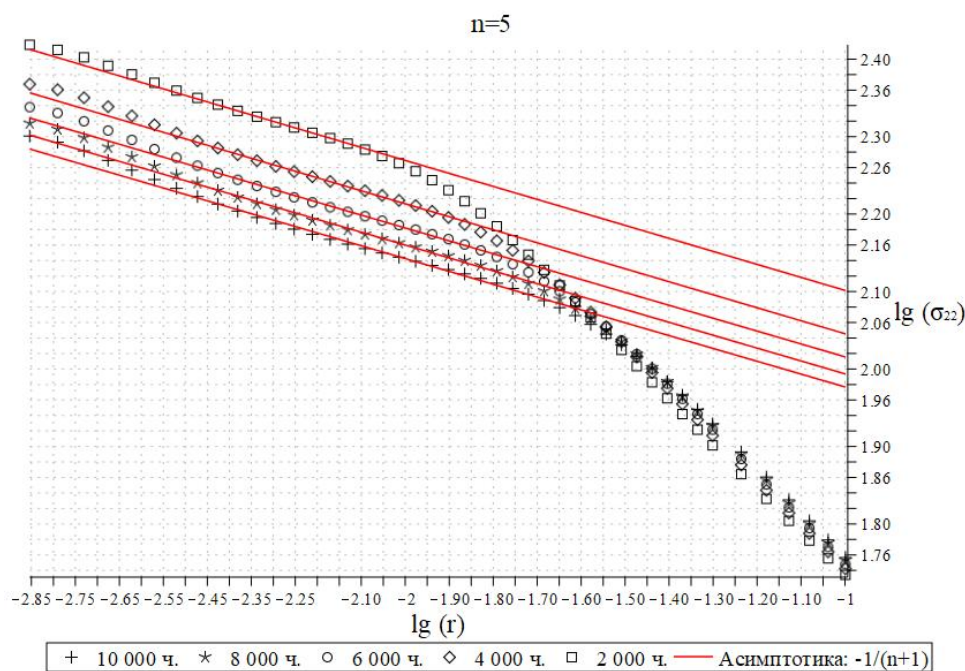


Рис. 3.2. Расчет без учета эффекта накопления повреждений для $n = 5$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне ползучести

Fig. 3.2. Computation without taking into account the effect of damage accumulation for $n = 5$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the creep zone

Представим результаты расчетов без учета процесса накопления повреждений. На графиках рис. 3.2–3.4 отображены значения компонент тензора напряжений σ_{22} в двойных логарифмических координатах вдоль назначенного пути для моментов времени 2 000 ч, 4 000 ч, 6 000 ч, 8 000 ч и 10 000 ч для $n = 5$, $n = 7$ и $n = 9$. Различными символами обозначены распределения полей напряжений σ_{22} для различных временных точек. Для каждого представленного графика на рис. 3.2–3.4 в зоне ползучести построены прямые сплошные линии-асимптотики, которые аппроксимируют значения компоненты тензора напряжений σ_{22} для каждого расчетного момента. Полученные средние значения коэффициента наклона этих прямых равны значению $-1/(1+n)$ для соответствующего n . Так, для $n = 5$ значение коэффициента наклона прямых находится в диапазоне 0.165 – 0.167, для $n = 7$: 0.123 – 0.126 и для $n = 9$: 0.098–0.106. Стоит отметить, что σ_{22} и r являются безразмерными величинами напряжений и расстояния, отнесенными соответственно к 1 МПа и 1 мм.

В зоне упругого поведения материала также выстраиваются прямые сплошные линии — классические асимптотики в линейной механике, коэффициент наклона которых равен $-1/2$. Поведение полученных асимптотик представлено на графиках рис. 3.5–3.7.

Используя данные графики, легко определить зоны ползучести и упругости, размеры которых зависят от времени расчета. Чем больше время расчета, время приложения нагрузки на образец, тем больше становится зона ползучести, и при этом наблюдается уменьшение зоны упругости. Также эти зоны легко можно определить с помощью визуализации деформаций ползучести из МКЭ-расчета. На рис. 3.8

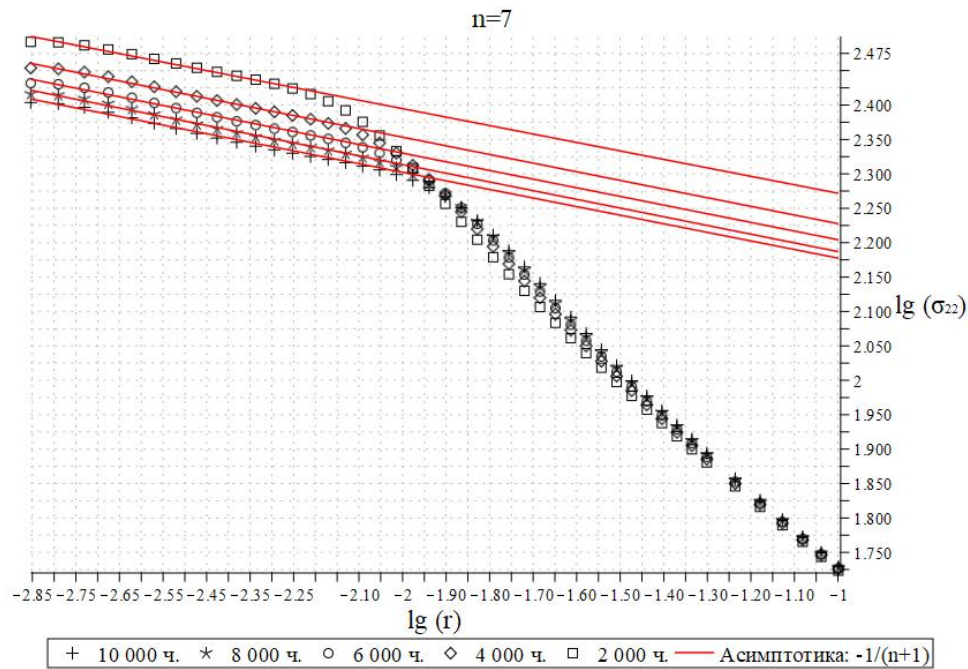


Рис. 3.3. Расчет без учета эффекта накопления повреждений для $n = 7$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне ползучести
Fig. 3.3. Computation without taking into account the effect of damage accumulation for $n = 7$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the creep zone

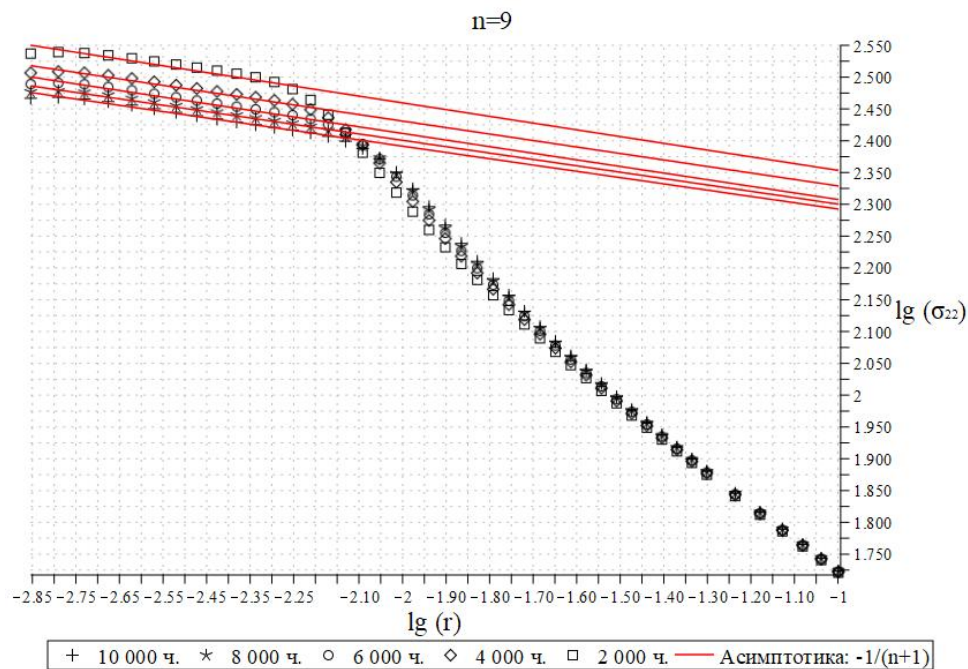


Рис. 3.4. Расчет без учета эффекта накопления повреждений для $n = 9$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне ползучести
Fig. 3.4. Computation without taking into account the effect of damage accumulation for $n = 9$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the creep zone

обозначены точками границы зоны ползучести для двух временных расчетных точек: 500 ч и 10 000 ч. Для расчета в 500 часов размер зоны ползучести равен 0.0064 мм, для 10 000 часов — 0.0087 мм.

В результате конечно-элементных расчетов можно сделать вывод, что представленные асимптотики для зон ползучести и упругости соответствуют аналитическим решениям. Таким образом, можно

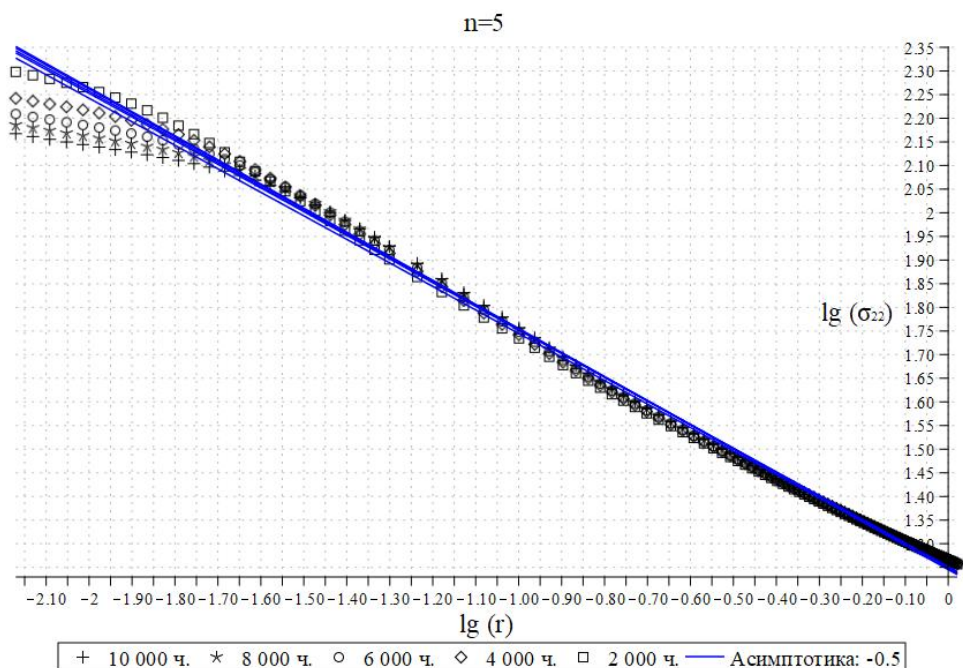


Рис. 3.5. Расчет без учета эффекта накопления повреждений для $n = 5$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне упругости
 Fig. 3.5. Computation without taking into account the effect of damage accumulation for $n = 5$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the elastic zone

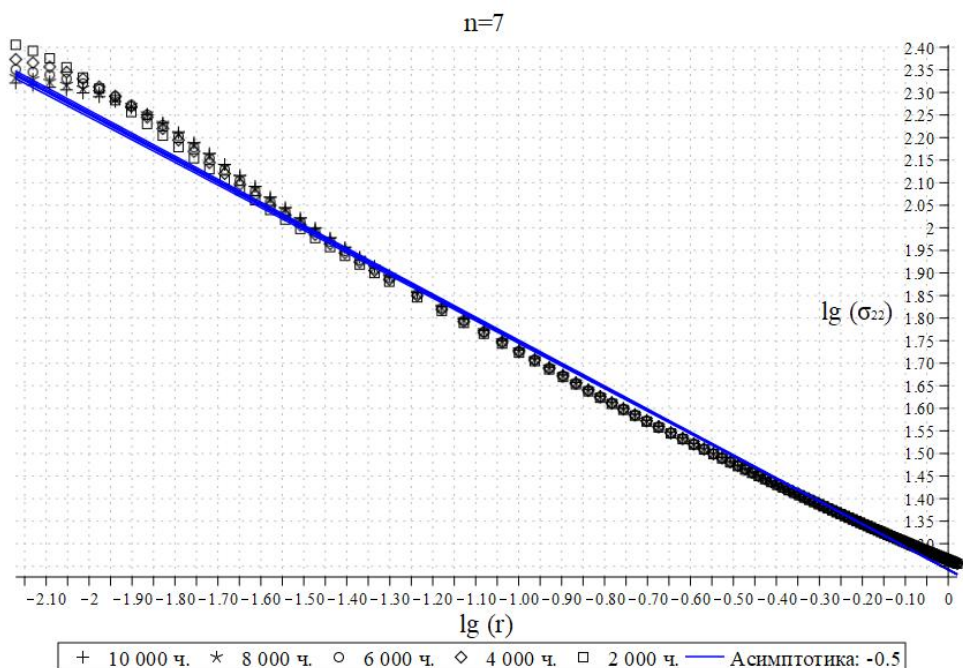


Рис. 3.6. Расчет без учета эффекта накопления повреждений для $n = 7$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне упругости
 Fig. 3.6. Computation without taking into account the effect of damage accumulation for $n = 7$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the elastic zone

сделать заключение, что независимо от формы трещины на расстоянии, характерном протяжению зоны ползучести, строятся асимптотики Хатчинсона — Райса — Розенгрена.

Большой интерес вызывает вопрос, возможно ли получить асимптотическое поведение в зонах ползучести и упругости при введении в определяющие соотношения поведения материала эффекта накопления

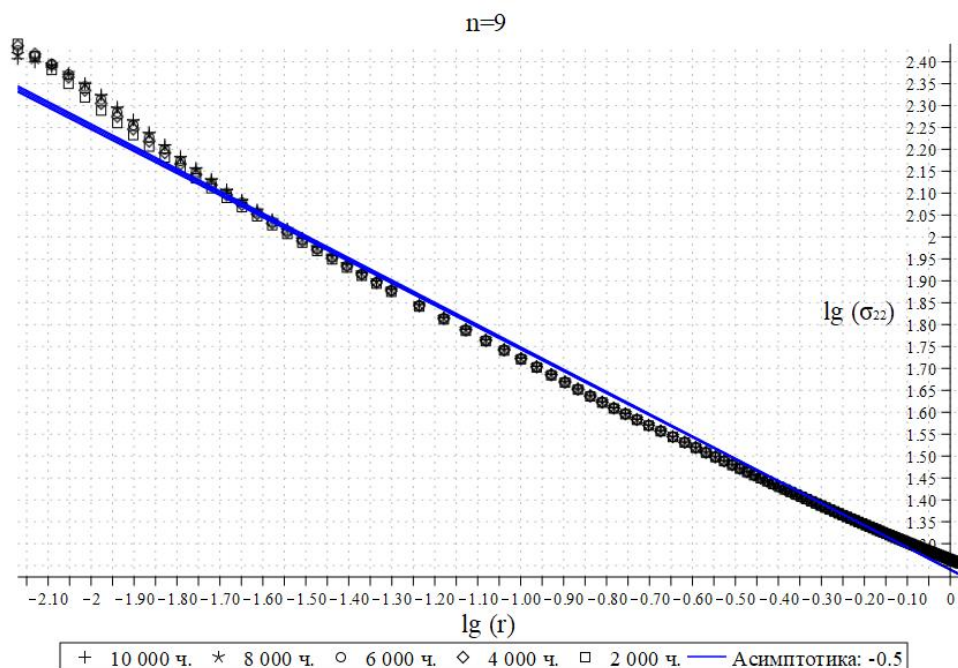


Рис. 3.7. Расчет без учета эффекта накопления повреждений для $n = 9$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне упругости
Fig. 3.7. Computation without taking into account the effect of damage accumulation for $n = 9$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the elastic zone

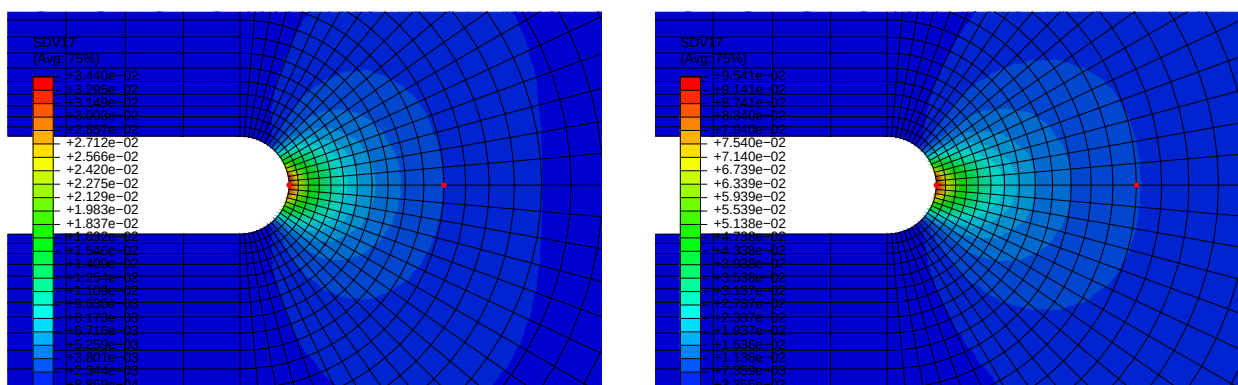


Рис. 3.8. Деформации ползучести. Границы зон ползучести (слева — расчет 500 ч, справа — расчет 10 000 ч)
Fig. 3.8. Creep strains. Boundaries of creep zones (left — computation for 500 h, right — computation for 10 000 h)

повреждений. Проведя аналогичные вычисления с пользовательской процедурой UMAT с описанными процессами накопления повреждений, построены графики распределения поля напряжений для различных временных точек, которые представлены на рис. 3.10–3.12. Анализируя полученные графики, можно сделать вывод, что в расчетах с учетом эффекта накопления повреждений также присутствуют асимптотики в зоне ползучести. Наклон этих прямых отличается от тех, что получены в расчетах без учета данного процесса. В табл. 3.1 приведено сравнение коэффициентов наклона для двух типов расчета, из которого следует, что процесс накопления повреждений меняет асимптотику напряжений в окрестности вершины трещины.

Поле напряжений в упругой зоне для расчета с учетом повреждений сохраняет асимптотику, обратно пропорциональную корню из расстояния от кончика трещины. Данное асимптотическое поведение изображено на рис. 3.13 для расчета с материальной постоянной $n = 7$.

Рассмотрев поведение полей напряжений у вершины трещины, стоит перейти к анализу введенной величины — сплошности. На рис. 3.9 показаны картины распределения параметра сплошности материала с постоянной $n = 7$ по пути, указанном на рис. 3.1 с течением времени.

Таблица 3.1

Сравнение коэффициентов наклона прямых (асимптотик)

Table 3.1

Comparison of slope coefficients (asymptotic)

Материальная постоянная n	Коэффициент наклона (без учета повреждений)	Коэффициент наклона (с учетом повреждений)
5	от -0.165 до -0.167	от -0.130 до -0.140
7	от -0.123 до -0.126	от -0.114 до -0.118
9	от -0.098 до -0.106	от -0.086 до -0.087

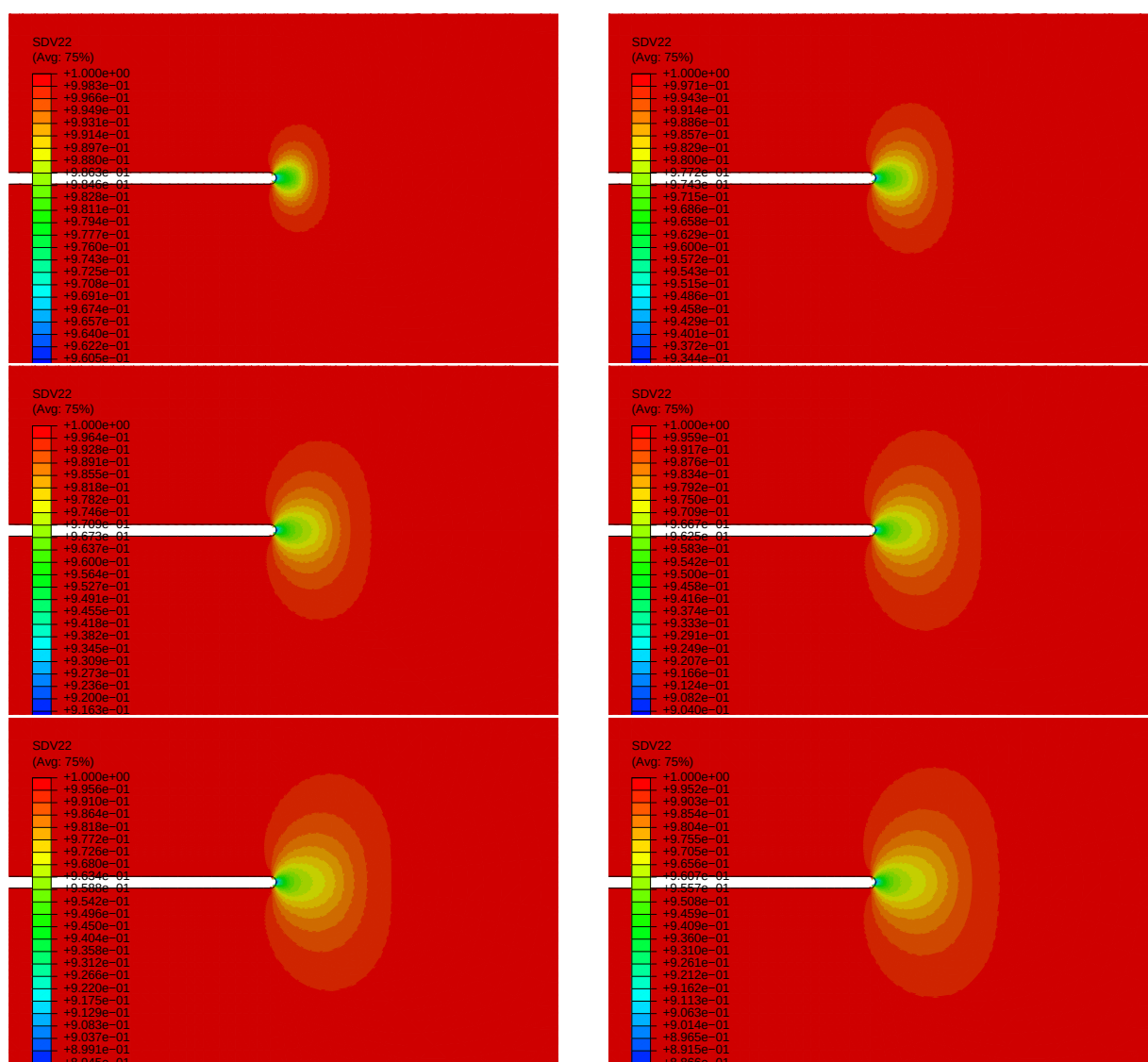


Рис. 3.9. Распределение параметра сплошности с течением времени: 500 ч, 2000 ч, 4000 ч, 6000 ч, 8000 ч, 10000 ч
 Fig. 3.9. Distribution of the continuity parameter over time: 500 h, 2000 h, 4000 h, 6000 h, 8000 h, 10000 h

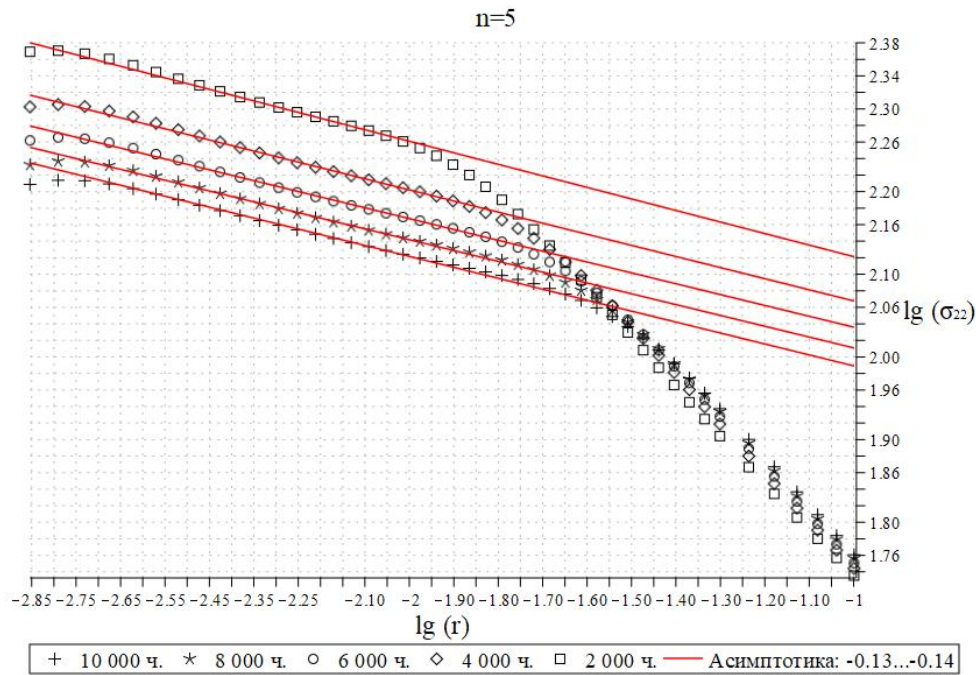


Рис. 3.10. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 5$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне ползучести
Fig. 3.10. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 5$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the creep zone

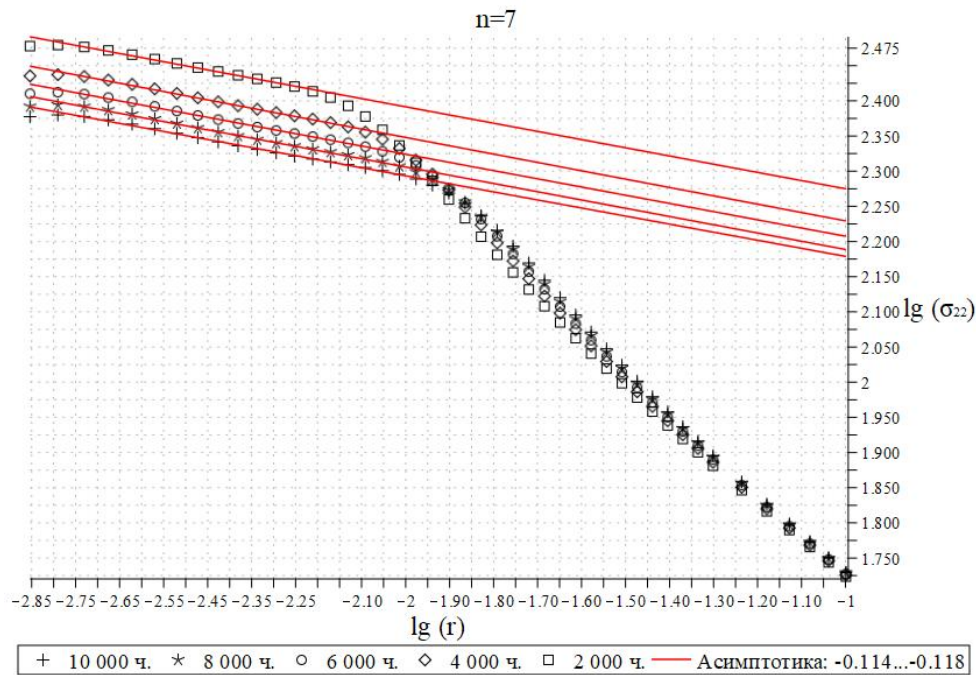


Рис. 3.11. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 7$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне ползучести
Fig. 3.11. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 7$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the creep zone

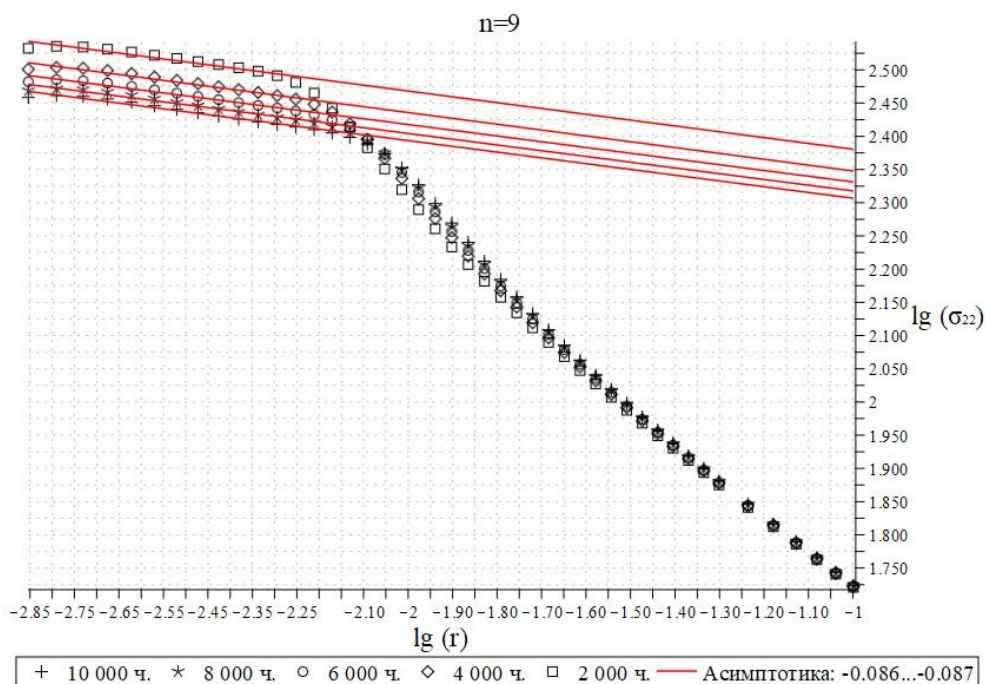


Рис. 3.12. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 9$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне ползучести
 Fig. 3.12. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 9$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the creep zone

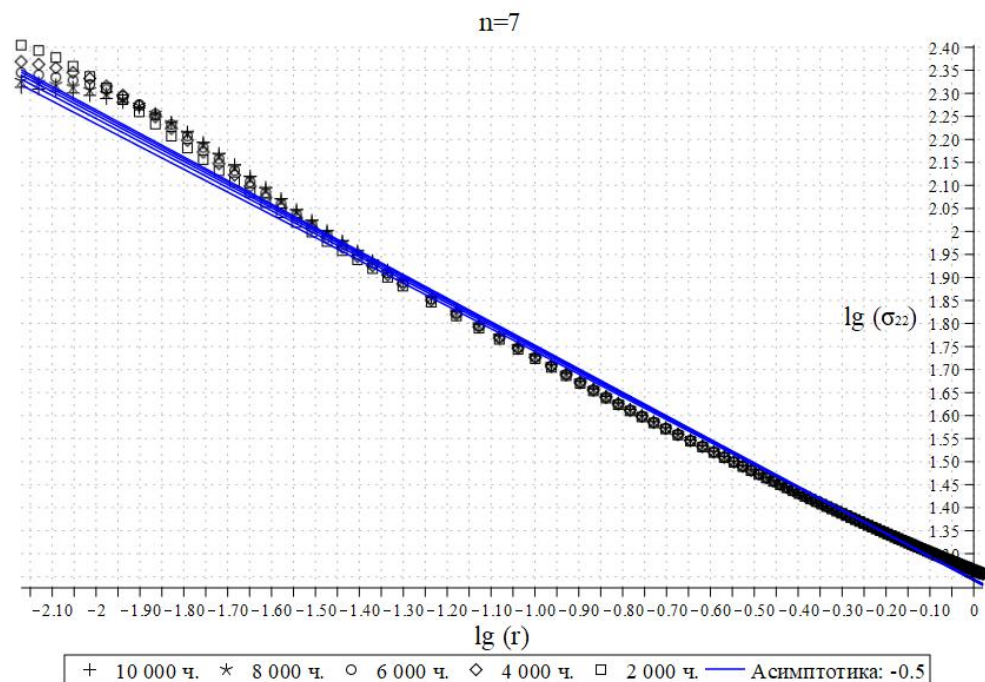


Рис. 3.13. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 7$: распределение компоненты тензора напряжений σ_{22} для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне упругости
 Fig. 3.13. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 7$: distribution of the stress tensor component σ_{22} for selected design points. Asymptotic behavior in the elastic zone

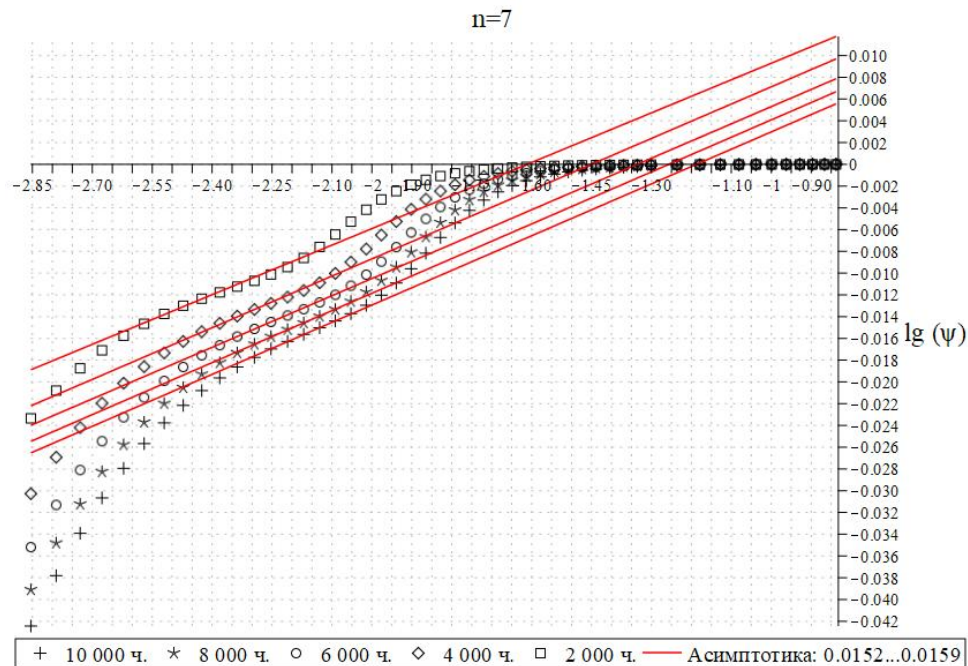


Рис. 3.14. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 7$: распределение сплошности ψ для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне I

Fig. 3.14. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 7$: distribution of continuity ψ for selected design points. Asymptotic behavior in zone I

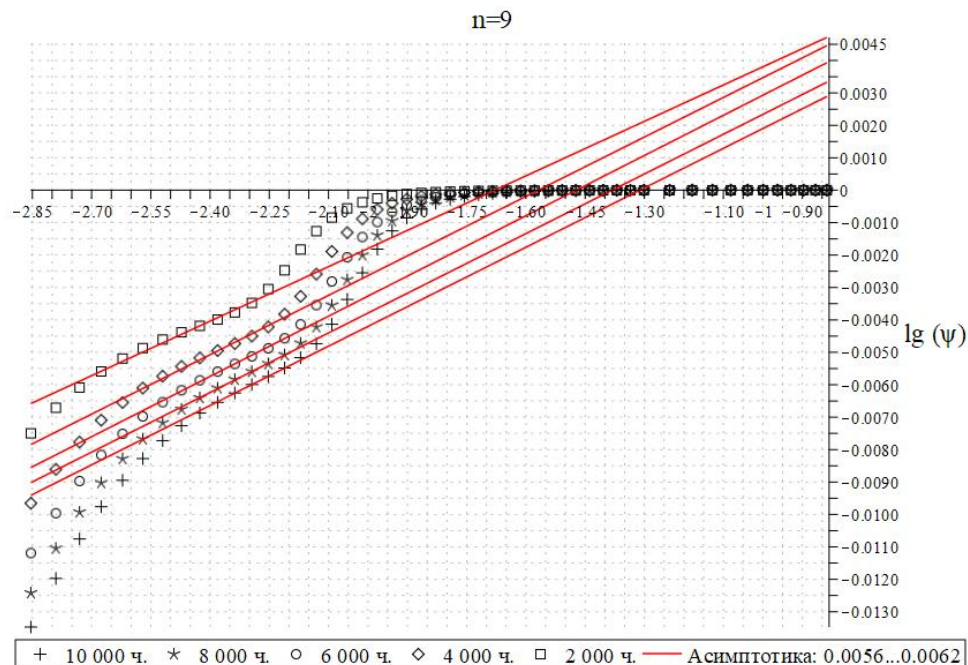


Рис. 3.15. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 9$: распределение сплошности ψ для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне I

Fig. 3.15. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 9$: distribution of continuity ψ for selected design points. Asymptotic behavior in zone I

Для параметра сплошности ψ также построены графики в двойных логарифмических координатах, изображенные на рис. 3.14–3.17, которые построены для двух значений материальной константы $n = 7$ и $n = 9$. Представленные графики показывают наличие асимптотик двух типов: $\psi \sim r^\alpha$ и $(1 - \psi) \sim r^\beta$, где асимптотика вида $\psi \sim r^\alpha$ реализуется в достаточно узкой области (зона I) согласно рис. 3.14, 3.15.

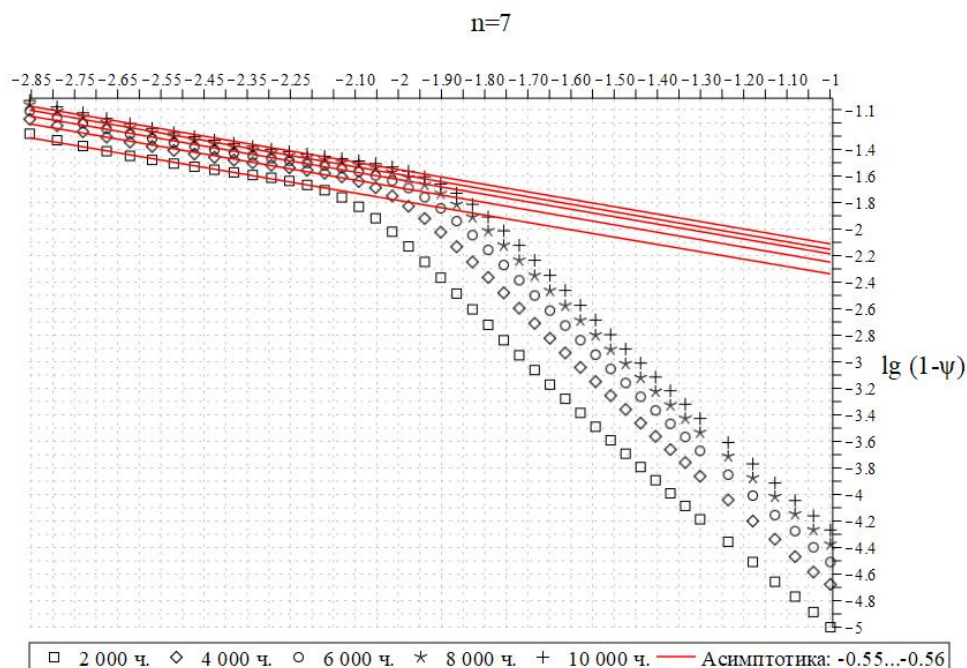


Рис. 3.16. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 7$: распределение сплошности $1 - \psi$ для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне II

Fig. 3.16. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 7$: distribution of continuity $1 - \psi$ for selected design points. Asymptotic behavior in zone II

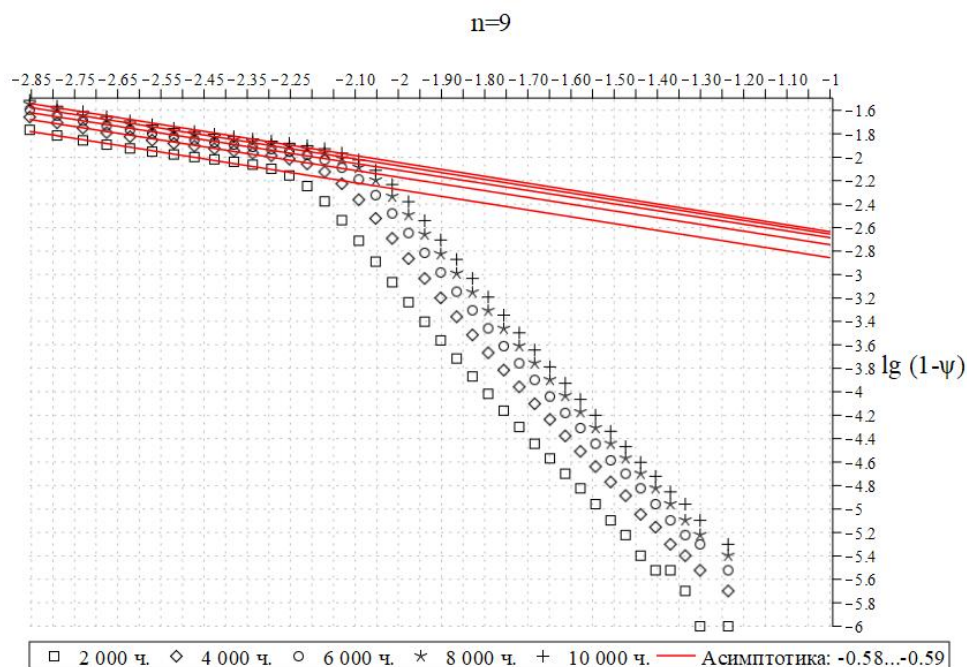


Рис. 3.17. Расчет с учетом эффекта накопления повреждений для $n = 9$: распределение сплошности $1 - \psi$ для выбранных расчетных точек. Асимптотика в зоне II

Fig. 3.17. Computation taking into account the effect of damage accumulation for $n = 9$: distribution of continuity $1 - \psi$ for selected design points. Asymptotic behavior in zone II

Особый интерес вызывают асимптотики вида $(1 - \psi) \sim r^\beta$, которые выстраиваются на тех же расстояниях, что и асимптотики полей напряжений в зоне ползучести (зона II), и требуют дальнейшего изучения.

Заключение

В данной статье представлен конечно-элементный анализ модели пластины с центральным разрезом в 2D-постановке, подверженной одноосному растяжению и работающей в условиях ползучести с учетом процесса накопления повреждений. Определяющие соотношения поведения материала были применены с помощью пользовательской подпрограммы UMAT программного комплекса Simulia Abaqus, которая была верифицирована сравнительными расчетами. Результаты данных расчетов дают возможность оценить поля напряжений у вершины дефекта для разных временных интервалов приложения нагрузки на данный образец и для различных материальных постоянных. В программном пакете системы компьютерной алгебры Maple были построены асимптотики полей напряжений для двух типов расчета: без учета эффекта накопления повреждений в образце и с учетом данного эффекта. Результат показал, что в зонах ползучести и упругости в расчетах без учета эффекта повреждений полученные асимптотики соотносятся с известными аналитическими решениями, в то время как в расчетах с учетом процесса накопления повреждений для зоны ползучести такого не наблюдается, асимптотический характер поведения напряжений сохраняется. Особый интерес представляет дальнейшее изучение параметра сплошности, обладающего асимптотическим поведением. Предложенная процедура может проложить путь к построению аналитического решения краевой задачи и позволить определить структуру асимптотического разложения решения задачи [35; 36].

Авторы выражают благодарность Российскому научному фонду за финансовую поддержку исследования, научный проект № 21-11-00346.

Литература

- [1] ГОСТ 34233.12–2017. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Требования к форме представления расчетов на прочность, выполняемых на ЭВМ. Москва: Стандартинформ, 2019. 8 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293739/4293739661.pdf?ysclid=lp9o2xano8254018623>.
- [2] ГОСТ 25.101–83 Расчеты и испытания на прочность. Методы схематизации случайных процессов нагружения элементов машин и конструкций и статистического представления результатов. Москва: Издательство стандартов, 1984. 21 с. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294829/4294829387.pdf?ysclid=lp9o9dtg3t684965498>.
- [3] Кабаков В.В. Композитные материалы в авиастроении // Наука и бизнес: пути развития. 2019. № 8 (98). С. 10–14. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41472175>. EDN: <https://www.elibrary.ru/jguxfh>.
- [4] Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics. Cham: Springer, 2022. 1386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-60242-0>.
- [5] Murakami S. Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Cham: Springer, 2012. 423 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6>.
- [6] Lemaitre J. How to use damage mechanics // Nuclear Engineering and Design. 1984. Vol. 80, Issue 2. Pp. 233–245. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90169-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90169-9).
- [7] Lemaitre J. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture // Journal of Engineering Materials and Technology. 1985. Vol. 107, Issue 1. Pp. 83–89. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3225775>.
- [8] Извеков О.Я., Кондауров В.И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // Известия РАН. Сер.: Физика Земли. 2009. № 4. С. 31–42. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11770172>. EDN: <https://www.elibrary.ru/jxoszf>.
- [9] Pandey V.B., Singh I.V., Mishra B.K. A new creep-fatigue interaction damage model and CDM-XFEM framework for creep-fatigue crack growth simulations // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2023. Vol. 124. Article number 103740. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103740>.
- [10] Nikbin K. A Unified Multiscale/Multi-axial Constraint-Based Model for Creep Damage and Crack Growth in Engineering Alloys. In: *Comprehensive Structural Integrity (Second Edition)*, 2023, vol. 5, pp. 139–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-822944-6.00006-2>.
- [11] Шляnnиков В.Н., Туманов А.В. Силовая и деформационная модели поврежденности и разрушения при ползучести // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 3. С. 70–85. DOI: <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xrgsgd>.
- [12] Шляnnиков В.Н. Решение задач нелинейного деформирования и разрушения материалов при сложном напряженном состоянии // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15, № 1. С. 57–67. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17428838>. EDN: <https://www.elibrary.ru/orkhbf>.
- [13] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. Creep-fatigue crack growth rate assessment using ductility damage model // International Journal of Fatigue. 2018. Vol. 116. Pp. 448–461. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.07.003>.

- [14] Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 150. Pp. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009>.
- [15] Aliabadi F.M.H., Soboyejo W. Comprehensive Structural Integrity. 2nd edition. London: Elsevier, 2023. 4923 p. Available at: <https://www.sciencedirect.com/referencework/9780323919456/comprehensive-structural-integrity>.
- [16] Altenbach H., Mkhitryan S.M., Hakobyan V., Sahakyan A.V. Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep (Advanced Structured Materials). Cham: Springer, 2023. 395 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9>. EDN: <https://www.elibrary.ru/afeuiz>.
- [17] Степанова Н.Н. Методы исследования материалов и процессов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. 133 с. URL: <https://study.urfu.ru/Aid/Publication/479/1/Stepanova.pdf>.
- [18] Каплун А.Б., Морозов Е.М., Шамраева М.А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. Москва: Едиториал УРСС, 2021. 272 с. URL: <https://djvu.online/file/q08xcXdYit618?ysclid=lpavg1x0va486177241>.
- [19] Напрасников В.В., Бородуля А.В., Ковалева И.Л., Красновская С.В., Кункевич Д.П. Компьютерное конечно-элементное моделирование. Ч. 1. Минск: БНТУ, 2021. 83 с. URL: <https://rep.bntu.by/handle/data/106830>.
- [20] Напрасников В.В., Ковалева И.Л., Полозков Ю.В., Кункевич Д.П. Компьютерное конечноэлементное моделирование. Ч. 2. Минск: БНТУ, 2021. 79 с. URL: <https://rep.bntu.by/handle/data/105804>.
- [21] Чаплий Д.В., Степанова Л.В., Белова О.Н. Воздействие аккумуляции повреждений на асимптотическое поведение напряжений в окрестности вершины трещины // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 47–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-47-63>.
- [22] Росатом. ВНИИЭФ ЛОГОС. // ЛОГОС: [сайт]. URL: <http://logos.vniief.ru/> (дата обращения: 17.09.2023).
- [23] Научно-технический центр АПМ // АПМ: [сайт]. URL: <https://apm.ru/apm-winmachine> (дата обращения: 17.09.2023).
- [24] FIDESYS // FIDESYS: [сайт]. URL: <https://cae-fidesys.com/products> (дата обращения: 25.09.2023).
- [25] USER MATERIAL IN ABAQUS. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEMATRefMap/simamat-c-usermat.htm>.
- [26] Lecture 6. Writing a UMAT or VUMAT. Available at: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.
- [27] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 560 с. URL: <https://djvu.online/file/YUwSFubMbV0Ns?ysclid=lpawdr3abv546374760>.
- [28] Адамов А.А. Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов [и др.]. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с. URL:
- [29] Ройтман В.М. О механизме прогрессирующего обрушения высотного здания ВТЦ-7 во время событий 11 сентября 2001 года в Нью-Йорке // Пожаровзрывбезопасность. 2015. Т. 24, № 10. С. 37–44. DOI: <http://doi.org/10.18322/PVB.2015.24.10.37-44>.
- [30] Центральное объединение сельских строительных организаций (ОАО Центрсельстрой) Крах туннеля Big Dig: Самый дорогой тоннельный проект в истории США Источник / Центральное объединение сельских строительных организаций (ОАО Центрсельстрой) // Строительство и ремонт — Центрсельстрой: [сайт]. URL: <https://centrselstroy.ru/krah-tunnelya-big-dig-samyu-dorogoy-tonnelnyy-proekt-v-istorii-ssha> (дата обращения: 17.09.2023).
- [31] Meng Q., Zhenqing H. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 205. Pp. 547–576. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.055>.
- [32] Шляпников В.Н., Туманов А.В. Силовая и деформационная модели поврежденности и разрушения при ползучести // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 3. С. 70–85. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xrgsgd>.
- [33] Качанов Л.М. Теория ползучести. Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960. 455 с. URL: <https://lib-bkm.ru/13835?ysclid=lpaxqf3bh66275805>.
- [34] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва: Наука, 2014. 752 с. URL: <https://lib-bkm.ru/13795?ysclid=lpay3abcl882354384>.
- [35] Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Смешанное деформирование пластины с трещиной в условиях плоского напряженного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2014. № 3. С. 129–162. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sxdtor>.
- [36] Степанова Л.В., Яковлева Е.М. Асимптотика поля напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения: метод малого параметра // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2015. № 10 (132). С. 77–90. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/vsgu485>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25

Submitted: 11.08.2023

Revised: 24.09.2023

Accepted: 05.12.2023

Y.S. Bykova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7347-8553>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanovaLv2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

INFLUENCE OF THE PROCESS OF DAMAGE ACCUMULATION ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF STRESS FIELDS UNDER CREEP CONDITIONS OF A SAMPLE WITH A CENTRAL CRACK

ABSTRACT

The present study describes the influence of the mutual effect of damage accumulation on the stress fields at the central crack tip in the plate subjected to uniaxial tension. The objective of the study is to analyze the cracked plate experiencing uniaxial loading under creep conditions using the CAE software SIMULIA ABAQUS taking into account the damage accumulation processes near the crack tip. Computations were performed by means of the user procedure UMAT (User material), which is based on the Bailey-Norton creep power law and the Kachanov — Rabotnov damage evolution equation describing the power-law damage accumulation processes. The analysis of the obtained results showed that in the creep and elasticity zones, in computations without taking into account the damage effect, there are asymptotics of stress fields that correspond to well-known analytical solutions of fracture mechanics (Hutchinson — Rice — Rosengren asymptotics for the creep zone, the asymptotics of linear fracture mechanics corresponding to the stress dependence, inversely proportional to the square root of the distance from the tip of the crack — for the zone of elastic behavior of the material. The presence of damage in the cracked specimen affected the asymptotic behavior of the crack tip fields. It is felt that the proposed procedure could pave the way for the analytical solution of the boundary value problem and allow us to determine the structure of the asymptotic solution of the problem. The finite element analysis clearly shows that the process of damage accumulation affects the change in the asymptotic behavior of the stress field in the vicinity of the crack tip and leads to a new asymptotic distribution of the stress tensor components. The proposed procedure can pave the way to an analytical solution of the boundary value problem and allow us to determine the structure of the asymptotic solution of the problem.

Key words: asymptotics, crack, finite-element simulation, stress, damage, creep, user procedure UMAT, Simulia ABAQUS.

Citation. Bykova Y.S., Stepanova L.V. Influence of the process of damage accumulation on the asymptotic behavior of stress fields under creep conditions of a sample with a central crack. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 7–25. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-7-25>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bykova Y.S., Stepanova L.V., 2023

Yulia S. Bykova — assistant lecturer of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] GOST 34233.12–2017. Vessels and apparatus. Norms and methods of strength calculation. Requirements for representation of the strength calculations carried out on the computer. Moscow: Standartinform, 2019, 8 p. Available at: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293739/4293739661.pdf?ysclid=lp9o2xano8254018623>. (In Russ.)

- [2] GOST 25.101–83. Strength calculation and testing. Representation of random loading of machine elements and structures and statistical evaluation of results. Moscow: Izdatel'stvo standartov, 1984, 21 p. Available at: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294829/4294829387.pdf?ysclid=lp9o9dtg3t684965498>. (In Russ.)
- [3] Kabakov V.V. Composite materials in the aircraft industry. *Science and Business: Ways of Development*, 2019, no. 8 (98), pp. 10–14. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41472175>. EDN: <https://www.elibrary.ru/jguxfh>. (In Russ.)
- [4] Voyiadjis G.Z. Handbook of Damage Mechanics. Cham: Springer, 2022, 1386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-60242-0>
- [5] Murakami S. Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Cham: Springer, 2012, 423 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6>.
- [6] Lemaitre J. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 1984, vol. 80, issue 2, pp. 233–245. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90169-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90169-9).
- [7] Lemaitre J. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1985, vol. 107, issue 1, pp. 83–89. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.3225775>.
- [8] Izvekov O.Ya., Kondaurov V.I. Model of a porous medium with an elastic fractured skeleton. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2009, vol. 45, issue 4, pp. 301–312. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106935130904003X>. EDN: <https://www.elibrary.ru/llrzc>. (In English; original in Russian)
- [9] Pandey V.B., Singh I.V., Mishra B.K. A new creep-fatigue interaction damage model and CDM-XFEM framework for creep-fatigue crack growth simulations. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023, vol. 124, article number 103740. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103740>.
- [10] Nikbin K. A Unified Multiscale/Multiaxial Constraint-Based Model for Creep Damage and Crack Growth in Engineering Alloys. In: *Comprehensive Structural Integrity (Second Edition)*, 2023, vol. 5, pp. 139–157. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-822944-6.00006-2>.
- [11] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep. *Fizicheskaya mezomekhanika = Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 70–85. DOI: <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xrgsgd>. (In Russ.)
- [12] Shlyannikov V.N. Solution of nonlinear strain and fracture problems of materials in complex stress states. *Fizicheskaya mezomekhanika = Physical Mesomechanics*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 57–67. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17428838>. EDN: <https://www.elibrary.ru/orkhbf>. (In Russ.)
- [13] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Boychenko N.V. Creep-fatigue crack growth rate assessment using ductility damage model. *International Journal of Fatigue*, 2018, vol. 116, pp. 448–461. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.07.003>.
- [14] Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 150, pp. 166–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.06.009>.
- [15] Aliabadi F.M.H., Soboyejo W. Comprehensive Structural Integrity. 2nd edition. London: Elsevier, 2023. 4923 p. Available at: <https://www.sciencedirect.com/referencework/9780323919456/comprehensive-structural-integrity>.
- [16] Altenbach H., Mkhitarayan S.M., Hakobyan V., Sahakyan A.V. Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep (Advanced Structured Materials). Cham: Springer, 2023, 395 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9>. EDN: <https://www.elibrary.ru/afeuiz>.
- [17] Stepanova N.N. Methods for studying materials and processes. Yekaterinburg: GOU VPO UGTU–UPI, 2006, 133 p. Available at: <https://study.urfu.ru/Aid/Publication/479/1/Stepanova.pdf>. (In Russ.)
- [18] Kaplun A.B., Morozov E.M., Shamraeva M.A. ANSYS in the hands of an engineer: practical guide. Moscow: Editorial URSS, 2021, 272 p. Available at: <https://djvu.online/file/q08xcXdYit618?ysclid=lpavglx0va486177241>. (In Russ.)
- [19] Naprasnikov V.V., Borodula A.V., Kovaleva I.V., Krasnovskaya S.V., Kunkevich D.P. Computer finite element modelling. Part 1. Minsk: BNTU, 2021, 83 p. Available at: <https://rep.bntu.by/handle/data/106830>. (In Russ.)
- [20] Naprasnikov V.V., Kovaleva I.V., Polozkov Yu.V., Kunkevich D.P. Computer finite element modelling. Part 2. Minsk: BNTU, 2021, 79 p. Available at: <https://rep.bntu.by/handle/data/105804>. (In Russ.)
- [21] Chapliy D.V., Stepanova L.V., Belova O.N. Effect of damage accumulation on the asymptotic behavior of stresses ahead the crack tip. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 47–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-47-63>. (In Russ.)
- [22] Rosatom. VNIIEF LOGOS. Retrieved from LOGO website. Available at: <http://logos.vniief.ru/> (accessed 17.09.2023) (In Russ.)
- [23] Scientific and Technical Center APM. Retrieved from APM website. Available at: <https://apm.ru/apm-winmachine> (accessed 17.09.2023) (In Russ.)

- [24] FIDESYS. Retrieved from FIDESYS website. Available at: <https://cae-fidesys.com/products> (accessed 25.09.2023) (In Russ.)
- [25] USER MATERIAL IN ABAQUS. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEMATRefMap/simamat-c-usermat.htm>.
- [26] Lecture 6. Writing a UMAT or VUMAT. Available at: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.
- [27] Birger I.A., Mavlyutov R.R. Strength of materials: textbook. Moscow: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1986, 560 p. Available at: <https://djvu.online/file/YUwSFubMbV0Ns?ysclid=lpawdr3abv546374760>. (In Russ.)
- [28] Adamov A.A. Methods of applied viscoelasticity Yekaterinburg: UrO RAN, 2003, 411 p. (In Russ.)
- [29] Roitman V.M. On the mechanism of progressive collapse of the high-rise building WTC-7 during events of 11 September 2001 in New York. *Fire and Explosion Safety*, 2015, vol. 24, no. 10, pp. 37–44. DOI: <http://doi.org/10.18322/PVB.2015.24.10.37-44>. (In Russ.)
- [30] textt Central Association of Rural Construction Organizations (JSC Tsentrtselstroy) Collapse of the Big Dig Tunnel: The most expensive tunnel project in US history Source. Retrieved from the website Construction and Repair — Tsentrtselstroy. Available at: <https://centrselstroy.ru/krah-tunnelya-big-dig-samyy-dorogoy-tonnelnyy-proekt-v-istorii-ssha> (accessed 17.09.2023) (In Russ.)
- [31] Meng Q., Zhenqing H. Creep damage models and their applications for crack growth analysis in pipes: A review. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 205, pp. 547–576. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.09.055>.
- [32] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep. *Fizicheskaya mezomekhanika = Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 70–85. DOI: <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xrgsgd>. (In Russ.)
- [33] Kachanov L.M. Creep theory. Moscow: Gos. izd-vo fiziko-matematicheskoi literatury, 1960, 455 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/13835?ysclid=lpaxqf3bh266275805>. (In Russ.)
- [34] Rabotnov Yu.N. Creep of structural elements. Moscow: Nauka, 2014, 752 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/13795?ysclid=lpay3abcl882354384>. (In Russ.)
- [35] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Mixed-mode loading of the cracked plate under plane stress conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 129–162. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/sxdtor>.
- [36] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotics of the stress field near a crack tip under mixed-mode loading: small parameter method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2015, vol. 10, no. 132, pp. 77–90. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/vsgu485>. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 15.08.2023
после рецензирования: 20.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023**К.Г. Койфман**Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>**ОТСЧЕТНАЯ ФОРМА ТЕЛ С РАСШИРЕННОЙ КИНЕМАТИКОЙ.
ЧАСТЬ I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ¹****АННОТАЦИЯ**

В статье представлены дифференциально-геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций гиперупругих твердых тел. Они основаны на представлении тела в виде гладкого многообразия, на котором синтезируются метрика и неевклидова связность. Полученное геометрическое пространство интерпретируется как глобальная, свободная от напряжений, форма, и относительно него формулируются физический отклик и материальные уравнения баланса. В рамках геометрического подхода деформации моделируются в виде вложений неевклидовой формы в физическое пространство. Меры несовместности представлены инвариантами аффинной связности — кривизной, кручением и неметричностью, а сама связность определяется типом физического процесса.

Настоящая статья является первой частью исследования. Предлагаемый геометрический подход применяется для тел, отклик которых зависит от первого градиента деформации. Получены условия совместности и предложена их геометрическая интерпретация.

Ключевые слова: гиперупругость; тело с расширенной кинематикой; второй градиент; микроструктура; несовместные деформации; остаточные напряжения; неевклидова геометрия; материальная метрика; материальная связность; кривизна; кручение; неметричность.

Цитирование. Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть I. Геометрические методы // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 26–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Койфман К.Г., 2023

Константин Георгиевич Койфман — тьютор по математике, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, 5.

1. Предварительные сведения

1°. В рамках классической теории гиперупругости (далее — теории простого материала) предполагается, что механический отклик тела определяется упругим потенциалом $\widehat{W}_1$, который является действительной функцией двух аргументов [1]:

$$W = \widehat{W}_1(X, \mathbf{F}(X)). \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

Здесь $X \in \mathcal{B}$ — точка отсчетной формы $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, т. е. области, представляющей отсчетное положение тела в физическом пространстве $\mathcal{E}$, а $\mathbf{F}$ — градиент деформации, т. е. главная линейная часть отображения $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, характеризующего изменение отсчетной формы. В настоящей статье, наряду с зависимостью (1.1), используется ее расширенный вариант [2; 3]:

$$W = \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}(X), D_X \mathbf{F}), \quad \text{или} \quad W = \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}(X), \mathbf{M}, D_X \mathbf{M}), \quad (1.2)$$

где $D\mathbf{F}$ есть второй градиент отображения γ , а $\mathbf{M}$ — некоторый тензор второго ранга, независимый от γ . Последние два случая объединены под общим названием: гиперупругие тела с расширенной кинематикой.

Рассуждения, предполагающие расширенную кинематику, можно встретить в работах Пиола [4; 5], а также в более поздних работах Фойгта [6], Дюгема [7] и братьев Коссера [8]. Вместе с тем основной интерес к средам с расширенной кинематикой возник в начале второй половины XX века, когда Эриксоном было показано, что напряженное состояние в жидких кристаллах определяется несимметричным тензором [9]. Значительный прогресс был достигнут в серии работ Трусделла и Эриксона [10], Тупина [2; 11], а также Миндлина [12; 13]. В частности, авторами этих работ была установлена взаимосвязь между различными подходами к описанию расширенной кинематики и сформулирован общий вид определяющих соотношений.

Развитие теории определяющих соотношений и уточнение понятий жидкости и изотропного твердого тела для сред второго градиента было предложено Кроссом в работе [14]. В частности, Кросс продемонстрировал удобство и элегантность формализма теории 2-струй на многообразиях, позволившего ему получить инвариантные соотношения для групп изотропии, обобщающие соотношения теории Нолла для сред первого градиента [15; 16].

В начале 80-х годов XX века Айфантис предложил альтернативный подход к описанию расширенной кинематики, когда определяющее соотношение для теории первого градиента дополнялось слагаемым, содержащим второй градиент и характеристическую константу [17; 18]. Так, в рамках линейного приближения закон Гука модифицировался посредством добавления слагаемого, содержащего лапласиан по пространственным переменным [19]. Благодаря этому удалось осуществить сглаживание решений классических задач теории упругости в точках разрыва. Например, в работе [20] построено решение задачи Фламана — Буссинеска на основе предложенного Айфантисом подхода и показано, что это решение непрерывно и ограничено в точках приложения нагрузок. В работах [19; 20] установлено, что предложенным методом можно устранить сингулярность тензора деформаций в вершине трещины.

Гуткин и Айфантис на основе градиентной модели Айфантиса [20] построили решение задачи о напряженно-деформированном состоянии среды с краевой дислокацией [21], винтовой дислокацией [22] и показали, что в рамках используемых моделей удается добиться непрерывности тензора деформаций в ядре дислокации. Добавив в модель Айфантиса слагаемое, содержащее лапласиан напряжений, авторы работы [23] построили решения задач для сред с дислокациями и дисклинациями и показали, что не только тензор деформаций непрерывен в ядре дислокации, но и то же самое справедливо и для тензора напряжений.

В настоящее время теория тел с расширенной кинематикой продолжает развиваться. Рассматриваются связанные модели термоупругости [3] и электроупругости [24; 25], изучается напряженно-деформированное состояние тел с включениями [26–28], развивается теория определяющих соотношений [29] и исследуются уравнения равновесия [30]. Представленная статья также рассчитывает внести свой вклад в это направление. Ее цель — геометрическое моделирование несовместных деформаций в средах с расширенной кинематикой.

2°. Несовместные деформации. Теория несовместных деформаций для случая простого материала достаточно развита и представлена в многочисленных статьях [16; 31–34] и монографиях² [35–37]. Основной особенностью тела с несовместными деформациями является невозможность целиком достичь состояния, совпадающего с тем, которое было достигнуто малым тестовым образцом из того же материала (такое состояние далее называется натуральным). Геометрическая идея, лежащая в основе моделирования несовместных деформаций, заключается в отказе от требования, согласно которому все формы тела должны быть областями евклидова физического пространства: форму, в которой все тело находится в натуральном состоянии, предлагается искать в пространстве общей аффинной связности.

Для реализации этой идеи условия совместности локальных деформаций интерпретируются в терминах инвариантов подходящей аффинной связности [38]. Если через $\mathbf{H}$ обозначить тензорное поле второго ранга, представляющее локальные разгрузочные деформации из некоторой промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ в натуральное состояние, то условие, согласно которому оно будет градиентом некоторого отобра-

²Детальное изложение аспектов геометрической теории приведено в разд 3.

ражения $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{E}$, — условие совместности, — имеет вид: $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Геометрически последнее равенство может быть записано в терминах кручения связности Вайценбока [34] как $\mathfrak{T} = 0$. Альтернативно определяя специальным способом метрический тензор $\mathbf{G}$ по полю $\mathbf{H}$ [34], условие совместности, выражающее евклидовость геометрии, порождаемой этим тензором, можно выразить в терминах равенства нулю кривизны связности Леви-Чивита: $\mathfrak{R} = 0$. Таким образом, поля кручения и кривизны являются мерами несовместности локальных деформаций. Отличие их от нуля означает несовместность деформаций, а соответствующие пространства аффинной связности вмещают натуральную форму.

Применение геометрических моделей несовместных деформаций весьма разнообразно. Впервые они были использованы в континуальной теории дефектов [32; 33; 38–41]. В последующем геометрическое моделирование было применено в рамках теории объемного роста [42], теории поверхностного роста [43–49], а также при математическом моделировании аддитивных процессов [50–54]. Соединение положений теории относительности и теории роста привело к исследованиям по аккреции массивных тел [55–57]. Отметим, что, несмотря на единство подходов к описанию непрерывно распределенных дефектов и поверхностного роста, где последний можно интерпретировать как непрерывный процесс записи дефектов [58], имеются и отличия между ними. В рамках континуальной теории дефектов локальные деформации предполагаются известными из эксперимента. Все, что нужно сделать, — определить меры несовместности. Однако в рамках процесса роста локальные деформации являются неизвестными полями, требующими решения дополнительной эволюционной задачи для их определения. Примеры таких задач рассмотрены в [46; 47; 59–61].

Вместе с тем существует сравнительно мало работ, посвященных проблематике моделирования несовместных деформаций для сред с расширенной кинематикой. Можно объяснить это необходимостью использовать более сложный математический формализм 2-струй и главных расслоений, нежели тот, что используется в рамках сред первого градиента. По-видимому, первым систематическим изложением теории структурно неоднородных тел с расширенной кинематикой можно считать работу Моргана [62], являющуюся непосредственным обобщением работы Вана [16] для сред первого градиента. Последующие работы написаны в основном Эпштейном, Эльжановски, де Леоном и их соавторами. В частности, работы [63–65] посвящены моделированию несовместных деформаций в телах второго градиента (первый потенциал в (1.2)), а работы [66; 67] — моделированию несовместных деформаций в телах с микроструктурой (второй потенциал в (1.2)). Настоящая работа использует иной подход, позволяющий получить уравнения совместности и неевклидову отсчетную форму. Однако для дальнейшего описания расширенной кинематики все равно нужно привлекать более тонкие рассуждения, основанные на формализме 2-струй (случай второго градиента) либо на формализме главных расслоений (случай микроструктуры).

3°. Структуры и их синтезирование. Работа использует формализм структур и отображений между ними. Каждая структура характеризуется упорядоченным набором

$$\mathcal{X} = (X, S_1, S_2, \dots, S_k), \quad (1.3)$$

состоящим из множества X — носителя структуры, а также классов и полей $S_1, \dots, S_k$, определяющих конкретный вид структуры над X . Как правило, объекту S_1 соответствует топология над X , а объекту S_2 — гладкая структура над X . Остальные элементы структуры являются геометрическими полями, как-то: метрикой, связностью и формой объема.

Исходная структура (1.3) определяет последовательность вложенных структур

$$X = \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \dots \subset \mathcal{X}_k = \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}_i = (X, S_1, S_2, \dots, S_i)$. Будем говорить, что структура $\mathcal{X}_i$ получена из $\mathcal{X}$ стиранием элементов $S_{i+1}, \dots, S_k$, а $\mathcal{X}$, в свою очередь, синтезированием по $\mathcal{X}_i$ и $S_{i+1}, \dots, S_k$. В работе в основном используется стирание до структуры $\mathcal{X}_2$, которая при соответствующей интерпретации S_1 и S_2 является гладким многообразием. Операции стирания и синтезирования структур комбинируются, что приводит к различным структурам, определенным над одним и тем же многообразием.

Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — различные структуры одного типа, то можно рассматривать отображения между ними: $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, которые в рамках теории категорий принято называть морфизмами [68]. Если через $\mathcal{F}_i$ обозначить процедуру стирания структур до i -й подструктуры («стирающий функтор»), то отображение f индуцирует отображение $\mathcal{F}_i f : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i$. В рамках работы оно полагается отличным от f .

Используются стандартные соглашения и обозначения для структур, принятые в линейной алгебре и теории гладких многообразий. Их определение и связанная с ними техника представлены в монографиях [69–71]. В частности, символ $\text{Hom}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ обозначает векторное пространство линейных отображений $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$. В свою очередь, символы $\text{End}(\mathcal{V}) = \text{Hom}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ и $\text{Aut}(\mathcal{V})$ отвечают, соответственно, векторному пространству линейных операторов на $\mathcal{V}$ и группе автоморфизмов.

Символ D обозначает оператор полной производной, а символ ∂_i — оператор частной производной по i -й переменной.

Настоящая статья является первой частью исследовательской работы. В ней определяются исходные структуры, излагаются основные геометрические идеи и демонстрируется их реализация на примере простого материала. Вторая часть представлена в [72]. В ней излагается методика синтеза неевклидовой отсчетной формы для тел второго градиента и тел с микроструктурой.

2. Материальное многообразие и его формы

2.1. Формы и деформации

Геометрическая механика континуума рассматривает тело и физическое пространство как два отдельных гладких многообразия, наделенные специфическими геометриями и связанные между собой гладкими вложениями. Композиция этих вложений определяет диффеоморфизм — деформацию тела. Настоящая работа следует этой методологии с одним лишь отличием: геометрические структуры, характеризующие тело, его формы и физическое пространство, определены над одним и тем же множеством. По этой причине для структур, встречающихся в работе, используются детальные обозначения.

4°. Физическое пространство. Исходная структура представлена трехмерным евклидовым точечным пространством [69]

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{V}, \text{vec}, \cdot), \quad (2.1)$$

моделирующим физическое пространство, в котором наблюдается деформирование тела. Первый элемент структуры E является континуальным множеством мест, а второй элемент $\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V)$ — трансляционным векторным пространством над³ $\mathbb{R}$, размерности 3. Третий элемент структуры (2.1) является отображением $\text{vec} : E \times E \rightarrow V$, удовлетворяющим аксиомам Вейля:

а) для любых точек $x, y, z \in E$ выполняется соотношение Шаля

$$\text{vec}(x, y) + \text{vec}(y, z) = \text{vec}(x, z),$$

б) для любой точки $x \in E$ и любого вектора $v \in \mathcal{V}$ существует единственная точка $y \in E$ такая, что $\text{vec}(x, y) = v$.

Значение $v = \text{vec}(x, y)$ интерпретируется как вектор с началом в точке x и концом в точке⁴ y . Наконец, последний элемент структуры $(\cdot)$ определяет скалярное произведение на $\mathcal{V}$.

Задание скалярного произведения тесно связано с выбором некоторого прямоугольного репера $(o, (c_i)_{i=1}^3)$, в котором $o \in E$ — начало отсчета, а $(c_i)_{i=1}^3$ — ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}$. При таком выборе точке o соответствует поле радиус-векторов $p : x \mapsto \text{vec}(o, x)$, а базис $(c_i)_{i=1}^3$ позволяет определить координаты произвольной точки из E , которые полагаются равными координатам радиус-вектора этой точки:

$$\text{если } p(x) = x^i c_i, \text{ то } \text{Coor}(x) := (x^i)_{i=1}^3.$$

Приходим к отображению $\text{Coor} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — декартовой арифметизации, которое каждой точке пространства сопоставляет ее прямоугольные координаты.

Замечание 1. Несмотря на то что в рамках настоящей работы структура (2.1) полагается первичной, в действительности можно встать на более общую точку зрения, согласно которой исходными являются трехмерное векторное пространство

$$\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V),$$

некоторый объект o (образно говоря, «божественное присутствие»), и базис $(c_i)_{i=1}^3$ пространства $\mathcal{V}$. В таком случае первый элемент структуры (2.1) можно определить как образ действия элементов группы трансляции $\text{Trans}(3)$ на объект o , т. е. $E = o \triangleleft \text{Trans}(3)$, а скалярное произведение $(\cdot)$ — из требования ортонормированности базиса $(c_i)_{i=1}^3$.

5°. Сопряженное пространство. Для работы с координатами точек и векторов целесообразно использовать дополнительную структуру, представленную сопряженным векторным пространством $\mathcal{V}^*$, элементы которого — линейные функционалы $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (ковекторы). Свойство рефлексивности сопряженного пространства исходному [70] позволяет определить операцию действия вектора на ковектор, что удобно записывать в виде спаривания

$$\langle \xi, v \rangle = \langle v, \xi \rangle = \xi(v).$$

³В нем V — подлежащее множество, а $+_V : V \times V \rightarrow V$ и $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — операции сложения и умножения на скаляр соответственно.

⁴В работе также используется операция сдвига $(+)$ из точки на вектор, определенная следующим образом: если $v = \text{vec}(x, y)$, то $y = x + v$. В силу аксиомы б) операция сдвига определена однозначно.

При этом базису $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$ отвечает дуальный ковекторный базис $(c^i)_{i=1}^3$ пространства $\mathcal{V}^*$, определяемый совокупностью 9 равенств $\langle c^i, \mathbf{c}_j \rangle = \delta_j^i$, $i, j = 1, 2, 3$, где δ_j^i — символ Кронекера. Использование дуального базиса позволяет извлечь координаты векторов и точек в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \ni \mathbf{v} = v^i \mathbf{c}_i &\mapsto v^i = \langle c^i, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}, \\ E \ni x = o + x^i \mathbf{c}_i &\mapsto x^i = \langle c^i, \mathbf{p}(x) \rangle \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В частности, операцию арифметизации Coog теперь можно задать явно:

$$\text{Coog} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{Coog}(x) = \left(\langle c^i, \mathbf{p}(x) \rangle \right)_{i=1}^3. \quad (2.2)$$

Замечание 2. Использование координат может ввести в искушение считать («по изоморфизму») точки и векторы элементами пространства $\mathbb{R}^3$, а линейные операторы — матрицами 3×3 . Такое представление ошибочно, поскольку ведет к стиранию различий между точками и векторами: нет никакого способа сказать, чем является данный кортеж из трех чисел — совокупностью координат точки или совокупностью координат вектора.

6°. Физическое пространство как многообразие. Хотя структура (2.1) уже позволяет строить классическую механику континуума, для целей работы ее недостаточно, поскольку в рамках исследования предполагается синтезирование неевклидовых пространств, представляющих отсчетную форму. Для формализации последних удобно использовать язык теории гладких многообразий и аффинных связностей. Вместе с тем структуру пространства аффинной связности можно извлечь из структуры (2.1) и декартова репера $(o, (\mathbf{c}_i)_{i=1}^3)$ следующим образом.

Декартова арифметизация (2.2) позволяет определить на множестве E топологию открытых шаров:

$$\mathcal{T}_E = \{O \subset E : \text{множество } \text{Coog}(O) \text{ открыто в } \mathbb{R}^3\}.$$

Кроме того, пара (E, Coog) является картой на множестве E , полностью его покрывающей. Она определяет единственную гладкую структуру $\mathcal{D}_E$, содержащую тривиальный атлас $\{(E, \text{Coog})\}$.

Используя введенные топологию и гладкую структуру, приходим к структуре пространства аффинной связности

$$\mathcal{E}_{\text{geom}} = (E, \mathcal{T}_E, \mathcal{D}_E, \mathbf{g}, \epsilon, \nabla) \quad (2.3)$$

над множеством E , производной по отношению к исходной структуре (2.1). Здесь $\mathbf{g}$ — метрика, определенная по базису $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$ в соответствии с теоремой Пифагора:

$$\mathbf{g} = \delta_{ij} c^i \otimes c^j. \quad (2.4)$$

В таком случае скалярное произведение $(\cdot)$ — элемент структуры (2.1) — связано с метрикой $\mathbf{g}$ равенством $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Пятый элемент структуры (2.3) — элемент объема ϵ [69], определенный равенством $\epsilon = c^1 \wedge c^2 \wedge c^3$, где $\wedge$ обозначает внешнее произведение⁵ [70]. Элементы площади, согласованные с исходным элементом объема, определяются равенствами

$$s_1 = c^2 \wedge c^3, \quad s_2 = c^3 \wedge c^1, \quad s_3 = c^1 \wedge c^2.$$

Последний элемент структуры (2.3) — аффинная связность ∇ , действующая на векторные поля $\mathbf{u}, \mathbf{v} : E \rightarrow \mathcal{V}$ согласованно с евклидовой метрикой (2.4):

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} := D\mathbf{v}[\mathbf{u}] = u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \mathbf{c}_j.$$

Здесь $D\mathbf{v} : E \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ — полная производная векторного поля $\mathbf{v}$, т. е. для точки $x \in E$ и вектора $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ выполняется равенство $\mathbf{v}(x + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(x) + D_x \mathbf{v}[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|)$. Покомпонентно $D_x \mathbf{v} = \left. \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right|_x \mathbf{c}_i \otimes c^j$, где $\left. \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right|_x := D_x v^i[c_j]$.

7°. Формы. Материальный континуум наблюдается в физическом пространстве в виде форм $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, которые в рамках классической механики полагаются открытыми множествами с регулярной по Келлогу границей [1; 73]. В настоящем исследовании удобно использовать более детальное описание для форм в виде структур, подобных (2.3):

$$\mathcal{S} = (S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S, \mathbf{g}|_S, \epsilon|_S, \nabla|_S). \quad (2.5)$$

⁵Для двух ковекторов $\xi, \eta \in \mathcal{V}^*$ их внешнее произведение $\xi \wedge \eta$ определяется как

$$\xi \wedge \eta = \xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi.$$

Здесь $S \subset E$ — непустое открытое множество, являющееся носителем формы, а символ вертикальной черты с нижним индексом S обозначает сужение элемента исходной структуры (2.3) на S .

Элемент $\mathcal{T}_E|_S$ структуры (2.5) обозначает топологию на S , полученную сужением исходной евклидовой топологии $\mathcal{T}_E$. Топология $\mathcal{T}_E|_S$ состоит из открытых подмножеств E , лежащих в S , т. е.

$$\mathcal{T}_E|_S = \{O \subset S : O \in \mathcal{T}_E\}.$$

Третий элемент структуры $\mathcal{D}_E|_S$ является гладкой структурой на S , полученной сужением исходной гладкой структуры $\mathcal{D}_E$ на S . Это гладкая структура, порожденная атласом, состоящим из одной карты $(S, \text{Coor}|_S)$. Таким образом, тройка $\mathfrak{S} = (S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S)$ является многообразием размерности 3.

Последние три элемента структуры (2.5) обозначают, соответственно, метрику, элемент объема и связность, индуцированные метрикой, элементом объема и связностью объемлющего пространства $\mathcal{E}_{\text{geom}}$ на S . Эти поля можно рассматривать как теоретико-множественные сужения полей, заданных на объемлющем пространстве⁶.

Поскольку структура (2.5) весьма тривиальна, в классических руководствах по механике континуума она детально не определяется. Вместе с тем такое детальное определение необходимо, если в дальнейшем предполагается модификация части этой структуры. Именно по этой причине мы сочли уместным привести полный список элементов, составляющих форму $\mathcal{S}$ как структуру.

8°. Деформации. Для идентификации точек, составляющих тело, одна из форм $\mathcal{B}$ фиксируется и объявляется отсчетной. В явном виде отсчетная форма представлена в виде структуры, подобной (2.5):

$$\mathcal{B} = (\mathfrak{B}, g|_{\mathfrak{B}}, \epsilon|_{\mathfrak{B}}, \nabla|_{\mathfrak{B}}), \quad (2.6)$$

где $\mathfrak{B}$ — подлежащее многообразие, которое назовем материальным многообразием. Его элементы — материальные точки — обозначаются заглавными фактурными символами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ и т. д.

Введение отсчетной формы (2.6) сопровождается установлением связей между ней и частью форм в физическом пространстве $\mathcal{E}$. Каждая такая связь моделируется посредством отображения

$$\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}, \quad x = \chi(\mathfrak{X}), \quad (2.7)$$

которое в соответствии с терминологией, принятой в механике континуума [1; 74], назовем деформацией. Предположим справедливой аксиому непрерывности [75]: 1) отображение χ является обратимым и 2) отображение χ и обратное к нему χ^{-1} непрерывно дифференцируемы необходимое число раз. Иными словами, отображение χ является диффеоморфизмом между гладкими многообразиями $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим теперь произвольные формы $\mathcal{S}_R, \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, связанные с отсчетной формой $\mathcal{B}$ деформациями $\chi_R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}_R$ и $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Здесь форма $\mathcal{S}_R$, называемая далее промежуточной, также представлена в виде структуры

$$\mathcal{S}_R = (\mathfrak{S}_R, g|_{\mathfrak{S}_R}, \epsilon|_{\mathfrak{S}_R}, \nabla|_{\mathfrak{S}_R}), \quad (2.8)$$

в которой $\mathfrak{S}_R$ — подлежащее многообразие. Переход тела от промежуточной формы (2.8) к актуальной форме (2.5) определяется композицией

$$\gamma := \chi \circ \chi_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}, \quad x = \gamma(X), \quad (2.9)$$

которая также характеризует изменение формы и потому для нее по-прежнему используется термин «деформация». Отметим, что в силу связей, установленных между формами, предполагается, что произвольной можно выбрать любую из пар (χ_R, χ) , (χ_R, γ) и (χ, γ) . Третий элемент, соответственно γ , χ и χ_R , определяется из композиции (2.9).

Таким образом, в рамках рассуждений, проведенных выше, деформации из отсчетной формы и деформации из промежуточной формы не вполне равноправны, поскольку первые используются для идентификации форм, а вторые характеризуют изменение формы. Однако, если раз и навсегда связи между отсчетной формой и остальными формами установлены, то отсчетную форму можно поменять на любую из этих форм с сохранением связей. Именно по этой причине отображения (2.7) и (2.9) не различаются терминологически.

Замечание 3. В настоящей работе используется три вида форм: фиксированная отсчетная форма (2.6), промежуточная форма (2.8) и актуальная форма (2.5). Отсчетная форма служит пространством меток, с помощью которого идентифицируется деформация континуума, а актуальная форма — та, которую занимает тело в текущий момент. Несмотря на то что в рамках классической механики континуума нет необходимости явно выделять промежуточную форму, в работе она используется как вспомогательная форма для синтеза неевклидовой геометрии частного вида.

⁶Такое рассмотрение допустимо в силу канонического изоморфизма [71] $T_x \mathfrak{S} \cong_{\text{vec}} \mathcal{V}$ между касательным пространством к $\mathfrak{S}$ и трансляционным векторным пространством $\mathcal{V}$.

Деформацию можно задать для любой пары топологически эквивалентных форм $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Более того, возможен случай, когда деформация между рассматриваемыми формами определена не единственным образом. В этой связи целесообразно говорить о множестве всех деформаций из $\mathcal{S}_1$ в $\mathcal{S}_2$, для обозначения которого в работе используется символ $\text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$. В частности, соотношение $\text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) = \emptyset$ означает, что $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ не являются формами одного тела.

9°. Координатные представления. В работе, наряду с прямой тензорной записью, интенсивно используется метод координат, что позволяет привлекать аналитические рассуждения на основе классического анализа. Остановимся подробнее на тех координатных представлениях деформации, которые будут играть роль в дальнейшем.

В прямоугольных координатах деформацию γ (2.9) можно представить как отображение

$$\tilde{\gamma}_d := \text{Coor} \circ \gamma \circ \text{Coor}^{-1}|_{\text{Coor}(\mathcal{S}_R)} : \text{Coor}(\mathcal{S}_R) \rightarrow \text{Coor}(\mathcal{S}). \quad (2.10)$$

Если через $(X^I)_{I=1}^3$ обозначить значения прямоугольных координат точек промежуточной формы $\mathcal{S}_R$, или, что то же самое, элементы открытого множества $\text{Coor}(\mathcal{S}_R)$, то отображение (2.10) можно записать посредством трех соотношений:

$$x^i = x^i(X^1, X^2, X^3), \quad i = 1, 2, 3,$$

а обратное к нему — в виде соотношений

$$X^I = X^I(x^1, x^2, x^3), \quad I = 1, 2, 3.$$

Наличие пространственных симметрий у форм служит поводом для введения криволинейных координат, которые могут значительно упростить представление деформации. В общем случае с каждой из форм $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$ соотнесем свою систему координат и, таким образом, придем к следующим функциям замены координат:

$$\begin{aligned} \psi_R : O_R \rightarrow \text{Coor}(\mathcal{S}_R), \quad X^I &= X^I(Q^1, Q^2, Q^3), \quad I = 1, 2, 3, \\ \psi : O \rightarrow \text{Coor}(\mathcal{S}), \quad x^i &= x^i(q^1, q^2, q^3), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $O_R, O \subset \mathbb{R}^3$ — открытые множества, элементы которых (упорядоченные тройки) обозначаются соответственно через $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$. Отображения ψ_R и ψ являются обратимыми и подчиняющимися требованиям: якобианы

$$\det \left[\frac{\partial X^I}{\partial Q^J} \right] \quad \text{и} \quad \det \left[\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right] \quad (2.12)$$

отличны от нуля в каждой точке множеств O_R и O соответственно. Хотя в действительности криволинейные координаты могут быть определены на более широких множествах, чем формы $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$, в силу локальности дальнейших рассуждений достаточно рассматривать их лишь в точках форм.

Функции замены координат (2.11) позволяют определить карты $(\mathcal{S}_R, \sigma_R)$ и $(\mathcal{S}, \sigma)$ на отсчетной и актуальной формах. В явном виде координатные отображения σ_R и σ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \psi_R^{-1} \circ \text{Coor}|_{\mathcal{S}_R} : \mathcal{S}_R \rightarrow O_R, \quad Q^I = Q^I(X), \quad I = 1, 2, 3, \\ \sigma &= \psi^{-1} \circ \text{Coor}|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow O, \quad q^i = q^i(x), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В паре карт $(\mathcal{S}_R, \sigma_R)$ и $(\mathcal{S}, \sigma)$ деформация γ имеет представление

$$\tilde{\gamma}_c := \sigma \circ \gamma \circ \sigma_R^{-1} : O_R \rightarrow O. \quad (2.14)$$

В координатной форме отображение (2.14) можно записать посредством соотношений

$$q^i = q^i(Q^1, Q^2, Q^3), \quad i = 1, 2, 3,$$

а обратную биекцию как

$$Q^I = Q^I(q^1, q^2, q^3), \quad I = 1, 2, 3.$$

Связь между отображениями γ и (2.14), а также координатными отображениями (2.13) иллюстрируется на рис. 2.1.

2.2. Неевклидова отсчетная форма

10°. Материальное многообразие. В механике континуума определяющие соотношения, связывающие кинематические поля с физическим откликом тела, получаются для некоторого предварительно подготовленного тестового образца. Состояние, в котором находится этот тестовый образец, назовем натуральным. Примером натурального состояния может служить состояние, свободное от напряжений, однако в работе допускаются и более общие случаи. При этом неявно подразумевается, что части, составляющие тело, физически неотличимы от тестового образца: выбирая любую часть тела, преобразуя ее в

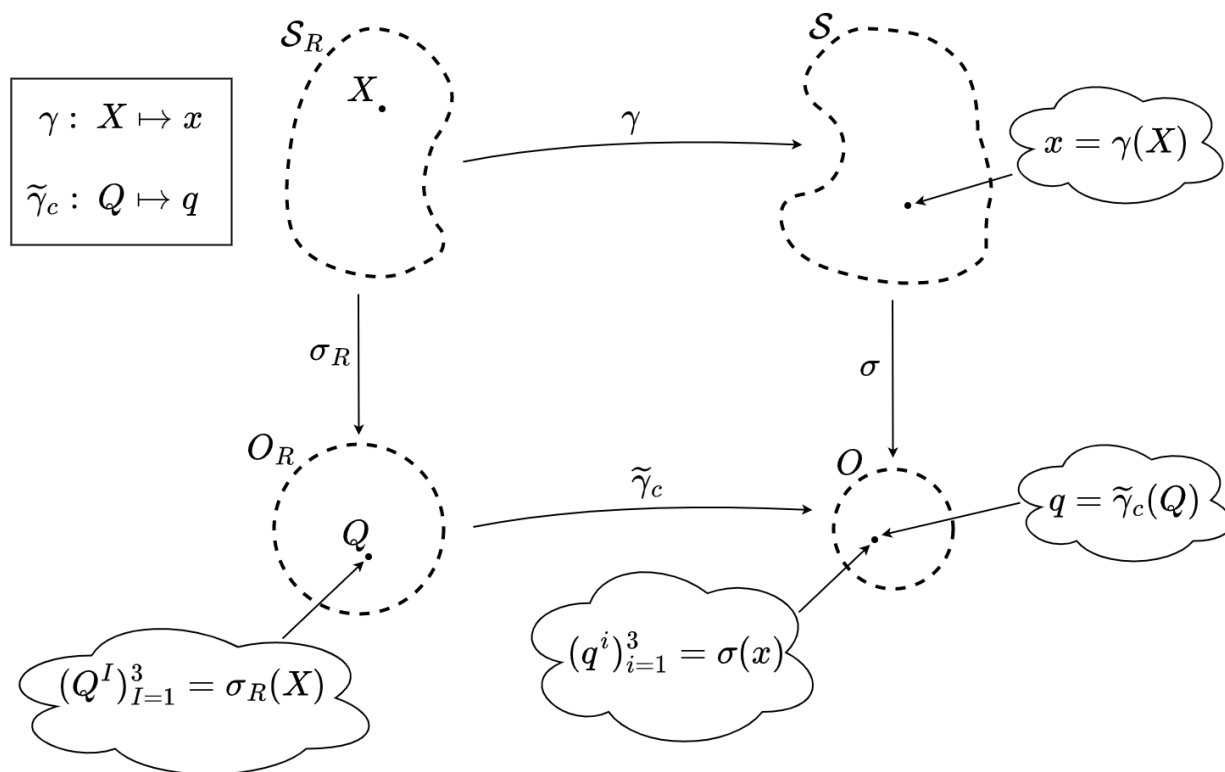


Рис. 2.1. Деформация γ и ее представление $\tilde{\gamma}_c$ в криволинейных координатах

Fig. 2.1. Deformation γ and its representation $\tilde{\gamma}_c$ in curvilinear coordinates

натуральное состояние и подвергая затем разнообразным деформациям, получим то же определяющее соотношение, что и для исходного тестового образца. Следуя Ноллу, назовем такое тело материально единообразным [76].

В рамках классической механики континуума предполагается, что отсчетная форма (2.6) целиком находится в натуральном состоянии, что позволяет применять к ее точкам одно и то же определяющее соотношение. В таком случае деформация является глобальным преобразованием формы, результат которого можно количественно охарактеризовать, подставив частный вид отображения (2.7) в соответствующие аргументы определяющего закона. Однако существуют случаи, когда предположение о глобальности натурального состояния неправомерно [77]. Тело с дефектами или тело, полученное в ходе процесса роста (что тоже можно рассматривать как процесс записи дефектов), могут служить примерами таких случаев.

Вслед за Билби и Кондо [78–80] в настоящей работе предлагается отказаться от требования, согласно которому отсчетная форма должна быть областью физического пространства. Вместо этого отсчетная форма определяется в пространстве с некоторой неевклидовой геометрией. Выбор геометрии осуществляется таким образом, что физические причины отсутствия глобального натурального состояния кодируются инвариантами аффинной связности — кручением, кривизной и неметричностью.

Для реализации намеченной цели — синтеза неевклидовой формы — «сотрем» исходную геометрию с отсчетной формы (2.6), что приведет к материальному многообразию $\mathfrak{B}$, лежащему в ее основании. Следующим шагом на основе специальных рассуждений определим новую геометрию на материальном многообразии. Откладывая детальное изложение методики построения геометрии на $\mathfrak{B}$ до раздела 3 (случай простого материала) и второй части работы ([72]; случаи среды второго градиента и микроструктуры), рассмотрим в общих чертах структуру полученной неевклидовой формы и отображений из нее в актуальные формы.

11°. Геометрия над материальным многообразием. В результате синтеза неевклидовой отсчетной формы материальное многообразие $\mathfrak{B}$ как структура пополняется новыми элементами:

$$\mathcal{S}_R = (\mathfrak{B}, \mathbf{G}, \mu, \nabla). \quad (2.15)$$

Здесь $\mathbf{G}$ — риманова метрика, μ — форма объема, а ∇ — аффинная связность на $\mathfrak{B}$. Структура (2.15) является абстрактным представлением глобальной натуральной формы, а поля $\mathbf{G}$, μ и ∇ зависят от

физической природы отсутствия глобального натурального состояния тела в евклидовом физическом пространстве.

12°. Обобщенные деформации. При переходе от формы (2.6) к материальному многообразию $\mathfrak{B}$ каждая деформация $\chi \in \text{Deform}(\mathfrak{B}; \mathcal{S})$ становится отображением $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Хотя с теоретико-множественной точки зрения отображения χ и $\varkappa$ неотличимы друг от друга как отображения между одними и теми же многообразиями, с геометрической точки зрения это — совершенно разные отображения. Действительно, деформация χ переводит точку одного геометрического пространства в точку другого геометрического пространства, в то время как отображение $\varkappa$ переводит точку многообразия в точку геометрического пространства. Назовем отображение $\varkappa$ конфигурацией [76].

Замечание 4. Как правило, в статьях [16; 32; 76] и монографиях [35; 81] по геометрической механике континуума под конфигурацией понимается вложение $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ материального многообразия в физическое пространство. Определение, принятое в настоящей работе, не противоречит стандартному определению конфигурации, поскольку область прибытия отображения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$ (которая совпадает с множеством значений $\mathcal{S}$) всегда можно расширить до всего физического пространства, не изменяя функционального закона⁷. Обратно область прибытия отображения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ можно сузить до множества значений $\mathcal{S}$ и получить конфигурацию в новом смысле.

Удобство определения конфигурации как отображения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$ заключается в 1) преемственности конфигурации из деформации и 2) возможности непосредственно определить обратное отображение $\varkappa^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{B}$.

Если через $\text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S})$ обозначить множество всех конфигураций из материального многообразия $\mathfrak{B}$ в форму $\mathcal{S}$, то по построению для него справедливы следующие свойства:

- а) каждая конфигурация $\varkappa \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S})$ является инъективным отображением, образ которого $\mathcal{S}$ — форма в $\mathcal{E}$,
- б) композиция двух конфигураций является деформацией, т. е. если $\varkappa_1 \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_1)$ и $\varkappa_2 \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_2)$ — конфигурации, то справедливо включение $\varkappa_2 \circ \varkappa_1^{-1} \in \text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$,
- в) если $\varkappa \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_1)$ — конфигурация, а $\gamma \in \text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ — деформация, то $\gamma \circ \varkappa \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_2)$.

Замечание 5. В отличие от подхода, принятого в настоящем исследовании, Нолл определяет материальное многообразие как отдельную структуру, вложения которой в физическое пространство удовлетворяют аксиомам, подобным свойствам а)–в) [76]. В таком случае удастся предусмотреть возможные топологические особенности материального многообразия, не проверяя их на формах. Вместе с тем тело по-прежнему топологически эквивалентно формам, поэтому подход, используемый в работе, эквивалентен подходу Нолла, отличаясь лишь способом описания.

Переход от материального многообразия к структуре (2.15) неевклидовой отсчетной формы сопровождается переходом от каждой конфигурации $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$ к отображению $\lambda : \mathbb{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$. Последнее характеризует преобразование неевклидовой отсчетной формы в евклидову актуальную форму и потому в настоящей работе предлагается называть его обобщенной деформацией. С точки зрения теории множеств отображение λ совершенно неотлично от исходной деформации χ , однако, при рассмотрении их как отображений между структурами приходим к совершенно различным геометрическим соответствиям. Связь между деформацией χ , конфигурацией $\varkappa$ и обобщенной деформацией λ иллюстрируется на рис. 2.2.

Вертикальные стрелки слева обозначают, соответственно, процессы стирания евклидовой геометрии и синтезирования неевклидовой геометрии. Вместе с тем справа во всех случаях остается одна и та же актуальная форма $\mathcal{S}$. В ходе стирания геометрии деформация χ переходит в конфигурацию $\varkappa$, а в ходе синтезирования геометрии последняя переходит в обобщенную деформацию λ .

⁷Согласно теории множеств, отображение $f : X \rightarrow Y$ определяется как упорядоченная тройка $f = (X, Y, F)$, где $F \subset X \times Y$ — функциональное отношение [82]. Здесь X соответствует области определения отображения, Y — области прибытия отображения, а F — функциональному закону. В рамках такого определения отображение $f = (X, Y, F)$ и отображение $\tilde{f} = (X, f(X), F)$, полученное сужением области прибытия исходного отображения до множества значений $f(X)$, различаются.

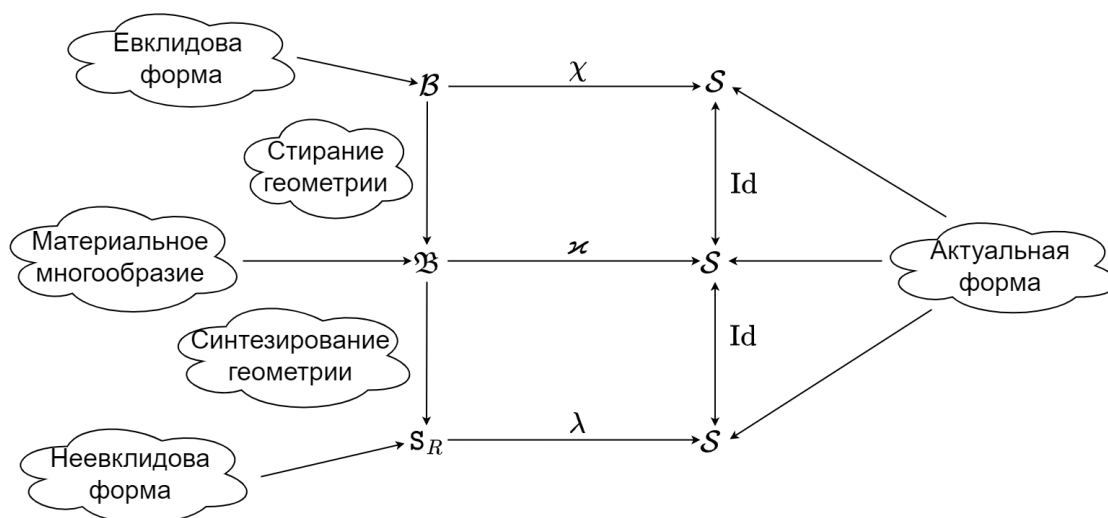


Рис. 2.2. Деформация, конфигурация и обобщенная деформация
Fig. 2.2. Deformation, configuration, and generalized deformation

3. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы для простого материала

3.1. Первый градиент деформации

13°. Метод синтезирования неевклидовой формы. Идея неевклидовой отсчетной формы, изложенная в общих чертах в разд. 2.2, реализована в настоящей статье для простого материала, а в [72] — для сред второго градиента и континуумов с микроструктурой. Несмотря на различное описание кинематики рассмотренных сред, метод синтезирования неевклидовой формы предложен один и тот же: 1) по семейству деформаций определяются кинематические поля — локальные деформации, характеризующие локальный переход в натуральное состояние, 2) для локальных деформаций формулируются условия совместности и 3) условия совместности интерпретируются в дифференциально-геометрических терминах. В рамках полученной интерпретации материальное многообразие наделяется соответствующей аффинной связностью, что завершает синтезирование неевклидовой формы.

14°. Линейное приближение деформации. Несмотря на то что случай простого материала является классическим и разобран в многочисленных работах по геометрической механике континуума [16; 32; 35; 76], он является простейшим примером, на котором можно продемонстрировать основную методику настоящего исследования. Помимо этого способ построения неевклидовой отсчетной формы для тел с расширенной кинематикой использует — наряду со специфическими кинематическими полями, поле локальных деформаций, которое вводится уже для простого материала. В этой связи уместно начать изложение именно с последнего случая.

Предположим, что задана функция

$$\mathcal{S}_R \times \text{End}(\mathcal{V}) \ni (X, \mathbf{F}) \mapsto \widehat{W}_1(X, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

которая с физической точки зрения является упругим потенциалом, определенным относительно формы $\mathcal{S}_R$. Если $\gamma \in \text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S})$ — произвольная деформация, то в соответствии с принципом локализации первого порядка [74] отклик тела в точке $X \in \mathcal{S}_R$ — плотность упругой энергии — определяется соотношением

$$W = \widehat{W}_1(X, \mathbf{F}(X)).$$

Здесь $\mathbf{F}(X) \in \text{End}(\mathcal{V})$, — градиент деформации, т. е. линейное отображение, для которого выполнена формула Тейлора первого порядка:

$$\gamma(X + \mathbf{h}) = \gamma(X) + \mathbf{F}(X)[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ — вектор приращения, удовлетворяющий условию $X + \mathbf{h} \in \mathcal{S}_R$. Из формулы (3.2) вытекает единственность градиента деформации. Действительно, если $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, то

$$\mathbf{F}(X)[\mathbf{v}] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{vec}(\gamma(X), \gamma(X + s\mathbf{v}))}{s},$$

т. е. значение градиента деформации совпадает с производной по направлению. Кроме того, в соответствии с теоремой о производной обратного отображения [83] линейный оператор $\mathbf{F}(X)$ обратим в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ и обратный оператор $\mathbf{F}^{-1}(X)$ является градиентом для обратной деформации γ^{-1} в точке $x = \gamma(X)$. Последнее свойство градиента деформации интенсивно используется в настоящем исследовании.

15°. Представления градиента деформации. Разным координатным представлениям деформации соответствуют различные представления ее градиента. В случае, когда деформация представлена в прямоугольных координатах отображением (2.10), градиент $\mathbf{F}(X)$ имеет диадное разложение

$$\mathbf{F}(X) = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \Big|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I. \quad (3.3)$$

Если с отсчетной формой $\mathcal{S}_R$ ассоциированы криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$, а с актуальной формой связаны криволинейные координаты $(q^i)_{i=1}^3$, так что деформация в паре этих координатных систем имеет представление (2.14), то градиент деформации может быть записан в виде

$$\mathbf{F}(X) = \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^I|_X. \quad (3.4)$$

Здесь $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$ — поле локальных базисов, порожденное координатами $(q^i)_{i=1}^3$, а $(\mathbf{E}^I)_{I=1}^3$ — поле дуальных базисов, отвечающее полю локальных базисов $(\mathbf{E}_I)_{I=1}^3$, соответствующему координатам $(Q^I)_{I=1}^3$.

Замечание 6. Каждая из систем криволинейных координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$ определяет соответствующее представление поля радиус-векторов $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_R &:= \mathbf{p} \circ \sigma_R^{-1} : O_R \rightarrow \mathcal{V}, \quad \tilde{\mathbf{p}}_R(Q^1, Q^2, Q^3) = X^I(Q^1, Q^2, Q^3) \mathbf{c}_I, \\ \tilde{\mathbf{p}} &:= \mathbf{p} \circ \sigma^{-1} : O \rightarrow \mathcal{V}, \quad \tilde{\mathbf{p}}(q^1, q^2, q^3) = x^i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{c}_i, \end{aligned}$$

где $O_R, O \subset \mathbb{R}^3$ — открытые множества, а $\sigma_R : \mathcal{S}_R \rightarrow O_R$ и $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow O$ — координатные отображения (2.13). Полям $\tilde{\mathbf{p}}_R$ и $\tilde{\mathbf{p}}$, согласно свойствам (2.12), отвечают поля локальных базисов $(\mathbf{E}_I)_{I=1}^3$ и $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$, заданные равенствами

$$\mathbf{E}_I = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_R}{\partial Q^I} = \frac{\partial X^J}{\partial Q^I} \mathbf{c}_J \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \mathbf{c}_j.$$

Наконец, поля дуальных базисов $(\mathbf{E}^I)_{I=1}^3$ и $(\mathbf{e}^i)_{i=1}^3$ определяются поточечно на основе соотношений

$$\langle \mathbf{E}^I, \mathbf{E}_J \rangle = \delta_J^I, \quad I, J = 1, 2, 3 \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В явном виде

$$\mathbf{E}^I = \frac{\partial Q^I}{\partial X^J} \mathbf{c}^J \quad \text{и} \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \mathbf{c}^j.$$

Несмотря на то что разложения (3.3) и (3.4) отвечают общему представлению производного отображения и используют, в действительности, лишь аффинно-топологическую структуру объемлющего пространства (2.3), в дальнейших рассуждениях удобно перейти на стандартный формализм евклидовых тензоров, излагаемый в руководствах по механике континуума [1]. Для этого, используя соответствие между векторами и ко векторами по изоморфизму, порожденному метрикой (2.4) [70], заменим в разложениях дуальные ко векторные базисы на дуальные векторные базисы⁸:

$$\mathbf{F}(X) = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \Big|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I = \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^I|_X. \quad (3.5)$$

Здесь $(\mathbf{c}^I)_{I=1}^3$ и $(\mathbf{E}^I)_{I=1}^3$ — дуальные базисы, определенные системами равенств

$$\mathbf{c}^I \cdot \mathbf{c}_J = \delta_J^I \quad \text{и} \quad \mathbf{E}^I \cdot \mathbf{E}_J = \delta_J^I, \quad I, J = 1, 2, 3.$$

Разложения такого вида используются в дальнейшем.

3.2. Семейство форм и условие совместности

16°. Гипотеза локальной разгрузки. Определение натурального состояния является деликатной проблемой и требует уточнения, по меньшей мере, следующих положений: 1) понятие тестового образца, 2) подготовка тестового образца к определенному начальному состоянию, 3) определяющее соотношение для тестового образца и 4) аналитическое описание натурального состояния. Рассмотрение этих

⁸В таком случае тензорное произведение $\otimes$ понимается следующим образом. Для векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ символ $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ обозначает линейный оператор на $\mathcal{V}$, определяемый согласно равенству $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}[\mathbf{w}] = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$.

положений требует привлечения тонких термодинамических рассуждений и потому выходит за рамки настоящей работы. Для того чтобы ограничиться аналитическим описанием в смысле классического анализа, предположим, что *a priori* задан тензор второго ранга $N_1 \in \text{End}(\mathcal{V})$, который ассоциируется с откликом тестового образца в натуральном состоянии.

Для формализации идеи локального перехода к натуральному состоянию в работе предлагается следующая гипотеза локальной разгрузки [84]. Предположим, что задана некоторая промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ вместе с упругим потенциалом (3.1), и предположим, что каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ этой формы соответствует деформация $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$ в некоторую форму $\mathcal{S}^{(X)}$, такая, что

$$\left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(X)}(X)} = N_1, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{F}^{(X)} = D\gamma^{(X)}$ — градиент $\gamma^{(X)}$. Таким образом, приходим к семейству $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций и соответствующему семейству $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ форм.

17°. Синтезирование локальных деформаций. Для каждой деформации $\gamma^{(X)}$ в произвольной точке $Y \in \mathcal{S}_R$ ее градиент $\mathbf{F}^{(X)}(Y) \in \text{End}(\mathcal{V})$ имеет следующие разложения в соответствии с (3.5):

$$\mathbf{F}^{(X)}(Y) = [\widetilde{\mathbf{F}^{(X)}}]_I^i \Big|_Y \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I = [\mathbf{F}^{(X)}]_I^i \Big|_Y \mathbf{e}_i|_{\gamma^{(X)}(Y)} \otimes \mathbf{E}^I|_Y. \quad (3.7)$$

Синтезируем теперь по семейству $\{\mathbf{F}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ градиентов деформации $\mathbf{F}^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ новое поле $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, значение которого в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ определяется равенством

$$\mathbf{H}(X) := \mathbf{F}^{(X)}(Y) \Big|_{Y=X}. \quad (3.8)$$

Тогда разложения (3.7) переходят в разложения

$$\mathbf{H}(X) = \widetilde{H}_I^i \Big|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I = H_I^i \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma^{(X)}(X)} \otimes \mathbf{E}^I|_X, \quad (3.9)$$

где компоненты синтезированы по компонентам исходных тензоров:

$$\widetilde{H}_I^i \Big|_{\text{Coor}(X)} = [\widetilde{\mathbf{F}^{(X)}}]_I^i \Big|_X \quad \text{и} \quad H_I^i \Big|_{\sigma_R(X)} = [\mathbf{F}^{(X)}]_I^i \Big|_X.$$

Назовем тензор (3.8) локальной деформацией в точке X , а поле $\mathbf{H}$, соответственно, полем локальных деформаций. Предположим далее, что это поле является гладким. По построению, в соответствии с равенством (3.6), для значений поля $\mathbf{H}$ выполнено следующее соотношение:

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{H}(X)} = N_1. \quad (3.10)$$

Несмотря на то что второе разложение в (3.9) является наиболее общим, оно обладает следующим недостатком. Поле базисов $X \mapsto (\mathbf{e}_i|_{\gamma^{(X)}(X)})_{i=1}^3$ может не порождаться одной координатной системой, т. е. это поле в общем случае не голономно. Для упрощения дальнейших рассуждений будем в качестве криволинейных координат $(q^i)_{i=1}^3$ выбирать прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$. Тогда придем к разложению

$$\mathbf{H}(X) = H_I^i \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I|_X, \quad (3.11)$$

для локальной деформации и разложению

$$\mathbf{H}(X) = [\overline{\mathbf{H}}]_i^I \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{E}_I|_X \otimes \mathbf{c}^i \quad (3.12)$$

для обратного к ней отображения⁹. Здесь

$$H_J^i [\overline{\mathbf{H}}]_j^J = \delta_j^i \quad \text{и} \quad [\overline{\mathbf{H}}]_i^I H_J^i = \delta_J^I. \quad (3.13)$$

Следуя терминологии, предложенной в монографии [35], назовем тензор $\mathbf{P}(X) := \overline{\mathbf{H}}(X)$ имплантом.

Замечание 7. Столь детальное построение поля $\mathbf{H}$ может показаться излишним. Вместе с тем, если проанализировать тот способ определения $\mathbf{H}$, который принят в континуальной теории дефектов [32; 38; 85], то возникает следующая проблема. В теории дефектов предполагается, что форма $\mathcal{S}_R$ самонапряженного кристалла состоит из инфинитезимальных объемов, соединенных упругими

⁹Отображение существует, поскольку локальная деформация синтезирована по градиенту деформации, а последний обратим в каждой точке формы.

связями. При разрыве этих связей объемы, предоставленные самим себе, переходят в натуральное состояние. Таким образом, натуральное состояние кристалла представлено континуальной совокупностью разгруженных инфинитезимальных объемов, в то время как локальная деформация переводит инфинитезимальный объем, находящийся в составе формы S_R , в тот же объем, но в натуральном состоянии. Но определение инфинитезимального объема и тем более совокупности таких объемов в рамках континуального приближения требует деликатных рассуждений [45]. Именно по этой причине в работе предложен иной подход, использующий лишь определенные выше понятия формы и деформации. В таком случае совокупности инфинитезимальных объемов отвечает континуальная совокупность локально натуральных форм $S^{(X)}$, а поле $\mathbf{H}$ синтезируется по соответствующим деформациям.

18°. Восстановление семейства деформаций. Рассмотрим теперь обратную задачу: предположим, что задано гладкое поле $\mathbf{H} : S_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ обратимых линейных преобразований, имеющее разложение (3.11) и удовлетворяющее свойству (3.10). Восстановим по нему семейство деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$, которое бы его синтезировало.

С этой целью для фиксированной точки $X \in S_R$ определим отображение $\gamma^{(X)} : S_R \rightarrow S^{(X)}$, которое в паре координатных систем $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(x^i)_{i=1}^3$ имеет представление

$$x^i(Q^1, Q^2, Q^3) := b_X^i + H_I^i|_{\sigma_R(X)} Q^I, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.14)$$

где $(b_X^i)_{i=1}^3$ — фиксированная тройка чисел, своя, для каждого выбора X , а $(Q^I)_{I=1}^3$ — криволинейные координаты переменной точки $Y \in S_R$. Тогда из линейности представления (3.14) вытекает гладкость отображения $\gamma^{(X)}$, а из обратимости матрицы $[H_I^i|_{\sigma_R(X)}]$ — его обратимость. Следовательно, $\gamma^{(X)}$ — деформация. Помимо этого

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial Q^I} \right|_{\sigma_R(Y)} = H_I^i|_{\sigma_R(X)},$$

что, в частности, дает $\mathbf{F}^{(X)}(X) = \mathbf{H}(X)$. Это означает, что деформация $\gamma^{(X)}$ является искомой. Воспроизведя проделанную процедуру для всех точек $X \in S_R$, приходим к семейству деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$, синтезирующему $\mathbf{H}$.

Имея в виду полученный результат, каждое гладкое тензорное поле $\mathbf{H} : S_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, удовлетворяющее свойству (3.10), можно рассматривать как поле локальных деформаций. При необходимости семейство деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$ можно восстановить за счет представленной выше процедуры.

19°. Совместность локальных деформаций. Существование глобальной натуральной формы S_0 эквивалентно следующему свойству гладкого тензорного поля обратимых линейных преобразований $\mathbf{H}$, удовлетворяющего соотношению (3.10). Назовем поле $\mathbf{H}$ совместным, если существуют форма S_0 и деформация $\gamma_0 \in \text{Deform}(S_R; S_0)$ такая, что $D\gamma_0 = \mathbf{H}$, т. е. $\mathbf{H}(X)$ совпадает в каждой точке $X \in S_R$ с градиентом деформации $\mathbf{F}_0(X)$. В противном случае назовем поле $\mathbf{H}$ несовместным.

В случае совместности поля $\mathbf{H}$ соотношение (3.10) дает, что

$$\forall X \in S_R : \left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=D_X \gamma_0} = \mathbf{N}_1,$$

и форму S_0 действительно можно интерпретировать как глобальную натуральную. Таким образом, отсутствие у тела глобального натурального состояния эквивалентно несовместности поля локальных деформаций.

В рамках классической теории потенциала [73] для совместности поля $\mathbf{H}$ необходимо (а в случае односвязности S_R и достаточно) выполнение равенства

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

которое, с учетом разложения (3.11), равносильно следующей системе координатных соотношений:

$$\partial_J H_K^i - \partial_K H_J^i = 0, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Здесь и далее символ ∂_I является сокращенным обозначением для оператора частной производной $\frac{\partial}{\partial Q^I}$. Следуя Кренеру [38], возьмем равенства (3.16) в качестве основы для синтеза геометрии на материальном многообразии.

3.3. Геометрическая интерпретация условия совместности

20°. Поле Г. С целью получить геометрическую интерпретацию условия совместности поля локальных деформаций $\mathbf{H}$ представим соотношения (3.16) в эквивалентном виде. Свертка их левой части с

компонентами поля $\overset{-1}{\mathbf{H}}$, определенного равенствами (3.12), приводит к следующей совокупности соотношений:

$$[\overset{-1}{\mathbf{H}}]_i^I \partial_J H_K^i - [\overset{-1}{\mathbf{H}}]_i^I \partial_K H_J^i = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Введем обозначение

$$\Gamma_{JK}^I := [\overset{-1}{\mathbf{H}}]_i^I \partial_J H_K^i, \quad (3.18)$$

тогда формула (3.17) примет компактный вид

$$\Gamma_{JK}^I - \Gamma_{KJ}^I = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

Рассмотрим набор скалярных полей $\Gamma = [\Gamma_{JK}^I]$ более детально.

21°. Свойства поля Γ . Для скалярных полей Γ_{JK}^I , определенных равенствами (3.18), справедливо следующее утверждение:

Предложение 1. Скалярные функции Γ_{JK}^I являются коэффициентами некоторой аффинной связности на многообразии $\mathfrak{S}_R$, над которым определена форма (2.8).

Доказательство предложения 1 предварим следующими вспомогательными рассуждениями. При переходе от формы $\mathcal{S}_R$ к многообразию $\mathfrak{S}_R$ криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$, ассоциированные с этой формой, становятся координатами на этом многообразии, порожденными картой $(\mathcal{S}_R, \sigma_R)$. Обратно любые локальные координаты на многообразии $\mathfrak{S}_R$ можно рассматривать как криволинейные координаты на $\mathcal{E}$ с учетом естественного вложения¹⁰ $\iota_{\mathcal{S}_R}: \mathcal{S}_R \hookrightarrow \mathcal{E}$. Кроме того, используя то же самое вложение, поля, заданные на многообразии $\mathfrak{S}_R$, можно рассматривать как поля на форме $\mathcal{S}_R$, и наоборот поля, заданные на форме $\mathcal{S}_R$, можно рассматривать как поля на многообразии $\mathfrak{S}_R$. Далее подобные переходы между структурами $\mathfrak{S}_R$ и $\mathcal{S}_R$ для координат и полей в работе явно не оговариваются.

Поскольку компоненты поля локальных деформаций $\mathbf{H}$ отнесены к паре координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(x^i)_{i=1}^3$, они подчиняются более сложному закону преобразования, чем компоненты тензора второго ранга. Вместе с тем, предполагая прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$ фиксированными, можно по-прежнему иметь дело со стандартным законом преобразования компонент тензора второго ранга. Действительно, предположим, что заданы локальные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$ на многообразии $\mathfrak{S}_R$, районы действия которых имеют непустое пересечение.

Цепное правило дифференцирования, примененное к компонентам градиента деформации $\mathbf{F}^{(X)}$ в точке $Y \in \mathcal{S}_R$, влечет равенство

$$\widetilde{[\mathbf{F}^{(X)}]_J^i}|_Y = \frac{\partial Q^K}{\partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(Y)} [\mathbf{F}^{(X)}]_K^i|_Y. \quad (3.20)$$

Здесь и в дальнейшем компоненты полей, отвечающие координатам $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$, обозначаются тильдой сверху. В полученном соотношении предполагается, что прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$ фиксированы. Полагая затем в формуле (3.20) $Y = X$, приходим к искомому закону преобразования компонент локальной деформации:

$$\tilde{H}_J^i|_{\tilde{\sigma}_R(X)} = \frac{\partial Q^K}{\partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(X)} H_K^i|_{\sigma_R(X)}. \quad (3.21)$$

Замечание 8. Формула (3.21) позволяет установить эквивалентность соотношений (3.15) и (3.16), не привлекая общее представление ротора в криволинейных координатах. Действительно, в прямоугольных координатах $(X^I)_{I=1}^3$ равенство (3.15) равносильно совокупности равенств $A_{JK}^i = 0$, где

$$A_{JK}^i = \frac{\partial \tilde{H}_K^i}{\partial X^J} - \frac{\partial \tilde{H}_J^i}{\partial X^K},$$

что вытекает из частного представления ротора в прямоугольных координатах [1]. С другой стороны, в силу формулы (3.21), приходим к равенствам

$$\tilde{H}_K^i = H_M^i \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \quad \text{и} \quad \tilde{H}_J^i = H_L^i \frac{\partial Q^L}{\partial X^J},$$

дифференцирование которых дает, соответственно,

$$\frac{\partial \tilde{H}_K^i}{\partial X^J} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^J \partial X^K} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^J} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^J \partial X^K} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \frac{\partial Q^L}{\partial X^J} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^L}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{H}_J^i}{\partial X^K} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^K \partial X^J} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^J} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^K} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^K \partial X^J} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^J} \frac{\partial Q^L}{\partial X^K} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^L}.$$

¹⁰Вложение определено как $X \mapsto X$.

Используя свойство перестановочности повторных производных и заменяя соответствующим образом индексы, приходим к соотношению

$$A_{JK}^i = \frac{\partial Q^L}{\partial X^J} \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \left(\frac{\partial H_M^i}{\partial X^L} - \frac{\partial H_L^i}{\partial X^M} \right).$$

Этим доказана равносильность (3.15) и (3.16).

Доказательство предложения 1. Согласно общей теории аффинных связностей [86], достаточно показать, что поля $\tilde{\Gamma}_{JK}^I$, отвечающие координатам $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$, связаны с полями Γ_{JK}^I , соответствующими координатам $(Q^I)_{I=1}^3$, следующим законом преобразования:

$$\tilde{\Gamma}_{JK}^I = \Gamma_{SM}^L \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} \frac{\partial Q^S}{\partial \tilde{Q}^J} \frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^K} + \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} \frac{\partial^2 Q^L}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^K}. \quad (3.22)$$

Для этого, используя определение (3.18) полей Γ_{JK}^I и закон преобразования (3.21), сделаем следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{JK}^I &= [\tilde{\mathbf{H}}^1]_i^I \partial_J \tilde{H}_K^i = \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\mathbf{H}^1]_i^L \frac{\partial}{\partial \tilde{Q}^J} \left(\frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^K} H_M^i \right) = \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\mathbf{H}^1]_i^L \frac{\partial Q^S}{\partial \tilde{Q}^J} \frac{\partial H_M^i}{\partial Q^S} \frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^K} + \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\mathbf{H}^1]_i^L H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^K}. \end{aligned}$$

Применяя снова определение (3.18), а также вторую из формул (3.13), приходим к формуле (3.22), что завершает доказательство. $\square$

В настоящей работе аффинная связность, соответствующая полям (3.18), обозначается через Γ . Ее основное свойство представлено в следующем утверждении:

Предложение 2. Кривизна связности Γ равна нулю, т. е.

$$\mathfrak{R}(\Gamma) = 0.$$

Доказательство. Компоненты кривизны в координатном репере $(\frac{\partial}{\partial Q^I})_{I=1}^3$ определяются по формуле:

$$\mathfrak{R}_{ABC}^D = \partial_A \Gamma_{BC}^D - \partial_B \Gamma_{AC}^D + \Gamma_{BC}^E \Gamma_{AE}^D - \Gamma_{AC}^E \Gamma_{BE}^D.$$

Достаточно показать, что $\mathfrak{R}_{ABC}^D = 0$. Действительно, согласно определению (3.18) и правилу дифференцирования произведения,

$$\partial_A \Gamma_{BC}^D = \partial_A \left([\mathbf{H}^1]_i^D \partial_B H_C^i \right) = \partial_A [\mathbf{H}^1]_i^D \partial_B H_C^i + [\mathbf{H}^1]_i^D \partial_A \partial_B H_C^i.$$

Аналогичным образом получается выражение

$$\partial_B \Gamma_{AC}^D = \partial_B [\mathbf{H}^1]_i^D \partial_A H_C^i + [\mathbf{H}^1]_i^D \partial_B \partial_A H_C^i.$$

В силу теоремы Шварца о перестановочности повторных производных [83], тогда приходим к равенству

$$\partial_A \Gamma_{BC}^D - \partial_B \Gamma_{AC}^D = \partial_A [\mathbf{H}^1]_i^D \partial_B H_C^i - \partial_B [\mathbf{H}^1]_i^D \partial_A H_C^i. \quad (3.23)$$

Далее, используя снова формулу (3.18), приходим к следующему соотношению:

$$\Gamma_{BC}^E \Gamma_{AE}^D - \Gamma_{AC}^E \Gamma_{BE}^D = [\mathbf{H}^1]_i^E [\mathbf{H}^1]_j^D (\partial_B H_C^i \partial_A H_E^j - \partial_A H_C^i \partial_B H_E^j). \quad (3.24)$$

Получим вспомогательное тождество. Для этого продифференцируем по Q^A второе из тождеств (3.13), предварительно заменив I на D и J на E , а индекс суммирования — на j :

$$H_E^j \partial_A [\mathbf{H}^1]_j^D + [\mathbf{H}^1]_j^D \partial_A H_E^j = 0,$$

что влечет

$$H_E^j \partial_A [\mathbf{H}^1]_j^D = -[\mathbf{H}^1]_j^D \partial_A H_E^j. \quad (3.25)$$

Домножая обе части полученного равенства на $[\mathbf{H}^1]_i^E$ и производя суммирование по E , приходим, в силу первого из равенств (3.13), к соотношению

$$\partial_A [\mathbf{H}^1]_i^D = -[\mathbf{H}^1]_i^E [\mathbf{H}^1]_j^D \partial_A H_E^j.$$

Наконец, домножая обе части последнего равенства на $\partial_B H_C^i$ и суммируя по i , получаем желаемую формулу:

$$\partial_A [\bar{\mathbf{H}}]_i^D \partial_B H_C^i = -[\bar{\mathbf{H}}]_i^E [\bar{\mathbf{H}}]_j^D \partial_B H_C^i \partial_A H_E^j.$$

Используя ее, можно преобразовать равенство (3.23) к виду:

$$\partial_A \Gamma_{BC}^D - \partial_B \Gamma_{AC}^D = -[\bar{\mathbf{H}}]_i^E [\bar{\mathbf{H}}]_j^D (\partial_B H_C^i \partial_A H_E^j - \partial_A H_C^i \partial_B H_E^j).$$

Сравнивая теперь полученное соотношение с (3.24), приходим к желаемому заключению, что $\mathfrak{R}_{ABC}^D = 0$. $\square$

Из предложения 2 вытекает, что в случае, когда многообразие $\mathfrak{S}_R$ односвязно, аффинная связность Γ обладает свойством абсолютного параллелизма [87]: параллельный перенос вектора из одной точки многообразия $\mathfrak{S}_R$ в другую точку того же многообразия не зависит от выбора кривой, соединяющей эти точки.

Замечание 9. Используя формулу (3.25), полученную в доказательстве предложения 2, можно прийти к эквивалентному представлению для полей Γ_{JK}^I :

$$\Gamma_{JK}^I = -[\bar{\mathbf{P}}]_K^i \partial_J P_i^I, \quad (3.26)$$

в котором частные производные компонент поля локальных деформаций заменены на частные производные компонент поля имплантов.

22°. Условие совместности в терминах кручения. Таким образом, если через $\mathfrak{T}(\Gamma)$ обозначить кручение связности Γ [86], то условия совместности (3.19) примут окончательную форму:

$$\mathfrak{T}(\Gamma) = 0, \quad (3.27)$$

поскольку левая часть (3.19) есть не что иное, как представление кручения в координатном репере. Этим показано, что поле локальных деформаций $\mathbf{H}$ совместно в том и только в том случае, когда справедливо равенство (3.27).

Замечание 10. Связность Γ , коэффициенты которой определяются по формуле (3.18), известна в литературе как связность Вайценбока [88, 32] и может быть получена иным способом, с помощью метода подвижного репера. Действительно, определим репер $(z_i)_{i=1}^3$ на многообразии $\mathfrak{S}_R$ в соответствии с равенствами

$$z_i = P_i^I \frac{\partial}{\partial Q^I}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Иными словами, репер $(z_i)_{i=1}^3$ получен действием поля (3.12) на исходный репер $(c_i)_{i=1}^3$. Определим теперь связность Γ на $\mathfrak{S}_R$ так, чтобы элементы нового репера были взаимно параллельны, т. е.

$$\Gamma_{z_i} z_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда, как можно показать (см., например, в [34]), коэффициентами Γ будут поля (3.18).

Несмотря на геометрическую наглядность этого способа построения связности Γ , нужно по-прежнему доказывать, что равенства (3.27) являются условиями совместности локальных деформаций. По этой причине координатный подход, изложенный в основном тексте статьи, представляется более естественным.

3.4. Неевклидова отсчетная форма

23°. Материальная метрика. Поле локальных деформаций $\mathbf{H}$ позволяет наделять многообразие $\mathfrak{S}_R$ метрикой $\mathbf{G} = G_{IJ} dQ^I \otimes dQ^J$ в соответствии с соотношением

$$\mathbf{G}_X(u, v) := \mathbf{H}(X)[u] \cdot \mathbf{H}(X)[v], \quad (3.28)$$

определенным в любой точке $X \in \mathfrak{S}_R$ и для любых векторов $u, v \in T_X \mathfrak{S}_R$. В координатном репере $(\frac{\partial}{\partial Q^I})_{I=1}^3$ компоненты метрики $\mathbf{G}$ имеют вид $G_{IJ} = \delta_{ij} H_i^I H_j^J$.

К метрике (3.28) можно прийти альтернативным путем, используя метод синтеза поля. Действительно, для каждой точки $X \in \mathfrak{S}_R$ определим метрический тензор $\mathbf{G}^{(X)}$ согласно равенству:

$$\mathbf{G}_Y^{(X)}(u, v) := \mathbf{F}^{(X)}(Y)[u] \cdot \mathbf{F}^{(X)}(Y)[v], \quad (3.29)$$

для любой точки $Y \in \mathfrak{S}_R$. Фактически $\mathbf{G}^{(X)}$ является переносом исходной евклидовой метрики (2.4) на многообразие $\mathfrak{S}_R$. Теперь определим поле $\mathbf{G} : X \mapsto \mathbf{G}^{(X)}|_X$, что, в силу (3.29), приводит к соотношению

$$\mathbf{G}_X(u, v) := \mathbf{F}^{(X)}(X)[u] \cdot \mathbf{F}^{(X)}(X)[v]. \quad (3.30)$$

Тогда согласно определению (3.8) локальных деформаций, поле, заданное равенством (3.30), совпадает с полем, значения которого определяются формулой (3.28).

Замечание 11. С физической точки зрения поле локальных деформаций переводит инфинитезимальный объем, окружающий точку $X \in S_R$, в натуральное состояние. По этой причине метрика $\mathbf{G}$, определенная равенством (3.28) или (3.30), возвращает метрические образы элементов длины и угла в натуральном состоянии.

24°. Структура неевклидовой формы. Связность Γ , определенная формулой (3.18), и материальная метрика $\mathbf{G}$, заданная формулой (3.28) или (3.30), а также форма объема $\mu = dV_{\mathbf{G}}$, порожденная материальной метрикой [71], задают на многообразии $\mathfrak{S}_R$ структуру пространства с неевклидовой связностью:

$$S_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, dV_{\mathbf{G}}, \Gamma). \quad (3.31)$$

Полученное пространство является искомым неевклидовой отсчетной формой, синтезированной по семейству форм $\{S^{(X)}\}_{X \in S_R}$. Геометрическая характеристика пространства — тензор кручения $\mathfrak{T}(\Gamma)$ — служит одновременно и мерой несовместности поля локальных деформаций $\mathbf{H}$. Таким образом, в рамках установленного соответствия между несовместными деформациями и геометрией случая совместных деформаций отвечает пространство нулевого кручения, т. е. пространство евклидовой связности $\Gamma = \nabla|_{S_R}$.

Замечание 12. Процедура установления соответствия между несовместными деформациями и геометрией, восходящая к работам Кренера [38], аналогична процедуре, предложенной Картаном для построения неевклидовой геометрии [89–91]. Действительно, Картан вывел уравнения структуры евклидова пространства, представленные соотношениями с нулевой правой частью. Вводя независимые поля — 2-формы кручения и кривизны, Картан заменил нулевые правые части уравнений структуры на эти поля, что привело к пространствам аффинной связности нового типа. Таким образом, в рамках рассуждений Картана формы кручения и кривизны являются мерами отклонения полученной геометрии от евклидовой.

С другой стороны, условие совместности локальных деформаций имеет вид (3.27) и геометрически характеризует евклидову связность. Определяя антисимметричное тензорное поле $\mathfrak{T}_0 \neq 0$, заменим условие совместности на более общее равенство:

$$\mathfrak{T}(\Gamma) = \mathfrak{T}_0.$$

Тем самым совершен переход к пространству неевклидовой связности и случаю несовместных деформаций.

Замечание 13. Несмотря на то что промежуточная форма S_R (2.8) в общем случае не совпадает с отсчетной формой $\mathcal{B}$ (2.6), выполненных построений достаточно для определения геометрии на материальном многообразии $\mathfrak{B}$. Действительно, формы $\mathcal{B}$ и S_R связаны некоторой деформацией $\chi_R : \mathcal{B} \rightarrow S_R$, и геометрия из $\mathfrak{S}_R$ может быть перенесена на $\mathfrak{B}$ посредством этого отображения.

Вместе с тем в выборе формы S_R имеется произвол, поэтому могла бы возникнуть ситуация, что геометрия на материальном многообразии зависит от этого выбора. Однако, как показано в работе [34], в действительности такой зависимости нет: две геометрии, перенесенные из различных промежуточных форм на материальное многообразие, имеют одни и те же инварианты аффинной связности.

Замечание 14. В континуальной теории дефектов неевклидово пространство (3.31) используется для формализации глобального натурального состояния кристалла с дислокациями [32; 38; 85]. В таком случае тензор кручения определяет плотность дислокаций $\alpha = \alpha^{AB} \frac{\partial}{\partial Q^A} \otimes \frac{\partial}{\partial Q^B}$ с компонентами [74]

$$\alpha^{AB} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ACD} \mathfrak{T}_{CD}^B.$$

Здесь $\epsilon^{ABC} = \frac{\epsilon^{ABC}}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}$, где $\det \mathbf{G}$ — определитель материальной метрики $\mathbf{G}$, а ϵ^{ABC} — четность перестановки (A, B, C) . Наравне с кручением $\mathfrak{T}$, тензор плотности дислокаций α может служить мерой несовместности поля локальных деформаций, поскольку равенство $\mathfrak{T} = 0$ эквивалентно равенству $\alpha = 0$.

Замечание 15. Наряду со связностью Вайценбока Γ можно определить связность Леви-Чивита L , используя материальную метрику (3.28). Коэффициенты связности определяются по классической формуле:

$$L_{AB}^C = \frac{G^{CD}}{2} (\partial_A G_{DB} + \partial_B G_{AD} - \partial_D G_{AB}), \quad (3.32)$$

где $[G^{AB}] = [G_{AB}]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице метрических коэффициентов $G_{AB} = G(\frac{\partial}{\partial Q^A}, \frac{\partial}{\partial Q^B})$. В таком случае структура (3.31) заменяется на риманово пространство

$$S_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, dV_{\mathbf{G}}, L), \quad (3.33)$$

характеризующееся тензором кривизны Римана.

Замечание 16. Для моделирования состояния, вызванного непрерывным распределением точечных дефектов, в работах [33; 85; 92] предложено использовать связность Вейля ∇ , которая определяется согласно условиям:

- а) связность ∇ симметрична, то есть $\mathfrak{T} = 0$,
б) $\nabla_u G = \nu(u)G$, где ν — наперед заданная 1-форма на $\mathfrak{S}_R$.

В частности, из условия б) следует, что тензор неметричности Ω , определяемый равенством

$$\Omega(u, v, w) := G(\nabla_u v, w) + G(v, \nabla_u w) - u[G(v, w)] \quad (3.34)$$

и характеризующий несовместность связности с заданной метрикой, равен $\Omega = -\nu \otimes G$.

3.5. Пример синтезирования неевклидовой формы

25°. Семейство деформаций. Для иллюстрации применения метода синтезирования неевклидовой формы рассмотрим модельный пример. Предположим, что промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ является полым шаром с внутренним радиусом R^i , внешним радиусом R^e и центром в точке o , т. е.

$$\mathcal{S}_R = \{X \in \mathcal{E} : R^i < \|X - o\| < R^e\}.$$

Используя сферическую симметрию формы $\mathcal{S}_R$, введем в пространстве $\mathcal{E}$ сферические координаты (r, θ, φ) , связанные с прямоугольными координатами (x^1, x^2, x^3) следующими формулами перехода:

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta,$$

где $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Координаты, отвечающие точкам формы $\mathcal{S}_R$, обозначим символами (R, Θ, Φ) .

Пусть задано семейство $\{\gamma^{(\rho)}\}_{\rho \in]R^i, R^e[}$ деформаций $\gamma^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(\rho)}$, для которого выполнены следующие условия:

- а) для каждого значения $\rho \in]R^i, R^e[$ деформация центрально-симметрична. При этом для всех точек сферы $\mathcal{L}_\rho = \{X \in \mathcal{E} : \|X - o\| = \rho\}$ справедливо свойство:

$$\forall X \in \mathcal{L}_\rho : \left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=D_X \gamma^{(\rho)}} = \mathbf{N}_1;$$

- б) в сферических координатах (r, θ, φ) каждая деформация $\gamma^{(\rho)}$ имеет представление

$$\tilde{\gamma}^{(\rho)} = (\omega(\rho)f_0(R), \Theta, \Phi), \quad (3.35)$$

где $\omega, f_0 : [R^i, R^e] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ — гладкие функции.

Следовательно, семейство $\{\gamma^{(\rho)}\}_{\rho \in]R^i, R^e[}$ является семейством $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ разгрузочных деформаций, элементы которого, отвечающие точкам на одной сфере, совпадают.

26°. Синтезирование поля локальных деформаций. С целью определить поле локальных деформаций представим каждую разгрузочную деформацию $\gamma^{(\rho)}$ в виде (2.14), где σ_R по-прежнему отвечает сферическим координатам, а σ , напротив, порождается декартовыми координатами. Учитывая (3.35), приходим к соотношению:

$$\tilde{\gamma}^{(\rho)} = (\omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi, \omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi, \omega(\rho)f_0(R) \cos \Theta). \quad (3.36)$$

Дифференцируя представление (3.36) (с учетом того, что ρ — параметр семейства), получаем матрицу градиента деформации $\mathbf{F}^{(\rho)} = [\mathbf{F}^{(\rho)}]_I^i \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I$:

$$[\mathbf{F}^{(\rho)}]_I^i = \begin{bmatrix} \omega(\rho)f'_0(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(\rho)f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi \\ \omega(\rho)f'_0(R) \sin \Theta \sin \Phi & \omega(\rho)f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi & \omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi \\ \omega(\rho)f'_0(R) \cos \Theta & -\omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

В соответствии с формулой (3.8) полагаем в (3.37) $R = \rho$, т. е.

$$\mathbf{H}(\rho, \Theta, \Phi) := \mathbf{F}^{(\rho)}(R, \Theta, \Phi) \Big|_{R=\rho}.$$

В дальнейшем удобно придерживаться привычных обозначений, поэтому вместо ρ будем писать снова R . Следовательно, поле локальных деформаций $\mathbf{H} = H_I^i \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I$ представлено матрицей

$$[H_I^i] = \begin{bmatrix} \omega(R)f'_0(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(R)f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(R)f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi \\ \omega(R)f'_0(R) \sin \Theta \sin \Phi & \omega(R)f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi & \omega(R)f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi \\ \omega(R)f'_0(R) \cos \Theta & -\omega(R)f_0(R) \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

27°. Синтезирование геометрии. Используя поле локальных деформаций с матрицей (3.38), определим материальную метрику в соответствии с (3.28). Ее диадное представление имеет вид

$$\mathbf{G} = [\omega(R)f'_0(R)]^2 dR \otimes dR + [\omega(R)f_0(R)]^2 d\Theta \otimes d\Theta + [\omega(R)f_0(R) \sin \Theta]^2 d\Phi \otimes d\Phi. \quad (3.39)$$

Здесь $(dR, d\Theta, d\Phi)$ — координатный корепер, дуальный к координатному реперу $(\frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \Theta}, \frac{\partial}{\partial \Phi})$.

Построим на многообразии $\mathfrak{S}_R$ две геометрии — Римана и Вайценбока. Первая из них порождается метрикой (3.39); соответствующие коэффициенты связности Леви-Чивита определяются по формулам (3.32) и представлены выражениями (приведены лишь те поля, которые отличны от нуля)

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= \frac{f_0''}{f_0'} + \frac{\omega'}{\omega}, & L_{22}^1 &= -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, & L_{33}^1 &= -\frac{f_0 \sin^2 \Theta (\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, \\ L_{12}^2 &= L_{21}^2 = L_{13}^3 = L_{31}^3 = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\omega'}{\omega}, & L_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, & L_{23}^3 &= L_{32}^3 = \cot \Theta. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Кривизна полученной связности отлична от нуля, что демонстрируется следующим выражением для скалярной кривизны:

$$\text{Scal} = -\frac{2f_0 f_0' [\omega']^2 - 4\omega (f_0 f_0' \omega'' + \omega' (2[f_0']^2 - f_0 f_0''))}{f_0 \omega^4 [f_0']^3}. \quad (3.41)$$

Формулы (3.39) и (3.40) определяют риманово пространство (3.33) — первый вариант неевклидовой отсчетной формы. Мера отклонения геометрии от евклидовой характеризуется полем (3.41).

Теперь построим связность Вайценбока. Формула (3.18) в случае (3.38) приводит к следующим соотношениям для коэффициентов связности Γ (приведены только ненулевые поля):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{f_0''}{f_0'} + \frac{\omega'}{\omega}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{f_0}{f_0'}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{f_0 \sin^2 \Theta}{f_0'}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\omega'}{\omega}, & \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{f_0'}{f_0}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \Theta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Компоненты кручения $\mathfrak{T}$ связности Γ в координатном репере представлены равенствами (приведены только ненулевые поля):

$$\mathfrak{T}_{12}^2 = \mathfrak{T}_{13}^3 = -\mathfrak{T}_{21}^2 = -\mathfrak{T}_{31}^3 = \frac{\omega'}{\omega}. \quad (3.43)$$

Таким образом, соотношения (3.39) и (3.42) приводят к неевклидовой форме (3.31). Меры отклонения этой формы от евклидовой (и одновременно — несовместности локальных деформаций) определяются выражениями (3.43).

Заключение

В статье на примере простого материала продемонстрирован геометрический метод моделирования несовместных деформаций, основанный на представлении мер деформации в терминах кривизны и кручения. Результаты того моделирования согласуются с известными представлениями [32; 33; 38; 85] что в определенном смысле верифицирует их. Во второй части работы [72] этим же методом будут исследованы новые задачи, связанные с расширенной кинематикой.

Благодарности

Автор работы благодарит С.А. Лычева и А.Л. Левитина за обсуждения и критические замечания по содержанию статьи.

Литература

- [1] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [2] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 17. Pp. 85–112. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253050>.
- [3] Лычев С.А. Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости // Вестник Самарского государственного университета. 2007. № 4(54), С. 225–262. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071>. EDN: <https://elibrary.ru/hzzzon>.

- [4] dell'Isola F., Andreaus U., Placidi L. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 20, Issue 8. Pp. 887–928. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286513509811>.
- [5] dell'Isola F., Della Corte A., Giorgio I. Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22, Issue 4. Pp. 852–872. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286515616034>.
- [6] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II. // *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*. 1887. Vol. 34. Pp. 53–100. URL: <https://eudml.org/doc/135897>.
- [7] Duhem P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3*. 1893. Vol. 10. Pp. 183–230. DOI: <https://doi.org/10.24033/asens.389>.
- [8] Cosserat E. Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p.
- [9] Ericksen J.L. Conservation Laws for Liquid Crystals // *Transactions of The Society of Rheology*. 1961. Vol. 5, No. 1. Pp. 23–34. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.548883>.
- [10] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1957. Vol. 1. Pp. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [11] Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. Pp. 385–414. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253945>.
- [12] Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. Pp. 415–448. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
- [13] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. Pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [14] Cross J.J. Mixtures of Fluids and Isotropic Solids // *Archives of Mechanics*. 1973. Vol. 25. Pp. 1024–1039. URL: https://rcin.org.pl/Content/167085/WA727_106772_P.262-Cross-Mixtures.pdf
- [15] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1958. Vol. 2. Pp. 197–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00277929>.
- [16] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 33–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [17] Aifantis E.C. On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1984. Vol. 106, Issue 4. Pp. 326–330. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3225725>.
- [18] Triantafyllidis N., Aifantis E.C. A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials // *Journal of Elasticity*. 1986. Vol. 16. Pp. 225–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00040814>.
- [19] Altan S.B., Aifantis E.C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity // *Scripta Metallurgica et Materialia*. 1992. Vol. 26, Issue 2. Pp. 319–324. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(92\)90194-J](https://doi.org/10.1016/0956-716X(92)90194-J).
- [20] Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // *Acta Mechanica*. 1993. Vol. 101. Pp. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01175597>.
- [21] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Screw dislocation in gradient elasticity // *Scripta Materialia*. 1996. Vol. 35, Issue 11. Pp. 1353–1358. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6462\(96\)00295-3](https://doi.org/10.1016/1359-6462(96)00295-3).
- [22] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Edge dislocation in gradient elasticity // *Scripta Materialia*. 1997. Vol. 36, Issue 1. Pp. 129–135. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(96\)00352-1](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(96)00352-1).
- [23] Gutkin M.Y., Aifantis E.C. Dislocations and disclinations in the gradient theory of elasticity. *Physics of the Solid State*. 1999. Vol. 41, Issue 12, Pp. 1980–1988. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1131139>.
- [24] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity // *Journal of elasticity and the physical science of solids*. 2002. Vol. 67. Pp. 205–227. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024926609083>.
- [25] Lurie S., Solyaev Y. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory // *International Journal of Engineering Science*. 2019. Vol. 144. Article number 103129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103129>.
- [26] Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Решение задачи Эшелби в градиентной теории упругости для многослойных сферических включений // *Известия Российской Академии наук. Сер.: Механика твердого тела*. 2016. № 2. С. 32–50. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25996915>. EDN: <https://elibrary.ru/vwxdtl>.
- [27] Ma H., Hu G., Wei Y., Liang L. Inclusion problem in second gradient elasticity // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. Pp. 60–78. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.07.003>.

- [28] Solyaev Y.O., Lurie S.A. Eshelby integral formulas in second gradient elasticity // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2020. Vol. 11, Issue 2. Pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020031434>.
- [29] Eremeyev V.A. Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 26, Issue 8. Pp. 1173–1190. DOI: <https://doi.org/10.1177/10812865211021640>.
- [30] Eremeyev V.A. Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nth-Order Gradient Elasticity // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, Issue 4. Article number 1024. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11041024>.
- [31] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, Issue 3. Pp. 219–251. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [32] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2012. Vol. 205, No. 1. Pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [33] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2012. Vol. 468, Issue 2148. Pp. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [34] Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 53–87. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>.
- [35] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [36] Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [37] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2019. 388 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [38] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: <https://libcats.org/book/789336>.
- [39] Anthony K.H. Die theorie der disklationen // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1970. Vol. 39. Pp. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [40] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1971. Vol. 40. Pp. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [41] Лычева Т.Н., Лычев С.А. Эволюция поля распределенных дефектов в кристалле при контактном взаимодействии с системой жестких штампов // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 55–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73>.
- [42] Yavari A. A geometric theory of growth mechanics // *Journal of Nonlinear Science*. 2010. Vol. 20, No. 6. Pp. 781–830. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-010-9073-y>.
- [43] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 585–604. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20181632>. EDN: <https://elibrary.ru/qzqmwld>.
- [44] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2014. Vol. 94, Issue 1–2. Pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [45] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. 2016. Vol. 7, Issue 3. Pp. 177–233. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [46] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230, No. 11. Pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [47] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1250. Article number 012035. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [48] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion // *Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, No. 4. Pp. 1813–1863. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [49] Бут Д.К., Бычков П.С., Лычев С.А. Теоретическое и экспериментальное исследование изгиба тонкой подложки при электролитическом осаждении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика*. 2020. № 1. С. 17–31. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.02>.

- [50] Lychev S.A., Kostin G.V., Koifman K.G., Lycheva T.N. Modeling and Optimization of Layer-by-Layer Structures // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1009. Article number 012014. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012014>.
- [51] Лычев С.А., Фекри М. Остаточные напряжения в термоупругом цилиндре, возникающие в результате послойной наплавки // *Вестник Самарского университета. Естественная серия*. 2020. Т. 26, № 3. С. 63–90. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-63-90>.
- [52] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part I. Thermal fields // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30, Issue 10. Pp. 1975–1990. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048325>.
- [53] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part II. Residual stresses // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30, Issue 10. Pp. 1991–2000. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048324>.
- [54] Fekry M. Thermal stresses in growing thermoviscoelastic cylinder and their evolution in the course of selective laser melting processing // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2023. Vol. 103, Issue 2. Article number e202100519. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202100519>.
- [55] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity // *Classical and Quantum Gravity*. 2006. Vol. 23, Number 10. Pp. 3545–3571. DOI: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [56] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite Incompatible Deformations in Elastic Solids: Relativistic Approach // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. Vol. 43. Pp. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [57] Lychev S., Koifman K., Pivovarov N. Incompatible Deformations in Relativistic Elasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 44, No. 6. Pp. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [58] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41, No. 10. Pp. 2034–2052. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [59] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part II. Strain and Stress Measures // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. 2019. Vol. 10, Issue 2. Pp. 97–121. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018024573>.
- [60] Лычев С.А., Лычева Т.Н., Коифман К.Г. Нелинейная эволюционная задача для самонапряженных слоистых гиперупругих сферических тел // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика*. 2020. № 1. С. 43–59. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.04>.
- [61] Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches // *Symmetry*. 2021. Vol. 13, Issue 12. Article number 2331. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13122331>.
- [62] Morgan A.J.A. Inhomogeneous materially uniform higher order gross bodies // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1975. Vol. 57. Pp. 189–253. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00280157>.
- [63] Elżanowski M., Epstein M. The symmetry group of second-grade materials // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1992. Vol. 27, Issue 4. Pp. 635–638. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(92\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0020-7462(92)90068-I).
- [64] de León M., Epstein M. On the integrability of second-order G-structures with applications to continuous theories of dislocations // *Reports on Mathematical Physics*. 1993. Vol. 33, Issue 3. Pp. 419–436. DOI: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(93\)90008-3](https://doi.org/10.1016/0034-4877(93)90008-3).
- [65] de León M., Epstein M. The geometry of uniformity in second-grade elasticity // *Acta Mechanica*. 1996. Vol. 114. Pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170405>.
- [66] Epstein M., de León M. Geometrical theory of uniform Cosserat media // *Journal of Geometry and Physics*. 1998. Vol. 26, Issues 1–2. Pp. 127–170. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0393-0440\(97\)00042-9](https://doi.org/10.1016/S0393-0440(97)00042-9).
- [67] Bucataru I., Epstein M. Geometrical theory of dislocations in bodies with microstructure // *Journal of Geometry and Physics*. 2004. Vol. 52, Issue 1. Pp. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2004.01.006>.
- [68] Маклейн С. Категории для работающего математика. Москва: Физматлит, 2004. 154 с. URL: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>.
- [69] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. Москва: URSS, 2017. 416 с. URL: <https://www.klex.ru/1mti>.
- [70] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. Москва: URSS, 2017. 400 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>.
- [71] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012. 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.

- [72] Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть II. Второй градиент и микроструктура // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 54–76.
- [73] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin, Heidelberg: Springer Nature, 1967. 386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-86748-4>.
- [74] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. New York: Springer Science & Business Media, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [75] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [76] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [77] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. 1948. Vol. 73, Issue 4. Pp. 373–382. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [78] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1955. Vol. 231, Issue 1185. Pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [79] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. // In: Kondo K. (Ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry, 1955. Vol. 1. Pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [80] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding // International Journal of Engineering Science. 1963. Vol. 1, Issue 1. Pp. 71–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [81] Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: <https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars>.
- [82] Бурбаки Н. Теория множеств. Москва: Мир, 1965. 456 с. URL: <https://djvu.online/file/7e5EmIPGc6YB1>.
- [83] Шварц Л. Анализ. Том 1. Москва: Мир, 1972. 824 с. URL: <https://klex.ru/14z8>.
- [84] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [85] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Vol. 35, Number 7. Pp. 1727–1739. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [86] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. Москва: Факториал, 1998. 496 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>.
- [87] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. Москва: URSS, 2017. 504 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html>.
- [88] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics // Journal of Mathematical Physics. 2011. Vol. 52, Issue 1. Article number 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [89] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. URL: <https://libcats.org/book/444677>.
- [90] Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. Москва: Наука, 1960. 207 с. URL: <https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893xl1f8549212671>.
- [91] Картан Э. Геометрия римановых пространств. Москва: Книжный дом «Либроком», 2010. 248 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=444675>.
- [92] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects // arXiv, 2019. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53

Submitted: 15.08.2023

Revised: 20.09.2023

Accepted: 05.12.2023

K.G. Koifman

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

REFERENCE SHAPE OF BODIES WITH ENHANCED KINEMATICS. PART I. GEOMETRIC METHODS

ABSTRACT

The work develops differential-geometric methods for modeling finite incompatible deformations of hyperelastic solids. They are based on the representation of a body as a smooth manifold, on which a metric and a non-Euclidean connection are synthesized. The resulting geometric space is interpreted as global stress-free shape, and the physical response and material balance equations are formulated relative to it. Within the framework of the geometric approach, deformations are modeled as embeddings of a non-Euclidean shape in physical space. Measures of incompatibility are represented by invariants of the affine connection, namely, curvature, torsion and nonmetricity, and the connection itself is determined by the type of physical process.

This article is the first part of the study. The proposed geometric approach is applied to bodies whose response depends on the first deformation gradient. Compatibility conditions are obtained and their geometric interpretation is proposed.

Key words: hyperelasticity; body with enhanced kinematics; second gradient; microstructure; incompatible deformations; residual stresses; non-Euclidean geometry; material metric; material connection; curvature; torsion; non-metricity.

Citation. Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part I. Geometric methods. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 26–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Koifman K.G., 2023

Konstantin G. Koifman — tutor in mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

References

- [1] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [2] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 17, pp. 85–112. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253050>.
- [3] Lychev S.A. On conservation laws of micromorphic nondissipative thermoelasticity. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 4(54), pp. 225–262. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071>. EDN: <https://elibrary.ru/hzzzon>. (In Russ.)
- [4] dell’Isola F., Andraus U., Placidi L. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2015, vol. 20, issue 8, pp. 887–928. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286513509811>.
- [5] dell’Isola F., Della Corte A., Giorgio I. Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, issue 4, pp. 852–872. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286515616034>.
- [6] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 1887, Vol. 34, pp. 53–100. Available at: <https://eudml.org/doc/135897>.
- [7] Duhem P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, Serie 3*, 1893, vol. 10, pp. 183–230. DOI: <https://doi.org/10.24033/asens.389>.
- [8] Cosserat E. Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p.

- [9] Ericksen J.L. Conservation Laws for Liquid Crystals. *Transactions of The Society of Rheology*, 1961, vol. 5, no. 1, pp. 23–34. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.548883>.
- [10] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, vol. 1, pp. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [11] Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 385–414. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253945>.
- [12] Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 415–448. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
- [13] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [14] Cross J.J. Mixtures of Fluids and Isotropic Solids. *Archives of Mechanics*, 1973, vol. 25, pp. 1024–1039. URL: https://rcin.org.pl/Content/167085/WA727_106772_P.262-Cross-Mixtures.pdf
- [15] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 2, pp. 197–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00277929>.
- [16] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 33–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [17] Aifantis E.C. On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, vol. 106, issue 4, pp. 326–330. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3225725>.
- [18] Triantafyllidis N., Aifantis E.C. A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 1986, vol. 16, pp. 225–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00040814>.
- [19] Altan S.B., Aifantis E.C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1992, vol. 26, issue 2, pp. 319–324. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(92\)90194-J](https://doi.org/10.1016/0956-716X(92)90194-J).
- [20] Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica*, 1993, vol. 101, pp. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01175597>.
- [21] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Screw dislocation in gradient elasticity. *Scripta Materialia*, 1996, vol. 35, issue 11, pp. 1353–1358. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6462\(96\)00295-3](https://doi.org/10.1016/1359-6462(96)00295-3).
- [22] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Edge dislocation in gradient elasticity. *Scripta Materialia*, 1997, vol. 36, issue 1, pp. 129–135. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(96\)00352-1](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(96)00352-1).
- [23] Gutkin M.Y., Aifantis E.C. Dislocations and disclinations in the gradient theory of elasticity. *Physics of the Solid State*, 1999, vol. 41, issue 12, pp. 1980–1988. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1131139>.
- [24] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 2002, vol. 67, pp. 205–227. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024926609083>.
- [25] Lurie S., Solyaev Y. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 144, Article number 103129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103129>.
- [26] Volkov-Bogorodskii D.B., Lurie S.A. Solution of the Eshelby problem in gradient elasticity for multilayer spherical inclusions. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, issue 2, pp. 161–176. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416020047>. (in English; original in Russian)
- [27] Ma H., Hu G., Wei Y., Liang L. Inclusion problem in second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 132, pp. 60–78. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.07.003>.
- [28] Solyaev Y.O., Lurie S.A. Eshelby integral formulas in second gradient elasticity. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2020, vol. 11, issue 2, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020031434>.
- [29] Eremeyev V.A. Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2021, vol. 26, issue 8, pp. 1173–1190. DOI: <https://doi.org/10.1177/10812865211021640>.
- [30] Eremeyev V.A. Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nth-Order Gradient Elasticity. *Mathematics*, 2023, Vol. 11, Issue 4, Article number 1024. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11041024>.
- [31] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua. *International Journal of Engineering Science*, 1964, vol. 2, issue 3, pp. 219–251. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [32] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, no. 1, pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [33] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 468, issue 2148, pp. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.

- [34] Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 53–87. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>. (In Russ.)
- [35] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007, 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [36] Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [37] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2019, 388 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [38] Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, no. 4, pp. 18–334. Available at: <https://libcats.org/book/789336>. (In Russ.)
- [39] Anthony K.H. Die theorie der disklinationen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1970, vol. 39, pp. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [40] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, vol. 40, pp. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [41] Lycheva T.N., Lychev S.A. Evolution of the field of distributed defects in a crystal during contact interaction with a system of rigid stamps. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1-2, pp. 55–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73>. (In Russ.)
- [42] Yavari A. A Geometric Theory of Growth Mechanics. *Journal of Nonlinear Science*, 2010, vol. 20, no. 6, pp. 781–830. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-010-9073-y>.
- [43] Lychev S.A., Manzhirrov A.V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 4, pp. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011>. EDN: <https://elibrary.ru/wqyump>. (In English; original in Russian)
- [44] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, issues 1–2, pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [45] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2016, vol. 7, issue 3, pp. 177–233. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [46] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, no. 11, pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [47] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1250, article number 012035. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [48] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion. *Journal of Nonlinear Science*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 1813–1863. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [49] Bout D.K., Bychkov P.S., Lychev S.A. The theoretical and experimental study of the bending of a thin substrate during electrolytic deposition. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 17–31. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.02>. (In Russ.)
- [50] Lychev S.A., Kostin G.V., Koifman K.G., Lycheva T.N. Modeling and Optimization of Layer-by-Layer Structures. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1009, article number 012014. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012014>.
- [51] Lychev S.A., Fekry M. Residual stresses in a thermoelastic cylinder resulting from layer-by-layer surfacing. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 63–90. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-63-90>. (In Russ.)
- [52] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part I. Thermal fields. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 10, pp. 1975–1990. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048325>.
- [53] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part II. Residual stresses. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 10, pp. 1991–2000. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048324>.
- [54] Fekry M. Thermal stresses in growing thermoviscoelastic cylinder and their evolution in the course of selective laser melting processing. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2023, vol. 103, issue 2, Article number e202100519. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202100519>.

- [55] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity. *Classical and Quantum Gravity*, 2006, Vol. 23, no. 10, Pp. 3545–3571. DOI: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [56] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite Incompatible Deformations in Elastic Solids: Relativistic Approach. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, pp. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [57] Lychev S., Koifman K., Pivovarov N. Incompatible Deformations in Relativistic Elasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, issue 6, pp. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [58] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 10, pp. 2034–2052. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [59] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part II. Strain and Stress Measures. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2019, vol. 10, issue 2, pp. 97–121. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018024573>.
- [60] Lychev S.A., Lycheva T.N., Koifman K.G. The Nonlinear evolutionary problem for self-stressed multilayered hyperelastic spherical bodies. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, issue 1, pp. 43–59. DOI: [10.15593/perm.mech/2020.1.04](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.04). (In Russ.)
- [61] Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches. *Symmetry*, 2021, vol. 13, issue 12, Article number 2331. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13122331>.
- [62] Morgan A.J.A. Inhomogeneous materially uniform higher order gross bodies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, vol. 57, pp. 189–253. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00280157>.
- [63] Elżanowski M., Epstein M. The symmetry group of second-grade materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, vol. 27, issue 4, pp. 635–638. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(92\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0020-7462(92)90068-I).
- [64] de León M., Epstein M. On the integrability of second-order G-structures with applications to continuous theories of dislocations. *Reports on Mathematical Physics*, 1993, vol. 33, issue 3, pp. 419–436. DOI: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(93\)90008-3](https://doi.org/10.1016/0034-4877(93)90008-3).
- [65] de León M., Epstein M. The geometry of uniformity in second-grade elasticity. *Acta Mechanica*, 1996, vol. 114, pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170405>.
- [66] Epstein M., de León M. Geometrical theory of uniform Cosserat media. *Journal of Geometry and Physics*, 1998, vol. 26, issues 1–2, pp. 127–170. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0393-0440\(97\)00042-9](https://doi.org/10.1016/S0393-0440(97)00042-9).
- [67] Bucataru I., Epstein M. Geometrical theory of dislocations in bodies with microstructure. *Journal of Geometry and Physics*, 2004, Vol. 52, Issue 1, pp. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2004.01.006>.
- [68] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. Moscow: Fizmatlit, 2004, 154 p. Available at: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>. (In Russ.)
- [69] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester I. Analytic geometry. Moscow: URSS, 2017, 416 p. Available at: <https://www.klex.ru/1mti>. (In Russ.)
- [70] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester II. Linear algebra. Moscow: URSS, 2017, 400 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>. (In Russ.)
- [71] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012, 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [72] Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part II. Second gradient and microstructure. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2023. Vol. 29, № 4. pp. 54–76.
- [73] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin, Heidelberg: Springer Nature, 1967, 386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-86748-4>.
- [74] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. New York: Springer Science & Business Media, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [75] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [76] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [77] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, issue 4, pp. 373–382. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [78] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.

- [79] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955. Vol. 1. Pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [80] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding. *International Journal of Engineering Science*, 1963, vol. 1, issue 1, pp. 71–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [81] Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: <https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars>.
- [82] Bourbaki N. *Theory of Sets*. Moscow: Mir, 1965. 456 p. Available at: <https://djvu.online/file/7e5EmIPGc6YB1>. (In Russ.)
- [83] Schwartz L. *Analysis*. Vol. 1. Moscow: Mir, 1972, 824 p. Available at: <https://klex.ru/14z8>. (In Russ.)
- [84] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [85] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, vol. 35, number 7, pp. 1727–1739. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [86] Postnikov M.M. *Lectures in geometry. Semester V: Riemannian geometry*. Moscow: Faktorial, 1998, 496 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>. (In Russ.)
- [87] Postnikov M.M. *Lectures in geometry. Semester IV. Differential geometry*. Moscow: URSS, 2017, 504 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html>. (In Russ.)
- [88] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 52, issue 1, Article number 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [89] Kartan E. *Spaces of affine, projective and conformal connection*. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1962, 210 p. Available at: <https://libcats.org/book/444677>. (In Russ.)
- [90] Kartan E. *Riemannian geometry in an orthogonal frame*. Moscow: Nauka, 1960, 207 p.. URL: <https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893x11f8549212671>. (In Russ.)
- [91] Kartan E. *Geometry of Riemannian spaces*. Moscow: Knizhnyi dom «Librokom», 2010, 248 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=444675>. (In Russ.)
- [92] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. *arXiv*, 2019. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 25.08.2023
после рецензирования: 04.10.2023
принятия статьи: 05.12.2023**К.Г. Койфман**Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Российская ФедерацияE-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

ОТСЧЕТНАЯ ФОРМА ТЕЛ С РАСШИРЕННОЙ КИНЕМАТИКОЙ. ЧАСТЬ II. ВТОРОЙ ГРАДИЕНТ И МИКРОСТРУКТУРА¹

АННОТАЦИЯ

В статье развиваются дифференциально-геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций гиперупругих твердых тел с расширенной кинематикой. Отклик таких тел, наряду со стандартным кинематическим полем, представленным градиентом деформации, характеризуется дополнительными тензорными полями. В качестве таковых рассмотрены: 1) второй градиент деформации и 2) тензорное поле второго ранга, моделирующее микроструктуру тела. Для каждого из этих двух случаев получены условия совместности и предложена их геометрическая интерпретация. На материальном многообразии, представляющем тело с расширенной кинематикой, синтезирована геометрия. Соответствующая аффинная связность обладает ненулевым кручением и кривизной, что может быть полезно для моделирования тела с дислокациями и дисклинациями.

Ключевые слова: гиперупругость; тело с расширенной кинематикой; второй градиент; микроструктура; несовместные деформации; остаточные напряжения; неевклидова геометрия; материальная метрика; материальная связность; кривизна; кручение; неметричность.

Цитирование. Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть II. Второй градиент и микроструктура // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 54–76. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Койфман К.Г., 2023

Константин Георгиевич Койфман — тьютор по математике, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, д. 5.

1. Предварительные сведения

1°. Настоящая статья продолжает работу [1], в которой представлен геометрический метод моделирования несовместных деформаций для гиперупругих тел и рассмотрены его особенности на примере простого материала. Несмотря на то что неевклидова отсчетная форма для тела из простого материала является классической и различные способы ее построения рассмотрены в статьях [2–10], подход к синтезированию неевклидовой формы, предложенный в исследовании [1], несколько отличается от этих способов. Он является комбинацией рассуждений Кренера [2], в рамках которых геометрия определяет

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

ся на основе условий совместности, с идеей локальной разгрузки, предложенной в работах² [9; 10] для формализации локальных деформаций. Цель настоящей статьи — синтезирование неевклидовой формы для тел с расширенной кинематикой.

В работе используются основные структуры и общие формулы, определенные в [1]. В частности, $\mathcal{E}$ есть евклидово физическое пространство [1, формула (2.1)] с ассоциированным векторным пространством $\mathcal{V}$. Ортонормированный базис в последнем обозначается через $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$. Символ S_R обозначает промежуточную форму [1, формула (2.8)], $\mathfrak{S}_R$ — ее подлежащее многообразие³ и т. д. В случае необходимости приводятся ссылки на соответствующие формулы из первой части работы.

2°. Метод синтеза неевклидовой формы, используемый в работе, аналогичен методу подвижного репера, предложенному Картаном для построения неевклидовых пространств [11]. Остановимся более подробно на этой аналогии.

В случае простого материала переход к натуральному состоянию определяется полем локальных деформаций $\mathbf{H} : S_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ [1, формулы (3.8) и (3.11)], условие совместности которых имеет вид $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Это означает, что в случае выполнения последнего условия (и односвязности формы S_R) поле $\mathbf{H}$ является градиентом некоторой глобальной деформации из промежуточной формы в глобально натуральную форму. Если же локальные деформации несовместны, то равенство нулю ротора не выполняется. Скажем тогда, что имеется источник несовместности, представленный тензорным полем второго ранга $\boldsymbol{\eta}$. В этом случае уравнение, характеризующее структурную неоднородность тела, имеет вид

$$\text{curl } \mathbf{H} = \boldsymbol{\eta}. \quad (1.1)$$

Подход, предложенный Кренером, заключается в преобразовании условия совместности с тем, чтобы результат этого преобразования можно было интерпретировать геометрически. Действительно, в соответствии с [1, 20° и 22°] условие, выражающее равенство нулю ротора $\mathbf{H}$, эквивалентно равенству нулю кручения $\mathfrak{T}$ специфической связности Γ на многообразии $\mathfrak{S}_R$, коэффициенты которой определяются формулами [1, (3.18)]. Следовательно, совместность деформаций эквивалентна утверждению, что связность Γ евклидова. Но тогда появление источника несовместности $\boldsymbol{\eta}$ равносильно изменению геометрии на многообразии $\mathfrak{S}_R$: из евклидовой она переходит в неевклидову, представленную тензором кручения $\mathfrak{T}_0$. В таком случае уравнение (1.1) преобразуется в равенство $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$, характеризующее геометрическую структуру неевклидова пространства над $\mathfrak{S}_R$.

С другой стороны, Картаном были получены структурные уравнения, характеризующие в общих чертах геометрию неевклидовых пространств [11–13]. Новизна идеи Картана заключалась в отказе от использования криволинейных координат и переходе к полям базисов более общего вида. Действительно, криволинейные координаты накладывают жесткие ограничения на виды локальных базисов за счет замены переменных (три функции определяют все поле базисов в трехмерном пространстве). Если же, отказываясь от использования замены переменных, перейти к неголономным базисам, то появляются дополнительные функциональные степени свободы, распоряжаясь которыми можно прийти к различным геометриям. В явном виде поле базисов $(\mathbf{z}_i)_{i=1}^3$ — подвижный репер — может быть определено по заданному полю $\Omega : \mathcal{E} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V})$ обратимых линейных преобразований⁴ трансляционного пространства $\mathcal{V}$ в соответствии с равенствами $\mathbf{z}_i = \Omega[\mathbf{c}_i]$, $i = 1, 2, 3$. Если через $(\vartheta^i)_{i=1}^3$ обозначить репер пространства $\mathcal{V}^*$, сопряженный к $(\mathbf{z}_i)_{i=1}^3$, а через $g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ — метрические коэффициенты относительно подвижного репера, то структурные уравнения Картана для евклидова пространства имеют вид

$$g_{mk}\omega_j^m + g_{mj}\omega_k^m - dg_{jk} = 0, \quad d\vartheta^i + \omega_j^i \wedge \vartheta^j = 0, \quad d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0, \quad (1.2)$$

где $\wedge$ — операция внешнего произведения [14]. Поля 1-форм ω_j^i , $i, j = 1, 2, 3$, относительно которых записаны соотношения (1.2), определяют взаимные искажения элементов репера $(\mathbf{z}_i)_{i=1}^3$ при переходе от точки к точке.

Уравнения (1.2) можно рассматривать как «условия совместности» для заданных искажений подвижного репера. Действительно, в евклидовом пространстве реализуется не произвольный набор полей ω_j^i , а лишь тот, который удовлетворяет равенствам (1.2). Переход к пространствам более общего вида можно

²См. также [1, 16° и 17°].

³В рамках классической механики континуума нет необходимости выделять третью форму, наряду с отсчетной и актуальной формами. Вместе с тем в настоящей работе третья форма, называемая промежуточной, используется для синтеза геометрии на материальном многообразии. Формально, подобно любой другой форме тела (см. [1, 7°]), промежуточная форма представлена в виде упорядоченной совокупности $S_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{g}|_{S_R}, \epsilon|_{S_R}, \nabla|_{S_R})$, где $\mathfrak{S}_R$ — подлежащее многообразие (носитель геометрической структуры), а $\mathbf{g}|_{S_R}$, $\epsilon|_{S_R}$, $\nabla|_{S_R}$ обозначают метрику, форму объема и связность над многообразием $\mathfrak{S}_R$, индуцированные из евклидова пространства $\mathcal{E}$. При синтезировании неевклидовой отсчетной формы последние три поля заменяются на более общие геометрические поля.

⁴Хотя в оригинальных работах Картана рассматривались только вращения, можно предположить, что эти преобразования являются достаточно общими.

осуществить, определив семейства 1-форм неметричности Q_{ij} , а также 2-форм кручения T^i и кривизны R_j^i , и подставив их в правые части уравнений (1.2):

$$g_{mk}\omega_j^m + g_{mj}\omega_k^m - dg_{jk} = Q_{jk}, \quad d\vartheta^i + \omega_j^i \wedge \vartheta^j = T^i, \quad d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = R_j^i. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) определяют структуру пространства произвольной аффинной связности. В этой связи можно ассоциировать поля Q_{ij} , T^i и R_j^i с величинами, выражающими несовместность полей ω_j^i с евклидовой геометрией.

Рассмотренная аналогия между источниками несовместности и тензорными полями кручения, кривизны и неметричности демонстрирует единство подходов, используемых в настоящей работе и в общей теории пространств аффинной связности.

2. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы для среды второго градиента

2.1. Второй градиент деформации

3°. Квадратичное приближение деформации. Синтезированию поля локальных деформаций предположим рассмотрение кинематики среды второго градиента. Предположим, что упругий потенциал относительно промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ является отображением

$$\mathcal{S}_R \times \text{End}(\mathcal{V}) \times \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V})) \ni (X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \mapsto \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Поэтому, если $\gamma \in \text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S})$ — произвольная деформация, то отклик тела в точке $X \in \mathcal{S}_R$ характеризуется равенством [15; 16]

$$W = \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1(X), \mathbf{F}_2(X)).$$

В списке аргументов, наряду с первым градиентом деформации $\mathbf{F}_1(X) \in \text{End}(\mathcal{V})$, представлен второй градиент $\mathbf{F}_2(X) \in \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, определяемый равенством $\mathbf{F}_2(X) := D_X \mathbf{F}_1$. Следовательно, в окрестности точки X выполнено разложение по формуле Тейлора второго порядка [17]:

$$\gamma(X + \mathbf{h}) = \gamma(X) + \mathbf{F}_1(X)[\mathbf{h}] + \frac{1}{2}\mathbf{F}_2(X)[\mathbf{h}, \mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|^2), \quad (2.2)$$

в котором $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ — достаточно малый вектор, т. е. $X + \mathbf{h} \in \mathcal{S}_R$. Здесь и в дальнейшем подразумевается отождествление второго градиента с билинейным отображением $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ в силу естественного изоморфизма⁵ [17] $\text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V})) \cong_{\text{vec}} \text{L}_2(\mathcal{V}, \mathcal{V}; \mathcal{V})$.

Обобщенная теорема Шварца [17] влечет, что второй градиент симметричен, т. е. $\mathbf{F}_2(X)[\mathbf{v}, \mathbf{u}] = \mathbf{F}_2(X)[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Поэтому его можно восстановить по значениям $\mathbf{F}_2(X)[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ в соответствии с формулой, известной из теории билинейных отображений [18]:

$$\mathbf{F}_2(X)[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{\mathbf{F}_2(X)[\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}] - \mathbf{F}_2(X)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \mathbf{F}_2(X)[\mathbf{v}, \mathbf{v}]}{2}.$$

В свою очередь, из (2.2) вытекает следующее равенство:

$$\mathbf{F}_2(X)[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{vec}(\gamma(X), \gamma(X + s\mathbf{v})) - s\mathbf{F}_1(X)[\mathbf{v}]}{s^2},$$

доказывающее единственность второго градиента как симметричного билинейного отображения, для которого выполнено соотношение (2.2).

4°. Представления второго градиента. В прямоугольных координатах $(x^i)_{i=1}^3$ деформации γ соответствует представление [1, формула (2.10)], а первому градиенту деформации $\mathbf{F}_1(X)$ — разложение [1, формула (3.3)]. Поскольку второй градиент деформации можно записать как

$$\mathbf{F}_2(X) = \left[\frac{\partial}{\partial X^J} \mathbf{F}_1 \right] \Big|_X \otimes \mathbf{c}^J,$$

то его разложение имеет вид⁶

$$\mathbf{F}_2(X) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^I \partial X^J} \Big|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I \otimes \mathbf{c}^J.$$

⁵В явном виде этот изоморфизм может быть определен следующим образом. Если $\mathbf{A}$ — элемент $\text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, то ему отвечает элемент $\mathbf{L}_\mathbf{A}$ пространства $\text{L}_2(\mathcal{V}, \mathcal{V}; \mathcal{V})$, заданный равенством $\mathbf{L}_\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{A}[\mathbf{u}])[\mathbf{v}]$. Искомый изоморфизм является соответствием $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{L}_\mathbf{A}$.

⁶Здесь Coor обозначает декартову арифметизацию [1, формула (2.2)].

Вместе с тем несмотря на то что в криволинейных координатах $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$ первый градиент $\mathbf{F}_1$ имеет простое разложение [1, формула (3.4)], представление, соответствующее второму градиенту, является более сложным. Для его получения рассмотрим следующее утверждение. Пусть

$$\mathcal{S}_R \ni X \mapsto \mathbf{A}_X = A_J^i|_X \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^J|_X \in \text{End}(\mathcal{V})$$

— тензорное поле, представленное в паре координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$. Тогда для его градиента

$$D_X \mathbf{A} = \left[\frac{\partial}{\partial Q^K} \mathbf{A} \right] \Big|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X$$

в точке $X \in \mathcal{S}_R$ справедливо разложение⁷

$$D_X \mathbf{A} = \left\{ \partial_K A_J^i|_{\sigma_R(\cdot)} + A_J^l F_K^j \tilde{\Gamma}_{jl}^i|_{\gamma(\cdot)} - A_L^i \tilde{\Gamma}_{KJ}^L \right\} \Big|_X \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^J|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X. \quad (2.3)$$

Здесь F_j^i — компоненты градиента деформации [1, формула (3.4)], а $\tilde{\Gamma}_{JK}^I$ и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ — символы Кристоффеля, отвечающие криволинейным координатам $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$, т. е.

$$\tilde{\Gamma}_{JK}^I = \mathbf{E}^I \cdot \partial_J \mathbf{E}_K \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \mathbf{e}^i \cdot \partial_j \mathbf{e}_k.$$

Доказательство. Используя обобщенное правило дифференцирования произведения [17], получаем равенство⁸

$$D_X \mathbf{A} = \left\{ \partial_K A_J^i|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^J|_X + \right. \\ \left. + A_J^i \partial_K (\mathbf{e}_i \circ \gamma)|_{\sigma_R(X)} \otimes \mathbf{E}^J|_X + \right. \\ \left. + A_J^i \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \partial_K \mathbf{E}^J|_{\sigma_R(X)} \right\} \otimes \mathbf{E}^K|_X. \quad (2.4)$$

В нем, согласно определению символов Кристоффеля,

$$\partial_K (\mathbf{e}_i \circ \gamma)|_{\sigma_R(X)} = F_K^j|_X \partial_j \mathbf{e}_i|_{\sigma \circ \gamma(X)} = F_K^j|_X \tilde{\Gamma}_{jl}^i|_{\gamma(X)} \mathbf{e}_l|_{\gamma(X)}, \\ \partial_K \mathbf{E}^J|_{\sigma_R(X)} = - \tilde{\Gamma}_{KL}^J|_X \mathbf{E}^L|_X.$$

Подставляя полученные выражения в (2.4) и заменяя соответствующим образом индексы суммирования, приходим к формуле (2.3). $\square$

В случае, когда $\mathbf{A} = \mathbf{F}_1$, формула (2.3) приводит к равенству

$$\mathbf{F}_2(X) = \left\{ \partial_K F_J^i|_{\sigma_R(\cdot)} + F_J^l F_K^j \tilde{\Gamma}_{jl}^i|_{\gamma(\cdot)} - F_L^i \tilde{\Gamma}_{KJ}^L \right\} \Big|_X \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^J|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X, \quad (2.5)$$

являющемуся искомым разложением второго градиента. В нем

$$\partial_K F_J^i = \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^J \partial Q^K}.$$

Следовательно, в силу перестановочности повторных производных, $\partial_K F_J^i = \partial_J F_K^i$.

В работе используется следующий частный вид формулы (2.5). Выберем в качестве $(q^i)_{i=1}^3$ прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$. Тогда $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = 0$, что дает

$$\mathbf{F}_2(X) = \left\{ \partial_K F_J^i|_{\sigma_R(\cdot)} - F_L^i \tilde{\Gamma}_{KJ}^L \right\} \Big|_X \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}^J|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X. \quad (2.6)$$

В этом случае компоненты второго градиента выражаются через компоненты первого градиента и их производные, а также через символы Кристоффеля системы координат $(Q^I)_{I=1}^3$.

Замечание 1. Евклидова структура физического пространства и отождествления по изоморфизму, индуцируемые ею, позволяют скрыть истинную природу полей, используемых в настоящей работе. Действительно, предположим заданными криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$ на форме $\mathcal{S}_R$, а координаты на образах выберем прямоугольными. Тогда

⁷Отображение σ_R есть координатное отображение, соответствующее криволинейным координатам $(Q^I)_{I=1}^3$ на форме $\mathcal{S}_R$ [1, формула (2.13)].

⁸Формула (2.4) — производная тензорного поля — содержит производные скалярных и векторных базисных полей. Производные базисных полей, в свою очередь, выражаются через исходные базисные поля; коэффициенты разложения есть символы Кристоффеля соответствующей системы координат.

1. Деформация $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ есть тройка $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ скалярных полей $\gamma^i : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathbb{R}$, определенных равенством

$$\gamma(Q^1, Q^2, Q^3) = o + c_i \gamma^i(Q^1, Q^2, Q^3).$$

2. Градиент деформации $\mathbf{F}_1 = c_i \otimes F^i$ есть тройка 1-форм (F^1, F^2, F^3) , заданных как

$$F^i = \frac{\partial x^i}{\partial Q^I} dQ^I, \quad i = 1, 2, 3.$$

То, что градиент деформации не является тензором в классическом понимании этого термина, отмечалось в работе [19, с. 245] и позднее в монографиях [20, 21].

3. Второй градиент $\mathbf{F}_2 = c_i \otimes \mathbf{F}^i$ есть совокупность трех тензоров второго ранга $(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2, \mathbf{F}^3)$.

В отличие от представления полей γ , $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ в исходной (евклидовой форме), их представление в соответствии с п. 1)–3) является общим и может быть непосредственно перенесено на произвольные гладкие многообразия.

Несмотря на то что в рамках настоящей работы такое описание полей избыточно⁹, к нему придется прибегнуть уже в случае рассмотрения деформирования материальных двумерных поверхностей в евклидовом пространстве.

2.2. Семейство форм и условие совместности

5°. **Гипотеза локальной разгрузки.** Подобно случаю среды первого градиента [1, 16°], предположим справедливой гипотезу локальной разгрузки. Пусть фиксированы тензоры $\mathbf{N}_1 \in \text{End}(\mathcal{V})$ и $\mathbf{N}_2 \in \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, характеризующие натуральное состояние, и пусть задана промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ вместе с упругим потенциалом (2.1). Предположим далее, что определено семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, для которого в любой точке $X \in \mathcal{S}_R$ выполнено условие¹⁰

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_1} &= \mathbf{N}_1, \\ \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_2} &= \mathbf{N}_2, \end{aligned} \right|_{\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^{(X)}(X), \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2^{(X)}(X)} \quad (2.7)$$

являющееся расширением [1, формула (3.6)]. Здесь $\mathbf{F}_1^{(X)} = D\gamma^{(X)}$ — первый градиент деформации $\gamma^{(X)}$, а $\mathbf{F}_2^{(X)} = D\mathbf{F}_1^{(X)}$, соответственно, второй градиент.

6°. **Синтезирование локальных деформаций и гипердеформаций.** Согласно второй из формул [1, (3.5)], в которой положим $(q^i)_{i=1}^3 = (x^i)_{i=1}^3$, первый градиент деформации $\gamma^{(X)}$ в точке $Y \in \mathcal{S}_R$ имеет представление

$$\mathbf{F}_1^{(X)}(Y) = [\mathbf{F}_1^{(X)}]_I^i|_Y c_i \otimes \mathbf{E}^I|_Y. \quad (2.8)$$

Из него, согласно равенству [1, (3.8)], синтезируется поле локальных деформаций $\mathbf{H}_1 : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, с разложением

$$\mathbf{H}_1(X) = H_I^i|_{\sigma_R(X)} c_i \otimes \mathbf{E}^I|_X, \quad \text{где} \quad H_I^i|_{\sigma_R(X)} = [\mathbf{F}_1^{(X)}]_I^i|_X. \quad (2.9)$$

Вместе с тем, поскольку рассматривается среда второго градиента, одного лишь поля $\mathbf{H}_1$ недостаточно для описания локальной разгрузки. Нужно еще поле, представляющее второй градиент. С этой целью определим вторые градиенты деформаций $\gamma^{(X)}$:

$$\mathbf{F}_2^{(X)}(Y) = D_Y \mathbf{F}_1^{(X)},$$

которые, в соответствии с представлением (2.8) и формулой (2.6), имеют разложение

$$\mathbf{F}_2^{(X)}(Y) = \left\{ \partial_K [\mathbf{F}_1^{(X)}]_J^i|_{\sigma_R(\cdot)} - [\mathbf{F}_1^{(X)}]_L^i \Gamma_{KJ}^L \right\}|_Y c_i \otimes \mathbf{E}^J|_Y \otimes \mathbf{E}^K|_Y. \quad (2.10)$$

Синтезируем теперь новый тензор $\mathbf{H}_2(X) \in \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$ по формуле

$$\mathbf{H}_2(X) := \mathbf{F}_2^{(X)}(Y)|_{Y=X}, \quad (2.11)$$

⁹Поскольку физическое пространство евклидово, а размерности форм и пространства совпадают.

¹⁰Несмотря на то что в рамках настоящей работы тензоры $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ предполагаются постоянными, ход рассуждений не изменится, если эти тензоры заменить на переменные тензоры, зависящие от точки $X \in \mathcal{S}_R$. В таком случае правые части соотношений (2.7) и им подобным следует заменить на $\mathbf{N}_1(X)$ и $\mathbf{N}_2(X)$ соответственно. Такая замена целесообразна, если натуральное состояние определяется в рамках действия некоторого внешнего поля, которым нельзя пренебречь.

и назовем его локальной гипердеформацией. Совокупность таких тензоров образует тензорное поле $\mathbf{H}_2 : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, которое предположим гладким.

Полагая теперь в формуле (2.10) $Y = X$, приходим к следующему представлению тензора гипердеформаций (2.11):

$$\mathbf{H}_2(X) = \left\{ S_{KJ}^i|_{\sigma_R(\cdot)} - H_L^i|_{\sigma_R(\cdot)} \hat{\Gamma}_{KJ}^L \right\} \Big|_X \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^J|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X, \quad (2.12)$$

где

$$S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)} := \partial_K [\mathbf{F}_1^{(X)}]_J^i \Big|_{\sigma_R(X)}, \quad (2.13)$$

а H_L^i — компоненты разложения (2.9). Заметим, что в силу перестановочности повторных производных, числа $S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)}$ обладают свойством симметрии: $S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)} = S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)}$.

Таким образом, локальная разгрузка среды второго градиента характеризуется парой тензорных полей $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, значения которых определяются согласно разложениям (2.9) и (2.12). При фиксированных криволинейных координатах $(Q^I)_{I=1}^3$ им соответствует поле матриц $X \mapsto ([H_I^i|_{\sigma_R(X)}], [S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)}])$, где

$$\det[H_I^i|_{\sigma_R(X)}] \neq 0, \\ S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)} = S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)}, \quad X \in \mathcal{S}_R.$$

Кроме того, в соответствии с (2.7), выполнено свойство:

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_1} \right|_{\mathbf{F}_1=\mathbf{H}_1(X), \mathbf{F}_2=\mathbf{H}_2(X)} = \mathbf{N}_1, \\ \forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_2} \right|_{\mathbf{F}_1=\mathbf{H}_1(X), \mathbf{F}_2=\mathbf{H}_2(X)} = \mathbf{N}_2. \quad (2.14)$$

7°. Восстановление семейства деформаций. Подобно случаю первого градиента, рассмотрим задачу восстановления семейства деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ по заданной паре гладких тензорных полей $\mathbf{H}_1 : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ и $\mathbf{H}_2 : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, первое из которых имеет в качестве значений обратимые линейные преобразования, а второе — симметричные тензоры. Кроме того, предполагается, что эти поля удовлетворяют свойству (2.14).

Зафиксировав точку $X \in \mathcal{S}_R$, изменим, если нужно, криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$ так, чтобы точке X отвечали их нулевые значения¹¹. Пусть $H_I^i|_{\sigma_R(X)}$ и $S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)} = S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)}$ — соответствующие функции из разложений (2.9) и (2.12). Тогда относительно пары координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(x^i)_{i=1}^3$ определим отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ согласно правилу:

$$x^i(Q^1, Q^2, Q^3) := b_X^i + H_I^i|_{\sigma_R(X)} Q^I + S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)} Q^J Q^K, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

где $(b_X^i)_{i=1}^3$ — фиксированная тройка чисел.

Будучи заданным как квадратичная форма, построенное отображение является гладким. Кроме того, в силу обратимости матрицы $[H_I^i|_{\sigma_R(X)}]$, теорема об обратной функции [17] гарантирует существование окрестности нуля, в которой (2.15) является диффеоморфизмом. Поэтому, если через $\mathcal{N}_X \subset \mathcal{S}_R$ обозначить соответствующую окрестность точки X в $\mathcal{E}$, то придем к деформации $\gamma^{(X)} : \mathcal{N}_X \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_X$ формы $\mathcal{N}_X$, являющейся частью формы $\mathcal{S}_R$, в некоторую другую форму $\tilde{\mathcal{N}}_X$. Отображение (2.15) является координатным представлением $\gamma^{(X)}$; кроме того, по построению

$$\frac{\partial x^i}{\partial Q^I} \Big|_{\sigma_R(X)} = H_I^i|_{\sigma_R(X)}, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial Q^J \partial Q^K} \Big|_{\sigma_R(X)} = S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)},$$

что влечет равенства $\mathbf{F}_1^{(X)}(X) = \mathbf{H}_1(X)$ и $\mathbf{F}_2^{(X)}(X) = \mathbf{H}_2(X)$.

Повторяя проделанную процедуру для всех точек формы $\mathcal{S}_R$, приходим к семейству деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, по которому синтезируется пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. Кроме того, для построенного семейства выполняется свойство (2.7), т. е. деформации $\gamma^{(X)}$ являются разгрузочными. Вместе с тем в отличие от изначально определенных разгрузочных деформаций, заданных на всей промежуточной форме $\mathcal{S}_R$, полученные деформации определены лишь на ее частях. Это обстоятельство не противоречит общей методологии настоящей работы, поскольку рассматриваемые части конечны и потому также являются формами.

¹¹Это всегда можно сделать, используя операцию сдвига в $\mathbb{R}^3$.

8°. Совместность локальных деформаций. В случае среды второго градиента будем называть пару $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ тензорных полей, обладающую свойством (2.14), совместной, если 1) существует деформация $\gamma_0 \in \text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S}_0)$ из промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ в некоторую форму $\mathcal{S}_0$, для которой выполнено равенство $\mathbf{H}_1 = D\gamma_0$, и 2) справедливо соотношение $\mathbf{H}_2 = D\mathbf{H}_1$. Таким образом, для γ_0 выполняется свойство

$$\left. \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_1} \right|_{\mathbf{F}_1 = D_X \gamma_0, \mathbf{F}_2 = D_X^2 \gamma_0} = \mathbf{N}_1,$$

$$\left. \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_2} \right|_{\mathbf{F}_1 = D_X \gamma_0, \mathbf{F}_2 = D_X^2 \gamma_0} = \mathbf{N}_2,$$

вытекающее из (2.7). В этом смысле форма $\mathcal{S}_0$ является глобальной натуральной.

Заметим, что если пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ совместна, то, в частности, совместно поле локальных деформаций $\mathbf{H}_1$. При этом потенциал [1, формула (3.1)], относительно которого определяется натуральное состояние, индуцирован из $\widehat{W}_2$:

$$\widehat{W}_1(X, \mathbf{F}) := \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}, \mathbf{H}_2(X)).$$

Вместе с тем из совместности $\mathbf{H}_1$ в общем случае не вытекает совместность пары $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. По этой причине уместно расширить терминологию:

- а) пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ имеет первый порядок совместности, если для некоторой деформации γ_0 выполнено свойство 1), однако свойство 2) не выполнено,
- б) пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ имеет второй порядок совместности (или просто совместна), если выполнены оба свойства 1) и 2),
- в) пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ несовместна, если ни одно из свойств 1), 2) не выполнено.

Таким образом, условие совместности [1, формула (3.15)] для случая простого материала дополняется вторым условием, представленным свойством 2), что приводит к совокупности равенств:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{H}_1 &= \mathbf{0}, \\ D\mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Их выполнение является необходимым (а в случае односвязности $\mathcal{S}_R$ и достаточным) для первого и второго порядка совместности пары $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. В координатной форме, согласно¹² (2.9) и (2.12),

$$\begin{aligned} \partial_J H_K^i - \partial_K H_J^i &= 0, \\ \partial_J H_K^i &= S_{JK}^i, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Вместе с тем первое из условий (2.16) избыточно, если рассматривать второй порядок совместности. Действительно, симметрия функций S_{JK}^i по нижним индексам дает

$$\partial_K H_J^i = S_{KJ}^i = S_{JK}^i = \partial_J H_K^i.$$

Но это и означает, что $\text{curl } \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$. Поэтому второму порядку совместности отвечает следующее условие:

$$D\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 \quad \text{или} \quad \partial_J H_K^i = S_{JK}^i, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

2.3. Геометрическая интерпретация условия совместности

9°. Поле Λ . Условие совместности (2.17) представим в следующем виде. Принимая во внимание, что значения поля $\mathbf{H}_1$ являются обратимыми линейными преобразованиями, домножим обе части (2.17) на $[\bar{\mathbf{H}}_1]_i^I$ и просуммируем по i :

$$[\bar{\mathbf{H}}_1]_i^I \partial_J H_K^i - [\bar{\mathbf{H}}_1]_i^I S_{JK}^i = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

Определим скалярные поля Γ_{JK}^I в соответствии с [1, формула (3.18)] и новые поля Λ_{JK}^I по формуле

$$\Lambda_{JK}^I := [\bar{\mathbf{H}}_1]_i^I S_{JK}^i. \quad (2.19)$$

Тогда равенство (2.18) принимает вид

$$\Gamma_{JK}^I - \Lambda_{JK}^I = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

¹²Для вычисления производной $D\mathbf{H}_1$ можно воспользоваться равенством (2.3), где $A_j^i = H_j^i$, а $q = x$.

В первой части работы [1, предложение 1] уже было показано, что поля Γ_{JK}^I являются коэффициентами некоторой связности. Установим, что аналогичное свойство выполняется и для полей Λ_{JK}^I .

10°. Свойства поля Λ . Доказательство того, что поля Λ_{JK}^I являются коэффициентами некоторой связности, предварим определением закона преобразования полей S_{JK}^i . Для этого продифференцируем обе части соотношения [1, формула (3.20)] по новым координатам $\tilde{Q}^L$. Если через $\tilde{\partial}_L$ обозначить это дифференцирование, то полученная формула примет вид

$$\tilde{\partial}_L [\widetilde{\mathbf{F}^{(X)}}]_J^i|_Y = \frac{\partial^2 Q^K}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^L} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(Y)} [\mathbf{F}^{(X)}]_K^i|_Y + \frac{\partial Q^K}{\partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(Y)} \frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^L} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(Y)} \partial_M [\mathbf{F}^{(X)}]_K^i|_Y. \quad (2.21)$$

Полагая в выражении (2.21) $Y = X$ и принимая во внимание определение (2.13), получаем искомый закон преобразования полей S_{JK}^i :

$$\tilde{S}_{LJ}^i|_{\tilde{\sigma}_R(X)} = S_{MK}^i|_{\tilde{\sigma}_R(X)} \frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^L} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(X)} \frac{\partial Q^K}{\partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(X)} + H_K^i|_{\tilde{\sigma}_R(X)} \frac{\partial^2 Q^K}{\partial \tilde{Q}^L \partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(X)}. \quad (2.22)$$

Обозначая через $\mathfrak{S}_R$ многообразие, над которым определена промежуточная форма $\mathcal{S}_R$, приходим к следующему утверждению:

Предложение 1. Скалярные функции Λ_{JK}^I являются коэффициентами некоторой аффинной связности на многообразии $\mathfrak{S}_R$.

Доказательство. Докажем утверждение методом, аналогичным тому, как было доказано предложение 1 в [1]. Если через $\tilde{\Lambda}_{JK}^I$ обозначить функции (2.19), определенные относительно координат $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$, то в соответствии с формулами [1, формула (3.21)] и (2.22) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{JK}^I &= [\tilde{\mathbf{H}}]_i^I \tilde{S}_{JK}^i = \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\tilde{\mathbf{H}}]_i^L \left(S_{PR}^i \frac{\partial Q^P}{\partial \tilde{Q}^J} \frac{\partial Q^R}{\partial \tilde{Q}^K} + H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^K} \right) = \\ &= \Lambda_{PR}^L \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} \frac{\partial Q^P}{\partial \tilde{Q}^J} \frac{\partial Q^R}{\partial \tilde{Q}^K} + \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} \frac{\partial^2 Q^L}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^K}. \end{aligned}$$

Последнее выражение приводит к закону преобразования коэффициентов связности в координатном репере, что и доказывает предложение. $\square$

Связность, соответствующая полям Λ_{JK}^I , обозначается через Λ . Из симметрии полей S_{JK}^I по нижним индексам следует, что и полученная связность симметрична, т. е. ее кручение равно нулю: $\mathfrak{T}(\Lambda) = 0$.

Получим другие выражения для функций Λ_{JK}^I . С этой целью восстановим по паре $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ синтезирующее ее семейство деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$. В свою очередь, семейству $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$ отвечает семейство первых градиентов $\{\mathbf{F}_1^{(X)}\}_{X \in S_R}$ и обратных градиентов $\{\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}\}_{X \in S_R}$ с разложениями

$$\mathbf{F}_1^{(X)} = [\mathbf{F}_1^{(X)}]_I^i \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)} = [\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}]_i^I \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{c}^i$$

соответственно. Их компоненты связаны соотношениями

$$[\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^i [\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}]_j^I = \delta_j^I \quad \text{и} \quad [\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}]_i^I [\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^I = \delta_j^I. \quad (2.23)$$

Дифференцируя обратный градиент $\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}$ в точке Y , принадлежащей области определения деформации $\gamma^{(X)}$, получаем равенство

$$D_Y \tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)} = \left\{ \partial_K [\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}]_j^I \Big|_{\sigma_R(\cdot)} + [\tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)}]_j^L \tilde{\Gamma}_{KL}^I \right\} \Big|_Y \mathbf{E}_I|_Y \otimes \mathbf{c}^j \otimes \mathbf{E}^K|_Y. \quad (2.24)$$

Заметим, что рассуждения, приводящие к последнему равенству, аналогичны использованным при выводе формулы (2.6). Полагая теперь $Y = X$, приходим к тензору третьего ранга

$$\mathbf{P}_2(X) := D_Y \tilde{\mathbf{F}}_1^{(X)} \Big|_{Y=X},$$

который по аналогии с имплантом [1, формула (3.12)] назовем гиперимплантом. Из (2.24) следует разложение для гиперимпланта:

$$\mathbf{P}_2(X) = \left\{ R_{Kj}^I|_{\sigma_R(\cdot)} + P_j^L|_{\sigma_R(\cdot)} \tilde{\Gamma}_{KL}^I \right\} \Big|_X \mathbf{E}_I|_X \otimes \mathbf{c}^j \otimes \mathbf{E}^K|_X.$$

Здесь

$$R_{Kj}^I|_{\sigma_R(X)} := \partial_K [\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^I \Big|_{\sigma_R(X)}, \quad (2.25)$$

а P_j^L — компоненты поля имплантов $\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{H}}_1$.

Для того чтобы связать поля R_{Kj}^I и S_{JK}^I , рассмотрим второе из равенств (2.23). Дифференцируя обе его части по Q^K , получаем

$$[\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^i \partial_K [\mathbf{F}_1^{(X)}]_i^I + [\mathbf{F}_1^{(X)}]_i^I \partial_K [\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^i = 0,$$

что при $Y = X$ дает

$$H_j^i R_{Ki}^I + [\bar{\mathbf{H}}]_i^I S_{KJ}^i = 0.$$

Из последнего равенства и вытекает, что

$$S_{KJ}^i = -H_j^i H_j^j R_{Kj}^I. \quad (2.26)$$

Следовательно, наряду с парой $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, состоящей из полей локальных деформаций и гипердеформаций, можно рассматривать пару $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, состоящую из импланта и гиперимпланта. В терминах элементов этой пары связность Γ определяется формулой [1, (3.26)], а связность Λ , в силу равенства (2.26), — формулой

$$\Lambda_{JK}^I = -[\bar{\mathbf{P}}_1]_K^j R_{Jj}^I. \quad (2.27)$$

Формулу (2.27) можно записать иначе. Для этого, используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial [\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^I}{\partial Q^K} = [\mathbf{F}_1^{(X)}]_K^i \frac{\partial [\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^I}{\partial x^i}$$

в произвольной точке Y . Переходя теперь к $Y = X$ и учитывая (2.25), придем к равенству

$$R_{Kj}^I = H_K^i \tilde{R}_{ij}^I, \quad (2.28)$$

где

$$\tilde{R}_{ij}^I = \frac{\partial [\mathbf{F}_1^{(X)}]_j^I}{\partial x^i} \Big|_{Y=X}, \quad \tilde{R}_{ij}^I = \tilde{R}_{ji}^I.$$

Наконец, учитывая равенство (2.28), формулу (2.27) можно преобразовать к виду:

$$\Lambda_{JK}^I = -[\bar{\mathbf{P}}_1]_J^i [\bar{\mathbf{P}}_1]_K^j \tilde{R}_{ij}^I.$$

В таком виде связность Λ определяется в монографии [6, формула (2.59)].

11°. Тензор неоднородности. Связности Γ и Λ определяют новое поле

$$\mathbf{D} := \Gamma - \Lambda \quad (2.29)$$

с компонентами $D_{JK}^I = \Gamma_{JK}^I - \Lambda_{JK}^I$. Поле (2.29) является тензорным полем третьего ранга, в чем можно убедиться, сопоставив законы преобразования коэффициентов связностей Γ и Λ : слагаемые, соответствующие вторым частным производным, при вычитании взаимно уничтожаются. Следуя терминологии, предложенной в работе [6], назовем поле $\mathbf{D}$ тензором неоднородности.

В общем случае тензор неоднородности $\mathbf{D}$ не является симметричным, а его антисимметричная часть

$$D_{[JK]}^I = \frac{1}{2}(D_{JK}^I - D_{KJ}^I) \quad (2.30)$$

пропорциональна кручению связности Γ . Действительно,

$$D_{JK}^I = \Gamma_{JK}^I - \Gamma_{KJ}^I + \Gamma_{KJ}^I - \Lambda_{KJ}^I = \mathfrak{T}(\Gamma)_{JK}^i + D_{KJ}^i,$$

что влечет

$$2D_{[JK]}^I = \mathfrak{T}(\Gamma)_{JK}^I.$$

Таким образом, тензор (2.29) можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathfrak{T}(\Gamma) + \text{Sym } \mathbf{D}, \quad (2.31)$$

где $\text{Sym } \mathbf{D}$ — соответствующая симметричная часть.

12°. Условие совместности в терминах тензора неоднородности. Согласно определению (2.29) тензора неоднородности, условие совместности (2.20) может быть записано в окончательном виде:

$$D(\Gamma, \Lambda) = 0 \quad \text{или} \quad D_{JK}^I = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (2.32)$$

Это необходимое (а в случае односвязности $\mathfrak{S}_R$ и достаточное) условие совместности пары $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Заметим, что в случае выполнения условия (2.32) из равенства (2.31) следует, что $\mathfrak{T}(\Gamma) = 0$, т. е. поле локальных деформаций $\mathbf{H}_1$ совместно. Этот результат находится в полном соответствии с установленным выше свойством, согласно которому совместность второго порядка влечет совместность первого порядка. Таким образом, в терминах полей кручения и неоднородности предложенную классификацию совместности деформаций можно записать следующим образом:

- а) пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ имеет первый порядок совместности, если $\mathfrak{T}(\Gamma) = 0$, но $D \neq 0$,
- б) пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ имеет второй порядок совместности, если $D = 0$,
- в) пара $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ несовместна, если $\mathfrak{T}(\Gamma) \neq 0$ и $D \neq 0$.

2.4. Неевклидова отсчетная форма

13°. Материальная связность. Связности Вайценбока Γ [1, формула (3.18)], Леви-Чивита L [1, формула (3.32)] и Λ (2.19) могут служить примерами материальных связностей на $\mathfrak{S}_R$. Каждой из них отвечает своя неевклидова отсчетная форма. Вместе с тем можно рассматривать и комбинации этих трех связностей, образуя разнообразные поля. Действительно, например, подберем такую связность Δ , чтобы были выполнены следующие условия:

- а) кручение Δ совпадает с кручением Γ ,
- б) кривизна Δ отлична от нуля,
- в) в случае совместных деформаций связность Δ является евклидовой связностью.

Простейшим вариантом является связность, определяемая формулой

$$\Delta := L + D, \quad \text{или в компонентах} \quad \Delta_{JK}^I := L_{JK}^I + D_{JK}^I. \quad (2.33)$$

Здесь D — тензор неоднородности (2.29). В явном виде, принимая во внимание, что компоненты материальной метрики G определены равенством $G_{IJ} = \delta_{ij} H_I^i H_J^j$, а также используя формулы [1, (3.18)] и (2.19), формулу (2.33) можно записать как

$$\Delta_{JK}^I = \frac{G^{IS}}{2} (\partial_J G_{SK} + \partial_K G_{JS} - \partial_S G_{JK}) + [\bar{\mathbf{H}}_1]_i^I (\partial_J H_K^i - S_{JK}^i). \quad (2.34)$$

Вклад второго градиента в геометрическую структуру представлен полями S_{JK}^i , которые наряду с H_K^i определяют локальную гипердеформацию $\mathbf{H}_2$.

Поскольку первое слагаемое в (2.33) является связностью, а второе — тензором третьего ранга, то, составляя закон преобразования для полей Δ_{JK}^I , можно убедиться в том, что они действительно являются коэффициентами связности на $\mathfrak{S}_R$. Полученная связность удовлетворяет требованиям а)–в), указанным выше. В самом деле, поскольку связности L и Λ симметричны, то

$$\mathfrak{T}(\Delta) = \mathfrak{T}(\Gamma),$$

то есть кручение связности Δ совпадает с кручением связности Γ . Кроме того, кривизна $\mathfrak{R}(\Delta)$ связности Δ отлична от нуля, будучи представленной в компонентах выражением

$$\mathfrak{R}(\Delta)_{ABC}^I = \mathfrak{R}(L)_{ABC}^I + \mathfrak{R}(D)_{ABC}^I + L_{BC}^E D_{AE}^I + D_{BC}^E L_{AE}^I - L_{AC}^E D_{BE}^I - D_{AC}^E L_{BE}^I.$$

Здесь $\mathfrak{R}(L)$ — кривизна, порожденная тензором Леви-Чивита, а $\mathfrak{R}(D)$ — формальное выражение, которое представляет «кривизну», порожденную тензором D . Наконец, если деформации совместны, то $D = 0$ и потому связность Δ совпадает со связностью Леви-Чивита. Но связность Леви-Чивита в этом случае сама порождается совместными деформациями, и потому ее кривизна равна нулю. Следовательно, в случае совместных деформаций Δ является евклидовой связностью.

Связность Δ можно в определенном смысле рассматривать как модификацию связности Леви-Чивита L для случая второго градиента. Аналогичная модификация связности Вайценбока Γ приводит к полю

$$\tilde{\Delta} := \Gamma + D, \quad \text{или в компонентах} \quad \tilde{\Delta}_{JK}^I := \Gamma_{JK}^I + D_{JK}^I. \quad (2.35)$$

В явном виде поле (2.35) представлено выражением

$$\tilde{\Delta}_{JK}^I = [\mathbf{H}_1]_i^I (2\partial_J H_K^i - S_{JK}^i). \quad (2.36)$$

Рассуждениями, аналогичными тем, что касались поля Δ , можно установить, что поле $\tilde{\Delta}$ также является связностью на $\mathfrak{S}_R$. Эта связность удовлетворяет свойствам б) и в), и с точностью до множителя удовлетворяет свойству а):

$$\mathfrak{T}(\tilde{\Delta}) = 2\mathfrak{T}(\Gamma).$$

В рамках физических приложений геометрия, определяемая связностью (2.33) (или (2.35)), могла бы быть полезна в случае одновременного наличия дислокаций, дисклинаций и точечных дефектов¹³ в кристалле. Отметим, что, по-видимому, первое указание на то, что в рамках второго градиента можно эффективно смоделировать наличие дислокаций и дисклинаций, содержится в работе [22].

14°. Структура неевклидовой формы. Связность Δ , определенная согласно формуле (2.33), материальная метрика $\mathbf{G}$, заданная формулой [1, формула (3.28)], и соответствующая метрике форма объема $\mu = dV_{\mathbf{G}}$ задают на многообразии $\mathfrak{S}_R$ структуру пространства с неевклидовой связностью:

$$\mathbf{S}_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, dV_{\mathbf{G}}, \Delta). \quad (2.37)$$

Пространство $\mathbf{S}_R$ является искомой неевклидовой отсчетной формой над материальным многообразием, соответствующей теории второго градиента. Его геометрия характеризуется полями кручения $\mathfrak{T}(\Gamma)$, кривизны $\mathfrak{R}(\Delta)$ и неметричности $\mathfrak{Q}(\Delta)$. Подобно тому как это было сделано в работе [10], можно показать, что эти поля не зависят от выбора промежуточной формы $\mathbf{S}_R$.

Заменяя материальную связность (2.33) на связность (2.35), от неевклидовой формы (2.37) можно перейти к неевклидовой форме

$$\tilde{\mathbf{S}}_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, dV_{\mathbf{G}}, \tilde{\Delta}). \quad (2.38)$$

Форму $\tilde{\mathbf{S}}_R$ также следует считать искомой, поскольку в рамках построений настоящей статьи нет никакого способа предпочесть форму (2.37) форме (2.38). Следовательно, здесь возникает та же ситуация, что и для простого материала, где в качестве материальной можно выбирать как связность Вайценбока, так и связность Леви-Чивита.

2.5. Пример синтеза неевклидовой формы

15°. Семейство деформаций. Проиллюстрируем рассуждения на примере центрально-симметричного деформирования промежуточной формы

$$\mathbf{S}_R = \{X \in \mathcal{E} : R^i < \|X - o\| < R^e\}, \quad (2.39)$$

развивая соответствующий пример из [1]. Именно предположим, что определено семейство $\{\gamma^{(\rho)}\}_{\rho \in]R^i, R^e[}$ деформаций $\gamma^{(\rho)} : \mathbf{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(\rho)}$, для которого выполнены условия:

- а) при каждом значении параметра $\rho \in]R^i, R^e[$ деформация центрально-симметрична. Кроме того, для всех точек сферы $\mathcal{L}_\rho = \{X \in \mathcal{E} : \|X - o\| = \rho\}$ справедливо свойство:

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{L}_\rho : \left. \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_1} \right|_{\mathbf{F}_1 = D_X \gamma^{(\rho)}, \mathbf{F}_2 = D_X^2 \gamma^{(\rho)}} &= \mathbf{N}_1, \\ \forall X \in \mathcal{L}_\rho : \left. \frac{\partial \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{F}_2} \right|_{\mathbf{F}_1 = D_X \gamma^{(\rho)}, \mathbf{F}_2 = D_X^2 \gamma^{(\rho)}} &= \mathbf{N}_2, \end{aligned}$$

- б) в сферических координатах (r, θ, φ) каждая деформация $\gamma^{(\rho)}$ имеет представление [1, (3.35)].

16°. Синтезирование поля локальных гипердеформаций. Используя матрицу компонент первого градиента $\mathbf{F}_1^{(\rho)}$ [1, формула (3.37)], получим гиперматрицу $[\partial_K [\mathbf{F}_1^{(\rho)}]_J^i]$ частных производных от этих компонент. Ей соответствуют следующие три 3×3 -матрицы:

$$\begin{aligned} [\partial_K [\mathbf{F}_1^{(\rho)}]_J^1] &= \begin{bmatrix} \omega(\rho) f_0''(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(\rho) f_0'(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(\rho) f_0'(R) \sin \Theta \sin \Phi \\ \omega(\rho) f_0'(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(\rho) f_0(R) \sin \theta \cos \Phi & -\omega(\rho) f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi \\ -\omega(\rho) f_0'(R) \sin \Theta \sin \Phi & -\omega(\rho) f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi & -\omega(\rho) f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi \end{bmatrix}, \\ [\partial_K [\mathbf{F}_1^{(\rho)}]_J^2] &= \begin{bmatrix} \omega(\rho) f_0''(R) \sin \Theta \sin \Phi & \omega(\rho) f_0'(R) \cos \Theta \sin \Phi & \omega(\rho) f_0'(R) \sin \Theta \cos \Phi \\ \omega(\rho) f_0'(R) \cos \Theta \sin \Phi & -\omega(\rho) f_0(R) \sin \theta \sin \Phi & \omega(\rho) f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi \\ \omega(\rho) f_0'(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(\rho) f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(\rho) f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

¹³Поскольку неметричность [1, формула (3.34)] связности Δ в общем случае отлична от нуля.

$$[\partial_K \mathbf{F}_1^{(\rho)}]_J^3 = \begin{bmatrix} \omega(\rho) f_0''(R) \cos \Theta & -\omega(\rho) f_0'(R) \sin \Theta & 0 \\ -\omega(\rho) f_0'(R) \sin \Theta & -\omega(\rho) f_0(R) \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагая теперь, в соответствии с (2.13), $R = \rho$ и заменяя затем все вхождения ρ на R , приходим к матрицам:

$$\begin{aligned} [S_{JK}^1] &= \begin{bmatrix} \omega(R) f_0''(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(R) f_0'(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(R) f_0'(R) \sin \Theta \sin \Phi \\ \omega(R) f_0'(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(R) f_0(R) \sin \theta \cos \Phi & -\omega(R) f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi \\ -\omega(R) f_0'(R) \sin \Theta \sin \Phi & -\omega(R) f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi & -\omega(R) f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi \end{bmatrix}, \\ [S_{JK}^2] &= \begin{bmatrix} \omega(R) f_0''(R) \sin \Theta \sin \Phi & \omega(R) f_0'(R) \cos \Theta \sin \Phi & \omega(R) f_0'(R) \sin \Theta \cos \Phi \\ \omega(R) f_0'(R) \cos \Theta \sin \Phi & -\omega(R) f_0(R) \sin \theta \sin \Phi & \omega(R) f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi \\ \omega(R) f_0'(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(R) f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(R) f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi \end{bmatrix}, \\ [S_{JK}^3] &= \begin{bmatrix} \omega(R) f_0''(R) \cos \Theta & -\omega(R) f_0'(R) \sin \Theta & 0 \\ -\omega(R) f_0'(R) \sin \Theta & -\omega(R) f_0(R) \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

которыми, наряду с матрицей [1, (3.38)], определяется поле локальных гипердеформаций $\mathbf{H}_2$.

17°. Синтезирование геометрии. Метрический тензор $\mathbf{G}$, связность Леви-Чивита L и связность Вайценбока Γ синтезированы в рамках примера из статьи [1] и представлены формулами [1, (3.39)], [1, (3.40)] и [1, (3.42)] соответственно. В свою очередь, связность Λ определяется по (2.19) и в силу формул [1, (3.38)] и (2.40) ее отличные от нуля коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}^1 &= \frac{f_0''}{f_0'}, \quad \Lambda_{22}^1 = -\frac{f_0}{f_0'}, \quad \Lambda_{33}^1 = -\frac{f_0 \sin^2 \Theta}{f_0'}, \\ \Lambda_{12}^2 &= \Lambda_{21}^2 = \Lambda_{13}^3 = \Lambda_{31}^3 = \frac{f_0'}{f_0}, \quad \Lambda_{33}^2 = -\sin \Theta \cos \Theta, \quad \Lambda_{23}^3 = \Lambda_{32}^3 = \cot \Theta. \end{aligned}$$

Полученным выражениям для коэффициентов связностей Γ и Λ отвечает тензор неоднородности $\mathbf{D}$ с компонентами

$$D_{11}^1 = D_{12}^2 = D_{13}^3 = \frac{\omega'}{\omega}. \quad (2.41)$$

Следовательно, подобно случаю первого градиента, условие совместности поля локальных деформаций представлено равенством $\omega' = 0$.

Подстановка соотношений [1, (3.40)] и (2.41) в общую формулу (2.33) приводит к следующим выражениям для коэффициентов связности Δ :

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^1 &= \frac{f_0''}{f_0'} + 2\frac{\omega'}{\omega}, \quad \Delta_{22}^1 = -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, \quad \Delta_{33}^1 = -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0 \omega') \sin^2 \Theta}{\omega [f_0']^2}, \\ \Delta_{12}^2 &= \Delta_{13}^3 = \frac{f_0'}{f_0} + 2\frac{\omega'}{\omega}, \quad \Delta_{21}^2 = \Delta_{31}^3 = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\omega'}{\omega}, \\ \Delta_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, \quad \Delta_{23}^3 = \Delta_{32}^3 = \cot \Theta. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Кручение связности Δ совпадает с кручением связности Γ и представлено выражениями [1, формула (3.43)]. Помимо этого, в рамках рассматриваемой модельной задачи кривизна связности Δ совпадает с кривизной связности Леви-Чивита L . В частности, скалярная кривизна представлена выражением [1, формула (3.41)]. Наконец, тензор неметричности связности Δ [1, формула (3.34)] характеризуется следующими компонентами:

$$\Omega_{111} = 2\omega\omega' [f_0']^2, \quad \Omega_{122} = 2\omega\omega' f_0^2, \quad \Omega_{133} = 2\omega\omega' f_0^2 \sin^2 \Theta.$$

Соотношения [1, (3.39)] и (2.42) определяют неевклидову форму (2.37) частного вида. Мера несовместности деформаций, представленная тензором $\mathbf{D}$, одновременно характеризует отклонение геометрии от евклидовой.

3. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы для среды с микроструктурой

3.1. Микроморфный континуум

18°. Деформации. В заключение рассмотрим микроморфный континуум — среду, точки которой, наряду с трансляционными степенями свободы, имеют дополнительные степени свободы, т. е. обладают внутренней структурой. Деформация континуума представлена парой $(\gamma, \mathbf{M})$, где $\gamma \in$

$\text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S})$ — макродеформация, соответствующая деформации в рамках теории простого материала, а $\mathbf{M} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ — микродеформация, являющаяся полем обратимых линейных отображений, характеризующим изменение внутренней структуры частиц среды. Предположим, что упругий потенциал относительно промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ представлен отображением [23]

$$\mathcal{S}_R \times \text{End}(\mathcal{V}) \times \text{End}(\mathcal{V}) \times \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V})) \ni (X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) \mapsto \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Тогда отклик тела в точке $X \in \mathcal{S}_R$ характеризуется равенством

$$W = \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}(X), \mathbf{M}(X), D_X \mathbf{M}),$$

где $\mathbf{F}(X) = D_X \gamma$ — градиент макродеформации γ в точке X . Отметим, что в частном случае, если положить $\mathbf{M} = \mathbf{F}$, то приходим к среде второго градиента.

19°. Координатное представление деформаций. В паре криволинейных координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$, ассоциированных с формами $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$ соответственно, градиент макродеформации $\mathbf{F}$ представлен разложением [1, (3.4)]. Аналогичным образом в виде двухточечного разложения представим микродеформацию $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}(X) = M_I^i|_X \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^I|_X.$$

Тогда, в соответствии с формулой (2.3), для градиента $D_X \mathbf{M}$ справедливо разложение

$$D_X \mathbf{M} = \left\{ \partial_K M_J^i|_{\sigma_R(\cdot)} + M_J^l F_K^j \Gamma_{jl}^i|_{\gamma(\cdot)} - M_L^i \Gamma_{KJ}^L \right\} \Big|_X \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^J|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X.$$

В дальнейшем в качестве координат $(q^i)_{i=1}^3$ выбираются прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$.

Замечание 2. Тело с микроструктурой деформируется более сложным образом, чем простой материал. Как и в случае последнего, деформация тела с микроструктурой сопровождается изменением формы, т. е. области физического пространства, занимаемой телом. Это изменение определяется отображением γ . Однако (и в этом состоит отличие от простого материала) наряду с изменением формы меняются и положения элементов внутри микроструктуры [24], моделируемой касательным пространством к $\mathcal{S}_R$ в рамках первого приближения. Именно поэтому, независимо от γ , задано двухточечное тензорное поле $\mathbf{M}$, определяющее изменение положений элементов микроструктуры.

3.2. Семейство форм и условие совместности

20°. Гипотеза локальной разгрузки. В случае микроморфного континуума гипотеза локальной разгрузки принимается в следующем виде. Пусть фиксированы тензоры $\mathbf{N}_1 \in \text{End}(\mathcal{V})$ и $\mathbf{N}_2 \in \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, и пусть выбрана промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ вместе с упругим потенциалом (3.1). Далее предположим, что определено семейство пар $\{(\gamma^{(X)}, \mathbf{M}^{(X)})\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, состоящих из макродеформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$ и микродеформаций $\mathbf{M}^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, такое, что в любой точке $X \in \mathcal{S}_R$ выполнено условие

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{F}} &= \mathbf{N}_1, \\ \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{M}_2} &= \mathbf{N}_2. \end{aligned} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(X)}(X), \mathbf{M}_1=\mathbf{M}^{(X)}(X), \mathbf{M}_2=D_X \mathbf{M}^{(X)}} \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{F}^{(X)} = D\gamma^{(X)}$ — градиент макродеформации $\gamma^{(X)}$.

21°. Синтезирование локальных макродеформаций и микродеформаций. Опираясь на определение [1, (3.8)], синтезируем поле локальных макродеформаций $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$. В каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ локальная макродеформация $\mathbf{H}(X)$ имеет разложение [1, (3.11)], совпадающее с разложением локальной деформации в случае среды первого градиента.

По семейству $\{\mathbf{M}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ синтезируем новые тензорные поля. Прежде всего, положим

$$\mathbf{A}(X) := \mathbf{M}^{(X)}(X), \quad X \in \mathcal{S}_R. \quad (3.3)$$

Совокупности обратимых тензоров $\mathbf{A}(X)$ отвечает поле $\mathbf{A} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, которое будем полагать гладким. В координатном представлении,

$$\mathbf{A} = A_I^i \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I. \quad (3.4)$$

Далее, синтезируем тензор третьего ранга

$$\mathbf{B}(X) := D_Y \mathbf{M}^{(X)} \Big|_{Y=X}, \quad X \in \mathcal{S}_R$$

и назовем его локальной микродеформацией. Приходим к полю $\mathbf{B} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{V}; \text{End}(\mathcal{V}))$, которое также предположим гладким. Отметим, что в отличие от второго градиента макродеформации γ , это поле в общем случае не является симметричным по нижним индексам. Формула (2.3) влечет следующее представление для $\mathbf{B}(X)$, подобное (2.12):

$$\mathbf{B}(X) = \left\{ S_{KJ}^i|_{\sigma_R(\cdot)} - H_L^i|_{\sigma_R(\cdot)} \overset{Q}{\Gamma}_{KJ}^L \right\} \Big|_X \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^J|_X \otimes \mathbf{E}^K|_X, \quad (3.5)$$

в котором, однако, величины

$$S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)} := \partial_K [\mathbf{M}^{(X)}]_J^i \Big|_{\sigma_R(X)} \quad (3.6)$$

уже несимметричны по нижним индексам.

Таким образом, локальная разгрузка микроморфной среды характеризуется тройкой тензорных полей $(\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$, определяемых разложениями [1, (3.11)], (3.4) и (3.5). При фиксированных криволинейных координатах $(Q^I)_{I=1}^3$ им соответствует поле матриц $X \mapsto ([H_I^i|_{\sigma_R(X)}], [A_I^i|_{\sigma_R(X)}], [S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)}])$, где

$$\begin{aligned} \det[H_I^i|_{\sigma_R(X)}] &\neq 0, \\ \det[A_I^i|_{\sigma_R(X)}] &\neq 0, \\ S_{KJ}^i|_{\sigma_R(X)} &\neq S_{JK}^i|_{\sigma_R(X)}, \quad X \in \mathcal{S}_R. \end{aligned}$$

Кроме того, в соответствии с (3.2) выполнено свойство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{H}(X), \mathbf{M}_1=\mathbf{A}(X), \mathbf{M}_2=\mathbf{B}(X)} &= \mathbf{N}_1, \\ \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{M}_2} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{H}(X), \mathbf{M}_1=\mathbf{A}(X), \mathbf{M}_2=\mathbf{B}(X)} &= \mathbf{N}_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

во всех точках $X \in \mathcal{S}_R$.

22°. Совместность локальных деформаций. Назовем тройку $(\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ тензорных полей, обладающих свойством (3.7), совместной, если 1) существует деформация $\gamma_0 \in \text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S}_0)$ из промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ в некоторую форму $\mathcal{S}_0$, для которой выполнено равенство $\mathbf{H} = D\gamma_0$, и 2) существует поле обратимых линейных преобразований $\mathbf{M}_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ такое, что $\mathbf{A} = \mathbf{M}_0$ и $\mathbf{B} = D\mathbf{M}_0$. В этом случае для пары $(\gamma_0, \mathbf{M}_0)$ выполняется свойство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}=D_X \gamma_0, \mathbf{M}_1=\mathbf{M}_0(X), \mathbf{M}_2=D_X \mathbf{M}_0} &= \mathbf{N}_1, \\ \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{M}_2} \Big|_{\mathbf{F}=D_X \gamma_0, \mathbf{M}_1=\mathbf{M}_0(X), \mathbf{M}_2=D_X \mathbf{M}_0} &= \mathbf{N}_2, \end{aligned}$$

вытекающее из (3.7), и потому форма $\mathcal{S}_0$ является глобальной натуральной.

Как и в случае среды второго градиента, если тройка $(\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ совместна, то, в частности, совместно поле локальных деформаций $\mathbf{H}$. Потенциал [1, (3.1)], относительно которого определяется натуральное состояние, индуцирован из $\widehat{W}_3$:

$$\widehat{W}_1(X, \mathbf{F}) := \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{A}(X), \mathbf{B}(X)).$$

Однако из совместности $\mathbf{H}$ в общем случае не вытекает совместность всей тройки $(\mathbf{H}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$. Подобно среде второго градиента, можно соответствующим образом расширить терминологию.

На основании условий 1) и 2), условие совместности для среды с микроморфной кинематикой можно представить в виде совокупности равенств:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{H} &= \mathbf{0}, \\ D\mathbf{A} &= \mathbf{B}. \end{aligned}$$

В координатной форме, согласно [1, (3.11)], (3.4) и (3.5),

$$\partial_J H_K^i - \partial_K H_J^i = 0, \quad (3.8)$$

$$\partial_J A_K^i - S_{JK}^i = 0, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Заметим, что в отличие от случая второго градиента полученные соотношения независимы.

3.3. Геометрическая интерпретация условия совместности

23°. Поля Σ и Λ . Выполним следующее преобразование условия совместности (3.8)–(3.9). Поскольку матричные поля $[H_J^i]$ и $[A_J^i]$ обратимы, домножим обе части равенства (3.8) на $[\bar{H}]_i^I$, а обе части (3.9) — на $[\bar{A}]_i^I$, произведя в обоих случаях суммирование по i . Тем самым придем к следующей совокупности соотношений, эквивалентных исходным:

$$\begin{aligned} [\bar{H}]_i^I \partial_J H_K^i - [\bar{H}]_i^I \partial_K H_J^i &= 0, \\ [\bar{A}]_i^I \partial_J A_K^i - [\bar{A}]_i^I S_{JK}^i &= 0, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Задавая поля Γ_{JK}^I по формуле [1, формула (3.18)] и вводя новые поля Σ_{JK}^I по формуле, аналогичной [1, формула (3.18)],

$$\Sigma_{JK}^I := [\bar{A}]_i^I \partial_J A_K^i, \quad (3.11)$$

и поля Λ_{JK}^I по аналогии с (2.19) как

$$\Lambda_{JK}^I := [\bar{A}]_i^I S_{JK}^i, \quad (3.12)$$

можно переписать равенства (3.10) в лаконичном виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{JK}^I - \Gamma_{KJ}^I &= 0, \\ \Sigma_{JK}^I - \Lambda_{JK}^I &= 0, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

24°. Кручение и тензор неоднородности. Каждое из полей Γ_{JK}^I , Σ_{JK}^I и Λ_{JK}^I задает связность на $\mathfrak{S}_R$. Действительно, для первого поля это уже было установлено при рассмотрении среды первого градиента; второе поле рассматривается аналогично. В случае третьего поля можно дословно повторить доказательство предложения 1. Отметим, что, в отличие от своего аналога из теории второго градиента, поля (3.12) несимметричны.

Таким образом, равенства (3.13) можно записать как

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(\Gamma)_{JK}^I &= 0, \\ D_{JK}^I &= 0, \quad i, J, K = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\mathfrak{T}(\Gamma)$ — кручение связности Γ , а

$$D := \Sigma - \Lambda \quad (3.15)$$

— аналог тензора неоднородности. Тем самым показано, что в случае микроморфного континуума меры несовместности представлены независимыми полями кручения $\mathfrak{T}(\Gamma)$ и неоднородности D .

Тензор неоднородности D не симметричен по нижним индексам, а его антисимметричная часть с компонентами (2.30) пропорциональна разности кручений связностей Σ и Λ . Действительно,

$$\begin{aligned} D_{JK}^I &= \Sigma_{JK}^I - \Lambda_{JK}^I = \\ &= \Sigma_{JK}^I - \Sigma_{KJ}^I + \Sigma_{KJ}^I - \Lambda_{JK}^I = \\ &= \mathfrak{T}(\Sigma)_{JK}^I + \Sigma_{KJ}^I - \Lambda_{JK}^I = \\ &= \mathfrak{T}(\Sigma)_{JK}^I + \Sigma_{KJ}^I - \Lambda_{KJ}^I + \Lambda_{KJ}^I - \Lambda_{JK}^I = \\ &= \mathfrak{T}(\Sigma)_{JK}^I - \mathfrak{T}(\Lambda)_{JK}^I + D_{KJ}^I, \end{aligned}$$

что и приводит к равенству

$$2D_{[JK]}^I = \mathfrak{T}(\Sigma)_{JK}^I - \mathfrak{T}(\Lambda)_{JK}^I.$$

3.4. Неевклидова отсчетная форма

25°. Материальная связность. Связности Вайценбока Γ [1, формула (3.18)], Леви-Чивита L [1, формула (3.32)], и новые связности Σ (3.11), Λ (3.12) служат примерами материальных связностей на $\mathfrak{S}_R$, каждой из которых отвечает своя неевклидова отсчетная форма. Наряду с этим, можно рассматривать и комбинации этих связностей. Примером может служить связность Δ , заданная формулой

$$\Delta := L + D, \quad (3.16)$$

аналогичной (2.33). В явном виде, принимая во внимание формулу (3.15), а также определения (3.11) и (3.12), получаем выражение

$$\Delta_{JK}^I = \frac{G^{IS}}{2} (\partial_J G_{SK} + \partial_K G_{JS} - \partial_S G_{JK}) + [\bar{A}]_i^I (\partial_J A_K^i - S_{JK}^i). \quad (3.17)$$

Кручение связности Δ определяется равенством

$$\mathfrak{T}(\Delta) = \mathfrak{T}(\Sigma) - \mathfrak{T}(\Lambda),$$

а кривизна в общем случае отлична от нуля.

Альтернативную связность на $\mathfrak{S}_R$ можно получить, если вместо связности Леви-Чивита L использовать связность Вайценбока Γ . Действительно, положим

$$\tilde{\Delta} := \Gamma + D. \quad (3.18)$$

По форме построенная связность напоминает связность (2.35), однако, если раскрыть определения входящих в нее полей, то выражение для ее коэффициентов имеет иной вид:

$$\tilde{\Delta}_{JK}^I = [\tilde{H}_1]_i^I \partial_J H_K^i + [\tilde{A}]_i^I (\partial_J A_K^i - S_{JK}^i). \quad (3.19)$$

Кручение связности (3.18) определяется формулой

$$\mathfrak{T}(\tilde{\Delta}) = \mathfrak{T}(\Gamma) + \mathfrak{T}(\Sigma) - \mathfrak{T}(\Lambda).$$

Заметим, что если локальные деформации совместны (т. е. выполнены равенства (3.14)), то связность, определяемая формулой (3.16) (или (3.18)), является евклидовой. Поэтому она также может быть полезна для моделирования несовместных деформаций, возникающих в средах с дефектами.

Замечание 3. В частном случае, когда микродеформация полагается равной градиенту деформации, теория среды с микроструктурой сводится к теории среды второго градиента. Тогда формула (3.17) переходит в формулу (2.34), а формула (3.19) — в формулу (2.36).

26°. Структура неевклидовой формы. Связность Δ (3.16), материальная метрика G [1, формула (3.28)], и соответствующая метрике форма объема $\mu = dV_G$ вводят на многообразии $\mathfrak{S}_R$ структуру пространства с неевклидовой связностью:

$$\mathbf{S}_R = (\mathfrak{S}_R, G, dV_G, \Delta). \quad (3.20)$$

Пространство $\mathbf{S}_R$ является примером неевклидовой отсчетной формы над материальным многообразием, соответствующей континууму с микроструктурой.

Если вместо материальной связности (3.16) использовать связность (3.18), то придем к альтернативному представлению неевклидовой формы:

$$\tilde{\mathbf{S}}_R = (\mathfrak{S}_R, G, dV_G, \tilde{\Delta}). \quad (3.21)$$

Как и форма (3.20), синтезированная форма (3.21) в равной степени пригодна для моделирования глобального натурального состояния тела с микроструктурой. Выбор определенной формы требует иных соображений, выходящих за рамки статьи.

3.5. Расширенное описание для тела с микроструктурой

27°. Материальное и физическое расслоения. В силу наличия дополнительного тензорного поля M , не связанного с преобразованием форм γ , кинематика сред с микроструктурой отличается от кинематики простого материала и сред второго градиента. В этой связи целесообразно поставить вопрос о том, можно ли, поменяв соответствующим образом описание форм, представить деформацию среды с микроструктурой как изменение форм, понимаемых в расширенном смысле. Ответ на этот вопрос положительный.

Действительно, естественным формализмом, пригодным для построения расширения форм, является теория расслоений, восходящая к работам Фельдбау, Эрсмана и Стигнода¹⁴ [27–29]. В рамках этого формализма над отсчетной формой $\mathcal{B}$ и физическим пространством $\mathcal{E}$ выстраиваются тотальные пространства локально тривиальных расслоений с одним и тем же типовым слоем $\mathcal{F}$. В явном виде эти расслоения определены структурами [30]

$$\xi_{\mathcal{B}} = (\mathbb{B}, \mathcal{B}, \pi_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}) \quad (3.22)$$

— материальное расслоение и

$$\xi_{\mathcal{E}} = (\mathbb{E}, \mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}}, \mathcal{F}) \quad (3.23)$$

— физическое расслоение, где $\mathbb{B}$ и $\mathbb{E}$ — гладкие многообразия, представляющие тотальные пространства расслоений, а $\pi_{\mathcal{B}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{B}$ и $\pi_{\mathcal{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{E}$ — гладкие сюръективные отображения. Многообразие $\mathcal{F}$ — общий элемент структур $\xi_{\mathcal{B}}$ и $\xi_{\mathcal{E}}$ — представляет типовой слой расслоения.

¹⁴По-видимому, первое определение расслоения было дано в работе Уитни [25], хотя частные случаи использовались и ранее, например, Зейфертом [26].

Предполагается, что расслоения (3.22) и (3.23) локально тривиальны. Это означает (случай расслоения $\xi_{\mathcal{E}}$ идентичен рассмотренному далее), что для любой точки $X \in \mathcal{B}$ существуют окрестность U в $\mathcal{B}$ и диффеоморфизм $\Phi : \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{F}$, называемый локальной тривиализацией, такие, что $\text{pr}_U \circ \Phi = \pi_{\mathcal{B}}$, где $\text{pr}_U : U \times \mathcal{F} \rightarrow U$ — проекция декартова произведения на первый сомножитель. Таким образом, локально диффеоморфизм Φ должен иметь представление $\Phi(p) = (\pi_{\mathcal{B}}(p), \varphi(p))$ для некоторого гладкого отображения $\varphi : \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{F}$, свойства которого зависят от частного вида расслоения. Примеры материальных расслоений и их физическую интерпретацию можно найти в работе [31].

28°. Дополненные деформации. Тотальные пространства $\mathbb{B}$ и $\mathbb{E}$ расслоений (3.22) и (3.23) над отсчетной формой $\mathcal{B}$ и физическим пространством $\mathcal{E}$ определяют дополненную отсчетную форму и дополненное физическое пространство соответственно. Каждой форме $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ соответствует дополненная форма $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}$, определяемая как прообраз $\mathbb{S} = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\mathcal{S})$.

Дополненная деформация определяется как отображение $\kappa : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{S}$, удовлетворяющее свойству $\chi \circ \pi_{\mathcal{B}} = \pi_{\mathcal{E}} \circ \kappa$, где $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ — классическая деформация. Таким образом, в специально подобранных локальных координатах на тотальных пространствах можно записать

$$\tilde{\kappa}(Q^1, Q^2, Q^3; f^1, \dots, f^m) = (\tilde{\chi}(Q^1, Q^2, Q^3); \tau(Q^1, Q^2, Q^3; f^1, \dots, f^m)).$$

Здесь $(Q^I)_{I=1}^3$ — локальные координаты на форме $\mathcal{B}$, а $(f^a)_{a=1}^m$ — локальные координаты на типовом слое $\mathcal{F}$. Тильдами сверху обозначены координатные представления соответствующих отображений. Отображение $\tau : \mathbb{R}^{3+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ определяет тип микроструктуры.

В рамках описания микроструктуры, используемого в настоящей работе, в качестве расслоений (3.22) и (3.23) достаточно выбрать касательные расслоения. Несмотря на их тривиальность в случае трехмерных тел, они перестают быть тривиальными при рассмотрении материальных поверхностей. При таком выборе представление дополненной деформации есть не что иное, как пара [31] $(\gamma, \mathbf{M})$. Этим получен желаемый результат: формализм касательных расслоений позволяет интерпретировать пару $(\gamma, \mathbf{M})$ как одно точечное отображение между касательными пространствами.

Использование формализма расслоений приводит к необходимости модифицировать геометрический язык для описания неевклидовой отсчетной формы. Вместо теории аффинных связностей применяется более общая теория связностей на расслоениях. Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [32].

3.6. Пример синтезирования неевклидовой формы

29°. Семейство деформаций. Завершим основные построения настоящего раздела модельным примером. Предположим, что промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ является полым шаром (2.39) и, что на ней задано семейство $\{(\gamma^{(\rho)}, \mathbf{M}^{(\rho)})\}_{\rho \in]R^i, R^e[}$, состоящее из макродеформаций $\gamma^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(\rho)}$ и микродеформаций $\mathbf{M}^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$. Это семейство подчиняется следующим условиям:

- а) для любого $\rho \in]R^i, R^e[$ макродеформация $\gamma^{(\rho)}$ является центрально-симметричной и имеет представление [1, (3.35)] в сферических координатах (r, θ, φ) ;
- б) для каждого $\rho \in]R^i, R^e[$ микродеформация $\mathbf{M}^{(\rho)}(X)$ в точках X сферы $\mathcal{L}_{\rho} = \{X \in \mathcal{E} : \|X - o\| = \rho\}$ является поворотом материальных элементов вокруг базисного вектора $\mathbf{E}_R(X)$ на угол $\tau(\rho)$;
- в) для всех точек сферы $\mathcal{L}_{\rho}$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{L}_{\rho} : \left. \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{D}_X \gamma^{(\rho)}, \mathbf{M}_1=\mathbf{M}^{(\rho)}(X), \mathbf{M}_2=\mathbf{D}_X \mathbf{M}^{(\rho)}} &= \mathbf{N}_1, \\ \forall X \in \mathcal{L}_{\rho} : \left. \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)}{\partial \mathbf{M}_2} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{D}_X \gamma^{(\rho)}, \mathbf{M}_1=\mathbf{M}^{(\rho)}(X), \mathbf{M}_2=\mathbf{D}_X \mathbf{M}^{(\rho)}} &= \mathbf{N}_2. \end{aligned}$$

Явный вид тензора $\mathbf{M}^{(\rho)}(X)$, задающего поворот вокруг оси, определяемой единичным вектором $\mathbf{k} = \mathbf{E}_R(X)$, на угол $\tau(\rho)$, может быть определен в соответствии с формулой Родрига [33; 34]. Относительно диадного базиса $\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^j$ тензор $\mathbf{M}^{(\rho)}(X)$ представлен матрицей

$$[\mathbf{M}^{(\rho)}(X)]_d = E + (\sin \tau(\rho))K + (1 - \cos \tau(\rho))K.K,$$

где E — единичная матрица, а

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -k^3 & k^2 \\ k^3 & 0 & -k^1 \\ -k^2 & k^1 & 0 \end{bmatrix}$$

— матрица, составленная из компонент вектора $\mathbf{k} = k^i \mathbf{c}_i$. Тогда матрица $\mathbf{M}^{(\rho)}(X)$ относительно смешанного диадного базиса $\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I$ определяется по формуле

$$[\mathbf{M}^{(\rho)}(X)] = [\mathbf{M}^{(\rho)}(X)]_d T,$$

где T — матрица перехода от базиса $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$ к базису $(\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\Theta, \mathbf{E}_\Phi)$ в точке X .
Окончательно

$$[\mathbf{M}^{(\rho)}]_J^i = \begin{bmatrix} \sin \Theta \cos \Phi & R(\cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(\rho) - \sin \Phi \sin \tau(\rho)) & -R \sin \Theta (\cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \tau(\rho)) \\ \sin \Theta \sin \Phi & R(\cos \Theta \cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos \Phi \sin \tau(\rho)) & R \sin \Theta (\cos \Phi \cos \tau(\rho) - \cos \Theta \sin \Phi \sin \tau(\rho)) \\ \cos \Theta & -R \cos \tau(\rho) \sin \Theta & R \sin^2 \Theta \sin \tau(\rho) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

30°. Синтезирование поля локальных деформаций. Поле $\mathbf{H}$ локальных макродеформаций определено в [1] и представлено формулой [1, (3.38)]. Осталось определить поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, соответствующие локальным микродеформациям. Первое из них синтезируется по формуле (3.3). Полагая в (3.24) $R = \rho$ и заменяя затем все переменные ρ на R , получаем

$$[A_J^i] = \begin{bmatrix} \sin \Theta \cos \Phi & R(\cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(R) - \sin \Phi \sin \tau(R)) & -R \sin \Theta (\cos \tau(R) \sin \Phi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \tau(R)) \\ \sin \Theta \sin \Phi & R(\cos \Theta \cos \tau(R) \sin \Phi + \cos \Phi \sin \tau(R)) & R \sin \Theta (\cos \Phi \cos \tau(R) - \cos \Theta \sin \Phi \sin \tau(R)) \\ \cos \Theta & -R \cos \tau(R) \sin \Theta & R \sin^2 \Theta \sin \tau(R) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Для синтеза поля $\mathbf{B}$ требуется еще определить скалярные поля S_{JK}^i в соответствии с (3.6). С этой целью получим гиперматрицу $[\partial_K [\mathbf{M}^{(\rho)}]_J^i]$, дифференцируя элементы матрицы (3.24). В результате придем к следующим матрицам:

$$\begin{aligned} [\partial_K [\mathbf{M}^{(\rho)}]_J^1] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(\rho) - \sin \Phi \sin \tau(\rho) & -\sin \Theta (\cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \tau(\rho)) \\ \cos \Theta \cos \Phi & -R \cos \Phi \cos \tau(\rho) \sin \Theta & -R(\cos \Theta \cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos 2\Theta \cos \Phi \sin \tau(\rho)) \\ -\sin \Theta \sin \Phi & -R(\cos \Theta \cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos \Phi \sin \tau(\rho)) & R \sin \Theta (\cos \Theta \sin \Phi \sin \tau(\rho) - \cos \Phi \cos \tau(\rho)) \end{bmatrix}, \\ [\partial_K [\mathbf{M}^{(\rho)}]_J^2] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos \Theta \cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos \Phi \sin \tau(\rho) & \sin \Theta (\cos \Phi \cos \tau(\rho) - \cos \Theta \sin \Phi \sin \tau(\rho)) \\ \cos \Theta \sin \Phi & -R \cos \tau(\rho) \sin \Theta \sin \Phi & R(\cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(\rho) - \cos 2\Theta \sin \Phi \sin \tau(\rho)) \\ \cos \Phi \sin \Theta & R(\cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(\rho) - \sin \Phi \sin \tau(\rho)) & -R \sin \Theta (\cos \tau(\rho) \sin \Phi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \tau(\rho)) \end{bmatrix}, \\ [\partial_K [\mathbf{M}^{(\rho)}]_J^3] &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \tau(\rho) \sin \Theta & \sin^2 \Theta \sin \tau(\rho) \\ -\sin \Theta & -R \cos \Theta \cos \tau(\rho) & R \sin 2\Theta \sin \tau(\rho) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из них при $\rho = R$ вытекают представления для искомых функций:

$$\begin{aligned} [S_{KJ}^1] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(R) - \sin \Phi \sin \tau(R) & -\sin \Theta (\cos \tau(R) \sin \Phi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \tau(R)) \\ \cos \Theta \cos \Phi & -R \cos \Phi \cos \tau(R) \sin \Theta & -R(\cos \Theta \cos \tau(R) \sin \Phi + \cos 2\Theta \cos \Phi \sin \tau(R)) \\ -\sin \Theta \sin \Phi & -R(\cos \Theta \cos \tau(R) \sin \Phi + \cos \Phi \sin \tau(R)) & R \sin \Theta (\cos \Theta \sin \Phi \sin \tau(R) - \cos \Phi \cos \tau(R)) \end{bmatrix}, \\ [S_{KJ}^2] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos \Theta \cos \tau(R) \sin \Phi + \cos \Phi \sin \tau(R) & \sin \Theta (\cos \Phi \cos \tau(R) - \cos \Theta \sin \Phi \sin \tau(R)) \\ \cos \Theta \sin \Phi & -R \cos \tau(R) \sin \Theta \sin \Phi & R(\cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(R) - \cos 2\Theta \sin \Phi \sin \tau(R)) \\ \cos \Phi \sin \Theta & R(\cos \Theta \cos \Phi \cos \tau(R) - \sin \Phi \sin \tau(R)) & -R \sin \Theta (\cos \tau(R) \sin \Phi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \tau(R)) \end{bmatrix}, \\ [S_{KJ}^3] &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \tau(R) \sin \Theta & \sin^2 \Theta \sin \tau(R) \\ -\sin \Theta & -R \cos \Theta \cos \tau(R) & R \sin 2\Theta \sin \tau(R) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

31°. Синтезирование геометрии. Поскольку метрический тензор $\mathbf{G}$, связность Леви-Чивита L и связность Вайценбока Γ определяются по полю локальных макродеформаций $\mathbf{H}$, то их выражения известны и представлены формулами [1, (3.39), (3.40), (3.42)] соответственно. Новыми являются выражения для связностей Σ , Λ и результирующей связности Δ .

Коэффициенты связности Σ определяются в соответствии с общей формулой (3.11). Принимая во внимание выражение (3.25) для поля $\mathbf{A}$, приходим к равенствам (приведены только те функции, которые отличны от нуля)

$$\begin{aligned} \Sigma_{22}^1 &= -R \cos \tau(R), & \Sigma_{23}^1 &= R \sin \Theta \sin \tau(R), & \Sigma_{32}^1 &= -R \sin \Theta \sin \tau(R), \\ \Sigma_{33}^1 &= -R \cos \tau(R) \sin^2 \Theta, & \Sigma_{12}^2 &= \Sigma_{13}^3 = \frac{1}{R}, & \Sigma_{13}^2 &= -\sin \Theta \tau'(R), \\ \Sigma_{21}^2 &= \frac{\cos \tau(R)}{R}, & \Sigma_{31}^2 &= \frac{\sin \Theta \sin \tau(R)}{R}, & \Sigma_{23}^2 &= -\cos \Theta \sin \Theta, \\ \Sigma_{12}^3 &= \csc \Theta \tau'(R), & \Sigma_{21}^3 &= -\frac{\csc \Theta \sin \tau(R)}{R}, & \Sigma_{23}^3 &= \Sigma_{32}^3 = \cot \Theta, & \Sigma_{31}^3 &= \frac{\cos \tau(R)}{R}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из представленных выражений следует, что связность Σ несимметрична, т. е. обладает ненулевым кручением. Отметим, что последнее отлично от кручения связности Γ .

Связность Λ определяется согласно формуле (3.12). Учитывая соотношение (3.25) для поля $\mathbf{A}$ и

формулу (3.26), определяющую частный вид полей S_{JK}^i , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Lambda_{22}^1 &= -R \cos \tau(R), \quad \Lambda_{23}^1 = R \sin \Theta \sin \tau(R), \quad \Lambda_{32}^1 = -R \sin \Theta \sin \tau(R), \\ \Lambda_{33}^1 &= -R \cos \tau(R) \sin^2 \Theta, \quad \Lambda_{12}^2 = \Lambda_{13}^3 = \frac{1}{R}, \\ \Lambda_{21}^2 &= \frac{\cos \tau(R)}{R}, \quad \Lambda_{31}^2 = \frac{\sin \Theta \sin \tau(R)}{R}, \quad \Lambda_{33}^2 = -\cos \Theta \sin \Theta, \\ \Lambda_{21}^3 &= -\frac{\csc \Theta \sin \tau(R)}{R}, \quad \Lambda_{23}^3 = \Lambda_{32}^3 = \cot \Theta, \quad \Lambda_{31}^3 = \frac{\cos \tau(R)}{R}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Несмотря на то что большинство соответствующих коэффициентов связностей Σ и Λ совпадает, между ними все же есть отличия друг от друга. Например, $\Lambda_{13}^2 = 0$, в то время как $\Sigma_{13}^2 = -\sin \Theta \tau'(R)$. Мера отличия связностей друг от друга представлена тензором неоднородности (3.15), отличные от нуля компоненты которого, в соответствии с (3.27) и (3.28), имеют вид:

$$D_{13}^2 = -\sin \Theta \tau'(R), \quad D_{12}^3 = \csc \Theta \tau'(R). \quad (3.29)$$

Следовательно, с учетом выражений [1, (3.43)] для кручения связности Γ условия совместности (3.14) локальных деформаций в рассматриваемом модельном случае имеют вид

$$\omega' = 0 \quad \text{и} \quad \tau' = 0.$$

Подстановка соотношений [1, (3.40)] для коэффициентов связности Леви-Чивита и равенств (3.29) в общую формулу (3.16) приводит к следующим выражениям для коэффициентов связности Δ :

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^1 &= \frac{\omega'}{\omega} + \frac{f_0''}{f_0'}, \quad \Delta_{22}^1 = -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, \quad \Delta_{33}^1 = -\frac{f_0 \sin^2 \Theta (\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, \\ \Delta_{12}^2 &= \Delta_{21}^2 = \Delta_{13}^3 = \Delta_{31}^3 = \frac{\omega'}{\omega} + \frac{f_0'}{f_0}, \quad \Delta_{13}^2 = -\sin \Theta \tau'(R), \quad \Delta_{33}^2 = -\cos \Theta \sin \Theta, \\ \Delta_{12}^3 &= \csc \Theta \tau'(R), \quad \Delta_{23}^3 = \Delta_{32}^3 = \cot \Theta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Кручение связности Δ отлично от нуля и представлено следующими компонентами:

$$\mathfrak{T}_{13}^2 = -\mathfrak{T}_{31}^2 = -\sin \Theta \tau'(R), \quad \mathfrak{T}_{12}^3 = -\mathfrak{T}_{21}^3 = \csc \Theta \tau'(R).$$

Кривизна связности Δ также отлична от нуля. В частности, скалярная кривизна имеет вид [1, (3.41)]. Неметричность равна нулю.

Формулы [1, (3.39)] и (3.30) определяют неевклидову форму (3.20). Меры несовместности деформаций, представленные полем кручения связности Γ и тензором неоднородности D , одновременно характеризуют отличие геометрии от евклидовой.

Заключение

Геометрический метод, изложенный в статье [1], обобщен в настоящей работе на тела с расширенной кинематикой. Показано, что благодаря дополнительным полям A_I^i и S_{JK}^i , определяемым спецификой расширенной кинематики, в таких телах имеется больше вариантов для синтеза геометрии. Сводка результатов представлена в таблице. Ее строки содержат ссылки на явные представления материаль-

Таблица

Различные материальные связности

Table

Various material connections

	Γ	L	Σ	Λ	Δ	$\tilde{\Delta}$
Простой материал	[1, (3.18)]	[1, (3.32)]	-	-	-	-
Второй градиент	[1, (3.18)]	[1, (3.32)]	-	(2.19)	(2.34)	(2.36)
Микроструктура	[1, (3.18)]	[1, (3.32)]	(3.11)	(3.12)	(3.17)	(3.19)

ных связностей. Во всех трех случаях кинематики, рассмотренных в работе, связности Вайценбока Γ и Леви-Чивита L вычисляются по одним и тем же формулам. Связности Σ и Λ могут быть определены лишь для тел с расширенной кинематикой, поскольку вычисление их коэффициентов требует знания дополнительных полей A_I^i и S_{JK}^i . Наконец, связности Δ и $\tilde{\Delta}$ служат расширениями связностей Леви-Чивита и Вайценбока. В рамках физических приложений они могут быть полезны для геометрического моделирования тел с дислокациями и дисклинациями, поскольку их кручение и кривизна — плотности дислокаций и дисклинаций, — отличны от нуля.

Благодарности

Автор работы благодарит С.А. Лычева и А.Л. Левитина за обсуждения и критические замечания по содержанию статьи.

Литература

- [1] Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть I. Геометрические методы // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, 4. С. 26–53.
- [2] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: <https://libcats.org/book/789336>.
- [3] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [4] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 33–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [5] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Vol. 35, Number 7. Pp. 1727–1739. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [6] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [7] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2012. Vol. 205, No. 1. Pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [8] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 585–604. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20181632>. EDN: <https://elibrary.ru/qzqmwtd>.
- [9] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no. 8. Pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [10] Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 53–87. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>.
- [11] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. URL: <https://libcats.org/book/444677>.
- [12] Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. Москва: Наука, 1960. 207 с. URL: <https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893x11f8549212671>.
- [13] Картан Э. Геометрия римановых пространств. Москва: Книжный дом «Либроком», 2010. 248 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=444675>.
- [14] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012. 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [15] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 17. Pp. 85–112. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253050>.
- [16] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity // Journal of elasticity and the physical science of solids. 2002. Vol. 67. Pp. 205–227. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024926609083>.
- [17] Шварц Л. Анализ. Т. 1. Москва: Мир, 1972. 824 с. URL: <https://klex.ru/14z8>.
- [18] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. Москва: URSS, 2017. 400 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>.
- [19] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [20] Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993. 292 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [21] Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: <https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars>.
- [22] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.

- [23] Лычев С.А. Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости // Вестник Самарского государственного университета. 2007. № 4(54). С. 225–262. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071>. EDN: <https://elibrary.ru/hzzzon>.
- [24] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16. Pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [25] Whitney H. Sphere spaces // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1935. Vol. 21, No. 7. Pp. 462–468. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.21.7.464>.
- [26] Seifert H. Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume // Acta Mathematica. 1933. Vol. 60. Pp. 147–238. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02398271>.
- [27] Feldbau J. Sur la classification des espaces fibrés // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1939. Vol. 208. Pp. 1621–1623. URL: <https://zbmath.org/0021.16304>.
- [28] Ehresmann C. Sur les espaces fibrés différentiables // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1947. Vol. 224. Pp. 1611–1612. URL: <https://zbmath.org/0029.42001>.
- [29] Стинрод Н. Топология косых произведений. Москва: Издательство иностранной литературы, 2010. 272 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=44439&pg=1>.
- [30] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. Москва: URSS, 2017. 504 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html>.
- [31] Лычев С.А., Койфман К.Г., Дигилов А.В. Нелинейные динамические уравнения для упругих микроморфных тел и оболочек. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 1. С. 81–103. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-81-103>.
- [32] Nguyen V.H., Casale G., Le Marrec L. On tangent geometry and generalised continuum with defects // Mathematics and Mechanics of Solids. 2022. Vol. 27, Issue 7. Pp. 1255–1283. <https://doi.org/10.1177/10812865211059222>.
- [33] Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1961. 824 с. URL: <https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lure1961ru.djvu>.
- [34] Liang K.K. Efficient conversion from rotating matrix to rotation axis and angle by extending Rodrigues' formula // arXiv, 2018. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.02999>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76

Submitted: 25.08.2023

Revised: 04.10.2023

Accepted: 05.12.2023

K.G. Koifman

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

REFERENCE SHAPE OF BODIES WITH ENHANCED KINEMATICS. PART II. SECOND GRADIENT AND MICROSTRUCTURE¹⁵

ABSTRACT

The work develops differential-geometric methods for modeling finite incompatible deformations of hyperelastic solids with enhanced kinematics. The response of such bodies, along with the standard kinematic field represented by the deformation gradient, is characterized by additional tensor fields. As such, the paper considers: 1) the second deformation gradient and 2) the tensor field of the second rank, modeling the microstructure of the body. For each of these two cases, compatibility conditions are obtained and their geometric interpretation is proposed. Geometry is synthesized on the material manifold representing a body with enhanced kinematics. The corresponding affine connection has non-zero torsion and curvature, which can be useful for modeling a body with dislocations and disclinations.

Key words: hyperelasticity; body with enhanced kinematics; second gradient; microstructure; incompatible deformations; residual stresses; non-Euclidean geometry; material metric; material connection; curvature; torsion; non-metricity.

¹⁵This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project № 22-21-00457).

Citation. Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part II. Second gradient and microstructure. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 54–76. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Koifman K.G., 2023

Konstantin G. Koifman — tutor in mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

References

- [1] Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part I. Geometric methods. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023. vol. 29, no. 4. pp. 26–53.
- [2] Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, no. 4, pp. 18–334. Available at: <https://libcats.org/book/789336>. (In Russ.)
- [3] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, Vol. 27, No. 1, Pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [4] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, Vol. 27, No. 1, Pp. 33–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [5] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, Vol. 35, Number 7, Pp. 1727–1739. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [6] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [7] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, Vol. 205, no. 1, Pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [8] Lychev S.A., Manzhirrov A.V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 4, pp. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011>. EDN: <https://elibrary.ru/wqyump>. (In English; original in Russian)
- [9] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, Vol. 42, No. 8, Pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [10] Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 53–87. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>. (In Russ.)
- [11] Kartan E. Spaces of affine, projective and conformal connection. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1962, 210 p. Available at: <https://libcats.org/book/444677>. (In Russ.)
- [12] Kartan E. Riemannian geometry in an orthogonal frame. Moscow: Nauka, 1960, 207 p.. URL: <https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893xl1f8549212671>. (In Russ.)
- [13] Kartan E. Geometry of Riemannian spaces. Moscow: Knizhnyi dom «Librokom», 2010, 248 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=444675>. (In Russ.)
- [14] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012, 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [15] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 17, pp. 85–112. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253050>.
- [16] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity. *Journal of Elasticity*, 2002, vol. 67, pp. 205–227. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024926609083>.
- [17] Schwartz L. Analysis. Vol. 1. Moscow: Mir, 1972, 824 p. Available at: <https://klex.ru/14z8>. (In Russ.)
- [18] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester II. Linear algebra. Moscow: URSS, 2017, 400 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>. (In Russ.)
- [19] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.

- [20] Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993, 292 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [21] Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: <https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars>.
- [22] Elżanowski M., Epstein M. The symmetry group of second-grade materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, vol. 27, issue 4, pp. 635–638. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(92\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0020-7462(92)90068-I).
- [23] Lychev S.A. On conservation laws of micromorphic nondissipative thermoelasticity. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 4(54), pp. 225–262. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071>. EDN: <https://elibrary.ru/hzzzon>. (In Russ.)
- [24] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, Vol. 16, Pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [25] Whitney H. Sphere spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1935, vol. 21, no. 7, pp. 462–468. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.21.7.464>.
- [26] Seifert H. Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume. *Acta Mathematica*, 1933, vol. 60, pp. 147–238. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02398271>.
- [27] Feldbau J. Sur la classification des espaces fibrés. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1939, vol. 208, pp. 1621–1623. Available at: <https://zbmath.org/0021.16304>.
- [28] Ehresmann C. Sur les espaces fibrés différentiables. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1947, vol. 224, pp. 1611–1612. Available at: <https://zbmath.org/0029.42001>.
- [29] Steenrod N.E. The topology of fibre bundles. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 2010, 272 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=444395&pg=1>. (In Russ.)
- [30] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester IV. Differential geometry. Moscow: URSS, 2017, 504 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html>. (In Russ.)
- [31] Lychev S.A., Koifman K.G., Digilov A.V. Nonlinear dynamic equations for elastic micromorphic solids and shells. Part I. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, issue 1, pp. 81–103. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-81-103>.
- [32] Nguyen V.H., Casale G., Le Marrec L. On tangent geometry and generalised continuum with defects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2022, Vol. 27, no. 7, Pp. 1255–1283. <https://doi.org/10.1177/10812865211059222>.
- [33] Lurie A.I. Analytical Mechanics. Moscow: GIFML, 1961, 824 p. Available at: <https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lure1961ru.djvu>. (In Russ.)
- [34] Liang K.K. Efficient conversion from rotating matrix to rotation axis and angle by extending Rodrigues' formula. *arXiv*, 2018. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.02999>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 12.09.2023
после рецензирования: 17.11.2023
принятия статьи: 05.12.2023

С.А. Лычев

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва 119526, Российская Федерация
E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

А.В. Дигилов

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва 119526, Российская Федерация
E-mail: avdigilov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6892-7740>

Н.А. Пивоваров

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва 119526, Российская Федерация
E-mail: pivovarov.na@bmstu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7149-4102>

ИЗГИБ КРУГОВОГО ДИСКА: ОТ ЦИЛИНДРА К УЛЬТРАТОНКОЙ МЕМБРАНЕ¹

АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются способы математического моделирования напряженно-деформированного состояния кругового диска при различных отношениях его толщины к радиусу, которые варьируются от 1 до 10^{-3} . Для достаточно толстых пластин используется решение трехмерной линейной теории упругости, для пластин средней толщины – решение линейных уравнений изгиба в рамках гипотез Кирхгофа–Лява и нелинейных уравнений Фешля–фон Кармана, для ультратонких пластин – нелинейные уравнения Адкинса–Ривлина–Грина. Проведен сравнительный анализ решений и выделены интервалы относительных толщин, в которых рассматриваемые решения адекватно описывают процесс деформирования. Этот результат позволяет выбрать метод математического моделирования напряженно-деформированного состояния круглых пластин, используемых в микроэлектромеханических системах, наиболее подходящий для их относительного размера.

Ключевые слова: круговой диск; короткий цилиндр; толстая плита; тонкая пластина; ультратонкая мембрана; замкнутое решение; уравнения Фешля–фон Кармана; нелинейная модель мембран.

Цитирование. Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А., 2023

Сергей Александрович Лычев — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Александр Вячеславович Дигилов — аспирант, младший научный сотрудник, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00866).

Никита Алексеевич Пивоваров — аспирант, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Введение

Расчет и оптимизация физико-механических параметров круглых пластин и мембран часто используются при разработке разнообразных микросистем. Как правило, при проектировании микроэлектронных устройств основное внимание уделяется электромагнитным полям и связанным с ними параметрам. Однако при разработке микроэлектромеханических систем (МЭМС) необходимо также учитывать механические деформации и напряжения. В зависимости от назначения упругие элементы МЭМС могут представлять собой как пластины значительной относительной толщины (например, сенсоры акселерометров), так и ультратонкие мембраны (например, газоанализаторы) [1; 2]. При таком разбросе параметров выбор уравнений и их решений для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) в каждом конкретном случае является неочевидным. Ситуация становится более сложной при переходе к ультратонким изгибаемым элементам, изгиб которых сильно зависит от натяжений в срединной плоскости, причем эта зависимость существенно нелинейная [3]. Кроме того, в силу особенностей технологических процессов изготовления ультратонких элементов (напыления, травления, роста), в них возникают значительные остаточные напряжения [4–6]. В этой связи выбор адекватной модели и решения соответствующей начально-краевой задачи представляет актуальный вопрос в современной теории расчета тонкостенных систем. Ему посвящена настоящая статья.

Основным результатом является “шкала относительных толщин”, на которой отмечены интервалы применимости четырех математических моделей:

- линейной трехмерной теории упругости;
- теории изгиба Кирхгофа–Лява;
- нелинейной теории изгиба Фешля–фон Кармана;
- нелинейной теории гиперупругих мембран Адкинса–Ривлина–Грина.

Для всех четырех теорий построены в замкнутой форме решения модельных краевых задач об осесимметричном деформировании жестко закрепленного кругового диска.

1. Деформируемый диск

В статье рассматривается осесимметричное деформирование кругового диска толщиной h и радиуса R , выполненного из упругого материала. Боковая поверхность диска жестко закреплена, а его основания свободны от напряжений (рис. 1.1). Эту задачу целесообразно рассматривать в цилиндрических координатах (r, φ, z) , которые связаны с декартовыми координатами (x, y, z) следующими соотношениями²:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg(y, x), \quad z = z.$$

Начало координат O поместим в центре нижнего основания диска, а ось OZ направим вдоль его оси так, чтобы координаты точек диска принадлежали множеству:

$$D = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in]0, R[, \varphi \in]0, 2\pi[, z \in]0, h[\}.$$

Векторные поля будем представлять в виде разложений по локальным базисам $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$, связанным с ортонормированным базисом $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ преобразованиями:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

В частности, векторное поле перемещений точек диска $\mathbf{u}$ имеет вид:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_z,$$

где u, w — искомые функции, представляющие размерные радиальные и осевые перемещения:

$$u :]0, R[\times]0, h[\ni (r, z) \mapsto u(r, z) \in \mathbb{R}, \quad w :]0, R[\times]0, h[\ni (r, z) \mapsto w(r, z) \in \mathbb{R}.$$

²Здесь подразумевается расширенная функция арктангенса, учитывающая квадрант угла и случай вырожденного аргумента $\arctg(y, x) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & (x = 0) \wedge (y \neq 0) \end{cases} + \frac{\pi}{2} [1 - \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y (1 + \operatorname{sgn} x) (1 - \operatorname{sgn} y)]$.

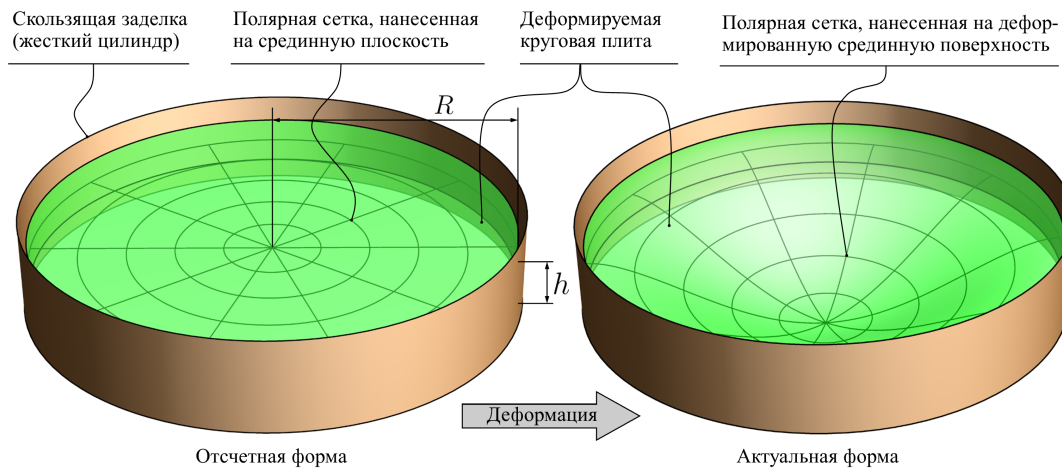


Рис. 1.1. Расчетная схема пластины
Fig. 1.1. The plate design scheme

Нагружение реализуется полем внешних объемных сил, однородным всюду, за исключением узкой кольцевой области в окрестности закрепления (рис. 1.2). В этой области, ширина которой может быть выбрана сколь угодно малой, объемная нагрузка направлена в противоположную сторону, а ее интенсивность такова, что весь диск в целом оказывается самоуравновешенным:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(r) \mathbf{e}_z = \left[p - \frac{pR^2}{R^2 - a^2} \theta(r - a) \right] \mathbf{e}_z, \quad \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathcal{P}(r) r dr d\varphi dz = 0. \quad (1.1)$$

Здесь p – постоянная объемная плотность заданного (внешнего) силового поля, a – граница кольцевой области, θ – функция Хевисайда. Нагрузка на основной части диска может быть ассоциирована, например, с внешним электростатическим воздействием, а нагрузка в кольцевой области моделирует опорную реакцию. Такая специфическая форма нагружения позволяет в дальнейшем получить более простые разложения и более эффективные для вычисления аналитические формулы, а погрешность, связанная с учетом особенностей конкретной реализации краевых условий, незначительна в силу принципа Сен-Венана [7].

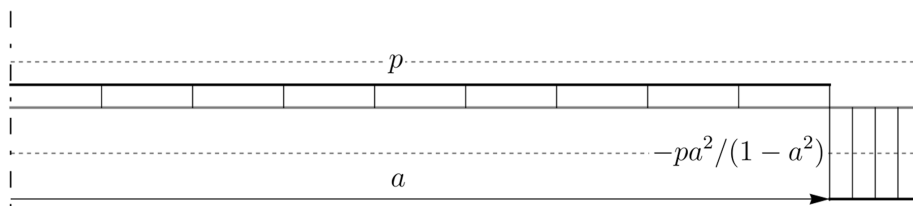


Рис. 1.2. Распределение внешних объемных сил
Fig. 1.2. Distribution of external volume forces

В рамках настоящей статьи анализируются четыре математические модели, одна из которых рассматривает материал как гиперупругий (с потенциалом Муни–Ривлина), а остальные – как линейно-упругий. Для того чтобы эти модели были согласованы, характеристики упругого и гиперупругого материалов должны быть связаны между собой. Это можно сделать, если записать гиперупругий потенциал Муни–Ривлина [8] через параметры Ламе μ , λ :

$$\mathcal{W} = \frac{\mu}{4} \left[(1 - \beta) \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + (1 + \beta) \left(\frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right] + \frac{2\mu + 3\lambda}{6} \left(\sqrt{I_3} - 1 \right)^2, \quad (1.2)$$

где β – безразмерная материальная константа второго порядка, а I_1 , I_2 , I_3 – главные инварианты левого тензора деформаций Коши–Грина³:

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T,$$

³В настоящей статье при определении результатов действия дифференциальных операторов на векторные и тензорные функции мы придерживаемся нотации Трусделла [7; 9]. Здесь $\nabla \mathbf{u}$ – линейный оператор, действующий следующим образом: $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|)$.

которые могут быть представлены в сокращенной записи следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 + 2q_1 + q_2, \\ I_2 &= 3 + 4q_1 + (2q_1^2 + q_2 - q_3) + 2(q_1q_2 - q_4) + \frac{1}{2}(q_2^2 - q_6), \\ I_3 &= 1 + 2q_1 + (2q_1^2 - q_3) + \frac{2}{3}(2q_1^3 - 3q_1q_3 + q_5) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(4q_1^2q_2 - 8q_1q_4 - q_2^2 - 2q_2q_3 + q_6 + 4q_7 + 2q_8) + (q_1q_2^2 - q_1q_6 - 2q_2q_4 + 2q_9) + \\ &\quad + \frac{1}{6}(q_2^3 - 3q_2q_6 + 2q_{10}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{tr } \nabla \mathbf{u}, & q_2 &= \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}, & q_3 &= \nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u}, \\ q_4 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}, & q_5 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}^T, & q_6 &= (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), \\ q_7 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), & q_8 &= (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T), & q_9 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), \\ q_{10} &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Для линейаризации записанных выше соотношений представим градиент перемещений в виде произведения приведенного градиента $\tilde{\nabla} \mathbf{u}$ и малого параметра, в качестве которого возьмем норму тензора $\nabla \mathbf{u}$:

$$\nabla \mathbf{u} = \epsilon \tilde{\nabla} \mathbf{u}, \quad \epsilon = \|\nabla \mathbf{u}\|, \quad \tilde{\nabla} \mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u}}{\|\nabla \mathbf{u}\|},$$

тогда нелинейные функции инвариантов, входящие в выражение потенциальной энергии (1.2), могут быть разложены в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_3^{1/3}} &= 3 + \nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} - \frac{2}{3}(\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\epsilon^2), \\ \frac{I_2}{I_3^{2/3}} &= 3 + \nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} - \frac{2}{3}(\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\epsilon^2), \\ \left(\sqrt{I_3} - 1\right)^2 &= (\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.2), можно получить линейно-упругий потенциал с точностью до $o(\epsilon^2)$:

$$\mathcal{W} = \frac{\mu}{2}(\nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}) + \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\|\nabla \mathbf{u}\|^2) = \mu(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + o(\epsilon^2),$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор малых деформаций, представляющий линейную часть тензора деформаций Грина–Сен-Венана $\mathbf{E}$, который, в свою очередь, выражается через правый тензор Коши–Грина $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \boldsymbol{\varepsilon} + o(\nabla \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}).$$

Компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ связаны с компонентами вектора $\mathbf{u}$ перемещений соотношениями Коши, которые в случае осевой симметрии записываются в цилиндрических координатах следующим образом⁴:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Для построения решения и его последующего анализа целесообразно ввести безразмерные переменные, а именно

- пространственные переменные: $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{z} = z/R$;
- перемещения: $\tilde{u} = u/R$, $\tilde{w} = w/R$;
- масштабные параметры: $\tilde{R} = 1$, $\tilde{h} = h/R$;
- модули Ламе: $\tilde{\mu} = 1$, $\tilde{\lambda} = \lambda/\mu$;
- параметры нагружения: $\tilde{p} = pR/\mu$, $\tilde{a} = a/R$.

⁴Здесь и далее прямоугольными скобками обозначена матрица оператора в фиксированном базисе.

При использовании этого набора переменных следует учесть, что все вычисляемые функции, например напряжения, и потенциальная энергия также будут безразмерны.

При решении прикладных задач используются различные совокупности материальных констант, в частности, в трехмерных задачах теории упругости традиционно используются модули Ламе, а в технической механике – модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Для единообразия в настоящей статье все материальные константы выразим через один безразмерный параметр k :

$$\tilde{\lambda} = k - 1, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\mu} = \frac{3k - 1}{k}, \quad \nu = \frac{k - 1}{2k}.$$

Для выполнения сравнительного анализа напряженного состояния, определяемого из различных решений, будем использовать эквивалентные напряжения Мизеса (корень из второго инварианта девиатора тензора напряжений):

$$\tilde{\sigma}_{\text{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi})^2 + (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}_{zz})^2 + (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr})^2 + 6\tilde{\sigma}_{rz}^2}, \quad (1.5)$$

где $\tilde{\sigma}_{rr}$, $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$, $\tilde{\sigma}_{zz}$, $\tilde{\sigma}_{rz}$ – компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}$.

В дальнейшем все соотношения и результаты будут представлены в безразмерном виде, поэтому, чтобы не усложнять систему обозначений, знак “тильда” будем опускать.

2. Решение в трехмерной постановке

Рассмотрим постановку задачи о НДС круговой плиты и ее решение в рамках линейной теории упругости. Задача об упругом цилиндре является классическим примером, допускающим аналитическое решение, различные варианты которого развивались с конца XIX века (решения Похгаммера [10], Кри [11] и их последователей⁵). Основная сложность в построении таких решений заключается в удовлетворении краевым условиям, форма которых диктуется не изначальной постановкой задачи, а возможностью разделить переменные и свести задачу для уравнений с частными производными к независимым двухточечным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. В решениях Похгаммера–Кри краевые условия специального вида, соответствующие гладко-жесткому контакту (roller contact), задаются на основаниях цилиндра, что не позволяет применить их непосредственно к рассматриваемой в статье проблеме. Однако их модификация, предложенная Файлоном [17] и развитая Сайто [18; 19], позволяет несколько иначе разделить краевые задачи на две двухточечные задачи, перенеся обременительные гладко-жесткие условия на боковую поверхность и предоставив свободу выбора условий на основаниях. При этом условия на боковой поверхности цилиндра как нельзя лучше соответствуют жесткому закреплению в терминах теории пластин, а возможная неточность его реализации (например, можно пожелать абсолютно жесткого закрепления точек цилиндрической поверхности, при котором все компоненты перемещений на нем обращаются в ноль) играет исчезающе малую роль при уменьшении относительной толщины в силу принципа Сен-Венана.

Итак, будем рассматривать задачу о конечном цилиндре при действии объемного поля сил, основания которого свободны от напряжений, а боковая поверхность свободна от касательных напряжений и при этом не может смещаться в радиальном направлении:

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right) = 0, \quad \nabla^2 w + k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = -\mathcal{P}(r), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0,h} &= (k+1) \frac{\partial w}{\partial z} + (k-1) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\ \sigma_{rz}|_{z=0,h} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{z=0,h} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Эти дифференциальные уравнения и краевые условия в совокупности определяют дифференциальный оператор, который оказывается вырожденным, т. е. обладает нулевым собственным значением, соответствующая собственная функция которого характеризует движение цилиндра как жесткого целого вдоль

⁵ Подробный литературный обзор представлен, например, в [12]. Обширный перечень работ отечественных авторов по этой теме приведен в [13; 14]. Из более поздних отечественных работ отметим серию статей, посвященных применению метода конечных интегральных преобразований к задаче о деформировании толстых плит [15; 16] и др.

его оси. Однако если правая часть (2.1) не проектируется на это собственное подпространство, то решение задачи существует. Самоуравновешенное силовое поле (1.1) удовлетворяет этому условию.

Для построения решения краевой задачи вначале заметим, что однородные уравнения, соответствующие левой части системы (2.1), допускают разделение переменных. Если искомые функции представить в виде

$$u = f_1(r) g_1(z), \quad w = f_2(r) g_2(z)$$

при соблюдении условий⁶

$$f_2' = -\alpha f_1, \quad f_1' + \frac{f_1}{r} = \alpha f_2, \quad (2.3)$$

где α – некоторая константа, то система уравнений (2.1) может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned} -\left(f_1'' + \frac{f_1'}{r} - \frac{f_1}{r^2}\right) \frac{1}{f_1} &= \frac{g_1''}{g_1} \frac{1}{k+1} - \frac{\alpha k}{k+1} \frac{g_2'}{g_1} = \lambda_1, \\ -\left(f_2'' + \frac{f_2'}{r}\right) \frac{1}{f_2} &= \frac{g_2''}{g_2} (k+1) + \alpha k \frac{g_1'}{g_2} = \lambda_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

в котором λ_1, λ_2 обозначают константы разделения. В действительности эти константы оказываются равными, поскольку из шести уравнений (2.3), (2.4) только четыре являются независимыми, и если из системы (2.3) поочередно исключать f_1, f_2 , тогда получим два уравнения, подобных (2.4):

$$f_1'' + \frac{f_1'}{r} - \frac{f_1}{r^2} = -\alpha^2 f_1, \quad f_2'' + \frac{f_2'}{r} = -\alpha^2 f_2.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha^2$. Таким образом, имеем четыре независимых дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 f_1'' + r f_1' + (\alpha^2 r^2 - 1) f_1 &= 0, & r^2 f_2'' + r f_2' + \alpha^2 r^2 f_2 &= 0, \\ g_1'' - \alpha^2 (k+1) g_1 - \alpha k g_2' &= 0, & (k+1) g_2'' - \alpha^2 g_2 + \alpha k g_1' &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

которым отвечают разделяющиеся краевые условия:

$$(k+1) \frac{g_2'}{g_1} + \frac{(k-1)}{f_2} \left(f_1' + \frac{f_1}{r}\right) \Big|_{z=0, h} = 0, \quad \frac{g_1'}{g_2} + \frac{f_2'}{f_1} \Big|_{z=0, h} = 0, \quad f_1|_{r=1} = 0, \quad f_2'|_{r=1} = 0,$$

или с учетом условий (2.3):

$$(k+1) g_2' + \alpha (k-1) g_1|_{z=0, h} = 0, \quad g_1' - \alpha g_2|_{z=0, h} = 0, \quad f_1|_{r=1} = 0, \quad f_2'|_{r=1} = 0.$$

Легко видеть, что первые два уравнения (2.5) являются уравнениями Бесселя, соответственно, первого и нулевого порядка; их общие решения могут быть представлены линейными комбинациями функций Бесселя первого и второго рода:

$$f_1 = C_1 J_1(\alpha r) + C_2 Y_1(\alpha r), \quad f_2 = C_3 J_0(\alpha r) + C_4 Y_0(\alpha r), \quad (2.6)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – неизвестные константы. Из условия регулярности решения в полюсе константы C_2, C_4 следует положить равными нулю. Константы C_1, C_3 равны друг другу в силу (2.3) и для краткости могут быть приняты равными единице, так как при разделении переменных отделенные функции определяются с точностью до множителя.

Поскольку параметр α может принимать любое значение из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (случай нулевого α будет рассмотрен отдельно), соотношения (2.6) задают континуальное множество решений, элементы которого в общем случае не удовлетворяют краевым условиям, заданным на боковой поверхности диска. Вместе с тем, если ограничить произвол в выборе параметра α только корнями трансцендентного уравнения:

$$J_1(\alpha) = 0, \quad (2.7)$$

то удастся получить счетное семейство решений, удовлетворяющих краевым условиям⁷:

$$f_{1n} = J_1(\alpha_n r), \quad f_{2n} = J_0(\alpha_n r), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Корни трансцендентного уравнения (2.7) – нули функции Бесселя первого порядка, достаточно хорошее асимптотическое приближение которых дается формулой:

$$\alpha_n \approx \frac{(\pi + 4n\pi)^2 J_2((1/4 + n)\pi)}{16 J_1((1/4 + n)\pi) - 4(\pi + 4n\pi) J_0((1/4 + n)\pi)}.$$

⁶Здесь и далее в тех случаях, когда это не приводит к неоднозначности, производные функций одной переменной обозначены штрихом.

⁷В рамках настоящей статьи 0 не включается в множество натуральных чисел.

Отдельно рассмотрим случай $\alpha = 0$ (решение для этого случая будем помечать нулевым индексом):

$$r^2 f''_{10} + r f'_{10} - f_{10} = 0, \quad r^2 f''_{20} + r f'_{20} = 0.$$

В этом случае система уравнений существенно упрощается и может быть непосредственно проинтегрирована:

$$f_{10} = \frac{C_5 r}{2} + \frac{C_6}{r}, \quad f_{20} = C_7 + C_8 \ln r.$$

В рамках рассуждений, аналогичных предыдущему случаю, могут быть определены все константы интегрирования:

$$f_{10} = 0, \quad f_{20} = 1. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.8) и (2.9), вектор-функцию $\{f_1, f_2\}$ можно представить в виде разложения по системе функций $\{(0, 1), (J_1(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r))\}$, и поскольку оператор, порождаемый уравнениями (2.1) и краевыми условиями (2.2), самосопряженный, то эта система функций составляет базис в гильбертовом пространстве двухкомпонентных вектор-функций, заданных над интервалом $(0, 1)$. Соответственно, будем искать решение исходной неоднородной системы (2.1) в виде разложений:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} g_{1n} J_1(\alpha_n r), \quad w = g_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} J_0(\alpha_n r). \quad (2.10)$$

Подстановка этих разложений в уравнения (2.1):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [g''_{1n} - \alpha^2 (k+1) g_{1n} - \alpha k g'_{2n}] J_1(\alpha_n r) &= 0, \\ (k+1) g''_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+1) g''_{2n} - \alpha^2 g_{2n} + \alpha k g'_{1n}] J_0(\alpha_n r) &= -\mathcal{P}(r), \end{aligned}$$

и краевые условия (2.2):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (g'_{1n} - \alpha g_{2n}) J_1(\alpha_n r) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ (k+1) g'_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+1) g'_{2n} + \alpha (k-1) g_{1n}] J_0(\alpha_n r) \Big|_{z=0, h} &= 0 \end{aligned}$$

приводит к уравнениям относительно коэффициентов разложений, которые сами являются функциями переменной z . Для нахождения этих функций подействуем на каждое уравнение системы операторами проектирования:

$$P_0(\mathbf{f}) = \int_0^1 \mathbf{f} \cdot (0, 1) r dr, \quad P_n(\mathbf{f}) = \int_0^1 \mathbf{f} \cdot (J_1(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r)) r dr.$$

В результате получим счетное множество систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$g''_{1n} - \alpha^2 (k+1) g_{1n} - \alpha k g'_{2n} = 0, \quad (k+1) g''_{2n} - \alpha^2 g_{2n} + \alpha k g'_{1n} = -b_n, \quad (2.11)$$

и одно уравнение для g_{20} :

$$(k+1) g''_{20} = -b_0, \quad (2.12)$$

где b_0, b_n – проекции правой части на собственные подпространства, вычисляемые по формулам:

$$b_0 = 2 \int_0^1 \mathcal{P}(r) r dr = 0, \quad b_n = \frac{2}{J_0(\alpha_n)^2} \int_0^1 \mathcal{P}(r) r J_0(\alpha_n r) dr = \frac{2pa J_1(\alpha_n a)}{\alpha_n (1-a^2) J_0(\alpha_n)^2}.$$

Аналогично спроектируем на собственные подпространства краевые условия:

$$g'_{1n} - \alpha g_{2n}|_{z=0, h} = 0, \quad (k+1) g'_{2n} + \alpha (k-1) g_{1n}|_{z=0, h} = 0, \quad (2.13)$$

$$(k+1) g'_{20}|_{z=0, h} = 0. \quad (2.14)$$

Заметим, что сходимость (в среднеквадратичном) разложений к правым частям уравнений (2.1) обеспечивается самосопряженностью задачи Штурма–Лиувилля, порождаемой первыми двумя уравнениями (2.5), однородными краевыми условиями при $r = 1$ и тем фактом, что каждое собственное значение этой задачи двукратное.

Рассмотрим решение полученных уравнений относительно функций, зависящих от переменной z . Уравнение для случая $\alpha = 0$ (2.12) может быть сразу проинтегрировано:

$$g_{20} = C_9 + C_{10}z - \frac{b_0 z^2}{2(k+1)}.$$

Из этого соотношения следует, что краевые условия (2.14) для g_{20} не могут быть удовлетворены, если b_0 отлично от нуля или, что то же самое, если объемные силы не самоуравновешены. Если же это условие выполнено, то g_{20} равняется произвольной константе, неопределяемой из краевых условий. Эта константа характеризует смещение цилиндра как жесткого целого вдоль его оси. После построения полного решения исходной неоднородной системы мы сможем выбрать эту константу так, чтобы прогиб в какой-нибудь наперед заданной точке, например, на контуре, был равен нулю.

Осталось только построить решения для систем (2.11). Общее решение для каждой системы может быть построено как сумма общего решения однородной системы:

$$\begin{aligned} g_{1n}^0 &= C_{1n}e^{\alpha z} + C_{2n}e^{-\alpha z} - C_{3n}e^{\alpha z}(k + k\alpha z) - C_{4n}e^{-\alpha z}(k - k\alpha z), \\ g_{2n}^0 &= -C_{1n}e^{\alpha z} + C_{2n}e^{-\alpha z} - C_{3n}e^{\alpha z}(2 - k\alpha z) + C_{4n}e^{-\alpha z}(2 + k\alpha z) \end{aligned} \quad (2.15)$$

и частного решения неоднородной системы, определяемого методом вариации произвольных постоянных (Лагранжа):

$$\begin{aligned} g_{1n}^* &= \frac{-b_n}{2(k+1)} \int_0^z [k(z-\zeta) \operatorname{sh} \alpha_n(z-\zeta)] d\zeta = -b_n \frac{k(\alpha_n z \operatorname{ch} \alpha_n z - \operatorname{sh} \alpha_n z)}{2(k+1)\alpha_n^2}, \\ g_{2n}^* &= \frac{-b_n}{2\alpha_n(k+1)} \int_0^z [(k+2) \operatorname{sh} \alpha_n(z-\zeta) - k\alpha_n(z-\zeta) \operatorname{ch} \alpha_n(z-\zeta)] d\zeta = \\ &= b_n \frac{k\alpha_n z \operatorname{sh} \alpha_n z + 2(1+k)(1 - \operatorname{ch} \alpha_n z)}{2(k+1)\alpha_n^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Константы интегрирования $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ определяются из краевых условий (2.13):

$$\begin{aligned} C_{1n} &= -\frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} k^2 - e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k^2 - \alpha_n h k + k + 1) - k^2 + k + 1], \\ C_{2n} &= \frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} (k^2 - k - 1) - e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k^2 - \alpha_n h k - k - 1) - k^2], \\ C_{3n} &= -\frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} k - 2e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k - k - 1) - 3k - 2] / 2, \\ C_{4n} &= \frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} (3k + 2) - 2e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k + k + 1) - k] / 2, \end{aligned}$$

где символом K_n обозначено выражение:

$$K_n = \frac{-b_n}{2\alpha_n^2 k (2e^{\alpha_n h} \alpha_n h - e^{2\alpha_n h} + 1)}.$$

Подставляя константы интегрирования в общее решение (2.15) и прибавляя частное решение (2.16), получим общее решение для систем неоднородных уравнений (2.11). После подстановки этого решения в соотношения (2.10) получим решение исходной краевой задачи (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\infty} K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - \right. \\ &\quad \left. - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right\} J_1(\alpha_n r), \\ w &= W_0 + \sum_{i=1}^{\infty} K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ e^{2\alpha_n h} (\alpha_n z k + 1) + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z) - 1] + e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z) + 1] - \right. \\ &\quad \left. - 4e^{\alpha_n(h+z)} \alpha_n h k + 2e^{\alpha_n(2h+z)} k - 2e^{\alpha_n z} k + e^{2\alpha_n z} (\alpha_n z k - 1) \right\} J_0(\alpha_n r), \end{aligned}$$

где W_0 – константа, подобранная таким образом, чтобы вертикальное смещение края цилиндра равнялось нулю:

$$W_0 = - \sum_{i=1}^{\infty} K_n [(e^{2\alpha_n h} - 1)(2k + 1) - 2e^{\alpha_n h} \alpha_n h k] J_0(\alpha_n),$$

Напряжения выражаются через перемещения из закона Гука с помощью соотношений Коши:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ \left(\alpha_n J_0(\alpha_n r) - \frac{J_1(\alpha_n r)}{r} \right) \left[e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right] - \right. \\ &\quad \left. - (k-1) \alpha_n J_0(\alpha_n r) \left(e^{2\alpha_n h} - e^{\alpha_n h} - e^{\alpha_n(h+2z)} + e^{2\alpha_n z} \right) \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ \left[e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right] \frac{J_1(\alpha_n r)}{r} - \right. \\ &\quad \left. - (k-1) \alpha_n J_0(\alpha_n r) \left(e^{2\alpha_n h} - e^{\alpha_n h} - e^{\alpha_n(h+2z)} + e^{2\alpha_n z} \right) \right\}, \\ \sigma_{zz} &= \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left[e^{2\alpha_n h} \alpha_n z + e^{\alpha_n h} (\alpha_n h - \alpha_n z) - e^{\alpha_n(h+2z)} (\alpha_n h - \alpha_n z) - e^{2\alpha_n z} \alpha_n z \right] (-k \alpha_n J_0(\alpha_n r)), \\ \sigma_{rz} &= \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left[e^{2\alpha_n h} (\alpha_n z - 1) + e^{\alpha_n h} (\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + e^{\alpha_n(h+2z)} (\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 2e^{\alpha_n(h+z)} \alpha_n h + e^{\alpha_n(2h+z)} - e^{\alpha_n z} + e^{2\alpha_n z} (\alpha_n z + 1) \right] (-k \alpha_n J_1(\alpha_n r)).\end{aligned}$$

Поскольку решение представлено в рядах, то желательно исследовать их сходимость и оценить погрешность частичных сумм в зависимости от числа учитываемых слагаемых. Для этой цели положим $p = 1$ и подставим частичные суммы с различным числом слагаемых в уравнения (2.1). Получаемые в результате разложения (которые из общих теоретических рассуждений сходятся в среднеквадратичном) сравним с оригинальной кусочно-постоянной правой частью. Результаты приведены на рис. 2.1. В верхнем ряду показано сопоставление оригинальной кусочно-линейной правой части с результатами действия левой части уравнения (2.1) на частичные суммы 10, 60 и 110 слагаемых, а во втором ряду их отличие от частичной суммы 200 слагаемых. Из рисунка видно, что ряд быстро сходится, но в точке разрыва функции внешних сил имеется неустраняемая погрешность (эффект Гиббса). Этот эффект может быть сглажен, если суммирование производить методом средних арифметических (Фейера) [20], однако в этом случае частичные суммы сходятся медленнее, как видно из графиков, приведенных на рис. 2.2.

Сопоставление оригинальной правой части и результата подстановки частичной суммы в левые части (2.1)

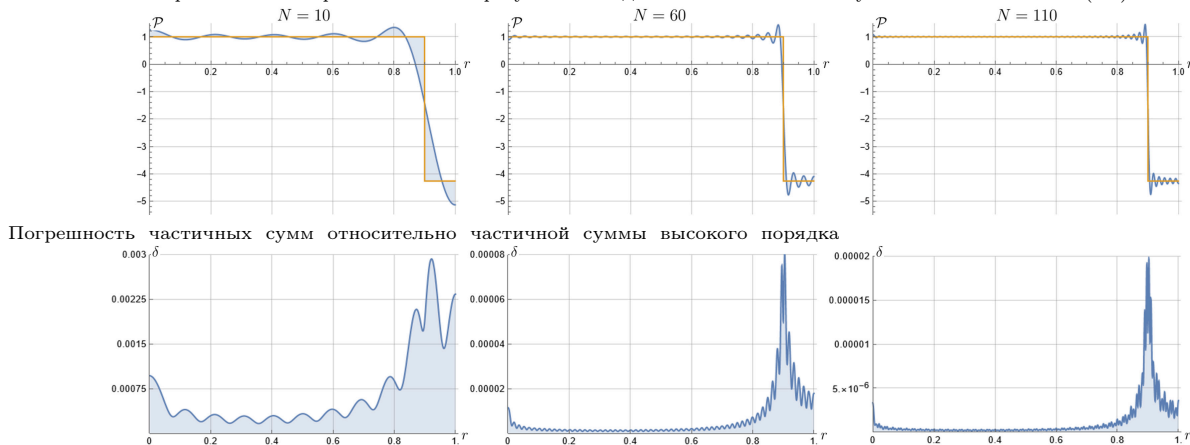


Рис. 2.1. Оценка сходимости частичных сумм
Fig. 2.1. Estimation of partial sum convergence

Сопоставление оригинальной правой части и результата подстановки частичной суммы в левые части (2.1)

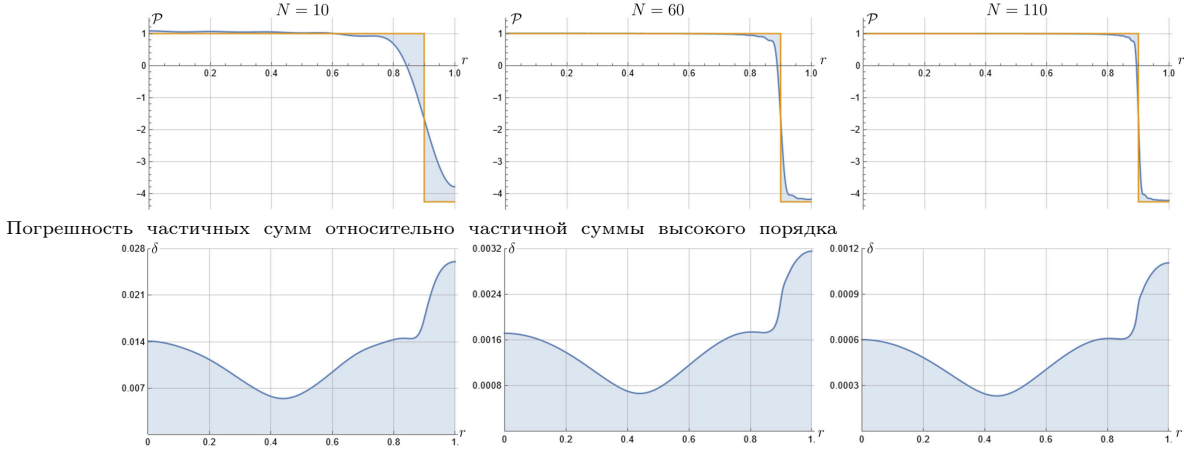


Рис. 2.2. Оценка сходимости частичных сумм (суммирование по Фейеру)
 Fig. 2.2. Estimation of partial sum convergence (Fejer summation)

3. Модель Кирхгофа – Лява

Перейдем к постановке задачи в рамках теории пластин Кирхгофа – Лява. В ее основе лежат гипотезы, ограничивающие возможные перемещения и распределения напряжений по толщине, а именно [21–23]:

- гипотеза нейтральной поверхности: срединная поверхность пластины при изгибе не деформируется;
- статическая гипотеза: нормальные напряжения на площадках параллельных срединной плоскости пластины пренебрежимо малы;
- кинематическая гипотеза: материальный отрезок, изначально перпендикулярный срединной поверхности пластины, в процессе деформации остается перпендикулярным к срединной поверхности.

Замечание 1. Часто к кинематической гипотезе добавляют дополнительное требование о сохранении длины материального отрезка [24; 25]. Для того чтобы избежать путаницы, кинематическую гипотезу с дополнительным условием, следуя Н.А. Кильчевскому [26], будем называть гипотезой прямых неизменяемых нормальных элементов.

Ограничения на возможные перемещения сужают класс вектор-функций, представляющих пространственное поле перемещений $\mathbf{u}(r, z)$, так что оно может быть выражено через одну скалярную функцию прогиба ω , которая в случае осесимметричной деформации зависит от одной переменной $\omega(r)$:

$$\mathbf{u} = -z\omega' \mathbf{e}_r + \omega \mathbf{e}_z. \quad (3.1)$$

Такое описание кинематики очень удобно для анализа деформаций пластин и позволяет строить достаточно простые модели, допускающие аналитическое решение. Вместе с тем за эту простоту приходится платить противоречивостью системы принятых гипотез. Действительно, в рамках модели изотропного материала гипотеза прямых, неизменяемых нормалей не может быть выполнена одновременно со статической гипотезой.

В литературе предложено множество способов разрешения этого противоречия, наиболее перспективным из которых представляется подход, предложенный в работе [27]. В ней кинематическая гипотеза рассматривается как наложение идеальных связей на материал пластины. Тогда, в соответствии с принципом материальной индифферентности [8], класс допустимых ортогональных преобразований ограничивается преобразованиями, сохраняющими направление нормалей к срединной поверхности пластины. В результате в материале пластины появляется выделенное направление, т. е. материал становится трансверсально-изотропным, а закон состояния (с учетом осевой симметрии) записывается следующим образом⁸ [28]:

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

⁸Коэффициент Пуассона, характеризующий сужение в плоскости изотропии при растяжении нормальных волокон, выбирается равным нулю, так, чтобы гипотеза нейтральной поверхности выполнялась независимо от статической гипотезы.

Здесь ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{zz} – компоненты тензора малых деформаций (1.4), q – реакция идеальных связей, сохраняющих прямой угол, определяемая для каждого элементарного объема, $\hat{E}$ – модуль Юнга для растяжения волокон нормальных к срединной поверхности. Таким образом, если материал пластины полагается трансверсально-изотропным, то условие сохранения длины нормали является следствием остальных гипотез.

В технической литературе по теории пластин и оболочек, как правило, вопросу об усилиях в идеальных связях уделяют мало внимания, концентрируя его в большей степени на результирующих усилиях – моментах и перерезывающих силах. Но поскольку важным элементом настоящей работы является сравнение эффективных напряжений, вычисляемых в рамках различных подходов, то представляется целесообразным остановиться на этом вопросе подробнее. Как и в любых средах с идеальными связями (например, несжимаемых), усилия в связях определяются из уравнений равновесия. Так, для нахождения зависимости для q вначале выразим компоненты тензора малых деформаций через функцию ω :

$$\varepsilon_{rr} = -z\omega'', \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{z\omega'}{r}$$

и подставим результат в закон состояния (3.2):

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{1-\nu^2}z\left(\omega'' + \nu\frac{\omega'}{r}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E}{1-\nu^2}z\left(\frac{\omega'}{r} + \nu\omega''\right), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = q. \quad (3.3)$$

Поскольку $\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = q$, то из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \mathcal{P}(r) = 0 \quad (3.4)$$

найдем:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = q = -\int \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right) dz = \frac{E}{2(1-\nu^2)}z^2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega + C(r), \quad (3.5)$$

Неизвестная функция $C(r)$ определяется из условия отсутствия касательных напряжений на лицевых поверхностях:

$$q = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega.$$

Замечание 2. В настоящем разделе координата z отсчитывается от срединной поверхности пластины (в отличие от раздела 2, в котором осевая координата отсчитывалась от нижнего основания).

Сократив число искомых функций до одной, ω , получаем из полной системы уравнений равновесия (3.4) и краевых условий переопределенную задачу относительно ω , которая в общем случае решений не имеет. Однако, допуская выполнение краевых условий на лицевой поверхности приближенно (в интегральном смысле) и вводя результирующие усилия (результанты) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} dz = 0, & M_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{rr} dz = -D \left(\omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right), \\ T_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi\varphi} dz = 0, & M_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{\varphi\varphi} dz = -D \left(\frac{\omega'}{r} + \nu\omega'' \right), \\ Q_{rz} &= Q_{zr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где символ D обозначает цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{kh^3}{3(k+1)},$$

приходим к корректной системе уравнений, выраженных через усилия:

$$T'_{rr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad Q'_{zr} + \frac{Q_{zr}}{r} + \mathcal{P}(r)h = 0, \quad M'_{rr} + \frac{M_{rr} - M_{\varphi\varphi}}{r} - Q_{rz} = 0, \quad (3.7)$$

и краевым условиям, соответствующим жесткому закреплению на круговом контуре:

$$\omega|_{r=1} = 0, \quad \omega'|_{r=1} = 0. \quad (3.8)$$

В модели Кирхгофа уравнения равновесия усилий и моментов в радиальном направлении тождественно удовлетворены; осталось только уравнение равновесия перерезывающих сил:

$$-Q'_{zr} - \frac{Q_{zr}}{r} = D \nabla^2 \nabla^2 \omega = \mathcal{P}(r) h, \quad (3.9)$$

где $\nabla^2 \nabla^2$ – бигармонический оператор, который в полярных координатах и в случае осевой симметрии приводится к дифференциальному выражению:

$$\nabla^2 \nabla^2 f = f^{(4)} + \frac{2f'''}{r} - \frac{f''}{r^2} + \frac{f'}{r^3}.$$

Располагая решением краевой задачи (3.8), (3.9), по формулам (3.3), (3.5) могут быть определены все компоненты тензора напряжений, а из соотношений (1.5) – соответствующее эффективное напряжение (Мизеса).

Решение задачи (3.8), (3.9) может быть получено в замкнутом виде. Действительно, имея в виду фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.9):

$$(1, r^2, \ln r, r^2 \ln r),$$

и используя метод Лагранжа, получим:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{h}{D} \int_0^r \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{8} [2(\zeta^2 + r^2) \ln r + (\zeta^2 + 1)(1 - r^2)] \zeta d\zeta + \\ & + \frac{h}{D} \int_r^1 \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{8} [2(r^2 + \zeta^2) \ln \zeta + (r^2 + 1)(1 - \zeta^2)] \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Такая форма представления решения оказывается особо удобной в тех случаях, когда функция распределения внешних сил имеет конечный разрыв, как, например, в случае нагрузки, заданной распределением (1.1). В этом случае после интегрирования имеем:

$$\omega = \begin{cases} \frac{ph}{64D} \left\{ r^4 + \frac{a^2}{1-a^2} [4(a^2 + 2r^2) \ln a + (3 + 2r^2)(1 - a^2)] \right\} & r \leq a \\ -\frac{pha^2}{64D(1-a^2)} \left\{ (r^2 - 1)^2 - 4(a^2 + 2r^2) \ln r - 2(a^2 + 2)(1 - r^2) \right\} & r > a \end{cases}.$$

Заметим, что если устремить параметр a к единице, то, используя правило Лопиталя–Бернулли, в пределе можно получить решение для случая однородного нагружения:

$$\omega = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{ph}{64D} \left\{ r^4 + \frac{a^2}{1-a^2} [4(a^2 + 2r^2) \ln a + (3 + 2r^2)(1 - a^2)] \right\} = \frac{ph}{64D} (r^2 - 1)^2. \quad (3.10)$$

Для проведения сравнительного анализа необходимо иметь выражения для функций прогибов и напряжений, поэтому удобно еще раз выписать функции напряжений, для единообразия выразив их через параметр k :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -\frac{4k}{k+1} z \left(\omega'' + \frac{k-1}{2k} \frac{\omega'}{r} \right), & \sigma_{\varphi\varphi} = & -\frac{4k}{k+1} z \left(\frac{\omega'}{r} + \frac{k-1}{2k} \omega'' \right), \\ \sigma_{rz} = & \sigma_{zr} = \frac{2k}{k+1} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega. \end{aligned}$$

4. Модель Феппля – фон Кармана

Линейное уравнение изгиба Кирхгофа–Лява не учитывает влияние напряжений в плоскости пластины на ее изгибную жесткость, что оправдано для пластин средней толщины, но ведет к существенным погрешностям (а для ультратонких пластин к ошибкам на несколько порядков) при значительном уменьшении относительной толщины и приближении изгибного НДС к мембранному. Конечно, классическая линейная теория мембран, развитая еще в XVIII веке, приводит к очень простому уравнению – уравнению Пуассона. Но в него в качестве параметра входит усилие натяжения на контуре, определение которого как раз и представляет основную проблему. С достаточной степенью точности задача определения натяжения решается уравнениями Феппля–фон Кармана, предложенными в начале XX века в работах [29; 30]. Эти уравнения в некотором смысле представляют собой модификацию уравнения Кирхгофа–Лява и плоской теории упругости, к которым добавляются нелинейные термы, содержащие взаимное влияние изгиба и напряжений в плоскости. При этом перемещения представляются разложениями, подобными (3.1):

$$\mathbf{u} = (v - z\omega') \mathbf{e}_r + \omega \mathbf{e}_z,$$

где v – скалярная функция двух координат r, φ (в случае осевой симметрии – одной координаты, r).

В модели Фешля–фон Кармана допускаются большие повороты и следует различать отсчетную и актуальную формы пластины, поэтому при описании ее деформаций следует использовать один из тензоров конечных деформаций. Для вывода системы уравнений Фешля–фон Кармана используется редуцированный тензор Грина–Сен-Венана $\mathbf{E}^*$ (деформации фон Кармана):

$$[\mathbf{E}^*] = \begin{pmatrix} v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 - z\omega'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{r} - z\frac{\omega'}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты этого тензора связаны с компонентами второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{\sigma}$ уравнениями состояния специального вида [31], которые могут быть получены формальной подстановкой редуцированного тензора Сен-Венана в уравнение состояния (3.2):

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 + \nu \frac{v}{r} - z \left(\omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right) \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{v}{r} + \nu \left(v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 \right) - z \left(\frac{\omega'}{r} + \nu \omega'' \right) \right].$$

Касательные напряжения, как и в предыдущей модели, не определяются из уравнений состояния, но могут быть получены из уравнений равновесия, которые могут быть сформулированы в форме (3.4) для компонент первого тензора Пиола–Кирхгофа $\mathbf{P}$ [9]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.1)$$

При этом в рамках приближений Кармана компоненты градиента деформации берутся с точностью до малых⁹:

$$[\mathbf{F}] \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega' \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega' & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Подставляя эту матрицу в соотношение выше, получим выражения для компонент первого тензора Пиола–Кирхгофа:

$$[\mathbf{P}] \approx \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \omega' \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ \sigma_{zr} + \omega' \sigma_{rr} & 0 & \omega' \sigma_{rz} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно воспользоваться уравнениями равновесия в форме (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial(\omega' \sigma_{zr})}{\partial r} - \frac{(\omega' \sigma_{zr})}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \omega' \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial(\omega' \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{(\omega' \sigma_{rr})}{r} + \mathcal{P}(r) &= 0. \end{aligned}$$

Мы полагаем, что касательные напряжения существенно меньше нормальных, следовательно, их произведения с производной прогиба могут быть отброшены:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial(\omega' \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{(\omega' \sigma_{rr})}{r} + \mathcal{P}(r) = 0.$$

При сделанных предположениях, касательные напряжения в модели Фешля–фон Кармана полностью совпадают с моделью Кирхгофа:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega.$$

Замечание 3. Как видно, для вывода уравнений Фешля–фон Кармана приходится несколько вольно обращаться с нелинейными слагаемыми, что ставит вопрос о корректности этой модели. Этот вопрос был подробно рассмотрен в работах Сьярле [31–34] и др., где он показал, что уравнения Фешля–фон Кармана естественно возникают как первый член асимптотического разложения уравнений нелинейной теории упругости.

После приведения к срединной плоскости уравнения равновесия усилий и моментов будут такими же, как и в (3.7), а уравнение равновесия перерезывающих будет дополнено нелинейными слагаемыми:

$$\begin{aligned} T'_{rr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \quad M'_{rr} + \frac{M_{rr} - M_{\varphi\varphi}}{r} - Q_{rz} = 0, \\ Q'_{zr} + \frac{Q_{zr}}{r} + (\omega' T_{rr})' + \frac{(\omega' T_{rr})}{r} + \mathcal{P}(r) h &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

⁹В рамках этой модели предполагается, что перемещения и квадрат производной прогиба малы по сравнению с единицей.

Здесь моменты и поперечные силы совпадают с (3.6), а мембранные усилия становятся ненулевыми:

$$T_{rr} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 + \nu \frac{v}{r} \right], \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{v}{r} + \nu \left(v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \right]. \quad (4.4)$$

Как и в теории Кирхгофа–Лява, соответствующий выбор функции распределения касательных напряжений позволяет тождественно удовлетворить уравнению равновесия моментов. Уравнение равновесия сил в осевом направлении дополняется нелинейными слагаемыми, которые выражают связь между изгибом пластины и ее растяжением в своей плоскости. Нелинейные слагаемые, в свою очередь, определяются из уравнения равновесия сил в радиальном направлении. Для того чтобы удовлетворить этому уравнению, удобно ввести функцию напряжений Эри ψ :

$$\frac{\psi'}{r} = \frac{T_{rr}}{h}, \quad \psi'' = \frac{T_{\varphi\varphi}}{h}. \quad (4.5)$$

Такой выбор вспомогательной функции позволяет заведомо удовлетворить уравнению равновесия, однако теперь требуется дополнить систему уравнением совместности. Для этого исключим радиальные перемещения из уравнений (4.4), (4.5) и продифференцируем полученное выражение:

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{E}{2} L[\omega, \omega] = 0, \quad (4.6)$$

где L – нелинейный дифференциальный оператор:

$$L[f, g] = \frac{1}{r} (f'g'' + g'f'').$$

После подстановки перерезывающей силы и функции Эри в оставшееся уравнение равновесия получим уравнение, замыкающее систему уравнений Фешля–фон Кармана:

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega - h L[\psi, \omega] = \mathcal{P}(r) h. \quad (4.7)$$

В общем случае для того чтобы сформулировать краевую задачу, требуется выразить перемещения через функцию Эри, что приводит к интегральным краевым условиям. Однако в случае осевой симметрии радиальные перемещения напрямую выражаются через производные функции Эри, что позволяет исключить интегралы из краевых условий:

$$v = \frac{1}{E} (\psi'' r - \nu \psi').$$

Более удобной может оказаться формулировка системы Фешля–фон Кармана в перемещениях. Такая формулировка может быть получена путем подстановки соотношений (3.6) и (4.4) в уравнения равновесия (4.3):

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \left(\omega'' + \frac{\omega'}{r} \right) + \left(v'' + \nu \frac{v'}{r} \right) \omega' + \left((\omega')^2 + \nu \frac{v}{r} \right) \omega'' \right] = \mathcal{P}(r) h, \quad (4.8)$$

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} + \omega' \omega'' + \frac{(\omega')^2}{2r} (1-\nu) = 0.$$

При этом первое уравнение (4.8) может быть приведено к более простому виду, если выразить v'' из второго уравнения и подставить результат в его левую часть:

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \left(\omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right) + \frac{v}{r} \left(\frac{\omega'}{r} + \nu \omega'' \right) \right] = \mathcal{P}(r) h. \quad (4.9)$$

С одной стороны, недостаток формулировки в перемещениях заключается в утрате симметрии относительно искомых функций. С другой стороны, эта система имеет лишь шестой порядок, в то время как система с функцией Эри – восьмой.

Замечание 4. В работе [35] Рейсснер показал, что осевая симметрия позволяет дополнительно снизить порядок первого дифференциального уравнения (4.8):

$$D \left(\omega''' + \frac{\omega''}{r} - \frac{\omega'}{r^2} \right) - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(v' \omega' + \frac{(\omega')^3}{2} + \nu \frac{v \omega'}{r} \right) = \frac{1}{r} \int \mathcal{P}(r) h r dr.$$

4.1. Гипотеза об однородном натяжении

Система уравнений Фешля–фон Кармана существенно нелинейна и в общем случае не имеет аналитического решения, а ее численное решение осложнено наличием точек бифуркации и требует проведения дополнительного анализа уравнения разветвления¹⁰. Поэтому на практике обычно стараются

¹⁰Такой анализ проведен, например, в [36].

избежать численного интегрирования этой системы и решают ее одним из полуаналитических методов. Наиболее простой способ построения полуаналитического решения заключается в принятии дополнительной гипотезы о форме деформированной поверхности с последующим определением ее параметров каким-либо методом (Ритца, Галеркина и т.д.). Существует множество различных решений, полученных таким способом, многие из них представлены в сводных таблицах в работе [37]. Также в последние годы для решения уравнений Фешля–фон Кармана широко применяются различные модификации метода гомотопического анализа [38–40].

В настоящей статье будем использовать упрощенные уравнения Фешля–фон Кармана [41], допускающие построение замкнутого аналитического решения. Этот метод основан на предположении об однородности поля мембранных усилий:

$$\frac{T_{rr}}{h} = \frac{T_{\varphi\varphi}}{h} = \frac{\psi'}{r} = \psi'' = \frac{T_0}{h}.$$

В этом случае уравнение совместности (4.6) удается выполнить лишь приближенно, зато уравнение равновесия (4.7) становится пригодным для аналитического решения:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - T_0\nabla^2\omega = \mathcal{P}(r)h.$$

Для того чтобы построить аналитическое решение, заметим, что полученное уравнение допускает факторизацию:

$$\nabla^2(\nabla^2\omega - \chi^2\omega) = \frac{\mathcal{P}(r)h}{D}, \quad (4.10)$$

где $\chi = \sqrt{T_0/D}$. В случае осевой симметрии выражение в скобках представляет собой левую часть уравнения Бесселя нулевого порядка. Следовательно, фундаментальная система решений однородного уравнения, определяемого левой частью (4.10), состоит из модифицированных функций Бесселя и решений уравнения Лапласа:

$$(1, I_0(\chi r), \ln r, K_0(\chi r)),$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда), K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). Частное решение неоднородного уравнения вновь может быть получено методом Лагранжа. Итак, общее решение принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega = & C_1 I_0(\chi r) + C_2 \ln r + C_3 K_0(\chi r) + C_4 + \\ & + \frac{h}{\chi^2 D} \int_0^r \mathcal{P}(\zeta) \left\{ \ln \frac{\zeta}{r} + \frac{I_0(\chi r) K_0(\chi \zeta) - K_0(\chi r) I_0(\chi \zeta)}{\chi \zeta [I_0(\chi \zeta) K_1(\chi \zeta) + I_1(\chi \zeta) K_0(\chi \zeta)]} \right\} \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из краевых условий (3.8) и условия регулярности решения в полюсе. Это выражение можно упростить, если заметить, что в знаменателе одного из подынтегральных слагаемых стоит сумма произведений модифицированных функций Бесселя первого и второго рода, которая может быть сведена к степенной функции [42]:

$$I_0(\chi \zeta) K_1(\chi \zeta) + I_1(\chi \zeta) K_0(\chi \zeta) = \frac{1}{\chi \zeta}.$$

Исключая константы, можно получить общее решение в виде:

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{h}{\chi^2 D} \int_0^r \mathcal{P}(\zeta) \left\{ \frac{I_0(\chi \zeta) + I_0(\chi r) - I_0(\chi) - \chi I_0(\chi \zeta) I_0(\chi r) K_1(\chi)}{\chi I_1(\chi)} - I_0(\chi \zeta) K_0(\chi r) - \ln r \right\} \zeta d\zeta + \\ & + \frac{h}{\chi^2 D} \int_r^1 \mathcal{P}(\zeta) \left\{ \frac{I_0(\chi r) + I_0(\chi \zeta) - I_0(\chi) - \chi I_0(\chi r) I_0(\chi \zeta) K_1(\chi)}{\chi I_1(\chi)} - I_0(\chi r) K_0(\chi \zeta) - \ln \zeta \right\} \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

Для случая ступенчатой нагрузки, заданной в виде (1.1), имеем:

$$\omega = \begin{cases} \frac{ph}{\chi^2 D} \left\{ -\frac{1}{\chi^2} - \frac{r^2}{4} + \frac{a}{1-a^2} \left[\frac{I_1(\chi a)}{\chi^2 I_1(\chi)} - \frac{I_0(\chi r)}{\chi I_1(\chi)} (I_1(\chi a) K_1(\chi) - I_1(\chi) K_1(\chi a)) - a \left(\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{\chi^2} \right) \right] \right\} & r \leq a \\ \frac{pha}{\chi^2 D(1-a^2)} \left\{ \frac{I_1(\chi a)}{\chi^2 I_1(\chi)} - \frac{I_1(\chi a)}{\chi I_1(\chi)} (I_0(\chi r) K_1(\chi) + I_1(\chi) K_0(\chi r)) - a \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{1-r^2}{4} \right) \right\} & r > a \end{cases}. \quad (4.11)$$

Заметим, что в результате предельного перехода может быть получена формула для случая однородного нагружения:

$$\omega = \frac{ph}{\chi^2 D} \left[\frac{I_0(\chi r) - I_0(\chi)}{2\chi I_1(\chi)} + \frac{1-r^2}{4} \right].$$

Напряжения выражаются через постоянное натяжение и функцию прогиба следующим образом:

$$\sigma_{rr} = \frac{T_0}{h} - \frac{4k}{k+1} z \left(\omega'' + \frac{k-1}{2k} \frac{\omega'}{r} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{T_0}{h} - \frac{4k}{k+1} z \left(\frac{\omega'}{r} + \frac{k-1}{2k} \omega'' \right),$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \frac{2k}{k+1} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega.$$

Перед вычислением эквивалентных напряжений для пластины Кармана необходимо отметить, что формула (1.5) справедлива лишь в тех случаях, когда номинальные и истинные напряжения не различают.

В противном случае критерий пластичности Мизеса следует переформулировать в терминах компонент тензора истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$:

$$S_{\text{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(S_{rr} - S_{\varphi\varphi})^2 + (S_{\varphi\varphi} - S_{zz})^2 + (S_{zz} - S_{rr})^2 + 6 S_{rz}^2},$$

который связан с $\boldsymbol{\sigma}$ следующим образом [9]:

$$\mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T.$$

Здесь $J = \det(\mathbf{F})$ – якобиан преобразования. Используя упрощенный тензор градиента деформации (4.2), после соответствующих упрощений получим:

$$[\mathbf{S}] \approx \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \omega'(\sigma_{rz} + \sigma_{zr}) & 0 & \sigma_{rz} + \omega'\sigma_{rr} - (\omega')^2 \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ \sigma_{zr} + \omega'\sigma_{rr} - (\omega')^2 \sigma_{rz} & 0 & (\omega')^2 \sigma_{rr} + \omega'(\sigma_{rz} + \sigma_{zr}) \end{pmatrix}.$$

Для использования полученных решений необходимо определить параметр T_0 , который характеризует натяжение пластины в своей плоскости. Он может быть найден из упрощенного решения методом Бубнова–Галеркина. В настоящей статье мы рассмотрим два таких решения – для пластин и мембран.

4.2. Решение методом Бубнова–Галеркина

Так как в рамках настоящей работы это решение носит вспомогательный характер, ограничимся лишь одной пробной функцией прогибов, которую вслед за [21] выберем подобной решению задачи об изгибе круглой пластины в рамках модели Кирхгофа–Лява (3.10):

$$\omega = C (r^2 - 1)^2, \quad (4.12)$$

где C – неизвестный множитель. Для определения радиальных перемещений подставим это выражение для функции прогибов во второе уравнение системы (4.8):

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} + 32C^2 r^3 (r^2 - 1) + 8C^2 r (r^2 - 1)^2 (3 - \nu) = 0.$$

После интегрирования с учетом краевых условий приходим к выражению:

$$v = \frac{C^2}{6} [-7r^7 + 20r^5 - 18r^3 + 5r + \nu (r^7 - 4r^5 + 6r^3 - 3r)]. \quad (4.13)$$

Таким образом, получены поля перемещений с точностью до неизвестного множителя C , который следует определять из условия ортогональности пробной функции и невязки уравнения равновесия (4.9):

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ 64DC + \frac{4EhC^3}{3} \left[5r^8 - 20r^6 + 30r^4 - 22r^2 + 5 - \frac{\nu(4r^2 - 2)}{1 - \nu} \right] - \mathcal{P}(r)h \right\} (r^2 - 1)^2 r d\varphi dr = 0.$$

Для случая постоянной нагрузки $\mathcal{P}(r) = p$ получим кубическое уравнение относительно C :

$$\frac{Eh(23 - 9\nu)}{21(1 - \nu)} C^3 + 32DC - \frac{ph}{2} = \frac{h(3k - 1)(37k + 9)}{21k(k + 1)} C^3 + 32DC - \frac{ph}{2} = 0, \quad (4.14)$$

которое имеет одно вещественное решение, определяемое по формуле Кардано.

Аналогично рассмотрим систему уравнений Фешля–фон Кармана для случая абсолютно гибкой мембраны, которая может быть получена из исходных уравнений предельным переходом при стремлении цилиндрической жесткости D к нулю. Имеем:

$$\frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \left(\omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right) + \frac{v}{r} \left(\frac{\omega'}{r} + \nu \omega'' \right) \right] + \mathcal{P}(r) = 0,$$

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} + \omega' \omega'' + \frac{(\omega')^2}{2r} (1 - \nu) = 0.$$

Для решения этой системы методом Бубнова–Галеркина часто [43–45] выбирают пробную функцию для прогибов, обеспечивающую сферическую форму деформированной поверхности:

$$\omega = C(r^2 - 1). \quad (4.15)$$

Повторяя выкладки (4.13) – (4.14), получим функцию радиальных перемещений:

$$v = C^2 \frac{3 - \nu}{4} (r - r^3) \quad (4.16)$$

и выражение для неизвестного множителя:

$$C = -\sqrt[3]{\frac{3(1-\nu)p}{(7-\nu)E}} = -\sqrt[3]{\frac{3(k+1)kp}{(3k-1)(13k+1)}}.$$

После определения функций перемещений можно определить мембранные усилия по формулам (4.4), которые удобно записать через k :

$$T_{rr} = \frac{4kh}{k+1} \left[v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 + \frac{k-1}{2k} \frac{v}{r} \right], \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{4kh}{k+1} \left[\frac{v}{r} + \frac{k-1}{2k} \left(v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 \right) \right].$$

Для использования решения (4.11) поля мембранных усилий необходимо осреднить. Осреднение будем проводить из условия равенства работ осредненных усилий и фактических:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} T_0 \left(v' + \frac{(\omega')^2}{2} + \frac{v}{r} \right) r d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[T_{rr} \left(v' + \frac{(\omega')^2}{2} \right) + T_{\varphi\varphi} \frac{v}{r} \right] r d\varphi dr.$$

При вычислении этого интеграла для относительно толстых пластин целесообразно использовать решение (4.12), (4.13), а для ультратонких мембран – решение (4.15), (4.16).

5. Модель мембран Адкинса–Ривлина–Грина

Рассмотрим систему уравнений, описывающих выпучивание закрепленной на контуре мембраны с позиций нелинейной теории упругости. Такая система была впервые получена в работе Адкинса и Ривлина [46] для мембраны из несжимаемого материала Муни–Ривлина. Эта система довольно громоздка и содержит шестнадцать дифференциальных уравнений, что, впрочем, не помешало ее авторам получить численное решение. Позднее, в работе Янга и Фенга [47], эта система для случая осевой симметрии была сведена к трем дифференциальным уравнениям первого порядка.

Вывод уравнений модели Адкинса и Ривлина также опирается на статическую и кинематическую гипотезы Кирхгофа, однако теперь перемещения точек мембраны считаются конечными и не предполагается, что нормальное волокно сохраняет свою длину. В этом случае кинематика мембраны описывается следующим полем перемещений:

$$\mathbf{u} = v\mathbf{e}_r + \omega\mathbf{e}_z + z(\lambda_z\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_z), \quad (5.1)$$

где λ_z – отношение толщин мембраны в актуальной и отсчетной формах, а $\mathbf{e}_n$ – семейство единичных нормалей к срединной поверхности. Такая запись вектора перемещений достаточна наглядна и позволяет сразу разделить слагаемые по физическому смыслу. Однако для дальнейших выкладок она не очень удобна, так как содержит векторы разных базисов – базиса цилиндрической системы координат и базиса Дарбу, построенного на деформированной поверхности мембраны ($\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_n$). Эти базисы связаны преобразованиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_s &= \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_z \sin \theta, & \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta, \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_s \cos \theta + \mathbf{e}_n \sin \theta, & \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_s \sin \theta + \mathbf{e}_n \cos \theta, \end{aligned}$$

где θ – угол поворота нормали срединной поверхности мембраны. Для дальнейших построений более удобным оказывается представление перемещений (5.1) в компонентах разложений по базису Дарбу. При этом матрицы градиента деформаций и левого тензора Коши–Грина принимают диагональный вид:

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_r, \lambda_\varphi$ – главные удлинения в радиальном и окружном направлениях, связанные с перемещениями формулами:

$$\lambda_r = \sqrt{(1+v')^2 + \omega'^2}, \quad \lambda_\varphi = 1 + \frac{v}{r}. \quad (5.2)$$

Здесь нужно отметить, что, в отличие от моделей пластин, в модели мембран не учитываются слагаемые, зависящие от нормальной координаты z , т. е. эта модель имеет нулевой порядок асимптотического разложения.

В этой модели материал полагается несжимаемым, что приводит к существенному упрощению выражения для потенциала Муни–Ривлина (1.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{4} \left[(1-\beta) \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + (1+\beta) \left(\frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right] + \frac{3k-1}{6} \left(\sqrt{I_3} - 1 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[(1-\beta) (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2 - 3) + (1+\beta) (\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2 + \lambda_\varphi^2 \lambda_z^2 + \lambda_z^2 \lambda_r^2 - 3) \right]. \end{aligned}$$

Это выражение следует дополнить условием несжимаемости:

$$\det(\mathbf{F}) = J = \lambda_r \lambda_\varphi \lambda_z = 1.$$

Конкретный вид функции упругого потенциала позволяет получить компоненты первого тензора напряжений Пиола–Кирхгофа по формуле Дойля–Эриксона, однако эту формулу следует модифицировать для учета несжимаемости:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{B}} + s \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}} \right); \quad [\mathbf{P}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_z} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \lambda_\varphi \lambda_z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_z \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \lambda_\varphi \end{pmatrix},$$

где s – реакция идеальных связей, обеспечивающих несжимаемость. Переходя к компонентам, получим:

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \frac{1-\beta}{2} [\lambda_r + \alpha \lambda_r (\lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2) + s \lambda_\varphi \lambda_z], & P_{\varphi\varphi} &= \frac{1-\beta}{2} [\lambda_\varphi + \alpha \lambda_\varphi (\lambda_z^2 + \lambda_r^2) + s \lambda_z \lambda_r], \\ P_{zz} &= \frac{1-\beta}{2} [\lambda_z + \alpha \lambda_z (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2) + s \lambda_r \lambda_\varphi], \end{aligned}$$

где $\alpha = (1+\beta)/(1-\beta)$. Отсюда по формуле, подобной (4.1):

$$\mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T,$$

можно получить компоненты тензора напряжений Коши $\mathbf{S}$. Используя условие несжимаемости, исключим из выражений третью кратность удлинения λ_z :

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \frac{1-\beta}{2} \left[\lambda_r^2 + \alpha \lambda_r^2 \left(\lambda_\varphi^2 + \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) + s \right], & S_{\varphi\varphi} &= \frac{1-\beta}{2} \left[\lambda_\varphi^2 + \alpha \lambda_\varphi^2 \left(\lambda_r^2 + \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) + s \right], \\ S_{zz} &= \frac{1-\beta}{2} \left[\frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} + \alpha \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2) + s \right]. \end{aligned}$$

Неизвестную реакцию идеальных связей s можно определить из условия выполнения статической гипотезы Кирхгофа:

$$S_{zz} = 0.$$

Тогда тензор напряжений Коши будет содержать лишь две ненулевые компоненты:

$$S_{rr} = \frac{1-\beta}{2} \left(\lambda_r^2 - \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) (1 + \alpha \lambda_\varphi^2), \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1-\beta}{2} \left(\lambda_\varphi^2 - \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) (1 + \alpha \lambda_r^2).$$

Для подстановки в уравнения равновесия полученные напряжения следует осреднить по толщине мембраны в актуальной форме:

$$T_{rr} = \lambda_z h S_{rr} = \frac{h S_{rr}}{\lambda_r \lambda_\varphi}, \quad T_{\varphi\varphi} = \lambda_z h S_{\varphi\varphi} = \frac{h S_{\varphi\varphi}}{\lambda_r \lambda_\varphi}.$$

После осреднения можно получить усилия, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия в актуальной конфигурации:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial \rho} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{\rho} = 0, \quad T_{rr} \kappa_1 + T_{\varphi\varphi} \kappa_2 = \mathcal{P}(r) h, \quad (5.3)$$

где ρ – радиальная координата точек мембраны в актуальной форме:

$$\rho = r + v,$$

а κ_1, κ_2 – главные кривизны деформированной поверхности¹¹:

$$\kappa_1 = \frac{\rho' \omega'' - \rho'' \omega'}{\lambda_r^3}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega'}{\lambda_r \rho}.$$

¹¹Здесь штрихами обозначена производная по r .

Для получения наиболее компактной системы дифференциальных уравнений выберем следующий набор главных переменных:

$$y_1 = \lambda_r, \quad y_2 = \lambda_\varphi = \frac{\rho}{r}, \quad y_3 = \rho'. \quad (5.4)$$

В новых обозначениях уравнения равновесия (5.3) имеют следующий вид:

$$\frac{T'_{rr}}{y_3} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{y_2 r} = 0, \quad T_{rr} \frac{y'_1 y_3 - y_1 y'_3}{y_1^2 \sqrt{y_1^2 - y_3^2}} + T_{\varphi\varphi} \frac{\sqrt{y_1^2 - y_3^2}}{y_1 y_2 r} = \mathcal{P}(r) h.$$

Для удобства также выпишем усилия в новых переменных:

$$T_{rr} = \frac{h(1-\beta)}{2} \left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2), \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{h(1-\beta)}{2} \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_1^2).$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, получим систему двух дифференциальных уравнений изгиба мембраны:

$$\begin{aligned} r y'_1 \left(\frac{1}{y_2} + \frac{3}{y_1^4 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2) + \left(\frac{y_3}{y_2} - 1 \right) \left(\frac{3}{y_1^3 y_2^3} + \alpha y_1 y_2 \right) + \frac{y_1}{y_2} - \frac{y_3}{y_1} + \frac{\alpha}{y_1 y_2} \left(\frac{y_3}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2} \right) &= 0, \\ \frac{(y'_1 y_3 - y_1 y'_3)}{y_1^2 \sqrt{y_1^2 - y_3^2}} \left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2) + \frac{\sqrt{y_1^2 - y_3^2}}{y_1 y_2 r} \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_1^2) - \frac{2\mathcal{P}(r)}{1-\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Эти соотношения необходимо дополнить уравнением, связывающим главные переменные:

$$y'_2 = \frac{1}{r} (y_3 - y_2).$$

Особенностью этой системы уравнений является то, что она сформулирована в деформациях, а не перемещениях. Соответственно и краевые условия следует формулировать для деформаций. В рассматриваемой задаче окружная деформация на контуре равна нулю и в полюсе имеется особая точка, в которой все направления неразличимы, следовательно, в этой точке радиальная и окружная деформации равны. Кроме того, в полюсе первая и вторая кривизна равны нулю, тогда из соотношения (5.2) следует, что производная радиальной координаты ρ в полюсе равна первой кратности удлинения. Эти соображения, с учетом (5.4), позволяют записать краевые условия через главные переменные:

$$y_1|_{r=0} = y_2|_{r=0} = y_3|_{r=0}, \quad y_2|_{r=1} = 1. \quad (5.6)$$

Решение краевой задачи (5.5), (5.6) удобно проводить методом пристрелки. Для этого необходимо свести краевую задачу к задаче Коши, задавшись значением главных переменных в начале участка интегрирования, т. е. в полюсе. Из первого краевого условия видно, что это значение одинаково для всех трех главных переменных:

$$y_1|_{r=0} = y_2|_{r=0} = y_3|_{r=0} = \lambda_0.$$

Затем нужно решить полученную задачу Коши каким-либо численным методом, например, методом Рунге–Кутты. После этого следует проверить выполнение краевого условия на контуре и при необходимости скорректировать λ_0 .

Недостаток этого метода заключается в том, что он не устойчив относительно малых колебаний параметра λ_0 . Эту трудность удастся преодолеть если в качестве начального приближения параметра выбрать значение кратности удлинения в полюсе, полученное из решения упрощенной задачи. Например, из решения (4.15), (4.16):

$$\lambda_0 = \sqrt{(1+v')^2 + \omega'^2} \Big|_{r=0} = 1 + C^2 \frac{3-\nu}{4} = 1 + \frac{5k+1}{8k} \sqrt[3]{\frac{9(k+1)^2 k^2 p^2}{(13k+1)^2 (3k-1)^2}}.$$

6. Сравнительный анализ

Располагая аналитическими и численно-аналитическими решениями, полученными для кругового диска в предыдущих разделах, произведем сравнительный вычислительный анализ с целью выявления областей их применения на “оси относительных толщин”.

В безразмерных переменных, помимо относительной толщины, используются два безразмерных параметра, характеризующие материал, k и β , и два, характеризующие нагружение, p и a . Относительную толщину будем варьировать в интервале $(1, 10^{-3})$. Параметр формы нагрузки a выберем равным 0.99, что соответствует случаю равномерного нагружения и однопроцентной кольцевой опорной зоне (что реализуется в натуральных экспериментах).

Поскольку сравнительный анализ ориентирован на элементы МЭМС, будем полагать, что круговой диск изготовлен из химически чистого алюминия (как результат напыления или химического осаждения). При этом $k = 3$, что соответствует величине 0.33 для коэффициента поперечного сжатия. Это значение соответствует данным, приведенным в справочной литературе. Выбор значения параметра β не принципиален, так как при малых деформациях он практически не влияет на значение упругой потенциальной энергии материала. Для удобства выберем его равным нулю.

Отдельно следует определиться с интенсивностью нагружения p , поскольку при столь значительном изменении относительных толщин величина p должна подбираться из условий разумных значений максимальных перемещений. По этой причине на каждом участке “оси относительно толщины” будет фиксироваться не нагрузка, а прогиб в центре диска. Тогда сравнение перемещений будем проводить опосредовано, по величине нагрузки, потребной для того, чтобы обеспечить заданный прогиб, т. е. будем сравнивать “жесткость” разных моделей. А для сравнения напряженных состояний будем оценивать величину максимального эквивалентного напряжения при заданном прогибе.

Всего было проведено три серии сравнений. Параметры расчетов перечислены в таблице, а результаты приведены на рис. 6.1–6.6.

Таблица

Параметры расчетов

Table

Calculation parameters

Модели	3D и KL	KL и FvKp			FvKm и GAR		
ω_{Max}	1/4	1/10	1/50	1/100	1/10	1/50	1/100
h	[0.01, 1]	[0.01, 1]			[0.001, 0.1]		
Результаты	Рис. 6.1, 6.2	Рис. 6.3, 6.4			Рис. 6.5, 6.6		
3D – модель линейной теории упругости; KL – пластина Кирхгофа–Лява; FvKp – пластина Фешля–фон Кармана (натяжение из решения для пластины); FvKm – пластина Фешля–фон Кармана (натяжение из решения для GAR); GAR – мембрана Грина–Ривлина–Адкинса							

На основании сопоставления результатов расчетов можно определить области параметров, в которых каждая из рассматриваемых моделей адекватно описывает НДС изгибаемой пластины. Для уровня погрешности 5 % относительные толщины, при которых может быть использована теория Кирхгофа–Лява, находятся в интервале от 1/10 до 1/30 (при максимальном прогибе 1/100 радиуса). В интервале от 1/30 до 1/480 может быть использована теория Фешля–фон Кармана, а при меньших значениях отношения толщины к радиусу — теория Грина–Ривлина–Адкинса.

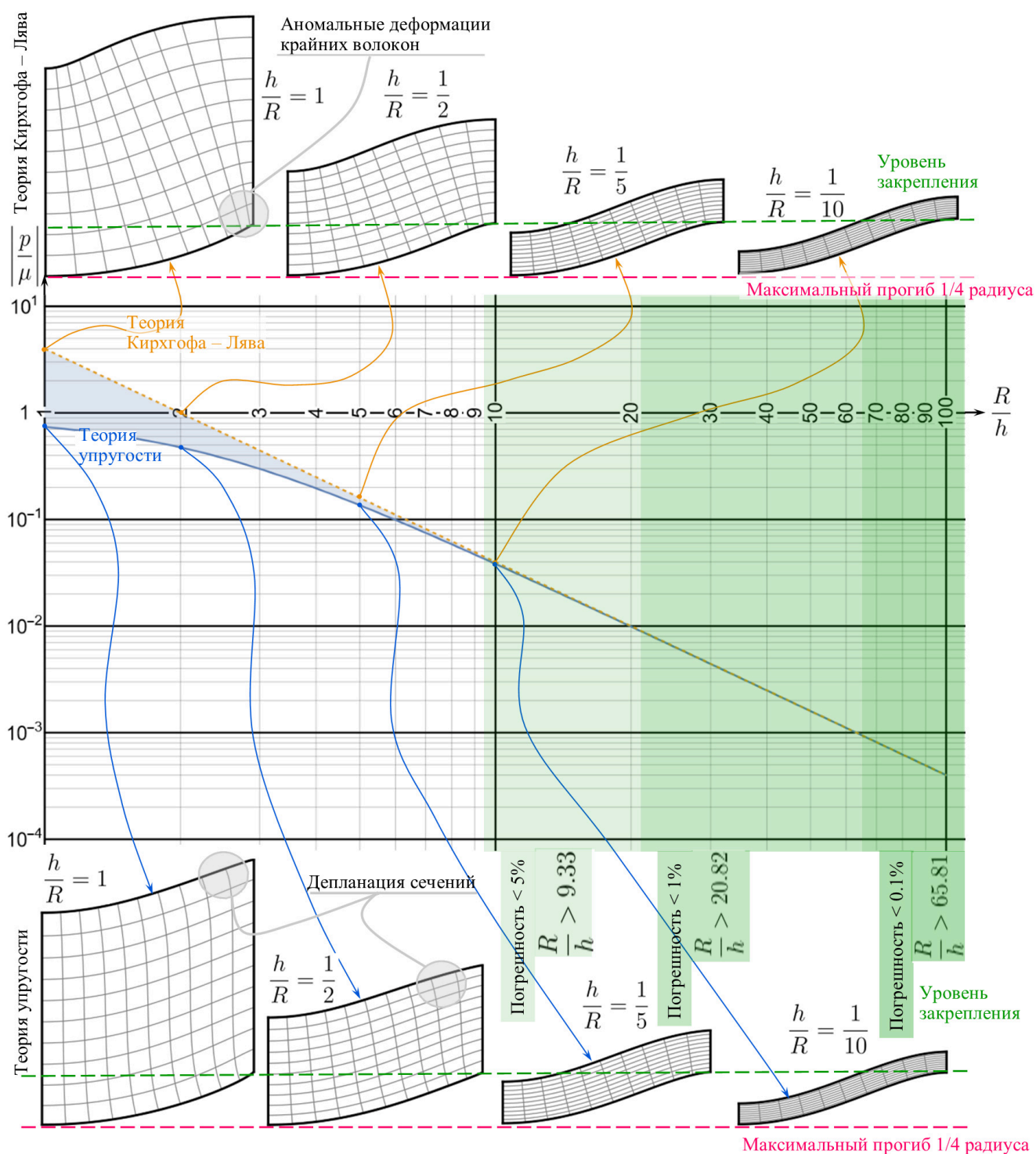


Рис. 6.1. Сравнение “жесткости” моделей Кирхгофа–Лява и линейной теории упругости
Fig. 6.1. “Stiffness” comparison of Kirchhoff–Love and linear theory of elasticity models

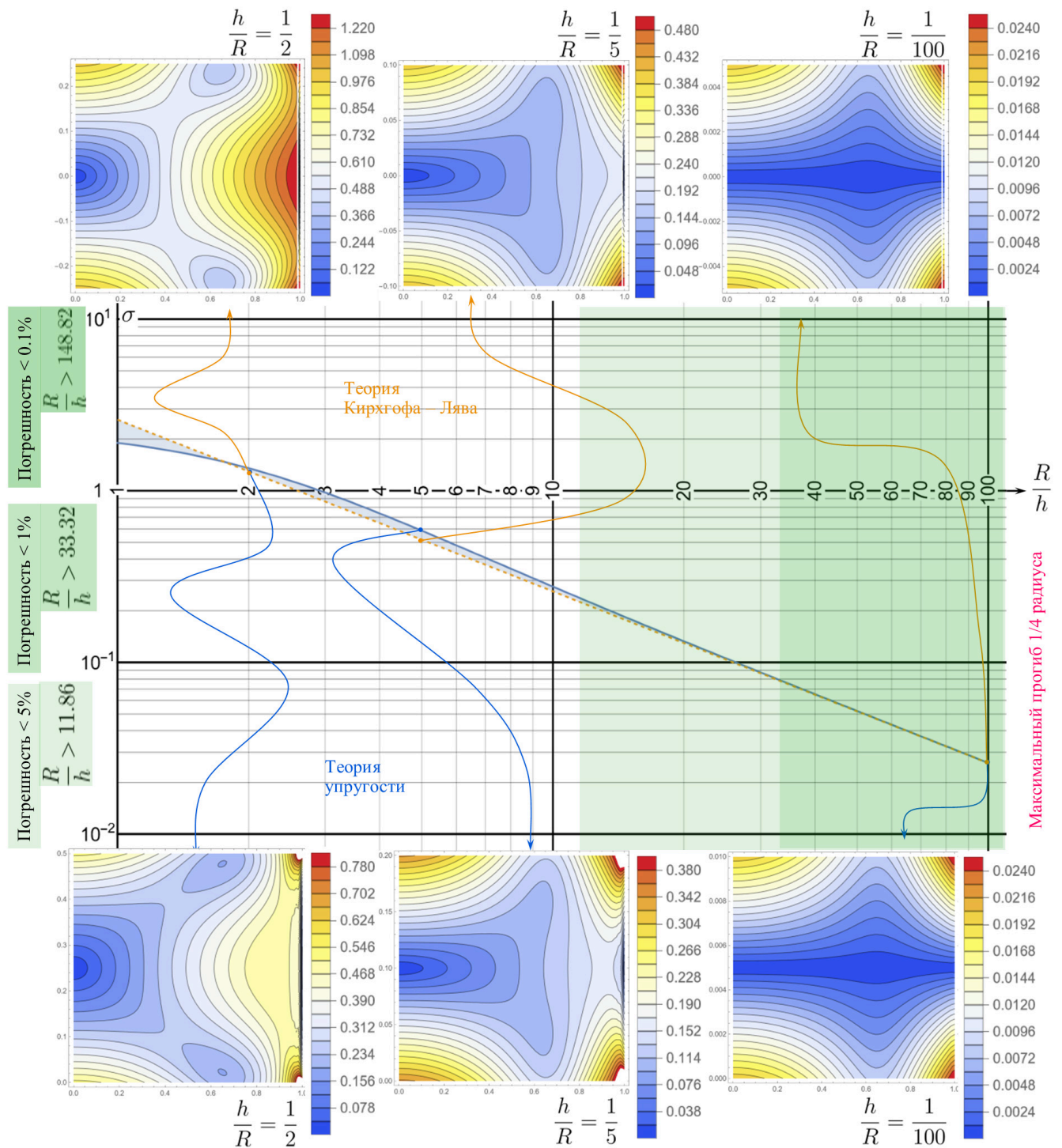


Рис. 6.2. Сравнение эквивалентных напряжений Мизеса по теории Кирхгофа–Лява и линейной теории упругости (на контуре)

Fig. 6.2. Mises equivalent stresses comparison of Kirchhoff–Love theory and linear theory of elasticity on a circuit)

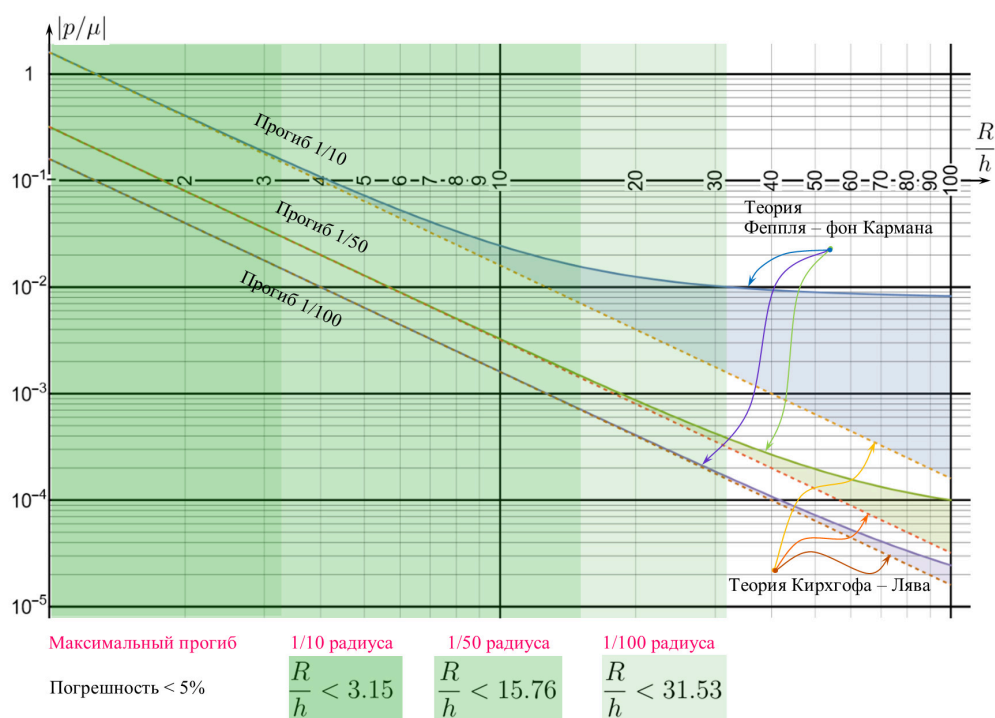


Рис. 6.3. Сравнение “жесткости” моделей Кирхгофа–Лява и Феппля–фон Кармана
Fig. 6.3. “Stiffness” comparison of Kirchhoff–Love and Foppl–von Karman models

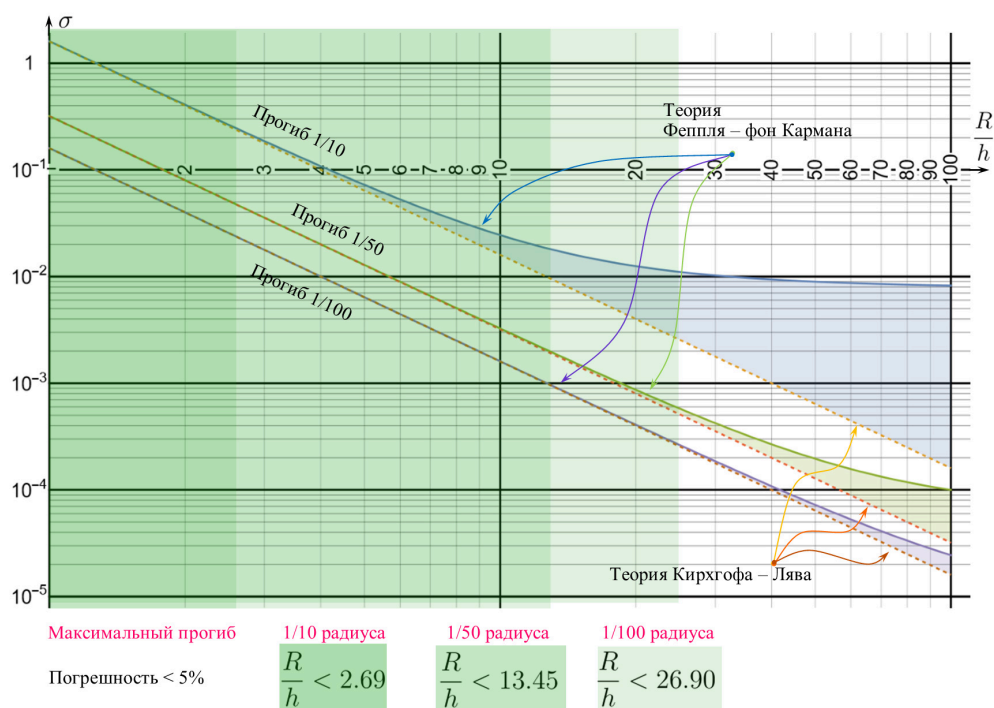


Рис. 6.4. Сравнение эквивалентных напряжений Мизеса по моделям Кирхгофа–Лява и Феппля–фон Кармана (на контуре)

Fig. 6.4. Mises equivalent stresses comparison of Kirchhoff–Love and Foppl–von Karman models (on a circuit)

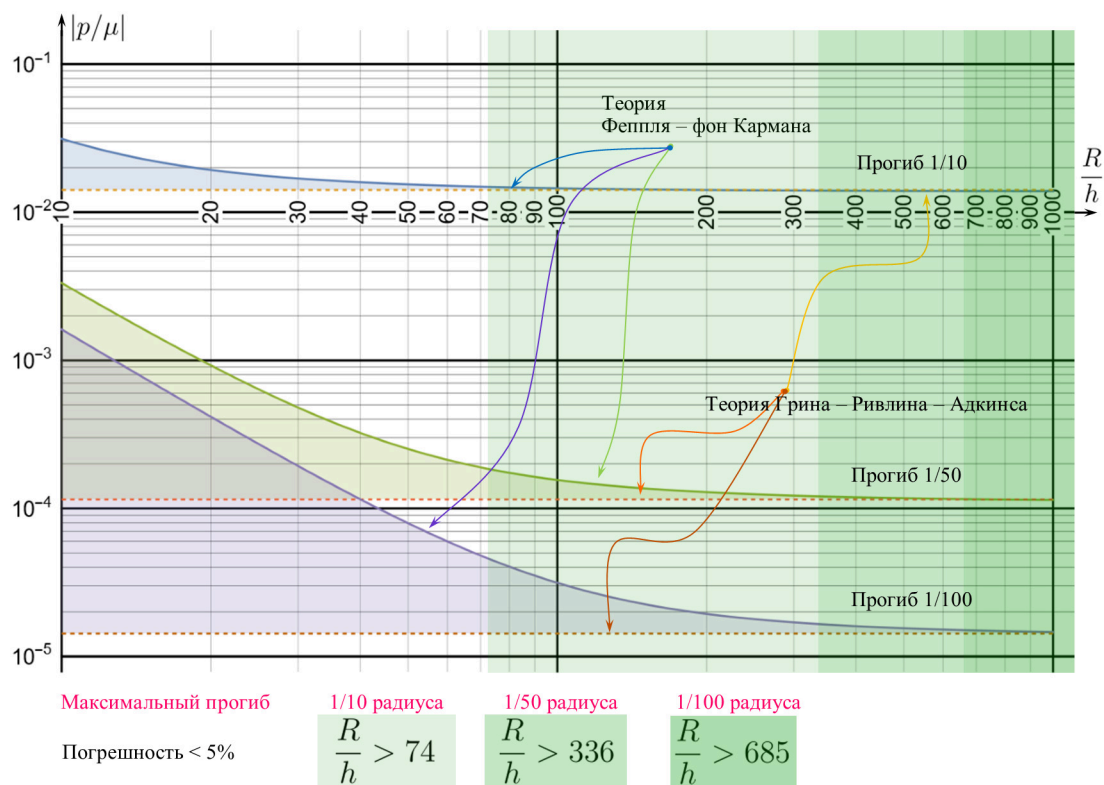


Рис. 6.5. Сравнение “жесткости” моделей Феппля–фон Кармана и нелинейной мембраны
 Fig. 6.5. “Stiffness” comparison of Foppl–von Karman and nonlinear membrane models

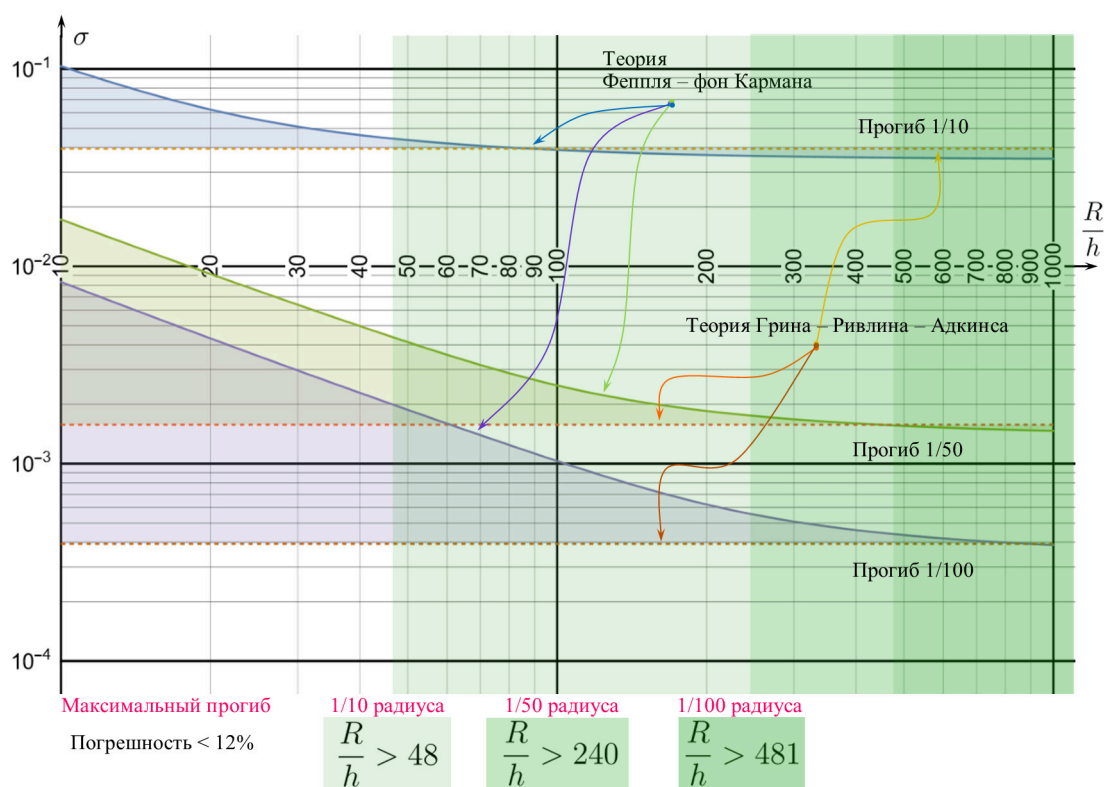


Рис. 6.6. Сравнение эквивалентных напряжений Мизеса по моделям Феппля–фон Кармана и нелинейной мембраны (в полюсе)

Fig. 6.6. Mises equivalent stresses comparison of Foppl–von Karman and nonlinear membrane models (at the pole)

Литература

- [1] Zorman C.: Material Aspects of Micro- and Nanoelectromechanical Systems // In: Bhushan B. (eds) Springer Handbook of Nanotechnology. Springer Handbooks. Berlin: Springer-Verlag, 2010. Pp. pp 299–322. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_10.
- [2] Особенности деформирования круглых тонкопленочных мембран и экспериментальное определение их эффективных характеристик / А.А. Дедкова [и др.] // Журнал технической физики. 2021. Т. 91, № 10. С. 1454–1465. DOI: <http://dx.doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>.
- [3] Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва: Гостехиздат, 1956. 419 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/6759?ysclid=lpkvdu6rgi257339739>.
- [4] Manzhairov A.V., Lychev S.A. On the equilibrium of accreted plates // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics / eds. A.V. Manzhairov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elite Pub. House, 2011. Pp. 294–300.
- [5] Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Известия Российской Академии наук. Сер.: Механика твердого тела. 2011. № 2. Р. 198–208. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15785061>. EDN: <https://www.elibrary.ru/nhlavh>.
- [6] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Т. 94, № 1–2, P. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>. EDN: <https://www.elibrary.ru/skkyph>.
- [7] Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity // In: Truesdell C. (Ed.) Volume VIa/2. Mechanics of Solids II. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. 304 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_1.
- [8] Wang C.-C., Truesdell C. Introduction to rational elasticity. Springer Science & Business Media Elsevier, 1973. 556 p. URL: https://books.google.ru/books?id=cGtGRkTB_MC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false.
- [9] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [10] Pochhammer L. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1876. Vol. 1876. Issue 81. Pp. 33–61. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1876.81.33>.
- [11] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1889. Vol. 14. Pp. 251–369.
- [12] Chau K.T., Wei X.X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I — Analytic solution // International Journal of Solids and Structures. 2000. Vol. 37, Issue 40. Pp. 5707–5732. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00289-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00289-9).
- [13] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: ГИТТЛ, 1955. URL: <https://lib-bkm.ru/load/86-1-0-2247?ysclid=lpkye1d5c5278329098>.
- [14] Лурье А.И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с. URL: <https://djvu.online/file/jVW1yj2RAOcEY?ysclid=lpkyfikvtw867996432>.
- [15] Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, № 1. С. 116–122.
- [16] Сеницкий Ю.Э., Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для толстой круглой анизотропной пьезокерамической пластины // Известия Российской Академии наук. Сер.: Механика твердого тела. 1999. № 1. С. 78–87. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23543073>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tvfaib>.
- [17] Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // Proceedings of the Royal Society of London. 1901. Vol. 68, Issue 442–450. Pp. 353–358. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspl.1901.0056>.
- [18] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1952. Vol. 18, № 68. Pp. 21–28. DOI: https://doi.org/10.1299/kikai1938.18.68_21.
- [19] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1954. Vol. 20, № 91.
- [20] Зиза О.А. Суммирование ортогональных рядов. Москва: УРСС, 1999. 281 с.
- [21] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=lp3ujt2ay103010779>.
- [22] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. Москва: Машиностроение, 1977. 488 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/6392?ysclid=lp417f3jv135311463>.
- [23] Лычев С.А., Салеев С.В. Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2006. № 2. С. 62–73. URL: <https://ipmnet.ru/lychev/papers/LychevSaleev200620101.pdf?ysclid=lp46zt2af827660061>.

- [24] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2010. 378 с. URL: <https://dvizhenie24.ru/download/teoriya-tonkih-obolochek/?ysclid=lp14fjud3l941820153>.
- [25] Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [26] Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во Академии наук Украинской ССР, 1963. 354 с. URL: https://books.totalarch.com/fundamentals_of_analytical_mechanics_of_shells_kilchevsky_1963?ysclid=lp14o1sxtl352609336.
- [27] Podio-Guidugli P. An exact derivation of the thin plate equation // Journal of Elasticity. 1989. Vol. 22, № 2–3. Pp. 121–133. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00041107>.
- [28] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 417 с. URL: <https://djvu.online/file/nRZ45B1NutAhh?ysclid=lp1512usuk734973961>.
- [29] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgoog/mode/2up>.
- [30] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyclopadie Der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 4. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910. Pp. 311–385. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5.
- [31] Ciarlet P.G. A justification of the von Karman equations. // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1980. Vol. 73, № 4. Pp. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [32] Ciarlet P.G. Mathematical elasticity. Vol. 1: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021. 451 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611976786>.
- [33] Съярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. Сер.: Новое в зарубежной науке. Механика. Вып. 31. Москва: Мир, 2006. 172 с.
- [34] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. Vol. III: Theory of Shells. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 599 p. Available at: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-mathematics-and-its-applications/vol/29>.
- [35] Reissner E. On finite deflections of circular plates // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. 1949. Vol. 1. Pp. 213–219. URL: <https://zbmath.org/0036.39701>.
- [36] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Москва: Наука. 1969. 529 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=467347&ysclid=lp16u4x3b551294565>.
- [37] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 2016. Vol. 59, № 2, Article number: 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [38] Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Foppl–von Karman equations governing deflections of a thin flat plate // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2012. Vol. 47, Issue 3. Pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
- [39] Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Foppl–von Karman equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 91. P. 8–21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
- [40] Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Foppl–von Karman equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach // Numerical Algorithms. 2018. Vol. 79. P. 993–1020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
- [41] Бычков П.С., Лычев С.А., Бут Д.К. Экспериментальная методика определения эволюции формы изгиба тонкой подложки при электрокристаллизации меди в областях сложной формы // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25, № 4. С. 48–73. URL: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73>.
- [42] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. 784 с. URL: <https://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm?ysclid=lpma5mavxy139390417>.
- [43] Феодосьев В.И. Осесимметричные гибкие оболочки // Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. Москва: МАШГИЗ, 1958. 974 с. URL: <https://lib-bkm.ru/12048?ysclid=lpmapv9rzb296687414>.
- [44] Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. Москва: МАШГИЗ, 1962. 462 с. URL: <https://lib-bkm.ru/10326?ysclid=lpmb0864re299303131>.
- [45] Freund L.B., Suresh S. Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Available at: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511754715>.
- [46] Adkins J.E., Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials IX. The deformation of thin shells // Philosophical Transactions of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1952. Vol. 244, Issue 888. Pp. 505–531. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0013>.

- [47] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37. Issue 4. Pp. 1002–1011. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3408651>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105

Submitted: 12.09.2023

Revised: 17.11.2023

Accepted: 05.12.2023

S.A. Lychev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

A.V. Digilov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: avdigilov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6892-7740>

N.A. Pivovarov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: pivovarov.bmstu@ya.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7149-4102>

BENDING OF A CIRCULAR DISK: FROM CYLINDER TO ULTRATHIN MEMBRANE¹²

ABSTRACT

The article discusses methods of mathematical modeling of the stress-strain state of a circular disc at various ratios of its thickness to radius, ranging from 1 to 10^{-3} . For sufficiently thick plates, the solution of three-dimensional linear elasticity theory is used, for plates of medium thickness — the solution of linear bending equations within the Kirchhoff–Love hypotheses and nonlinear equations of Foppl–von Karman, and for ultrathin plates — the nonlinear equations of Adkins–Rivlin–Green. A comparative analysis of the solutions has been conducted, and ranges of relative thickness have been identified in which the considered solutions adequately describe the deformation process. This result enables the selection of a method for mathematical modeling of the stress-strain state of circular plates used in microelectromechanical systems that is most suitable for their relative size.

Key words: circular disc; short cylinder; thick plate; thin plate; ultrathin membrane; closed-form solution; Foppl–von Karman equations; nonlinear membrane model.

Citation. Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A. Bending of a circular disk: from cylinder to ultrathin membrane. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 77–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A., 2023

Sergey A. Lychev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101, bldg. 1, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

Alexander V. Digilov — postgraduate student, junior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101, bldg. 1, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

Nikita A. Pivovarov — postgraduate student, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101, bldg. 1, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

References

- [1] Zorman C. Material Aspects of Micro- and Nanoelectromechanical Systems. In: Bhushan B. (eds) Springer Handbook of Nanotechnology. Springer Handbooks. Berlin: Springer-Verlag, 2010, pp. 299–322. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_10.

¹²The work is carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant № 23-19-00866).

- [2] Dedkova A.A. et al. Peculiarities of deformation of round thin-film membranes and experimental determination of their effective characteristics. *Technical Physics*, 2021, vol. 91, no. 10, pp. 1454–1465. DOI: <http://dx.doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>.
- [3] Volmir A.S. Flexible plates and shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 419 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/6759?ysclid=lpkvdu6rgi257339739>. (In Russ.)
- [4] Manzhirrov A.V., Lychev S.A. On the equilibrium of accreted plates. In: Manzhirrov A.V., Gupta N.K., Indeitsev D.A. (Eds.) *Topical Problems in Solid and Fluid*. Delhi: Elite Pub. House, 2011, pp. 294–300.
- [5] Lychev S.A., Manzhirrov A.V., Lycheva T.N. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 325–333. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441102021X>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ohrjnj>. (In English; original in Russian).
- [6] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, no. 1-2, pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>. EDN: <https://www.elibrary.ru/skkyph>.
- [7] Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity. In: Truesdell C. (Ed.) *Volume VIa/2. Mechanics of Solids II*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984, 304 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_1.
- [8] Wang C.-C., Truesdell C. Introduction to rational elasticity. Springer Science & Business Media Elsevier, 1973, 556 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=cGtGrkTB_MC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false.
- [9] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [10] Pochhammer L. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1876, vol. 1876, issue 81, pp. 33–61. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1876.81.33>.
- [11] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1889, vol. 14, pp. 251–369.
- [12] Chau K.T., Wei X.X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I – Analytic solution. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, issue 40, pp. 5707–5732. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00289-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00289-9).
- [13] Lurie A.I. Spatial problems of elasticity theory. Moscow: GITTL, 1955. Available at: <https://lib-bkm.ru/load/86-1-0-2247?ysclid=lpkye1d5c5278329098>. (In Russ.)
- [14] Lurie A.I. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1970, 940 p. Available at: <https://djvu.online/file/jVW1yj2RAOcEY?ysclid=lpkyfikvtw867996432>. (In Russ.)
- [15] Senitskii Yu.E. Dynamic problem of electroelasticity for a nonhomogeneous cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, vol. 57, no. 1, pp. 116–122. (In Russ.)
- [16] Senitskii Yu.E., Shlyakhin D.A. Nonstationary axisymmetric problem of electroelasticity for a thick circular anisotropic piezoceramic plate. *Mechanics of Solids*, 1999, no. 1, pp. 78–87. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23543073>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tvfaib>. (In Russ.)
- [17] Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1901, vol. 68, issues 442–450, pp. 353–358. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspl.1901.0056>.
- [18] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1952, vol. 18, no. 68, pp. 21–28. DOI: https://doi.org/10.1299/kikai1938.18.68_21. (In Japanese).
- [19] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1954, vol. 20, no. 91. (In Japanese).
- [20] Ziza O.A. Summability of Orthogonal Series. Moscow: URSS, 1999, 281 p. (In Russ.)
- [21] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York, Toronto, London: McGraw-hill, 1959, 636 p. Available at: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=lp3ujt2ay103010779>. (In Russ.)
- [22] Biderman V.L. Mechanics of thin-walled structures. Statics. Moscow: Mashinostroenie, 1977, 488 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/6392?ysclid=lp1417f3jv135311463>. (In Russ.)
- [23] Lychev S.A., Saleev S.V. Closed solution of boundary value problem for rectangular plate fixed on boundary. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2006, no. 2, pp. 62–73. Available at: <https://ipmnet.ru/lychev/papers/LychevSaleev200620101.pdf?ysclid=lp146zt2af827660061>. (In Russ.)
- [24] Novozhilov V.V. Theory of thin shells. Saint Petersburg: Izdatel'stvo SPbGU, 2010, 378 p. Available at: <https://dvizhenie24.ru/download/teoriya-tonkih-obolochek/?ysclid=lp14fjud3l941820153>. (In Russ.)
- [25] Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.

- [26] Kil'chevskii N.A. Fundamentals of analytical mechanics of shells. Kyiv: Izdatel'stvo Akademii nauk Ukrainy SSR, 1963, 354 p. Available at: https://books.totalarch.com/fundamentals_of_analytical_mechanics_of_shells_kilchevsky_1963?ysclid=lp14o1sxtl352609336. (In Russ.)
- [27] Podio-Guidugli P. An exact derivation of the thin plate equation. *Journal of Elasticity*, 1989, vol. 22, no. 2-3, pp. 121–133. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00041107>.
- [28] Lekhnitsky S.G. Theory of anisotropic body elasticity. Moscow: Nauka, 1977. 417 p. Available at: <https://djvu.online/file/nRZ45BlNutAhhb?ysclid=lp1512usuk734973961>. (In Russ.)
- [29] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Volume 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907. Available at: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgoog/mode/2up>.
- [30] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: *Encyclopadie Der Mathematischen Wissenschaften*. Vol. 4. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910. Pp. 311–385. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5.
- [31] Ciarlet P.G. A justification of the von Karman equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1980, vol. 73, no. 4, pp. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [32] Ciarlet P. G.: Mathematical elasticity: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021, 451 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611976786>.
- [33] Ciarlet P.G., Rabie P. Karman equations. Series: "New in foreign science. Mechanics". Issue 31. Moscow: Mir, 2006, 172 p. (In Russ.)
- [34] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. Vol III: Theory of Shells. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 599 p. Available at: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-mathematics-and-its-applications/vol/29>.
- [35] Reissner E. On finite deflections of circular plates. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 1949, vol. 1, pp. 213–219. Available at: <https://zbmath.org/0036.39701>.
- [36] Vainberg M.M., Trenogin V.A. Theory of branching of solutions of nonlinear equations. Moscow: Nauka, 1969, 529 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=467347&ysclid=lp16u4x3b551294565>. (In Russ.)
- [37] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2016, vol. 59, no 2, Article number: 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [38] Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Foppl–von Karman equations governing deflections of a thin flat plate. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, vol. 47, issue 3, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
- [39] Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Foppl–von Karman equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 91, pp. 8–21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
- [40] Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Foppl–von Karman equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach. *Numerical Algorithms*, 2018, vol. 79, pp. 993–1020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
- [41] Bychkov P.S., Lychev S.A., Bout D.K. Experimental technique for determining the evolution of the bending shape of thin substrate by the copper electrocrystallization in areas of complex shapes. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 48–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73>. (In Russ.)
- [42] Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1949, 784 p. Available at: <https://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm?ysclid=lpma5mavxy139390417>. (In Russ.)
- [43] Feodosiev V.I. Axisymmetric flexible shells. In: Ponomarev S.D. Strength calculations in mechanical engineering. Volume 2. Moscow: MASHGIZ, 1958, 974 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/12048?ysclid=lpmapv9rzb296687414>. (In Russ.)
- [44] Andreeva L.E. Elastic elements of instruments. Moscow: MASHGIZ, 1962, 462 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/10326?ysclid=lpmb0864re299303131>. (In Russ.)
- [45] Freund L.B., Suresh S. Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511754715>.
- [46] Adkins J. E., Rivlin R. S.: Large elastic deformations of isotropic materials IX. The deformation of thin shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1952, vol. 244, issue 888, pp. 505–531. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0013>.
- [47] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37, pp. 1002–1011. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3408651>.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-106-116

УДК 519.6

Дата: поступления статьи: 13.09.2023
после рецензирования: 25.10.2023
принятия статьи: 05.12.2023**К.А. Мушанкова**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6081-1169>**Л.В. Степанова**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanovlv2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>ОПЫТ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАКЛОННЫХ ТРЕЩИН В МАТЕРИАЛАХ
С КУБИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ¹

АННОТАЦИЯ

В данной статье проведено сравнительное сопоставление атомистических и континуальных угловых зависимостей компонент тензора напряжений у вершины трещины в пластине, ослабленной центральным дефектом, из анизотропного линейно-упругого материала с кубической сингонией упругих свойств в условиях смешанного нагружения. Атомистические распределения напряжений получены посредством метода молекулярной динамики, выполненного в программном коде Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS) для монокристаллической гранецентрированной кубической (ГЦК) меди. Континуальные распределения напряжений получены на основании аналитического решения теории упругости анизотропных сред с привлечением методов теории функции комплексного переменного и последующим разложением комплексных потенциалов для нормального отрыва и поперечного сдвига в ряды по собственным функциям. В ходе молекулярно-динамического расчета варьировались: 1) угол между направлением главной оси симметрии материала в плоскости пластины и трещиной и 2) угол между трещиной и направлением действующей растягивающей нагрузки. Взаимодействия между отдельными атомами в системе были представлены потенциалом внедренного (погруженного) атома. Основной фокус настоящего исследования находится в компаративном сопоставлении двух принципиально различных подходов моделирования: дискретного (метод молекулярной динамики) и континуального (концепция сплошности). Результаты сравнения полученных атомистического и континуального решений показали, что угловые распределения компонент тензора напряжений находятся в хорошем соответствии друг с другом. Можно заключить, что решения и подходы классической механики хрупкого разрушения "работают" на атомистических расстояниях от вершины трещины, даже в случаях небольшого количества атомов.

Ключевые слова: метод молекулярной динамики; потенциал внедренного атома; кубическая сингония; поля напряжений.

Цитирование. Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Опыт моделирования наклонных трещин в материалах с кубической кристаллической структурой // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 106–116. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-106-116>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ в рамках научного проекта № 21-11-00346.

© Мушанкова К.А., Степанова Л.В., 2023

Карина Артемовна Мушанкова — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Лариса Валентиновна Степанова — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Появление заметной трещины на макроскопическом уровне является следствием распространения трещины в нескольких масштабах, сильно отличающихся по длине. Наименьший масштаб — это разрыв связей между атомами по мере распространения трещины. Движущей силой, стоящей за разрывом соединения, является поле напряжений, обусловленное нагрузкой, приложенной к образцу. Поскольку материал разрушается, когда концентрация напряжений превышает предел прочности материалов на разрушение, анализ разрушения напрямую связан с концентрацией напряжений или деформаций вокруг вершины трещины. Механическая реакция материалов, подверженных экстремальному приложенному напряжению, контролируется атомистическими механизмами вблизи концентраторов напряжений, таких как вершины трещин. В настоящее время атомистическое моделирование оказалось полезным инструментом для изучения свойств материалов, при разрушении путем исследования атомистической конфигурации и поля напряжений вокруг вершины трещины с атомистической точки зрения. В последнее время пристальное внимание уделяется атомистическим напряжениям, обусловленным разрушением кристаллографической решетки материала вдоль границ зерен. Проведенные исследования показали, что усилия, возникающие вдоль границ зерен, вычисленные с помощью компонент тензора атомистических напряжений, могут служить количественными дескрипторами границ зерен [1]. Дескрипторы дают возможность предсказать напряжение, соответствующее критической эмиссии дислокаций и свойства абсорбции или пропускания непосредственно из атомистической структуры границы зерен [1–3]. Концепция атомистических напряжений в настоящее время широко применяется для изучения разрушения на атомистическом масштабе, а также для того, чтобы пролить свет на поведение таких материалов как металлическое стекло, гранулированные материалы на атомном уровне [4–6]. Это связано с тем, что атомистическое напряжение может быть широко интерпретировано как напряжение, эквивалентное напряжению Коши, которое позволяет срастить между собой атомистические явления и процессы, описываемые механикой сплошных сред [4–6]. В моделировании классической молекулярной динамики (MD) взаимодействие между атомами определяется межатомным потенциалом, и атомистические напряжения могут быть непосредственно вычислены из теоремы вириала [7]. Следует отметить, что понятие атомистического напряжения все еще актуально за пределами области MD, однако его нелегко определить количественно. Например, в расчетах теории функционала плотности (DFT) глобальное (макроскопическое) квантово-механическое напряжение может быть получено из изменения полной энергии как функции равномерной деформации [8; 9]. Однако локальное изменение напряжения, или напряжение, приходящееся на атом, внутри суперячейки DFT не может быть однозначно определено количественно, несмотря на то что межатомные потенциалы в MD часто калибруются по DFT [10–13]. Определение локального квантово-механического напряжения, приходящееся на атом в DFT, с помощью аналитических или численных методов в настоящее время является активной областью исследований [13–15]. Аналогичным образом понятие атомистического напряжения недостаточно четко определено в экспериментах по просвечивающей электронной микроскопии высокого разрешения (HRTEM). Однако достижение субнанометрового разрешения измерений внутренней деформации может стать реальностью благодаря новым методам, таким как наноразмерная голографическая интерферометрия [16–18] или использование движущихся дислокаций в качестве механических зондов [19].

В настоящее время текущие результаты [20–26] получены в специальной атомистической конфигурации, когда трещина лежит в плоскости, параллельной одной из плоскостей симметрии [21–26]. Эволюция микроструктуры и процесс разрушения монокристаллических материалов могут быть иными, если изменить ориентацию кристалла. Кроме того, атомный потенциал и ограничивающие условия также могут влиять на процесс атомарного разрушения и эволюцию внутренней микроструктуры. Чтобы понять более общий процесс разрушения материала и микромеханизмы монокристаллов на атомарном уровне, необходима более подробная и расширенная модель MD.

Для восполнения имеющегося пробела в настоящей статье изучена пластина из монокристаллической меди, ослабленная наклонной трещиной. Трещина наклонена под различными углами по отно-

пению к главным осям симметрии кристаллической решетки материала с кубической симметрией его упругих свойств. Вычисления выполнены с помощью метода молекулярной динамики, реализованного в программе Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS). Ведущей целью вычислений было сравнение угловых распределений компонент тензора напряжений, ассоциированных с вершиной трещины, полученных методом молекулярной динамики, и полученных с помощью аналитического решения задачи, построенного с использованием методов теории упругости анизотропного тела [27–29].

1. Моделирование наклонного дефекта в материалах с кубической кристаллической решеткой

Для исследования полей напряжений в окрестности вершины трещины на наноразмерном уровне был написан скрипт для LAMMPS. В рамках поставленной задачи построения пластинки с центральным дефектом на наноскопическом уровне удобно оперировать с размерностями Å для длины, ps для времени и бар для напряжения, поэтому применялась команда `units metal`. Несмотря на то что исследуемый объект — пластинка, все же она будет обладать некоторой толщиной в несколько атомов, поэтому в коде прописывалась размерность пространства `dimension 3`. Задавались периодические граничные условия во всех направлениях `boundary p p p`. Определение стиля представления частиц `atom_style atomic` означает, что будет рассматриваться простейший случай, когда каждая частица в системе считается точечной без внутренней структуры или ориентации. Задание решетки (в данном случае гранецентрированная кубическая решетка с параметром решетки 3.615 Å) определяется командой `lattice fcc 3.615`. Создание бокса для размещения атомов размерами 120×120×3 в единицах параметра решетки `region box prism 0 120 0 120 0 3 0 0 0` (часто бывает удобным моделировать именно призму, поскольку в случаях, когда к пластине прикладывается сдвиговая нагрузка, происходит наклон ее боковых границ, в таких ситуациях `region box block` выдает ошибку). В результате было смоделировано 172 800 атомов. Для создания области с 3 типами атомов в указанном регионе используется команда `create_box 3 box`. Команда `create_atoms 1 region box` создает атомы типа 1 внутри региона `box`. Для создания трещины длины 10 (в единицах параметра решетки) определялось два региона, представляющих верхнюю и нижнюю области, где были определены атомы типов 2 и 3. На рис. 1.1 атомы первого типа обозначены цифрой 1, второго — цифрой 2, третьего — 3. Регионы выделялись из соображений, чтобы трещина располагалась под углом 45 градусов как к осям симметрии рассматриваемого материала с ГЦК-решеткой, так и по отношению к прикладываемой далее нормальной нагрузке. Потенциал взаимодействия между атомами устанавливался командой `pair_style eam`, где `eam` — `embedded atom method`, то есть использовался потенциал внедренного атома. Командой `pair_coeff * * Cu_u3.eam` задавались коэффициенты потенциала, определенные в файле `Cu_u3.eam`. Чтобы исключить взаимное влияние друг на друга атомов типа 2 и 3, использовалась команда `neigh_modify exclude type 2 3`. Напряжения на атом рассчитывались командой `compute peratom all stress/atom`. Для моделирования прикладываемой нормальной нагрузки в 80 ГПа использовалась команда `fix npt`, температура поддерживалась равной 10 К для уменьшения влияния пластических деформаций. Командой `dump` формировался файл, позволяющий получить данные временной эволюции полей напряжений, воспринимаемые пакетами для визуализации. Кадры, иллюстрирующие реакцию пластинки на растяжение для компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} на временных шагах 4 пс, 7 пс, 9 пс, полученные в пакете OVITO, представлены на рис. 1.2.

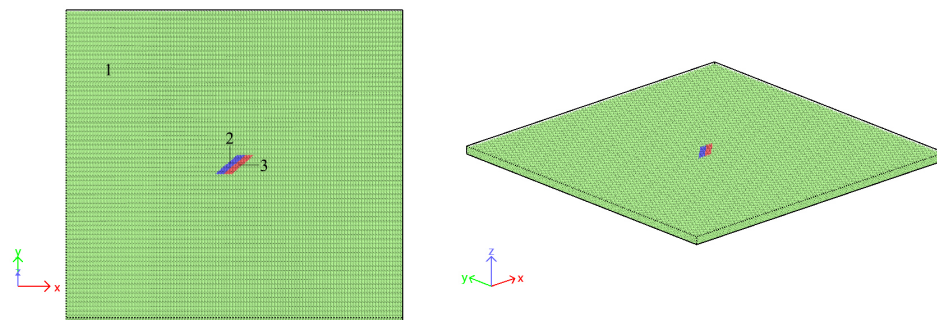


Рис. 1.1. Геометрия пластинки с центральной трещиной
 Fig. 1.1. Geometry of a plate with a central crack

Компоненты тензора напряжений в LAMMPS определяются согласно формуле для тензора вириальных напряжений, которая была получена путем определения тензора напряжений Коши в терминах атомистических величин [30]:

$$\sigma_{av} = -\frac{1}{V} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \overline{\mathbf{f}_{\alpha\beta} \otimes (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta})} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overline{\mathbf{v}_{\alpha}^{rel} \otimes \mathbf{v}_{\alpha}^{rel}} \right],$$

где $\mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\beta}$ — радиус-векторы частиц α, β ; $\mathbf{v}_{\alpha}^{rel}$ — вектор скорости частицы α , $\mathbf{f}_{\alpha\beta}$ — сила, действующая на частицу α со стороны частицы β .

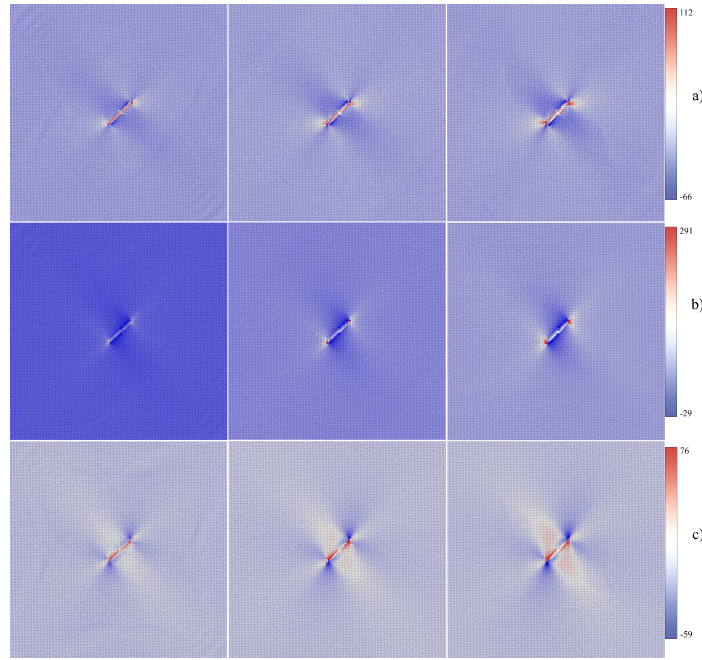


Рис. 1.2. Распределение полей напряжений σ_{11} — а), σ_{22} — б), σ_{12} — в) на временных шагах 4 пс, 7 пс, 9 пс

Fig. 1.2. Distribution of stress fields σ_{11} — a), σ_{22} — b), σ_{12} — c) at time steps of 4 ps, 7 ps, 9 ps

2. Аналитическое представление полей напряжений в анизотропных материалах с кубической сингонией

В статье [27] приведено асимптотическое решение, учитывающее ортотропную симметрию упругих свойств материала:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} &= 2Re \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{i^{(k+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{k}{2}-1} \left[\begin{aligned} &\mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ &- \left(\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \right) \end{aligned} \right] \right) + \\ &+ 2Re \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{i^{(k+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{\frac{k}{2}-1} \left[\begin{aligned} &\mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ &- \left(\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_2 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos\theta + \mu_1 \sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \right) \end{aligned} \right] \right), \quad (2.1) \end{aligned}$$

где A_i, B_i — амплитудные множители поля напряжений, μ_1, μ_2 — константы, описывающие материал (корни характеристического уравнения), r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины.

Амплитудные коэффициенты для бесконечной анизотропной пластины с центральной трещиной при одноосном нагружении:

$$A_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin^2 \alpha, \quad B_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$A_2 = \frac{\sigma}{2Im(\mu_1 + \mu_2)} [\cos^2 \alpha + Re(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \lambda Re(\mu_1 + \mu_2)], \quad B_2 = \frac{\sigma Re(\mu_1 + \mu_2)}{2Im(\mu_1 \mu_2)} [\sin \alpha \cos \alpha - \lambda],$$

$$A_3 = \frac{3}{8\sqrt{2}a} \sigma \sin^2 \alpha, \quad B_3 = \frac{3}{8\sqrt{2}a} \sigma \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$A_{2n+2} = B_{2n+2} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin^2 \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n+2)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} \sigma \sin \alpha \cos \alpha}{8(2a)^{n+\frac{1}{2}}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots 2n} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n+2)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где λ — действительный параметр, характеризующий величину смещения тела как абсолютно твердого, α — угол наклона трещины, a — половина длины трещины, σ — прикладываемая к пластине нормальная нагрузка.

Поскольку кубическая симметрия упругих свойств является частным случаем ортотропной, приведенное решение можно применить к поставленной задаче для определения полей напряжений монокристалла ГЦК-меди. Константы исследуемого материала $\mu_1 = 0.708728 + 0.705482i$, $\mu_2 = -0.708728 + 0.705482i$ были получены из тензора упругих модулей в статье [23]. Для сравнения асимптотического решения и результатов МД-моделирования для компонент тензора напряжения σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , полученных аналитически, был выполнен поворот на 45 градусов.

3. Сравнение аналитического решения и результата МД-моделирования

На рисунках 3.1–3.3 слева изображены контурные графики, построенные по асимптотическому решению, обобщающему решение Уильямса, при удержании 20 слагаемых, справа представлены результаты моделирования, выполненные в программном пакете LAMMPS, где визуализируются вириальные напряжения. Справа приведены кадры из OVITO, показывающие распределение компонент тензора напряжений рис. 3.1 — σ_{11} , рис. 3.2 — σ_{22} , рис. 3.3 — σ_{12} . На графиках, полученных методом молекулярной динамики, четко видно как расположена трещина относительно осей симметрии рассматриваемого материала с ГЦК-решеткой. На всех графиках напряжения имеют размерность ГПа, а трещина располагается в 3 четверти под углом 45 градусов к главным осям материала.

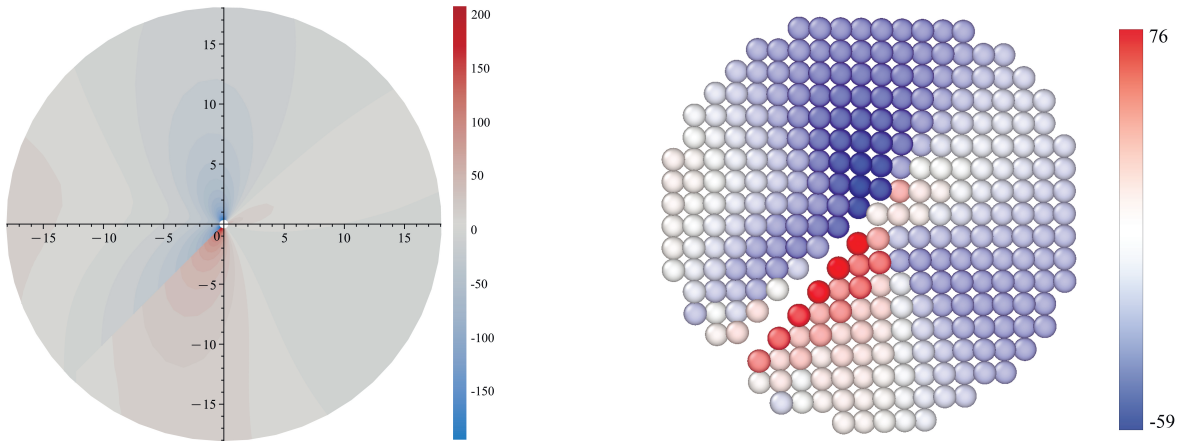


Рис. 3.1. Контурный график, построенный согласно аналитическому решению (слева), и распределение полей напряжений, полученное путем МД-моделирования (справа), для компоненты тензора напряжений σ_{11}

Fig. 3.1. Contour plot plotted according to the analytical solution (left) and the distribution of stress fields obtained by MD modeling (right) for the stress tensor component σ_{11}

На рис. 3.1 как слева, так и справа можно видеть характерные области минимальных и максимальных напряжений, представленных различными оттенками в соответствии со шкалой. Область максимальных напряжений как на контурном графике, так и на визуализации МД-решения расположена под трещиной, область минимальных напряжений на обоих графиках образуют характерные петли, приходящиеся на центр между 1 и 2 четвертями окружностей.

На рис. 3.2 приведены визуализации нормальной компоненты тензора напряжений. Как на левом, так и на правом графиках концентрация напряжений приходится на вершину дефекта, а берега трещины обладают сравнительно меньшими значениями напряжений. Максимальные напряжения формируют некие петлеобразные области, распространяющиеся вправо от вершины трещины, и наблюдаются как для аналитического решения, так и для численного.

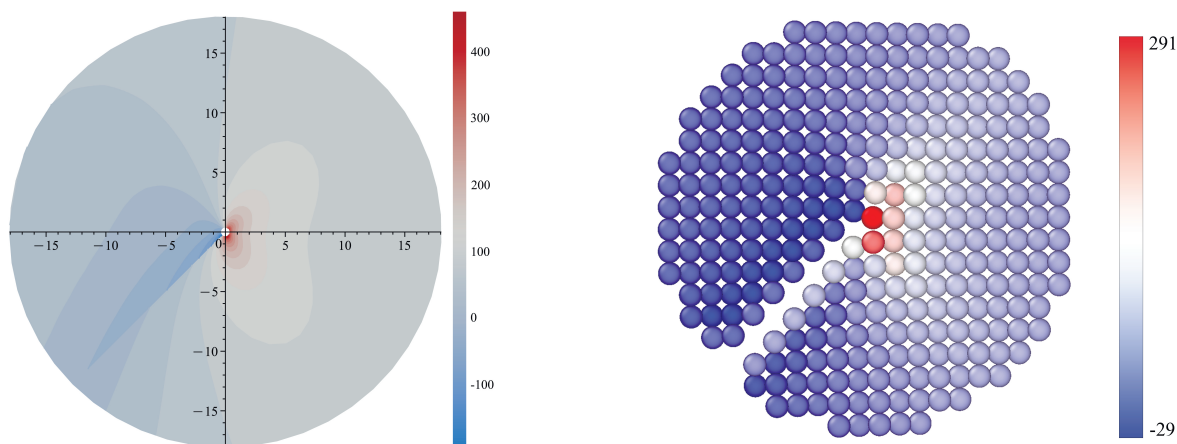


Рис. 3.2. Контурный график, построенный согласно аналитическому решению (слева), и распределение полей напряжений, полученное путем МД-моделирования (справа), для компоненты тензора напряжений σ_{22}

Fig. 3.2. Contour plot plotted according to the analytical solution (left) and the distribution of stress fields obtained by MD modeling (right) for the stress tensor component σ_{22}

Сравнение результатов асимптотического решения и молекулярно-динамического для касательной компоненты тензора напряжений σ_{12} представлено на рис. 3.3. Так же, как и для компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} , между результатами, полученными различными методами, для σ_{12} наблюдается схожий характер распределения напряжений. Максимальные напряжения приходятся на вершину трещины, а затем петлеобразно распространяются вправо на уменьшение. Минимальные напряжения тоже имеют петлеобразный характер и распространяются влево с угасанием по модулю.

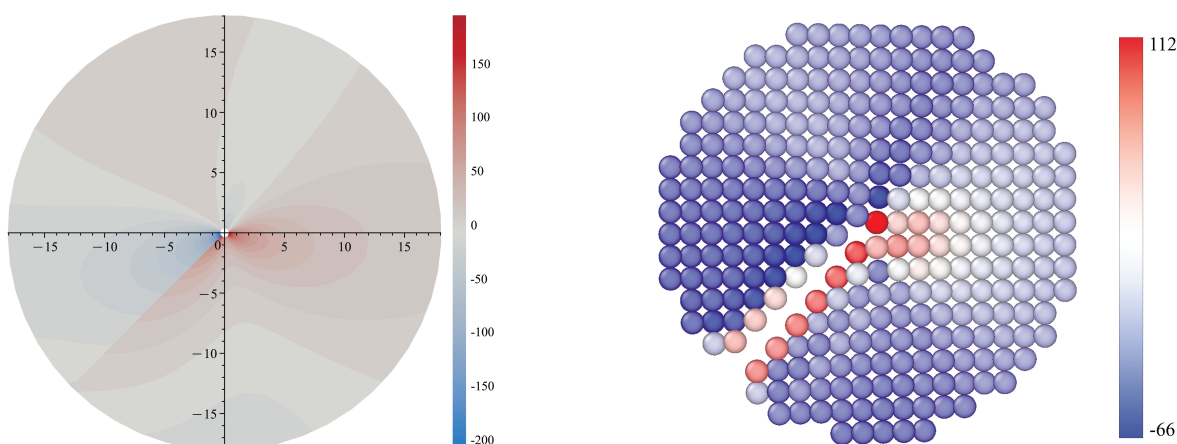


Рис. 3.3. Контурный график, построенный согласно аналитическому решению (слева), и распределение полей напряжений, полученное путем МД-моделирования (справа), для компоненты тензора напряжений σ_{12}

Fig. 3.3. Contour plot plotted according to the analytical solution (left) and the distribution of stress fields obtained by MD modeling (right) for the stress tensor component σ_{12}

Для молекулярно-динамического решения выделялась кольцевая область в окрестности вершины трещины, и далее было проведено сравнение угловых распределений для компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} на расстоянии $r/a = 0.75$ (рис. 3.4).

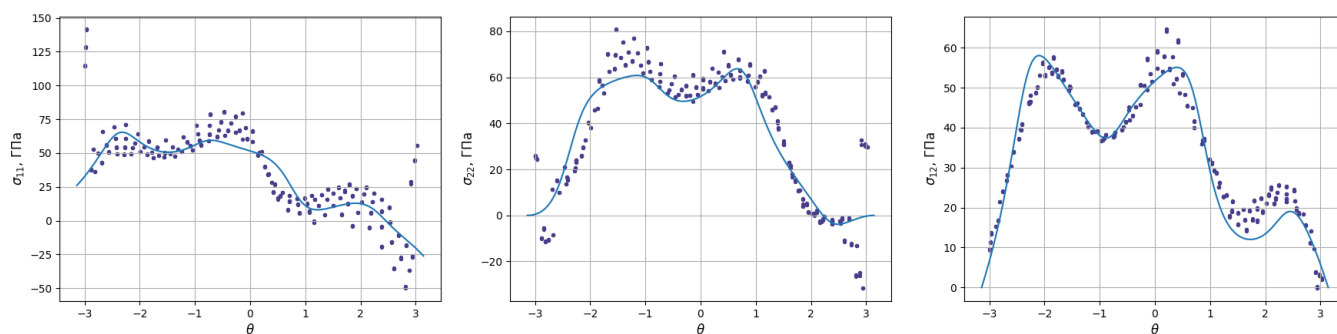


Рис. 3.4. Угловые распределения для компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , где линия — результат аналитического решения, точки — данные, полученные МД-методом
 Fig. 3.4. Angular distributions for stress tensor components σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} , where the line is the result of the analytical solution, the points are data obtained by the MD method

Выводы

В данной статье выявлено хорошее совпадение атомистических и континуальных полей напряжений у вершины трещины в условиях смешанного нагружения в анизотропной среде с кубической симметрией упругих свойств. Атомистические распределения напряжений, ассоциированные с вершиной трещины, получены с помощью метода молекулярной динамики. Континуальные распределения получены из теоретического решения задачи определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины, базирующегося на методах теории упругости анизотропных сред и последующего разложения комплексных потенциалов по собственным функциям. В рамках молекулярно-динамического вычислительного эксперимента рассмотрена монокристаллическая гранецентрированная медь при низкой температуре, с тем чтобы выделить упругий режим деформирования монокристалла, и был использован потенциал внедренного атома. Отличительной особенностью проведенного молекулярно-динамического моделирования является рассмотрение трещины, которая составляет различные углы с плоскостями симметрии кристалла. В окрестности вершины трещины выбирались точки, лежащие в кольцевых областях, на различном расстоянии от вершины трещины и различной толщины, и строились зависимости компонент тензора напряжений в зависимости от полярного угла. Сравнение угловых зависимостей, полученных посредством атомистического расчета и с помощью теоретического решения, показало их хорошую согласованность. Обнаружено, что сходство угловых зависимостей компонент тензора напряжений наблюдается при всех изученных значениях двух углов: угла между осью симметрии кристаллической решетки (в плоскости пластины) и направлением трещины и угла между направлением действия растягивающей нагрузки и линией трещины.

В силу указанного свойства решений можно заключить, что решения континуальной механики разрушения могут служить для описания полей напряжений на атомистических расстояниях от вершины дефекта.

Литература

- [1] Cui Y., Chew H.B. Machine-Learning Prediction of Atomistic Stress along Grain Boundaries // Acta Materialia. 2022. Vol. 222. Article number 117387. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2021.117387>.
- [2] Li R., Chew H.B. Grain boundary traction signatures: Quantitative Predictors and Dislocation Emission // Physical Review Letters. 2016. Vol. 117. Issue 8. Article number 085502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.085502>.
- [3] Li R., Chew H.B. Grain boundary traction signatures: Quantifying the asymmetrical dislocation emission processes under tension and compression // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2017. Vol. 103. P. 142–154. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.03.009>.
- [4] Wu W.-P., Yao Z.-Z. Molecular dynamics simulation of stress distribution and microstructure evolution ahead of a growing crack in single crystal nickel // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2012. Vol. 62. P. 67–75. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2013.01.008>.
- [5] Yamakov V., Saether E., Phillips D.R., Glaesgen E.H. Molecular-dynamics simulation-based cohesive zone representation of intergranular fracture processes in aluminum // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54, Issue 9. Pp. 1899–1928. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.03.004>.

- [6] Egami T. Atomic level stress // Progress in Materials Science. 2011. Vol. 56, Issue 6. Pp. 637–653. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.PMATSCI.2011.01.004>.
- [7] Tsai D.H. The virial theorem and stress calculation in molecular dynamics // Journal of Chemical Physics. 1979. Vol. 70, Issue 3. Pp. 1375–1382. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.437577>.
- [8] Nartin R.M. First-Principles Calculation of Stress // Physical Review Letters. 1983. Vol. 50. Issue 9. Pp. 697–700. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.697>.
- [9] Nielsen O.N., Martin R.M. Quantum-mechanical theory of stress and force // Physical Review B. 1985. Vol. 32. Issue 6. Article number 3780. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.32.3780>.
- [10] Maranganti R., Sharma P. Revisiting quantum notions of stress // Proceedings of the Royal Society. A. 2010. Vol. 466 (2119). Pp. 2097–2116. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2009.0636>.
- [11] Maranganti R., Sharma P., Wheeler L. Quantum notions of stress // Journal of Aerospace Engineering. 2007. Vol. 20, Issue 1. Pp. 22–37. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0893-1321\(2007\)20:1\(22\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0893-1321(2007)20:1(22)).
- [12] Shihara Y., Kohyama M., Ishibashi S. Ab initio local stress and its application to Al (111) surfaces // Physical Review B. 2010. Vol. 81, Issue 7. Article number 075441. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.075441>.
- [13] Wang H., Kohyama M., Tanaka S., Shihara Y. Ab initio local-energy and local-stress analysis of tensile behaviours of twin grain boundaries in Al and Cu // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 25, Issue 1. Article number 015005. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-651X/25/1/015005>.
- [14] Cui Y., Chew H.B. A simple numerical approach for reconstructing the atomic stresses at grain boundaries from quantum-mechanical calculations // Journal of Chemical Physics. 2019. Vol. 150. Issue 14. Article number 144702. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5085061>.
- [15] Nicholson D.M., Ojha M., Egami T. First-principles local stress in crystalline and amorphous metals // Journal of Physics: Condensed Matter. 2013. Vol. 25, Number 43. Article number 435505. DOI: <http://doi.org/10.1088/0953-8984/25/43/435505>.
- [16] Koch C.T., Ozdol V.B., Van Aken P.A. An efficient, simple, and precise way to map strain with nanometer resolution in semiconductor devices // Applied Physics Letters. 2010. Vol. 96, Issue 9. Article number 091901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3337090>.
- [17] Hytch M., Houdellier, Hue F., Snoeck E. Nano scale holographic interferometry for strain measurements in electronic devices // Nature. 2008. Vol. 453, Issue 7198. Pp. 1086–1089. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature07049>.
- [18] Beche A., Rouviere J.L., Barnes J.P., Cooper D. Strain measurement at the nanoscale: Comparison between convergent beam electron diffraction, nano-beam electron diffraction, high resolution imaging and dark field electron holography // Ultramicroscopy. 2013. Vol. 131. Pp. 10–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ultramic.2013.03.014>.
- [19] Legros M. In situ mechanical TEM: Seeing and measuring under stress with electrons // Comptes Rendus Physique. 2014. Vol. 15, Issues 2–3. Pp. 224–240. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2014.02.002>.
- [20] Li Y.-M., Zhang B. Cracking direction in graphene under mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics. 2022. Vol. 289. Article number 109434. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109434>.
- [21] Min B., Chen X., Li Ke, Wang Z. Multiscale study of enhancing the fracture properties of interfacial transition zone: Insights from molecular dynamics and finite element simulations // Construction and Building Materials. 2023. Vol. 409. Article number 133846. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.133846>.
- [22] Степанова Л.В., Белова О.Н. Идентификация коэффициентов интенсивности напряжений, T-напряжений и коэффициентов регулярных слагаемых высокого порядка в разложении Уильямса с помощью молекулярно-динамического моделирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2023. № 2. С. 47–77. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.2.06>.
- [23] Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Влияние слагаемых высокого порядка малости в решении, обобщающем подход М. Уильямса, учитывающем анизотропию материала // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 30–39. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-39>.
- [24] Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2022. Vol. 119. Article number 103298. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>. EDN: <https://elibrary.ru/wqtbws>.
- [25] Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2023. Vol. 30, Issue 19. Pp. 3862–3884. DOI: <http://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>. EDN: <https://elibrary.ru/puctjd>.
- [26] Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Молекулярно-динамическое моделирование полей напряжений в пластинах с центральной трещиной из материалов с гранецентрированной кубической решеткой // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 68–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-68-82>.

- [27] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. Pp. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [28] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of the crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 231. Article number 106982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [29] Sakha M., Nejati M., Aminzadeh A., Ghouli S., Saar M.O. On the validation of mixed-mode I/II crack growth theories for anisotropic rocks // *International Journal of Solids and Structures*. 2022. Vol. 241. Article number 111484. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111484>.
- [30] Admal N.C., Tadmor E.B. A unified interpretation of stress in molecular systems // *Journal of Elasticity*. 2010. Vol. 100, No. 1–2. Pp. 63–143. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10659-010-9249-6>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-106-116

Submitted: 13.09.2023

Revised: 25.10.2023

Accepted: 05.12.2023

K.A. Mushankova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: karinamushankova@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6081-1169>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanovalv2015@yandex.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

EXPERIENCE IN MODELING INCLINED CRACKS IN MATERIALS WITH CUBIC CRYSTAL STRUCTURE²

ABSTRACT

In this work, a good coincidence of atomistic and continuum stress fields at the crack tip under mixed mode loading conditions in an anisotropic medium with cubic symmetry of elastic properties is revealed. The atomic stress distributions associated with the crack tip are obtained using the molecular dynamics method. Continuum distributions are obtained from the theoretical solution of the problem of determining the stress-strain state at the crack tip, based on the methods of the elasticity theory of anisotropic media and the subsequent decomposition of complex potentials by eigenfunctions. In the framework of a molecular dynamics computational experiment, a single-crystal face-centered copper at low temperature was considered in order to isolate the elastic mode of deformation of a single crystal, and the embedded atom potential was used. A distinctive feature of the conducted molecular dynamic modeling is the consideration of a crack that makes up various angles with planes of symmetry of the crystal. In the vicinity of the crack tip, points lying in annular regions at different distances from the crack tip and of different thickness were selected, and the dependences of the stress tensor components depending on the polar angle were plotted. A comparison of the angular dependencies obtained by atomistic calculation and using a theoretical solution showed their good consistency. It is found that the similarity of the angular dependencies of the stress tensor components is observed for all the studied values of two angles: the angle between the axis of symmetry of the crystal lattice (in the plane of the plate) and the direction of the crack and the angle between the action of the tensile load and the crack line.

By virtue of this property of solutions, it can be concluded that solutions of continuous fracture mechanics can serve to describe stress fields at atomistic distances from the crack tip.

Key words: molecular dynamics method; atom implementation potential; cubic system; stress fields.

Citation. Mushankova K.A., Stepanova L.V. Experience in modeling inclined cracks in materials with cubic crystal structure. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 106–116. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-106-116>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

²This work was supported by the Russian Science Foundation, grant number 21-11-00346).

© Mushankova K.A., Stepanova L.V., 2023

Karina A. Mushankova — Master Degree student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Cui Y., Chew H.B. Machine-Learning Prediction of Atomistic Stress along Grain Boundaries. *Acta Materialia*, 2022, vol. 222, Article number 117387. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2021.117387>.
- [2] Li R., Chew H.B. Grain boundary traction signatures: Quantitative Predictors and Dislocation Emission. *Physical Review Letters*, 2016, vol. 117, issue 8, Article number 085502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.085502>.
- [3] Li R., Chew H.B. Grain boundary traction signatures: Quantifying the asymmetrical dislocation emission processes under tension and compression. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, vol. 103, pp. 142–154. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.03.009>.
- [4] Wu W.-P., Yao Z.-Z. Molecular dynamics simulation of stress distribution and microstructure evolution ahead of a growing crack in single crystal nickel. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2012, vol. 62, pp. 67–75. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2013.01.008>.
- [5] Yamakov V., Saether E., Phillips D.R., Glaessgen E.H. Molecular-dynamics simulation-based cohesive zone representation of intergranular fracture processes in aluminum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, vol. 54, issue 9, pp. 1899–1928. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.03.004>.
- [6] Egami T. Atomic level stress. *Progress in Materials Science*, 2011, vol. 56, issue 6, pp. 637–653. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.PMATSCI.2011.01.004>.
- [7] Tsai D.H. The virial theorem and stress calculation in molecular dynamics. *Journal of Chemical Physics*, 1979, vol. 70, issue 3, pp. 1375–1382. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.437577>.
- [8] Nielsen O.N., Martin R.M. First-Principles Calculation of Stress. *Physical Review Letters*, 1983, vol. 50, issue 9, pp. 697–700. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.697>.
- [9] Nielsen O.N., Martin R.M. Quantum-mechanical theory of stress and force. *Physical Review B*, 1985, vol. 32, issue 6, Article number 3780. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.32.3780>.
- [10] Maranganti R., Sharma P. Revisiting quantum notions of stress. *Proceedings of the Royal Society. A*, 2010, vol. 466 (2119), pp. 2097–2116. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2009.0636>.
- [11] Maranganti R., Sharma P., Wheeler L. Quantum notions of stress. *Journal Aerospace Engineering*, 2007, vol. 20, issue 1, pp. 22–37. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0893-1321\(2007\)20:1\(22\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0893-1321(2007)20:1(22)).
- [12] Shihara Y., Kohyama M., Ishibashi S. Ab initio local stress and its application to Al (111) surfaces. *Physical Review B*, 2010, vol. 81, issue 7, Article number 075441. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.075441>.
- [13] Wang H., Kohyama M., Tanaka S., Shihara Y. Ab initio local-energy and local-stress analysis of tensile behaviours of twin grain boundaries in Al and Cu. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2017, vol. 25, issue 1, Article number 015005. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-651X/25/1/015005>.
- [14] Cui Y., Chew H.B. A simple numerical approach for reconstructing the atomic stresses at grain boundaries from quantum-mechanical calculations. *Journal of Chemical Physics*, 2019, vol. 150, issue 14, Article number 144702. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5085061>.
- [15] Nicholson D.M., Ojha M., Egami T. First-principles local stress in crystalline and amorphous metals. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2013, vol. 25, number 43, Article number 435505. DOI: <http://doi.org/10.1088/0953-8984/25/43/435505>.
- [16] Koch C.T., Ozdol V.B., Van Aken P.A. An efficient, simple, and precise way to map strain with nanometer resolution in semiconductor devices. *Applied Physics Letters*, 2010, vol. 96, issue 9, Article number 091901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3337090>.
- [17] Hytch M., Houdellier, Hue F., Snoeck E. Nano scale holographic interferometry for strain measurements in electronic devices. *Nature*, 2008, vol. 453, issue 7198, pp. 1086–1089. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature07049>.
- [18] Beche A., Rouviere J.L., Barnes J.P., Cooper D. Strain measurement at the nanoscale: Comparison between convergent beam electron diffraction, nano-beam electron diffraction, high resolution imaging and dark field electron holography. *Ultramicroscopy*, 2013, vol. 131, pp. 10–23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ultramicro.2013.03.014>.
- [19] Legros M. In situ mechanical TEM: Seeing and measuring under stress with electrons. *Comptes Rendus Physique*, 2014, vol. 15, issues 2–3, pp. 224–240. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2014.02.002>.

- [20] Li Y.-M., Zhang B. Cracking direction in grapheme under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 2022, vol. 289, Article number 109434. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109434>.
- [21] Min B., Chen X., Li Ke, Wang Z. Multiscale study of enhancing the fracture properties of interfacial transition zone: Insights from molecular dynamics and finite element simulations. *Construction and Building Materials*, 2023, vol. 409, Article number 133846. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.133846>.
- [22] Stepanova L.V., Belova O.N. Identification of stress intensity factors, T-stresses and higher-order coefficients of regular terms in the Williams series expansion through molecular dynamics simulations. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 2, pp. 47–77. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.2.06>. (In Russ.)
- [23] Mushankova K.A., Stepanova L.V. Influence of high-order terms in the solution generalizing the approach of M. Williams, taking into account the anisotropy of the material. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 30–40. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-40>. (In Russ.)
- [24] Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, vol. 119, Article number 103298. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>. EDN: <https://elibrary.ru/wqtbws>.
- [25] Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 19, pp. 3862–3884. DOI: <http://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>. EDN: <https://elibrary.ru/puctjd>.
- [26] Mushankova K.A., Stepanova L.V. Molecular dynamic modeling of stress fields in plates with a central crack made of materials with a face-centered cubic lattice. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 68–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-68-82>. (In Russ.)
- [27] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [28] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of the crack tip asymptotic fields in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 231, Article number 106982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [29] Sakha M., Nejati M., Aminzadeh A., Ghouli S., Saar M.O. On the validation of mixed-mode I/II crack growth theories for anisotropic rocks. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 241, Article number 111484. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111484>.
- [30] Admal N.C., Tadmor E.B. A unified interpretation of stress in molecular systems. *Journal of Elasticity*, 2010, vol. 100, no. 1–2, pp. 63–143. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10659-010-9249-6>.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ
MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124

УДК 629.78:531

Дата: поступления статьи: 15.08.2023
после рецензирования: 23.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

Ю.Н. Горелов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-2183-6261>

Л.В. Курганская

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1513-3802>

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНИИ
ВИЗИРОВАНИЯ ПОДВИЖНОЙ АНТЕННЫ КОСМИЧЕСКОГО
АППАРАТА ПРИ ЕЕ НАВЕДЕНИИ НА ПУНКТ ПРИЕМА
ИНФОРМАЦИИ

АННОТАЦИЯ

В рамках общей задачи расчета кинематических характеристик подвижной антенны космического аппарата рассматривается задача кинематики сложного движения линии визирования «КА – ППИ» («космический аппарат – пункт приема информации»). Приведено решение этой задачи, с помощью которого устанавливается взаимосвязь кинематических характеристик в абсолютном и относительном движениях линии визирования «КА – ППИ» в виде теорем о сложении ее угловых скоростей и ускорений.

Ключевые слова: космический аппарат; пункт приема информации; линия визирования; кинематические характеристики; угловые скорости и ускорения; абсолютное и относительное движения.

Цитирование. Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик линии визирования подвижной антенны космического аппарата при ее наведении на пункт приема информации // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 117–124. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Горелов Ю.Н., Курганская Л.В., 2023

Юрий Николаевич Горелов — доктор технических наук, профессор, директор НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Любовь Викторовна Курганская — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

К одной из основных задач, решаемых КА зондирования [1; 2], относится не только получение информации, но и ее оперативная доставка потребителям на Земле. Во многих случаях эта информация должна доставляться в реальном (или близком к реальному) масштабе времени с использованием радиолинии «КА – ППИ» (ППИ – пункт приема информации). В качестве ППИ могут быть наземные и воздушные пункты, а также другие КА, например, спутники-ретрансляторы на соответствующих орбитах. Большие объемы передаваемой информации требуют высокой пропускной способности радиолинии «КА – ППИ» [2], что в силу ограничений по энергетике на борту КА достигается за счет использования управляемых подвижных антенных устройств (АУ) с достаточно «узкими» диаграммами направленности. В свою очередь это предъявляет повышенные требования к точности ориентации АУ, обусловленные необходимостью гарантированного наведения АУ на ППИ в течение всего сеанса связи. Для функционирования информационного канала «КА – ППИ» необходимо также соответствующее обеспечение системы программного наведения АУ данными о текущей ориентации линии визирования (ЛВ) «КА – ППИ», представленные ее кинематическими характеристиками как в абсолютном, так и в относительном движениях, то есть как в пространстве, так и относительно КА. Возможность прогнозирования текущей ориентации ЛВ в пространстве и ее других кинематических характеристик на любом планируемом сеансе связи также способствует решению задачи программного наведения АУ с требуемой точностью, которая заключается в совмещении оси диаграммы направленности АУ с ЛВ. Кроме того, система программного наведения – в силу ограничений по времени на входение КА в связь с ППИ – должна обеспечивать также высокоточное программное наведение АУ и на начало каждого сеанса связи (на интервалах взаимной видимости КА и выбранного ППИ). Таким образом, для решения задачи программного наведения АУ на борту КА требуются, во-первых, наличие на интервале сеанса связи текущей информации о кинематических характеристиках движения КА и ППИ (например, в гринвичской системе координат); во-вторых, решение задач кинематики сложного движения ЛВ и расчета кинематических характеристик АУ при его наведении на ППИ. В настоящей статье рассматривается решение только первой из этих задач, а предварительные результаты ее решения впервые были представлены в докладе [3].

1. Постановка задачи определения кинематических характеристик ЛВ «КА – ППИ» в случае ее сложного движения

Предполагается, что в качестве исходных данных для решения задачи наведения АУ – в рамках более общей задачи обеспечения оперативной доставки информации на Землю – можно использовать только данные, получаемые непосредственно на борту КА. Это могут быть, во-первых, прогнозируемые значения параметров движения его центра масс (например, в гринвичской или геоцентрической инерциальной системах координат [4; 5]) на интервале $[t_0, t_f]$ планируемого сеанса связи – $\mathbf{r}_{КА}(t)$ и $\mathbf{v}_{КА}(t)$ или, по крайней мере, в некоторые моменты времени $t_k \in [t_0, t_f]$, $k = 0, 1, 2, \dots$; во-вторых, кинематические характеристики движения ППИ в пространстве – $\mathbf{r}_{ППИ}(t)$ и $\mathbf{v}_{ППИ}(t)$ в той же системе координат, и в те же моменты времени, что указаны выше; последнее относится и к случаю, когда ППИ подвижный наземный или воздушный пункт, а также спутник-ретранслятор на геостационарной или высокоэллиптической орбите. Далее для определенности будет предполагаться, что $\mathbf{r}_{КА}$, $\mathbf{v}_{КА}$, $\mathbf{r}_{ППИ}$ и $\mathbf{v}_{ППИ}$ всегда заданы в одной и той же системе координат. В общем случае для решения задачи наведения АУ, помимо $\mathbf{r}_{КА}$, $\mathbf{v}_{КА}$, $\mathbf{r}_{ППИ}$ и $\mathbf{v}_{ППИ}$, могут также потребоваться $\mathbf{w}_{КА}$ – вектор ускорения центра масс КА и $\mathbf{w}_{ППИ}$ – вектор ускорения ППИ, заданные в соответствующей системе координат.

Итак, если движение КА и ППИ задано с помощью кинематических уравнений

$$\mathbf{r}_{КА} = \mathbf{r}_{КА}(t); \quad \mathbf{r}_{ППИ} = \mathbf{r}_{ППИ}(t), \quad \forall t \in [t_0; t_f], \quad (1.1)$$

то положение линии визирования «КА – ППИ» в пространстве в каждый момент времени в течение сеанса связи будет задаваться вектором

$$\mathbf{r}_{ЛВ}(t) = \mathbf{r}_{ППИ}(t) - \mathbf{r}_{КА}(t)$$

и, соответственно, положение ЛВ в пространстве можно задавать также ортом

$$\mathbf{e}_{ЛВ} = \mathbf{r}_{ЛВ}/r_{ЛВ}, \quad r_{ЛВ} = |\mathbf{r}_{ЛВ}|. \quad (1.2)$$

Компоненты $\mathbf{e}_{ЛВ}$ суть направляющие косинусы ЛВ – первая группа кинематических характеристик ЛВ.

Остальные кинематические характеристики ЛВ связаны, во-первых, с быстротой изменения – по величине и направлению – ориентации орта $\mathbf{e}_{ЛВ}(t)$ в пространстве, которая определяется вектором мгновенной угловой скорости ЛВ $\boldsymbol{\omega}_{ЛВ}$; во-вторых, с быстротой изменения $\boldsymbol{\omega}_{ЛВ}(t)$ или, что то же самое, с

угловым ускорением ЛВ, вектор которого определяется производной по t от $\omega_{\text{ЛВ}}(t)$:

$$\varepsilon_{\text{ЛВ}}(t) = \frac{d\omega_{\text{ЛВ}}(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

Для нахождения указанных кинематических характеристик ЛВ дополнительно необходимо также знание производных от $\mathbf{r}_{\text{КА}}(t)$ и $\mathbf{r}_{\text{ППИ}}(t)$, а именно: $\mathbf{v}_{\text{КА}}(t) = d\mathbf{r}_{\text{КА}}(t)/dt$; $\mathbf{w}_{\text{КА}}(t) = d\mathbf{v}_{\text{КА}}(t)/dt$; $\mathbf{v}_{\text{ППИ}}(t) = d\mathbf{r}_{\text{ППИ}}(t)/dt$; $\mathbf{w}_{\text{ППИ}}(t) = d\mathbf{v}_{\text{ППИ}}(t)/dt$.

Перечисленные выше кинематические характеристики ЛВ полностью определяют ее движение в пространстве в какой-либо выбранной базовой системе координат (БСК), в которой задаются уравнения движения КА и ППИ (1.1). Однако для решения задачи наведения АУ, вообще говоря, требуется знание текущей ориентации ЛВ в связанной системе координат (далее — ССК) КА. Если принять, что базовая система координат является условно неподвижной (и, соответственно, рассматривать $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}(t)$, $\omega_{\text{ЛВ}}(t)$ и $\varepsilon_{\text{ЛВ}}(t)$ как кинематические характеристики ЛВ в абсолютном движении), то и в подвижной ССК можно ввести соответствующие кинематические характеристики ЛВ (в относительном движении), а именно: $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}(t)$, $\tilde{\omega}_{\text{ЛВ}}(t)$ и $\tilde{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}(t)$. В общем случае $\omega_{\text{ЛВ}}(t) \neq \tilde{\omega}_{\text{ЛВ}}(t)$ и $\varepsilon_{\text{ЛВ}}(t) \neq \tilde{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}(t)$, а $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}(t) = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}(t)$, если только эти орты заданы в одной и той же системе координат. Иными словами, кинематические характеристики ЛВ в ее абсолютном и относительном движениях суть различные кинематические характеристики, что обусловлено подвижностью ССК относительно выбранной БСК. Наконец, отметим, что для решения задачи наведения АУ на ППИ в конечном счете также необходимы $\forall t \in [t_0, t_f]$ кинематические характеристики подвижного (относительно корпуса КА) АУ в виде его текущих углов поворота, реализуемых с помощью опорно-поворотного устройства (ОПУ), и, быть может, соответствующих производных от этих углов по времени суть угловых скоростей и ускорений по определенным каналам управления подвижного АУ. Данная группа кинематических характеристик определяется конструктивными особенностями ОПУ и здесь не рассматривается.

Настоящая статья посвящена решению задачи кинематики сложного движения ЛВ «КА — ППИ» с целью получения общих соотношений для расчета кинематических характеристик ЛВ и управляемого подвижного АУ, необходимых для моделирования процессов наведения АУ на ППИ для КА. В связи с этим одна из основных задач — установление взаимосвязи между кинематическими характеристиками ЛВ в ее абсолютном и относительном движениях, что необходимо в дальнейшем для расчета в ССК КА кинематических характеристик управляемого подвижного АУ в режиме наведения на ППИ.

2. Кинематические характеристики ЛВ «КА — ППИ» в абсолютном движении

Рассмотрим вначале следующую вспомогательную задачу. Пусть движение некоторой пары точек N и P задано в соответствии с (1.1) кинематическими уравнениями

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(t); \quad \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(t), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{r}_N$ и $\mathbf{r}_P$ — радиус-векторы указанных точек в некоторой условно неподвижной системе координат (НСК). Соответственно, отрезок $\overline{NP} = \mathbf{r}_{\text{ЛВ}}$ определяет положение ЛВ в пространстве (в НСК), а вектор $\mathbf{r}_{\text{ЛВ}}$ вычисляется так:

$$\mathbf{r}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N. \quad (2.2)$$

Для решения рассматриваемой задачи требуется указать, исходя из (2.1), (2.2), точные соотношения для определения кинематических характеристик ЛВ в НСК или, что то же самое, в ее абсолютном движении.

Вначале отметим, что положение ЛВ в НСК с учетом (1.2), (2.2) задается ортом

$$\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{r}_{\text{ЛВ}}/r_{\text{ЛВ}}, \quad (2.3)$$

компоненты которого суть направляющие косинусы ЛВ в НСК — это первая группа кинематических характеристик ЛВ в абсолютном движении. Очевидно, что остальные кинематические характеристики ЛВ связаны с быстротой изменения ориентации орта $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$ в НСК, а именно с угловой скоростью и угловым ускорением ЛВ в НСК. Чтобы их найти, вначале необходимо определить с учетом (2.2) производные от $\mathbf{r}_N(t)$ и $\mathbf{r}_P(t)$:

$$\mathbf{v}_N(t) = \frac{d\mathbf{r}_N(t)}{dt}; \quad \mathbf{w}_N(t) = \frac{d\mathbf{v}_N(t)}{dt}; \quad \mathbf{v}_P(t) = \frac{d\mathbf{r}_P(t)}{dt}; \quad \mathbf{w}_P(t) = \frac{d\mathbf{v}_P(t)}{dt}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{v}_N$ и $\mathbf{v}_P$ — векторы скоростей, а $\mathbf{w}_N$ и $\mathbf{w}_P$ — векторы ускорений точек N и P .

Для определения векторной величины, характеризующей как быстроту, так и мгновенное направление изменения ориентации ЛВ в пространстве (в НСК) или, что то же самое, ее мгновенную угловую

скорость, вначале следует вычислить с учетом (2.1), (2.4) скорость точки P относительно точки N (или скорость конца ЛВ относительно ее начала в точке N):

$$\mathbf{v}_{\text{ЛВ}} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{ЛВ}}}{dt} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_N. \quad (2.5)$$

Очевидно, что искомая величина будет пропорциональна секторной скорости вектора $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$ и, стало быть, векторному произведению этого орта на относительную скорость $\mathbf{v}_{\text{ЛВ}}$ (2.5). Отсюда следует соответствующая кинематическая характеристика – вектор мгновенной угловой скорости ЛВ в НСК, который определяется так:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{v}_{\text{ЛВ}}. \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6) и свойства смешанного векторного произведения, нетрудно установить, что $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$, то есть в каждый момент времени вектор $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}$ ортогонален к ЛВ, и аналогично имеет также место: $\mathbf{v}_{\text{ЛВ}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$.

Далее, вычислим производную от $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}$, характеризующую быстроту и величину изменения угловой скорости ЛВ в НСК, или, согласно определению (1.3), мгновенное угловое ускорение ЛВ: $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = d\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}/dt$. Найдем $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}$, дифференцируя выражение (2.6):

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}}{dt} = -\frac{1}{r_{\text{ЛВ}}^2} \frac{dr_{\text{ЛВ}}}{dt} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{v}_{\text{ЛВ}} + \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \frac{d\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}}{dt} \times \mathbf{v}_{\text{ЛВ}} + \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \frac{d\mathbf{v}_{\text{ЛВ}}}{dt}. \quad (2.7)$$

Здесь $dr_{\text{ЛВ}}/dt = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \mathbf{v}_{\text{ЛВ}}$ – радиальная составляющая относительной скорости ЛВ, $d\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}/dt = \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$ – производная, вычисляемая по формуле Эйлера [4]. Наконец, дифференцируя (2.5), с учетом (2.4) получим

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{ЛВ}}}{dt} = \mathbf{w}_P - \mathbf{w}_N = \mathbf{w}_{\text{ЛВ}}, \quad (2.8)$$

т. е. ускорение точки P относительно точки N в НСК (или ускорение конца ЛВ относительно ее начала). Подставив перечисленные выше производные в (2.7), после соответствующей группировки членов получим следующую формулу для вычисления $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \left[\mathbf{w}_{\text{ЛВ}} - \frac{2(\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \mathbf{v}_{\text{ЛВ}})}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{v}_{\text{ЛВ}} \right]. \quad (2.9)$$

Если учесть выражение для $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}$ (2.6), то (2.9) можно переписать и в таком виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = -\frac{2(\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \mathbf{v}_{\text{ЛВ}})}{r_{\text{ЛВ}}} \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} + \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{w}_{\text{ЛВ}}. \quad (2.10)$$

Исходя из (2.9) или (2.10), нетрудно установить, что $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$, то есть вектор углового ускорения ЛВ, как и вектор ее угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}$, в любой момент времени будет ортогонален ЛВ.

Предваряя определение кинематических характеристик ЛВ в относительном движении, отметим, что всюду выше пока рассматривались только векторы, определяемые в НСК и задаваемые своими компонентами в этой же системе координат, то есть $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$, $\mathbf{v}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{v}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$, $\mathbf{w}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{w}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$. Соответственно, решение рассматриваемой задачи в виде приведенных выше соотношений (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) и (2.8)–(2.10) для определения кинематических характеристик ЛВ в НСК (то есть в ее абсолютном движении) следует переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} &= \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{r}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} \times \mathbf{v}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} &= -\frac{2(\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} \cdot \mathbf{v}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}})}{r_{\text{ЛВ}}} \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} + \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} \times \mathbf{w}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}. \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \mathbf{r}_P^{\text{НСК}} - \mathbf{r}_N^{\text{НСК}}$, $\mathbf{v}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \mathbf{v}_P^{\text{НСК}} - \mathbf{v}_N^{\text{НСК}}$, $\mathbf{w}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \mathbf{w}_P^{\text{НСК}} - \mathbf{w}_N^{\text{НСК}}$.

3. Кинематические характеристики ЛВ «КА — ППИ» в относительном движении. Взаимосвязь кинематических характеристик ЛВ в абсолютном и относительном движениях

Рассмотрим теперь задачу на определение кинематических характеристик ЛВ в относительном движении, то есть в том случае, когда движение пары точек N и P будет задано кинематическими уравнениями

$$\tilde{\mathbf{r}}_N = \tilde{\mathbf{r}}_N(t); \quad \tilde{\mathbf{r}}_P = \tilde{\mathbf{r}}_P(t), \quad (3.1)$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_N$ и $\tilde{\mathbf{r}}_P$ — радиус-векторы указанных точек в некоторой вспомогательной системе координат (ВСК), движение которой относительно НСК будет описано ниже. В этой задаче требуется, во-первых, найти кинематические характеристики ЛВ в ее относительном движении, и, во-вторых, установить их взаимосвязь с кинематическими характеристиками ЛВ в абсолютном движении (в НСК).

Очевидно, что решение первой части этой задачи при задании уравнений (3.1) аналогично решению задачи предыдущего раздела, то есть здесь по аналогии с (2.2), (2.3) сразу же можно записать

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} = \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}, \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{r}}_P - \tilde{\mathbf{r}}_N. \quad (3.3)$$

Соответственно, угловая скорость ЛВ в относительном движении будет вычисляться по формуле, аналогичной (2.6):

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}} = \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}, \quad (3.4)$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} = \delta \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}} / dt = \tilde{\mathbf{v}}_P - \tilde{\mathbf{v}}_N$, $\tilde{\mathbf{v}}_N = \delta \tilde{\mathbf{r}}_N / dt$, $\tilde{\mathbf{v}}_P = \delta \tilde{\mathbf{r}}_P / dt$, а $\frac{\delta}{dt}$ — локальная производная (в подвижной ВСК) [4]. Очевидно, что здесь $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$. Далее в соответствии с определением углового ускорения ЛВ (1.3) следует принять

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{ЛВ}} = \frac{\delta}{dt} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}.$$

Вычисляя локальную производную от $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}$ (3.4), получим аналогичное формуле (2.10) выражение для углового ускорения ЛВ в относительном движении:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{ЛВ}} = -\frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}})}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}} + \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times \tilde{\mathbf{w}}_{\text{ЛВ}}, \quad (3.5)$$

где $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{ЛВ}} = \delta \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} / dt = \tilde{\mathbf{w}}_P - \tilde{\mathbf{w}}_N$, а $\tilde{\mathbf{w}}_N = \delta \tilde{\mathbf{v}}_N / dt$, $\tilde{\mathbf{w}}_P = \delta \tilde{\mathbf{v}}_P / dt$. Исходя из (3.5), нетрудно установить, что $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$, то есть вектор углового ускорения ЛВ $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{ЛВ}}$, как и вектор ее угловой скорости $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}$, в ВСК также будет ортогонален ЛВ в любой момент времени.

Рассмотрим далее вторую часть задачи, решение которой должно установить взаимосвязь кинематических характеристик ЛВ в ее относительном и абсолютном движениях. Для этого определим движение ВСК относительно НСК, а именно: пусть положение ее начала в НСК задается радиус-вектором $\mathbf{r}_O(t)$, а движение — векторами скорости $\mathbf{v}_O = d\mathbf{r}_O/dt$ и ускорения $\mathbf{w}_O = d\mathbf{v}_O/dt$ (здесь производные от $\mathbf{r}_O(t)$ и $\mathbf{v}_O(t)$ являются абсолютными, то есть вычисляются в НСК); текущую ориентацию ВСК в НСК определим матрицей (перехода для векторов от ВСК к НСК) — $\mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}}$ или матрицей $\mathbf{P}_{\text{НСК}}^{\text{ВСК}} = (\mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}})^T$ [5], а ее вращательное движение — векторами угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}}(t)$ и углового ускорения $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{ВСК}}(t)$.

Так как $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_O + \tilde{\mathbf{r}}_N$, $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \tilde{\mathbf{r}}_P$, то с учетом (2.2) и (3.2), (3.3) получим $\mathbf{r}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}$ и, стало быть, тогда имеет место: $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}$. Последнее означает тождественность этих ортов, когда они задаются в одной и той же системе координат: здесь — либо в НСК, либо в ВСК. Если же $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$, а $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}}$, то связь между ними должна конкретизироваться так [4; 5]:

$$\mathbf{P}_{\text{НСК}}^{\text{ВСК}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}}; \quad \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}},$$

где $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$ задается своими компонентами в НСК, а орт $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}}$, соответственно, в ВСК. Очевидно, что это справедливо и для угловых скоростей и угловых ускорений ВСК, для которых имеет место: $\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ВСК}}$; $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{ВСК}} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{ВСК}}$.

Далее для того, чтобы установить связь между угловыми скоростями ЛВ, с одной стороны, и угловыми ускорениями ЛВ, с другой стороны, соответственно, в относительном и абсолютном движениях, в первую очередь следует выяснить, как связаны между собой векторы:

$$\mathbf{v}_{\text{ЛВ}} = d\mathbf{r}_{\text{ЛВ}}/dt \text{ и } \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} = \delta \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}/dt; \quad \mathbf{w}_{\text{ЛВ}} = d\mathbf{v}_{\text{ЛВ}}/dt \text{ и } \tilde{\mathbf{w}}_{\text{ЛВ}} = \delta \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}/dt.$$

Итак, учитывая, что $d\mathbf{r}_{\text{ЛВ}}/dt = \delta \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}/dt + \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}$ [4], получим

$$\mathbf{v}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}. \quad (3.6)$$

Дифференцируя (3.6) с учетом связи между абсолютной и локальной производными, получим тогда следующее соотношение:

$$\mathbf{w}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{ЛВ}} + \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{ЛВ}}) + 2\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}, \quad (3.7)$$

в котором учтено, что $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{ВСК}} = d\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}}/dt = \delta \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}}/dt$ [4].

Подставив (3.6) непосредственно в (2.6), с учетом $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}$ и (3.4) получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}} + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}), \quad (3.8)$$

где слагаемое $\omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})$ представляет собой составляющую вектора $\omega_{\text{ЛВ}}$, которая ортогональна ЛВ. Поэтому вектор $\omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}$ можно рассматривать как переносную угловую скорость ЛВ. Действительно, если в (3.8) $\tilde{\omega}_{\text{ЛВ}} = 0$, то $\omega_{\text{ЛВ}} = \omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}$, то есть в этом случае угловая скорость $\omega_{\text{ЛВ}}$ будет обусловлена только вращением ВСК. Таким образом, соотношение (3.8) будет выражать собой **теорему о сложении угловых скоростей ЛВ** в ее сложном движении в следующем виде:

$$\omega_{\text{ЛВ}} = \tilde{\omega}_{\text{ЛВ}} + \omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}. \quad (3.9)$$

Отметим, что в (3.8) и (3.9) все векторы задаются своими компонентами в одной и той же системе координат, то есть либо в НСК, либо в ВСК. В том случае, когда $\omega_{\text{ЛВ}} = \omega_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$, а $\tilde{\omega}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}}$, тогда (3.9) необходимо переписать в одном из вариантов:

$$\mathbf{P}_{\text{НСК}}^{\text{ВСК}} \omega_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \tilde{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}} + (\omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}})^{\text{ВСК}}; \quad \omega_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = \mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}} \tilde{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}} + (\omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}})^{\text{НСК}},$$

где $\omega_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}$ задается своими компонентами, соответственно, либо в ВСК, либо в НСК.

Установим далее взаимосвязь между угловыми ускорениями ЛВ $\epsilon_{\text{ЛВ}}$ и $\tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}}$. Для этого подставим (3.6) и (3.7) в (2.9) и после предварительной группировки членов, соответственно, с учетом $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}$ ($\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} = (\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \mathbf{v}_{\text{ЛВ}})$) тогда получим:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ЛВ}} = & \frac{1}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times \left[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{ЛВ}} - \frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}})}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} \right] + \\ & + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\epsilon_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times [\omega_{\text{ВСК}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})] + \\ & + \frac{2}{r_{\text{ЛВ}}} \{ \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}) - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}) [\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})] \}. \end{aligned}$$

Раскрывая в последнем слагаемом двойные векторные произведения [5] и учитывая (3.5), окончательно получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ЛВ}} = & \tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}} + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\epsilon_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times [\omega_{\text{ВСК}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})] - \\ & - \frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \omega_{\text{ВСК}})}{r_{\text{ЛВ}}} [\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}) \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В (3.10) в последнем слагаемом вектор

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}^* = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}) \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})$$

является составляющей относительной скорости $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}$, ортогональной ЛВ.

Очевидно, что в случае $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} = 0$ и, соответственно, $\tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}} = 0$ из (3.10) получим

$$\epsilon_{\text{ЛВ}}|_{\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}=0} = \tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}} \times (\epsilon_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times [\omega_{\text{ВСК}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})],$$

то есть угловое ускорение ЛВ будет обусловлено только вращением ВСК относительно НСК и, стало быть, тогда $\epsilon_{\text{ЛВ}}|_{\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}=0} = \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}$ можно будет отождествить с переносным угловым ускорением ЛВ. Соответственно, последнее слагаемое в (3.10) также можно трактовать (естественно, имея в виду соответствующую аналогию с кориолисовым ускорением в сложном движении точки [4]) как поворотное угловое ускорение ЛВ – $\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}}$. Таким образом, формула (3.10) выражает собой **теорему о сложении угловых ускорений ЛВ** в ее сложном движении в следующем виде:

$$\epsilon_{\text{ЛВ}} = \tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}} + \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}} + \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}}, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}} = & \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\epsilon_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times [\omega_{\text{ВСК}} \times (\omega_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}})], \\ \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}} = & - \frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \omega_{\text{ВСК}})}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}). \end{aligned}$$

В том случае, если $\epsilon_{\text{ЛВ}} = \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}}$, $\tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}}$, то при вычислении кинематических характеристик ЛВ следует использовать соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{НСК}}^{\text{ВСК}} \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = & \tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}} + (\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}})^{\text{ВСК}} + (\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}})^{\text{ВСК}}; \\ \epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{НСК}} = & \mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}} \tilde{\epsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{ВСК}} + (\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}})^{\text{НСК}} + (\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}})^{\text{НСК}}, \end{aligned}$$

в которых векторы $\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}$ и $\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}}$ задаются компонентами (или вычисляются) в соответствующих системах координат.

Дополнительно отметим, что $\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}}$ с учетом (3.4) также можно переписать в виде

$$\epsilon_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}} = 2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \omega_{\text{ВСК}}) \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times \tilde{\omega}_{\text{ЛВ}}.$$

Выводы

Рассмотрена задача кинематики сложного движения ЛВ «КА — ППИ», решение которой получено в виде соответствующих теорем о сложении угловых скоростей (3.9) и угловых ускорений (3.11) ЛВ. Полученная связь кинематических характеристик ЛВ «КА — ППИ» в случае ее сложного движения необходима для моделирования процессов наведения подвижных АУ на ППИ, например, для КА дистанционного зондирования Земли. Дополнительно отметим, что полученные результаты решения задачи кинематики сложного движения ЛВ также представляют интерес и в задачах моделирования процессов сближения КА на орбите [6], для которых может потребоваться расчет кинематических характеристик движения ЛВ «КА — цель», а также точные значения кинематических характеристик орбитального трехгранника [7], моделирующего орбитальную систему координат КА [4; 5].

Литература

- [1] Соллогуб А.В., Аншаков Г.П., Данилов В.В. Космические аппараты систем зондирования поверхности Земли. Москва: Машиностроение, 1993. 368 с.
- [2] Мостовой Я.А. Управление сложными техническими системами: конструирование программного обеспечения спутников ДЗЗ. Москва: Техносфера, 2016. 352 с.
- [3] Горелов Ю.Н., Горелова О.И., Мантуров А.И. Моделирование кинематических характеристик управляемой подвижной антенны космического аппарата // Управление движением и навигация летательных аппаратов: сб. тр. XI Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2003. С. 68–73.
- [4] Маркеев А.П. Теоретическая механика. 4-е изд., испр. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. 592 с.
- [5] Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. Москва: Машиностроение, 1973. 260 с. URL: <https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y>.
- [6] Балахонцев В.Г., Иванов В.А., Шабанов В.И. Сближение в космосе. Москва: Воениздат, 1973. 240 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=2228948&ysclid=lp0x42jmyi28935028>.
- [7] Горелов Ю.Н. Кинематические характеристики орбитального трехгранника // Известия Самарского научного центра Российской Академии наук. 2018. Т. 20, № 1 (81). С. 96–100. URL: http://www.ssc.smr.ru/media/journals/izvestia/2018/2018_1_96_100.pdf.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124

Submitted: 15.08.2023

Revised: 23.09.2023

Accepted: 05.12.2023

Yu.N. Gorelov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-2183-6261>

L.V. Kurganskaya

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1513-3802>

MODELING OF KINEMATIC CHARACTERISTICS OF THE LINE OF SIGHT OF A MOBILE ANTENNA OF A SPACECRAFT WHEN IT IS POINTED AT AN INFORMATION RECEPTION POINT

ABSTRACT

Within the framework of the general problem of calculating the kinematic characteristics of the mobile antenna of the spacecraft, the problem of the kinematics of the complex movement of the line of sight "Sc — IRP" ("spacecraft — information reception point") is considered. The solution of this problem is given, with the help of which the relationship of kinematic characteristics in the absolute and relative movements of the line of sight "Sc — IRP" is established in the form of theorems on the addition of its angular velocities and accelerations.

Key words: spacecraft; line of sight; absolute and relative movements; angular velocities and accelerations; kinematic characteristics; information reception point.

Citation. Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of the line of sight of a mobile antenna of a spacecraft when it is pointed at an information reception point. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 117–124. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V., 2023

Yury N. Gorelov — Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Research Institute of Modelling and Control Science, Samara National Research University; professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Lubov V. Kurganskaya — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Research Institute of Modeling and Control Science; associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Sollogub A.V., Anshakov G.P., Danilov V.V. Spacecrafts of Earth surface sensing systems. Moscow: Mashinostroenie, 1993, 368 p. (In Russ.)
- [2] Mostovoy Ya.A. Control complex technical systems: designing software for remote sensing satellites. Moscow: Tekhnosfera, 2016, 352 p. (In Russ.)
- [3] Gorelov Yu.N., Gorelova O.I., Manturov A.I. Modeling of kinematic characteristics of a controlled mobile antenna of a spacecraft. In: *Motion control and navigation of aircraft: proceedings of the XI All-Russian research and technical seminar on motion control and navigation of aircraft (June, 23–25, 2003, Samara, Russian Federation)*. Samara, 2003, pp. 68–73. (In Russ.)
- [4] Markeev A.P. Theoretical mechanics. 4th edition, revised. Moscow–Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2007, 592 p. (In Russ.)
- [5] Strazheva I.V., Melkumov V.S. Vector-matrix methods in flight mechanics. Moscow: Mashinostroenie, 1973. 260 p. Available at: <https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y>. (In Russ.)
- [6] Balakhontsev V.G., Ivanov V.A., Shabanov V.I. Docking in the space. Moscow: Voenizdat, 1973, 240 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=2228948&ysclid=lp0x42jmyi28935028>. (In Russ.)
- [7] Gorelov Yu.N. Kinematic characteristics of the orbital trihedron. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2018, vol. 20, no. 1 (81), pp. 96–100. Available at: http://www.ssc.smr.ru/media/journals/izvestia/2018/2018_1_96_100.pdf. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132

УДК 629.78:531

Дата: поступления статьи: 10.08.2023
после рецензирования: 25.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

Ю.Н. Горелов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-2183-6261>

Л.В. Курганская

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1513-3802>

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДВИЖНОЙ АНТЕННЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ДВУХСТЕПЕННОМ ОПОРНО-ПОВОРОТНОМ УСТРОЙСТВЕ

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача расчета кинематических характеристик подвижного антенного устройства (АУ) по заданным значениям кинематических характеристик линии визирования (ЛВ) "космический аппарат — пункт приема информации" в связанной системе координат космического аппарата. Кинематические характеристики АУ в виде текущих значений углов его поворота и угловых скоростей и ускорений (по соответствующим каналам управления) определяются из условий совмещения ЛВ с осью диаграммы направленности АУ для случая двухстепенного опорно-поворотного устройства со взаимно ортогональными осями поворота АУ.

Ключевые слова: космический аппарат; антенное устройство; опорно-поворотное устройство; кинематические характеристики; линия визирования; каналы управления.

Цитирование. Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик подвижной антенны космического аппарата в двухстепенном опорно-поворотном устройстве // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 125–132. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Горелов Ю.Н., Курганская Л.В., 2023

Юрий Николаевич Горелов — доктор технических наук, профессор, директор НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Любовь Викторовна Курганская — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В рамках общей задачи расчета кинематических характеристик управляемой подвижной антенны КА в [1] была рассмотрена и решена задача кинематики сложного движения ЛВ «КА — ППИ» («космический аппарат — пункт приема информации»). Еще одной тематически связанной с этой

задачей является задача определения кинематических характеристик подвижного АУ КА. Как уже отмечалось в [1], предварительные результаты решения рассматриваемой здесь задачи ранее были кратко представлены в [2].

Итак, далее при рассмотрении задачи расчета кинематических характеристик управляемого подвижного АУ будем предполагать, что в пределах некоторого заданного интервала в каждый момент времени известны кинематические характеристики ЛВ «КА — ППИ», которые заданы в связанной системе координат (ССК) КА в виде векторов $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$. Также пусть с АУ будет связана система координат $\bar{O}x_A y_A z_A$, которую далее будем называть антенной системой координат (АСК). Соответственно, пусть движение АУ относительно корпуса КА реализуется с помощью некоторого двухстепенного опорно-поворотного устройства (ОПУ) со взаимно ортогональными осями вращения. Одна из осей АСК, например, Ox_A пусть будет параллельна оси диаграммы направленности АУ, которая задается ортом $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}} = \tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}}$. В исходном положении АУ оси системы координат $\bar{O}x_A y_A z_A$ будут совпадать с одноименными осями некоторой системы координат $\bar{O}x_P y_P z_P$, которую далее будем называть реперной системой координат (РСК). В общем случае РСК не совпадает с ССК, а ее ориентация относительно ССК определяется постоянной матрицей перехода $\mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}}$ (здесь и далее матрицы перехода для векторов [3]). Поэтому заданные в ССК кинематические характеристики ЛВ далее следует представить в РСК, а именно: $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}} \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$. Принимая РСК в качестве условно неподвижной системы координат и исходя из известного решения задачи кинематики сложного движения ЛВ [1], можно найти кинематические характеристики ЛВ в подвижной (относительно РСК) системе координат — АСК, если ее движение относительно РСК определено, то есть известны: $\mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} = (\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}})^T$ — матрица перехода от АСК к РСК; $\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}}$ — вектор угловой скорости и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}}$ — вектор углового ускорения АУ. Действительно, исходя из заданных в РСК $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}$, в соответствии с теоремами о сложении скоростей и ускорений ЛВ в сложном движении [1] можно найти ее кинематические характеристики в относительном движении ЛВ, то есть в АСК, а именно: $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{ЛВ}}$ (здесь, как и в [1], тильдами отмечены векторы, которые определены в подвижной системе координат, то есть здесь в АСК). Для определения кинематических характеристик АУ необходимо воспользоваться условиями наведения его на ППИ на некотором заданном интервале $[t_0, t_f]$, которые имеют следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}(t) = \tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}(t); \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}(t) = 0; \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{ЛВ}}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (1)$$

1. Кинематическая схема ОПУ и определение углов поворота АУ при наведении на ППИ

Пусть требуемая ориентация АУ относительно РСК при совмещении орта $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}}$ с ортом $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$ в режиме наведения АУ на ППИ осуществляется парой последовательных поворотов с помощью двухстепенного ОПУ, а именно: первый поворот АУ на угол ϑ совершается вокруг фиксированной в РСК оси, задаваемой ортом $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ (канал управления АУ по углу ϑ); второй поворот АУ на угол φ совершается вокруг фиксированной в АСК оси, задаваемой ортом $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$ (канал управления АУ по углу φ). В общем случае необходимо, чтобы попарно орты $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ и $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$, $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}}$ не являлись коллинеарными. В практике обычно используются ОПУ, для которых пары ортов $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ и $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$, $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}}$ являются взаимно ортогональными. Соответственно, имеет место $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$, где $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})$ — матрицы перехода, которые вычисляются так [3]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\delta}) = \mathbf{E}_3 \cos \delta + (1 - \cos \delta) \mathbf{c}_{\delta} \mathbf{c}_{\delta}^T - \mathbf{C}(\mathbf{c}_{\delta}) \sin \delta, \\ \mathbf{c}_{\delta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{c}_{\delta}) = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \vartheta, \varphi.$$

Здесь $\mathbf{E}_3$ — единичная матрица третьего порядка, а $\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})$ — матрица перехода от РСК к АСК.

Выбранная здесь кинематическая схема ОПУ аналогична схеме подвижных АУ для КА типа «Янтарь-4КС1» [4]. При этом следует отметить, что такая схема ОПУ не является единственно возможной. Например, иной может быть и последовательность поворотов АУ.

Так как орт $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}}$ параллелен оси $\bar{O}x_A$ (при этом $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}} = \text{col}(1, 0, 0)$), то каналам управления по углам поворота ϑ и φ будут соответствовать орты $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}} = \text{col}(0, 0, 1)$ и $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}} = \text{col}(0, -1, 0)$. Матрицы $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})$ тогда будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

а матрица перехода от РСК к АСК в этом случае будет такой:

$$\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\sin \varphi \cos \vartheta & -\sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

В силу принятой кинематической схемы ОПУ и из условий наведения АУ на ППИ (1) требуемые углы поворотов $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, а также их первые и вторые производные по времени: $\dot{\vartheta}(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\vartheta}(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$, то есть угловые скорости и угловые ускорения АУ по соответствующим каналам управления, суть искоемые кинематические характеристики АУ. Поэтому рассматриваемая далее задача состоит в том, чтобы исходя из заданных в РСК кинематических характеристик ЛВ определить соответствующие кинематические характеристики АУ.

Режим наведения АУ на ППИ характеризуется условием совмещения орта $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}}$ с ортом $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$ (1), когда выполняется условие: $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$, где $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$. Отсюда с учетом вида матрицы $\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}}$, а также векторов $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}} = \text{col}(1, 0, 0)$ и $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \text{col}(e_x, e_y, e_z)$ получим следующую систему уравнений, которой должны удовлетворять любые допустимые комбинации углов поворота АУ, обеспечивающие выполнение условий (1):

$$e_x \cos \varphi \cos \vartheta + e_y \cos \varphi \sin \vartheta + e_z \sin \varphi = 1; \quad (2)$$

$$-e_x \sin \vartheta + e_y \cos \vartheta = 0; \quad (3)$$

$$-e_x \sin \varphi \cos \vartheta - e_y \sin \varphi \sin \vartheta + e_z \cos \varphi = 0. \quad (4)$$

Поскольку $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = (\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}})^T \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$, то отсюда также следуют соотношения

$$e_x = \cos \varphi \cos \vartheta; e_y = \cos \varphi \sin \vartheta; e_z = \sin \varphi, -\pi \leq \tilde{\vartheta} \leq \pi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad (5)$$

с учетом которых система (2)–(4) выполняется тождественно. Кроме того, в дополнение к (5) отметим также еще одно вспомогательное соотношение: $\sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{1 - e_z^2} = \cos \varphi$.

Решение системы (2)–(4) с целью определения углов поворота АУ ϑ и φ может быть связано со следующими затруднениями: во-первых, с неединственностью получаемых решений и, во-вторых, с определенными ограничениями на допустимые значения углов поворота АУ, которые могут быть представлены в виде соответствующей области:

$$F(\vartheta, \varphi) \geq 0. \quad (6)$$

К ограничениям, формирующих эту область, относятся ограничения на величину углов прокачки по каналам управления АУ, реализуемых с помощью выбранного ОПУ, а также наличие зон затенения диаграммы направленности АУ, которые связаны с попаданием в нее элементов конструкции КА. Конфигурация области (6) в основном определяется местом установки ОПУ на корпусе КА и, соответственно, недопустимыми попаданиями в диаграмму направленности АУ элементов его конструкции. При этом следует отметить, что текущая ориентация орта $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$ относительно РСК, определяемая углами поворота АУ ϑ и φ , также зависит и от ориентации ССК в пространстве относительно инерциальной, гринвичской или орбитальной систем координат. В связи с этим отметим, что в общем случае при планировании сеанса связи «КА – ППИ» на каком-либо интервале $[t_0, t_f]$ могут быть получены значения углов поворота АУ, которые нарушают условие $F(\vartheta, \varphi) \geq 0$. В общем случае последнее можно ликвидировать с помощью соответствующего выбора текущей ориентации КА в пространстве, так как $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$.

Рассматривая далее ОПУ для одного из указанных выше КА [4], определим вспомогательные углы поворота АУ — $\tilde{\vartheta}$ и $\tilde{\varphi}$, которые задаются соотношениями:

$$\sin \tilde{\vartheta} = \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}; \cos \tilde{\vartheta} = \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, -\pi \leq \tilde{\vartheta} \leq \pi; \quad (7)$$

$$\sin \tilde{\varphi} = e_z; -\pi/2 \leq \tilde{\varphi} \leq \pi/2, \quad (8)$$

которые определяют прямоугольную область $\tilde{F}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) \geq 0$ для допустимых значений $\tilde{\vartheta}$ и $\tilde{\varphi}$ для (7), (8). В зависимости от положения реперной системы координат $\tilde{O}_x \tilde{y}_p \tilde{z}_p$ относительно корпуса КА вместо (8) также может быть введено и другое условие:

$$\sin \tilde{\varphi} = e_z; \cos \tilde{\varphi} = \sqrt{1 - e_z^2} \text{sign}(e_x) = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \text{sign}(e_x), 0 \leq \tilde{\varphi} \leq \pi.$$

Нетрудно установить, что вычисляемые согласно (7), (8) значения $\sin \tilde{\vartheta}$, $\cos \tilde{\vartheta}$, $\sin \tilde{\varphi}$ и $\cos \tilde{\varphi}$ удовлетворяют системе уравнений (2)–(4). Соответственно, в случае $e_z = \pm 1$, то есть когда ЛВ совмещается с ортом $\mathbf{c}_{\tilde{\vartheta}}^{\text{РСК}}$ (при этом $\mathbf{c}_{\tilde{\vartheta}}^{\text{РСК}} \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \pm 1$), тогда $\tilde{\varphi} = \pm \frac{\pi}{2}$ и $\cos \tilde{\varphi} = 0$, а угол $\tilde{\vartheta}$ не определен.

В общем случае разность множеств в виде областей $F(\vartheta, \varphi) \geq 0$ и $\tilde{F}(\vartheta, \varphi) \geq 0$ может быть непустым множеством, например, за счет более широкого диапазона углов прокачки ОПУ. Помимо опорных значений углов поворота АУ (7), (8) также возможны допустимые значения, например, для ϑ и φ , для которых выполняются условия: $\vartheta = \tilde{\vartheta} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\varphi = \tilde{\varphi} + l\pi$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. При этом выбор текущей пары углов поворота АУ из их допустимой совокупности, определяемой этими соотношениями, должен производиться с учетом имеющихся конструктивных ограничений для ОПУ. Соответственно, внутри интервала наведения АУ $- [t_0, t_f]$ выбор текущей пары его углов поворота должен предопределяться значениями углов поворота АУ, вычисленных в предыдущие моменты времени, и, быть может, с учетом значений производных $\dot{\vartheta}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$, для того чтобы исключить разрывы в программах наведения $\vartheta(t)$ и $\varphi(t) \forall t \in [t_0, t_f]$.

2. К определению угловых скоростей и ускорений АУ относительно РСК

Пусть заданы: $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$, а также матрица $\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}}$ (или, что то же самое, углы поворота АУ ϑ и φ) для каждого момента сеанса связи. Будем далее рассматривать РСК как условно неподвижную систему координат, а АСК как систему координат, вращающуюся относительно РСК с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}}$ и, соответственно, с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}}$. Обозначая через $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{ЛВ}}$ кинематические характеристики ЛВ в АСК и учитывая, что $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$ (но $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$), то исходя из теорем о сложении угловых скоростей и угловых ускорений ЛВ [1], получим:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}} + \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}), \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{ЛВ}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}}, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}}$ — переносное угловое ускорение ЛВ, вычисляемое по формуле [1]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Trans}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) + \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})];$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}}$ — поворотное угловое ускорение ЛВ, вычисляемое по формуле [1]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}} = -\frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}})}{r_{\text{ЛВ}}} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}^*, \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}^* = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}) \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}} \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}).$$

В режиме наведения АУ на ППИ (1) требуется, чтобы в каждый момент времени $t \in [t_0, t_f]$ сеанса связи выполнялось условие $\mathbf{s}_{\text{АВ}}^{\text{АСК}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$, а также условия $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ЛВ}}(t) \equiv 0$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{ЛВ}}(t) \equiv 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. С учетом $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}}^{\text{Rotor}} = 0$ (так как при указанных условиях $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ЛВ}}^* = 0$) из выражений (9), (10) тогда получим следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}), \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) + \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})]. \quad (12)$$

В соотношениях (11) и (12) фигурируют определяемые величины — угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}}$ АУ, которые непосредственно связаны с его кинематическими характеристиками по соответствующим каналам управления (в виде первых и вторых производных от углов поворота АУ — ϑ и φ).

3. Определение угловых скоростей вращения АУ по каналам управления — $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\varphi}$

Так как угловая скорость АУ относительно РСК равна векторной сумме угловых скоростей вращения по каналам управления ОПУ, то имеет место

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} = \dot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi}, \quad (13)$$

где $\mathbf{c}_{\varphi} = (\mathbf{c}_{\varphi})^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} \tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}} = \text{col}(\sin \vartheta, -\cos \vartheta, 0)$. Подставляя (13) в (11) и раскрывая двойные векторные произведения с учетом $\mathbf{c}_{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$, а также учитывая (5), получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} = \dot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} - \dot{\vartheta} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \sin \varphi = \boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} - \dot{\gamma} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}, \quad (14)$$

где $\dot{\gamma} = \dot{\vartheta} (\mathbf{c}_{\vartheta} \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \dot{\vartheta} e_z = \dot{\vartheta} \sin \varphi$ — компонента угловой скорости АУ, направленная вдоль ЛВ. Проектируя (14) на оси РСК, получим с учетом $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \text{col}(e_x, e_y, e_z)$ и $\boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \text{col}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ следующую систему уравнений относительно $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\gamma}$:

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin \vartheta - \dot{\gamma} e_x; \omega_y = -\dot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\gamma} e_y; \omega_z = \dot{\vartheta} - \dot{\gamma} e_z. \quad (15)$$

С учетом (8) и $\dot{\gamma} = \dot{\vartheta} e_z$ из третьего уравнения (15) получим

$$\dot{\vartheta} = \frac{\omega_z}{1 - e_z^2} = \frac{\omega_z}{\cos^2 \varphi}, \quad (16)$$

а также

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega_z \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Если $e_z \rightarrow \pm 1$, то в выражении для $\dot{\vartheta}$ (16) (и, соответственно, для $\dot{\gamma}$) имеет место неопределенность вида $0/0$, так как при этом $\varphi \rightarrow \pm \pi/2$, а $\omega_z \rightarrow 0$ в силу $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} \equiv 0$. Из первого и второго уравнений системы (15) с учетом (7), (8) также получим

$$\dot{\varphi} = \omega_x \sin \vartheta - \omega_y \cos \vartheta. \quad (17)$$

Учитывая $\mathbf{c}_\varphi = \text{col}(\sin \vartheta, -\cos \vartheta, 0)$, выражение (17) можно переписать в виде

$$\dot{\varphi} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} \cdot \mathbf{c}_\varphi. \quad (18)$$

Следует отметить, что формулы для расчета производных $\dot{\vartheta}$ (16) и $\dot{\varphi}$ (17) можно получить и непосредственно при дифференцировании соответствующих выражений для углов поворота АУ (7), (8) с учетом соотношения $\frac{d\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$.

4. Определение угловых ускорений вращения АУ по каналам управления — $\ddot{\vartheta}$ и $\ddot{\varphi}$

Получим в настоящем разделе соотношения для расчета значений производных $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\varphi}$. Так как по определению $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}}}{dt}$, то, дифференцируя выражение для $\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}}$ (13) и учитывая, что $\frac{d\mathbf{c}_\varphi}{dt} = \dot{\vartheta} \mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{c}_\varphi$, получим следующее выражение для $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}}$ (в РСК):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} = \ddot{\vartheta} \mathbf{c}_\vartheta + \ddot{\varphi} \mathbf{c}_\varphi + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi, \quad (19)$$

которое с учетом $\mathbf{c}_\vartheta = \text{col}(0, 0, 1)$, $\mathbf{c}_\varphi = \mathbf{c}_\varphi^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} \mathbf{c}_\varphi^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} \text{col}(0, -1, 0) = \text{col}(\sin \vartheta, -\cos \vartheta, 0)$ и $\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi = \text{col}(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$ в координатной форме имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} = \ddot{\vartheta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \\ -\ddot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix}.$$

Подставив выражения для $\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}}$ (13) и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}}$ (19) в уравнение (12), получим соотношения, которые в этом случае будут содержать искомые $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\varphi}$. При этом, естественно, предполагается, что $\dot{\vartheta}$ (16) и $\dot{\varphi}$ (17) известны. С этой целью вначале необходимо раскрыть с учетом (13) и (19) в правой части (12) векторные произведения, а именно: во-первых, первое слагаемое $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})$ в правой части (12); во-вторых, там же второе слагаемое $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})]$.

4.1. Вначале преобразуем выражение $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})$, которое после раскрытия двойного векторного произведения будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) \mathbf{e}_{\text{ЛВ}},$$

и, соответственно, в координатной форме с учетом (19) получим:

$$\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \\ -\ddot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

где с учетом (19) и (5), (7), (8)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} &= \ddot{\vartheta} \mathbf{c}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} + \ddot{\varphi} \mathbf{c}_\varphi \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} (\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \\ &= \ddot{\vartheta} e_z + \ddot{\varphi} (e_x \sin \vartheta - e_y \cos \vartheta) + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} (e_x \cos \vartheta + e_y \sin \vartheta) = \ddot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Поэтому в конечном счете тогда получим

$$\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \\ -\ddot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} - (\ddot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \varphi) \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\ddot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \sin^2 \varphi \\ -\ddot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta - \ddot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin^2 \varphi \\ \ddot{\vartheta} \cos^2 \varphi - \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Соответственно, в векторной записи вместо (20) будет иметь место:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) &= \ddot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \ddot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{c}_{\varphi} - \left[(\ddot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \ddot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{c}_{\varphi}) \cdot \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \right] \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} = \\ &= \ddot{\vartheta} (\mathbf{c}_{\vartheta} - \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \sin \varphi) + \ddot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} (\mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{c}_{\varphi} - \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cos \varphi). \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, проектируя выражение (21) на оси РСК, получим координатное представление для $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})$ в виде (20).

4.2. Рассмотрим теперь и раскроем второе слагаемое в правой части (12). Вначале с учетом (13) найдем $\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})$, а затем получим и выражение для $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})]$.

Итак, с учетом (13) получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) &= (\dot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi}) \times \left[(\dot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi}) \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \right] = \\ &= (\dot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi}) \times (\dot{\vartheta} \mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} + \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \\ &= \dot{\vartheta}^2 \mathbf{c}_{\vartheta} \times (\mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) + \dot{\varphi}^2 \mathbf{c}_{\varphi} \times (\mathbf{c}_{\varphi} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} [\mathbf{c}_{\varphi} \times (\mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) + \mathbf{c}_{\vartheta} \times (\mathbf{c}_{\varphi} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})] \end{aligned}$$

или, раскрывая соответствующие двойные векторные произведения: $\mathbf{c}_{\vartheta} \times (\mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \mathbf{c}_{\vartheta} \sin \varphi - \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$, $\mathbf{c}_{\varphi} \times (\mathbf{c}_{\varphi} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = -\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$, $\mathbf{c}_{\varphi} \times (\mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = 0$, $\mathbf{c}_{\vartheta} \times (\mathbf{c}_{\varphi} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \mathbf{c}_{\varphi} \sin \varphi$, полученное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) = \dot{\vartheta}^2 (\mathbf{c}_{\vartheta} \sin \varphi - \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) - \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} \sin \varphi. \quad (22)$$

Умножая соотношение (22) слева векторно на $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}$, с учетом $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\vartheta} = \text{col}(\cos \varphi \sin \vartheta, -\cos \varphi \cos \vartheta, 0)$ и $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\varphi} = \text{col}(\sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \varphi \sin \vartheta, -\cos \varphi)$ получим

$$\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})] = \dot{\vartheta}^2 (\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\vartheta}) \sin \varphi + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} (\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\varphi}) \sin \varphi. \quad (23)$$

Проектируя выражение (23) на оси РСК, перепишем $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})]$ в координатной форме так:

$$\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})] = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \cos \vartheta \\ -\dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin^2 \varphi \sin \vartheta \\ -\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (24)$$

4.3. Итак, с учетом (21) и (23) из (10) получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} &= \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}}) + \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АВ}} \times \mathbf{e}_{\text{ЛВ}})] = \\ &= \ddot{\vartheta} (\mathbf{c}_{\vartheta} - \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \sin \varphi) + \ddot{\varphi} \mathbf{c}_{\varphi} + \dot{\vartheta}^2 (\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\vartheta}) \sin \varphi + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} [\mathbf{c}_{\vartheta} \times \mathbf{c}_{\varphi} - \mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \cos \varphi + (\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\varphi}) \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (25)$$

В координатной форме выражение (25) (как и (20), (24), записанное в проекциях на оси РСК), с учетом вышеприведенных соотношений для $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\vartheta}$ и $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}} \times \mathbf{c}_{\varphi}$ будет иметь вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ЛВ}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta + 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \sin^2 \varphi \\ -\ddot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta - \ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin^2 \varphi \\ \ddot{\vartheta} \cos^2 \varphi - 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix},$$

а отсюда следует такая система уравнений относительно искомых $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\varphi}$:

$$\varepsilon_x = -\ddot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + \ddot{\varphi} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta + 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \sin^2 \varphi; \quad (26)$$

$$\varepsilon_y = -\ddot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi \sin \vartheta - \ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin^2 \varphi; \quad (27)$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\vartheta} \cos^2 \varphi - 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (28)$$

Из уравнения (28) непосредственно следует

$$\ddot{\vartheta} = \frac{\varepsilon_z + 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad (29)$$

а отсюда с учетом выражений для $\dot{\vartheta}$ (16) и $\dot{\varphi}$ (17) также получим

$$\ddot{\vartheta} = \frac{\varepsilon_z \cos \varphi + 2\omega_z(\omega_x \sin \vartheta - \omega_y \cos \vartheta) \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}. \quad (30)$$

Соответственно, с помощью уравнений (26) и (27) найдем выражение для $\ddot{\varphi}$ таким образом: умножим уравнение (26) на $\sin \vartheta$, а уравнение (27) — на $\cos \vartheta$ и затем, вычитая из первого второе уравнение, получим

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_x \sin \vartheta - \varepsilon_y \cos \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (31)$$

Подставив в (31) выражение (16), также получим

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_x \sin \vartheta - \varepsilon_y \cos \vartheta + \frac{\omega_z^2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (32)$$

Приведенные выше формулы для расчета производной $\ddot{\vartheta}$ — (29) и (30) — непосредственно можно получить и при дифференцировании выражения для $\dot{\vartheta}$ с учетом (16) и (17). Соответственно, дифференцируя $\dot{\varphi} = \omega_x \sin \vartheta - \omega_y \cos \vartheta$ (17), с учетом $\dot{\omega}_x = \varepsilon_x$ и $\dot{\omega}_y = \varepsilon_y$ получим

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_x \sin \vartheta - \varepsilon_y \cos \vartheta + \dot{\vartheta}(\omega_x \cos \vartheta + \omega_y \sin \vartheta). \quad (33)$$

Очевидно, что, продифференцировав соотношение (18), а именно:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{d\omega_{\text{ЛВ}}}{dt} \cdot \mathbf{c}_\varphi + \omega_{\text{ЛВ}} \cdot \frac{d\mathbf{c}_\varphi}{dt} = \varepsilon_{\text{ЛВ}} \cdot \mathbf{c}_\varphi + \dot{\vartheta} \omega_{\text{ЛВ}} \cdot (\mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{c}_\varphi) = \\ &= \varepsilon_x \sin \vartheta - \varepsilon_y \cos \vartheta + \dot{\vartheta}(\omega_x \cos \vartheta + \omega_y \sin \vartheta), \end{aligned}$$

получим соотношение (33). Если сравнить правые части (31) и (33), то получим следующее соотношение: $\dot{\vartheta} \sin \varphi \cos \varphi = \omega_x \cos \vartheta + \omega_y \sin \vartheta$.

Выводы

Рассмотрена и решена задача расчета кинематических характеристик подвижного АУ КА в виде его углов поворота, реализуемых с помощью двухступенного опорно-поворотного устройства при наведении АУ на соответствующий пункт приема информации [1], а также в виде первых и вторых производных от текущих углов поворота АУ. При решении этой задачи были применены результаты решения задачи кинематики сложного движения ЛВ для подвижной АУ в виде соответствующих теорем о сложении угловых скоростей и угловых ускорений [1]. Полученные соотношения для расчета значений производных $\dot{\vartheta}$ — (16) и $\dot{\varphi}$ — (17), а также для расчета $\ddot{\vartheta}$ — (29) и $\ddot{\varphi}$ — (32), исходя из заданных в связанной системе координат КА кинематических характеристик ЛВ, необходимы для высокоточного моделирования процессов наведения подвижных АУ.

Литература

- [1] Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик линии визирования подвижной антенны космического аппарата при ее наведении на пункт приема информации // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–84.
- [2] Горелов Ю.Н., Горелова О.И., Мантуров А.И. Моделирование кинематических характеристик управляемой подвижной антенны космического аппарата // Управление движением и навигация летательных аппаратов: сб. тр. XI Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2003. С. 68–73.
- [3] Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. Москва: Машиностроение, 1973. 260 с. URL: <https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y>.
- [4] Космическое аппаратостроение. Научно-технические исследования и практические разработки ГНПРКЦ "ЦСКБ-Прогресс". 2-е изд., испр. и доп. / А.Н. Кирилин, Г.П. Аншаков, Р.Н. Ахметов, А.Д. Сторож. Самара, 2017. 376 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132

Submitted: 10.08.2023

Revised: 25.09.2023

Accepted: 05.12.2023

Yu.N. Gorelov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
 E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-2183-6261>

L.V. Kurganskaya

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
 E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1513-3802>

MODELING OF KINEMATIC CHARACTERISTICS OF A MOBILE ANTENNA OF A SPACECRAFT IN A TWO-STAGE PIVOTING DEVICE

ABSTRACT

The problem of calculating the kinematic characteristics of a mobile antenna device (AD) based on the specified values of kinematic characteristics of the line of sight (LS) "spacecraft — information reception point" in the associated coordinate system of the spacecraft is considered. The kinematic characteristics of the AD in the form of the current values of its rotation angles and angular velocities and accelerations (according to the corresponding control channels) are determined from the conditions for combining the LS with the axis of the directional diagram of the AD for the case of a two-stage pivoting device with mutually orthogonal axes of rotation of the AD.

Key words: spacecraft; mobile antenna; pivot device; kinematic characteristics; line of sight; control channels.

Citation. Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of a mobile antenna of a spacecraft in a two-stage pivoting device. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 125–132. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V., 2023

Yury N. Gorelov — Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Research Institute of Modelling and Control Science, Samara National Research University; professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Lubov V. Kurganskaya — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Research Institute of Modeling and Control Science; associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of the line of sight of a mobile antenna of a spacecraft when it is pointed at an information reception point. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 77–84. (In Russ.)
- [2] Gorelov Yu.N., Gorelova O.I., Manturov A.I. Modeling of kinematic characteristics of a controlled mobile antenna of a spacecraft. In: *Motion control and navigation of aircraft: proceedings of the XI All-Russian research and technical seminar on motion control and navigation of aircraft (June, 23–25, 2003, Samara, Russian Federation)*. Samara, 2003, pp. 68–73. (In Russ.)
- [3] Strazheva I.V., Melkumov V.S. Vector-matrix methods in flight mechanics. Moscow: Mashinostroenie, 1973, 260 p. Available at: <https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y>. (In Russ.)
- [4] Kirilin A.N., Anshakov G.P., Akhmetov R.N., Storozh A.D. Spacecraft engineering. Scientific and technical research and practical developments of the State Research and Production Space-Rocket Center "TsSKB-Progress". Samara, 2017, 376 p.; illustrated. (In Russ.)

ФИЗИКА

PHYSICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-133-142

УДК 538.915; 681.586

Дата: поступления статьи: 10.08.2023
после рецензирования: 26.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

М.В. Долгополов

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mikhaildolgoplov68@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8725-7831>

А.С. Чипура

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: al_five@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0425-0653>

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕТАВОЛЬТАИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА НА НАНОГЕТЕРОПЕРЕХОДАХ GaN И GaP НА ПОДЛОЖКАХ Si И 3C-SiC/Si

АННОТАЦИЯ

В данной статье моделируются электрофизические свойства и КПД преобразователей энергии – бетавольтаических элементов, которые содержат гетеропереход GaN и GaP на подложках Si и 3C-SiC/Si. Для преобразования в электрическую энергию исследуются в моделировании внешний ^{63}Ni или внутренний ^{14}C радиоактивные источники с тестовой плотностью активности $100 \text{ мКи}\cdot\text{см}^{-2}$. Оптимизируется система параметров и характеристик: диффузионные длины, ток короткого замыкания, напряжение открытой цепи, фактор заполнения, обратный ток насыщения и КПД. Результаты моделирования показали, что в структуре устройства с глубиной перехода 0.1 мкм определяется хорошая работа бетавольтаического элемента, плотность тока короткого замыкания – до $200 \text{ нА}\cdot\text{см}^{-2}$, напряжение открытой цепи – до 3.7 В , плотность мощности до $700 \text{ нВт}\cdot\text{см}^{-2}$, КПД до 25% . Эффективность преобразования достигает максимального значения при использовании радиоизотопного источника с плотностью активности от 25 до $100 \text{ мКи}\cdot\text{см}^{-2}$. Эффективность преобразования при расположении источника-инжектора внутри оценивается примерно в 30 раз выше, чем при внешнем расположении.

Ключевые слова: аналитическое моделирование; наногетеропереход; гетероструктура; нитрид галлия; фосфид галлия; бетавольтаический элемент; бетавольтаический преобразователь; радиоинкулид никель-63; радионуклид углерод-14; плотность радиоактивности; бетавольтаическая батарея.

Цитирование. Долгополов М.В., Чипура А.С. Моделирование бетавольтаического элемента на наногетеропереходах GaN и GaP на подложках Si и 3C-SiC/Si // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 133–142. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-133-142>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Долгополов М.В., Чипура А.С., 2023

Михаил Вячеславович Долгополов — доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Александр Сергеевич Чипура — преподаватель кафедры высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Введение

Первые разработки ядерной батареи стали возможны после открытия излучения, в начале 1900-х годов [1], а полупроводниковая бетавольтаическая батарея была впервые продемонстрирована в начале 1950-х годов после создания первых полупроводниковых устройств на основе электрон-вольтаического [2; 3] и бетавольтаического эффектов [3]. Принципы работы бетавольтаической батареи во многих отношениях аналогичны принципам работы солнечного элемента. Бетавольтаическая батарея — это полупроводниковое преобразовательное устройство (например, бетавольтаический элемент на p - n переходе, гетеропереходе или на барьерном диоде Шоттки), которое использует энергию бета-излучения для генерации электрон-дырочных пар посредством ионизирующего излучения в веществе. Когда генерируемые пары "электрон-дырка" разделяются встроенным электрическим полем преобразователя энергии и затем собираются в индуцированный излучением ток, то преобразование энергии излучения в электрическую энергию осуществляется непосредственно, то есть прямым преобразованием. За последние несколько десятилетий, благодаря своим небольшим размерам, самоокупаемости, простоте изготовления, незначительному воздействию на окружающую среду, длительному сроку службы и большой удельной энергии, бетавольтаические батареи стали многообещающими источниками микропитания [4; 5] для долговременных микроэлектронных механических систем (МЭМС, MEMS), таких как электроника космических зондов и датчики в удаленных системах местоположения.

В бетавольтаической батарее или в отдельном бетавольтаическом элементе, поскольку энергия испускаемых частиц из радиоизотопа намного больше ширины запрещенной зоны элемента, полупроводники с более широкой запрещенной зоной обеспечивают более высокую эффективность при большей радиационной стойкости, что потенциально позволяет использовать радиоизотопные источники более высокой энергии [6]. Поэтому важно использовать материалы с широкой запрещенной зоной, которые обеспечивают низкие токи утечки, чтобы получить разумную эффективность преобразования мощности. Обычно эффективность и ширина запрещенной зоны положительно коррелируют, но ширину запрещенной зоны нельзя регулировать произвольно высоко, поскольку сбор носителей затруднен из-за широкой запрещенной зоны с плохой проводимостью.

В этой статье гетеропереходные p - n диоды GaN-Si и GaP-Si используются для повышения КПД в батарее с прямым преобразованием вместо одиночного p - n гомоперехода. Рассчитываются значения КПД и выводится теоретическая модель оптимизации для сравнения электрических характеристик с материалами гетеропереходов GaN и GaP на подложках Si и 3C-SiC/Si [7; 8]. В данном исследовании радиоактивные источники ^{63}Ni , ^{14}C выбраны из-за подходящего периода полураспада и умеренной средней энергии распада. Что касается преобразователя энергии гетеропереходом, материал зазора выбран таким образом, чтобы образовывать гетеропереход с Si или 3C-SiC/Si [9; 10]. Для барьерных диодов Шоттки на основе Si и SiC [11], In, Al, Ti, Ag и W выбраны в качестве металлов Шоттки. Проведено моделирование для определения транспортных характеристик бета-частиц в материалах для преобразования энергии методом Монте-Карло. Наконец, в соответствии со сравнительными результатами, получены оптимизированные толщина и концентрации легирующих примесей полупроводниковых слоев для элементов бетавольтаической батареи. Определены теоретические расчеты максимальных электрических свойств таких батарей.

1. Модель исследования активированных наногетеропереходов

Параметры полупроводниковых материалов, использованных в данном исследовании и моделировании бетавольтаических элементов, перечислены в табл. 1.1. В табл. 1.1 и 1.2 приведены ссылки на работы, в которых рассчитывались и моделировались бетавольтаические ячейки с указанными материалами, как в нашем исследовании, при этом указаны значения параметров материалов, в крайнем случае отличающиеся не более чем на 5 % в рамках отклонений, связанных с учетом механических напряжений, вызванных несоответствием кристаллических решеток материалов.

Важное значение для комбинирования и определения наибольшего КПД бетавольтаических элементов и на p - n переходе, и на гетеропереходе играют величины диффузионных длин, поскольку они определяют тип граничных условий для решения дифференциальных уравнений для определения транспорта зарядов через эмиттер, активную зону и базу, приводя к суммарной плотности тока короткой цепи или короткого замыкания, как в дальнейшем представлено на рис. 1.2. Далее мы используем обозначение L_n для диффузионной длины электронов в полупроводниковом материале p -типа легирования и, наоборот, для дырок — L_p [17]. На рис. 1.1 представлены диффузионные длины неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах. Диффузионные длины в SiC меньше при малых концентрациях легирования, чем в Si, но при высоких концентрациях легирования наблюдается общая тенденция

Таблица 1.1

Параметры полупроводниковых материалов, используемые в программе моделирования

Table 1.1

Parameters of semiconductor materials used in the simulation program

	GaN	GaP	Si	3C-SiC
E_g , эВ	3.39	2.26	1.12	2.36
χ , эВ	1.84	4.3	4.05	4
ρ , г/см ³	6.1	4.138	2	3.21
n_i , см ⁻³	$1.07 \cdot 10^{-10}$	2	$1.45 \cdot 10^{10}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$
a , Å	4.5	5.45	5.43	4.35
ε	10.4	10	11.7	9.7
E_{ion} , эВ	9.95	6.8	3.6	7.1
Refs.	[12–14]	[15]	[15]	[16]

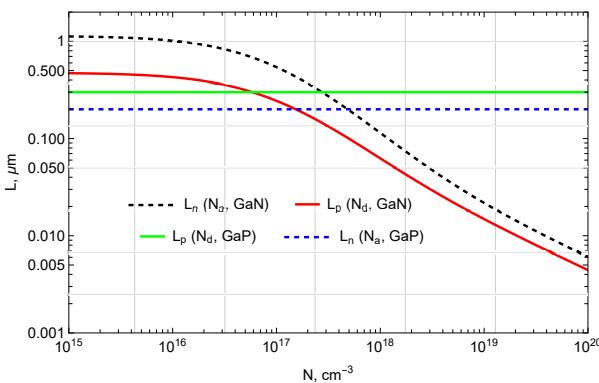
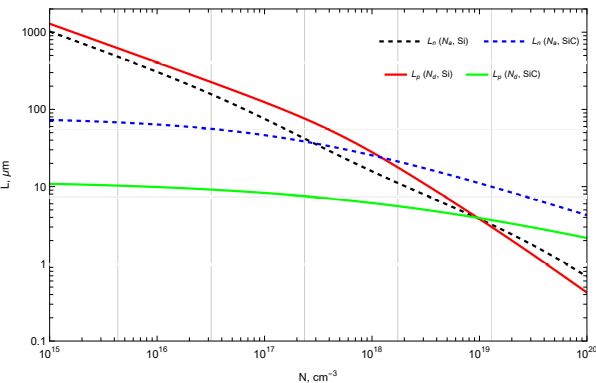


Рис. 1.1. Диффузионные длины неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах Si, SiC, GaN, GaP

Fig. 1.1. Diffusion lengths of minority charge carriers in semiconductor materials Si, SiC, GaN, GaP

уменьшения диффузионной длины, а уменьшается значительно она в Si. В GaN и GaP диффузионные длины гораздо меньше, причем в GaP они меньше, чем в GaN. Данные заключения о различиях диффузионных длин соответствуют отличию в собственных проводимостях данных полупроводниковых материалов. Удобным является при рассмотрении зависимостей диффузионных длин обоснование выбора материалов и легирования составляющих гетеропереходов для моделируемой бетавольтаической ячейки.

На рис. 1.2 представлены плотности токов короткого замыкания и их составляющие компоненты в полупроводниковых материалах. Получены при легировании тонкого первого слоя до 10^{18} и ширине $0.3 \div 0.4$ мкм. При уменьшении концентрации легирования слоя эмиттера ток возрастает на 10–20 %.

В табл. 1.2 представлены диапазоны значений вычисленных параметров для моделей бетавольтаических элементов на гетеропереходах с различными составляющими материалами с радионуклидом ^{63}Ni , размещенным снаружи, и ^{14}C , размещенным внутри на гетеропереходе в активной зоне. Тестируемая активность радионуклида $100 \text{ мКи} \cdot \text{см}^{-2}$. Отметим, что концентрации легирования N_d , N_a для табл. 1.2 рассматриваются при возрастании от 10^{15} до 10^{20} , что в таблице используется обозначением $\nearrow$ при изменении значений параметров.

Для бетавольтаической батареи или отдельного элемента КПД преобразования (n_{total}) это важный параметр для оценки его производительности.

В данном научном исследовании рассматривается методика определения встроенного потенциала на границе раздела двух материалов с использованием двух различных подходов. В частности, для случая материала GaP встроенный потенциал определяется на основе выравнивания уровней Ферми в обоих материалах [15]:

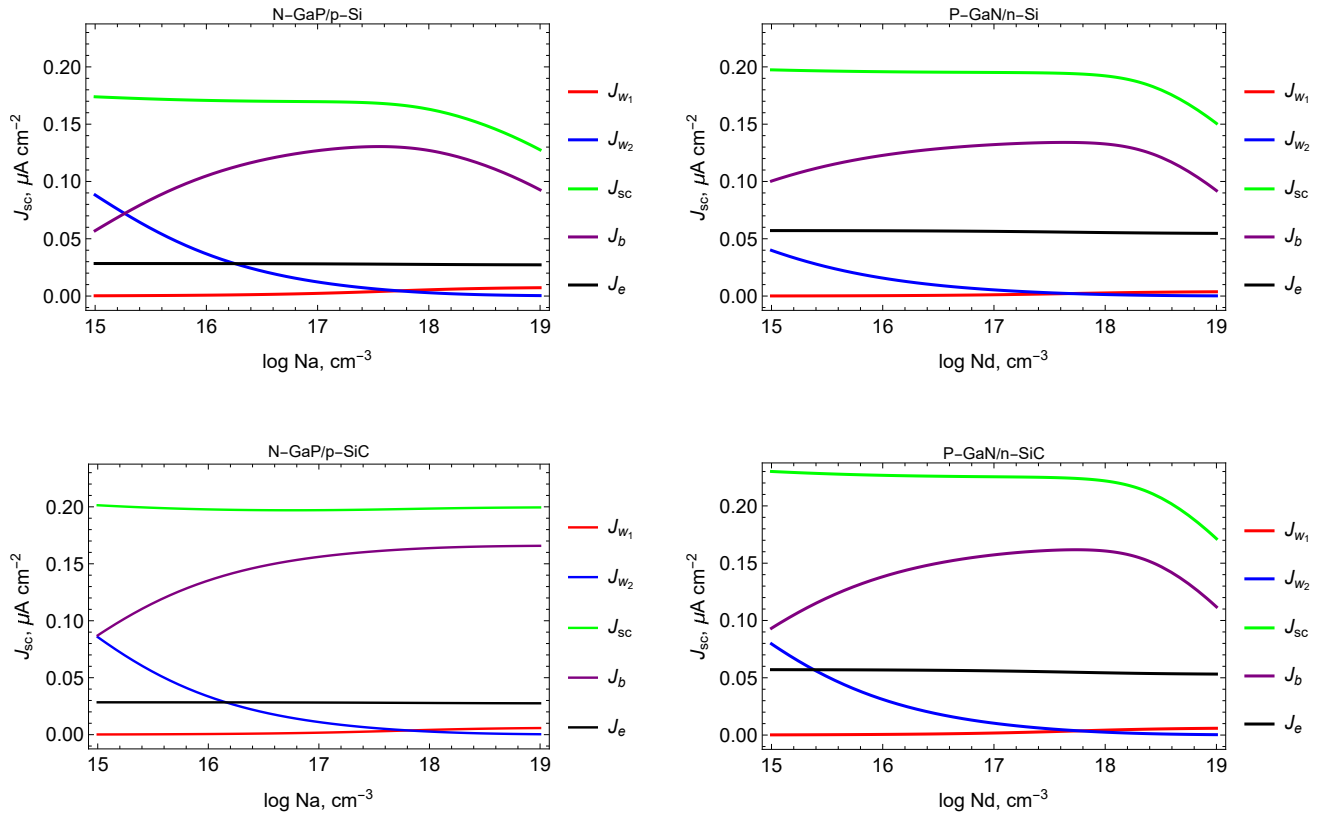


Рис. 1.2. Токи короткого замыкания и их составляющие компоненты в полупроводниковых материалах
 Fig. 1.2. Short circuit currents and their components in semiconductor materials

Таблица 1.2

Диапазоны значений вычисленных параметров для различных материалов
 с радионуклидами

Table 1.2

Ranges of values of the calculated parameters for various materials with radionuclides

	$L_p, \mu\text{m}$	$L_n, \mu\text{m}$	$W^*, \mu\text{m}$	J_{sc}, nA	V_{oc}, V	FF	$\eta, \%$	Ref.
Гетеропереходы								
$^{63}\text{Ni} \rightarrow \text{N-GaP-p-Si}$	0.3	$1100 \nearrow 70$	$0.2+0.2$	170	1.5	0.91	2.3	[15]
$^{63}\text{Ni} \rightarrow \text{P-GaN-n-Si}$	$1100 \nearrow 0.4$	$1 \nearrow 0.005$	$0.15+0.15$	168	3.6	0.97	7	[13]
$^{63}\text{Ni} \rightarrow \text{N-GaP-p-SiC}$	0.3	$75 \nearrow 4.2$	$0.11+0.11$	210	1.6	0.92	3	1
$^{63}\text{Ni} \rightarrow \text{P-GaN-n-SiC}$	$11 \nearrow 2$	$1 \nearrow 0.005$	$0.17+0.17$	163	5.7	0.97	9.1	[18]

Примечание. Сумма значений для двух частей активной зоны гетероперехода W^* соответствует равной концентрации легирования $N_a = N_d = 10^{17}$.

$$V_{bi} = -\Delta E_v + \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{P_{p0} N_{vn}}{P_{n0} N_{vp}} \right), \quad (1.1)$$

здесь N_{vn} и N_{vp} представляют собой плотности эффективных состояний в валентной зоне для материалов GaP и Si соответственно. Параметр P_{p0} описывает концентрацию дырок в области p -типа и может быть выражен через концентрацию легирующих примесей в этой области. Аналогично P_{n0} представляет собой концентрацию дырок в области n -типа и может быть определен следующим образом:

$$P_{n0} = \frac{n_i^2}{N_d}. \quad (1.2)$$

Данный метод позволяет более глубоко исследовать характеристики встроенного потенциала в различных материалах, что имеет важное значение для более полного понимания физических свойств их границы раздела.

В случае гетеропереходов на основе соединительного полупроводника GaN расчет встроенного напряжения приобретает особенности [13]. При анализе полупроводниковых гетеропереходов, где взаимодействуют два различных материала, в данной статье применяется методика определения встроенных напряжений и толщин областей в этих материалах.

КПД с p - n переходом показан на рис. 1.3.

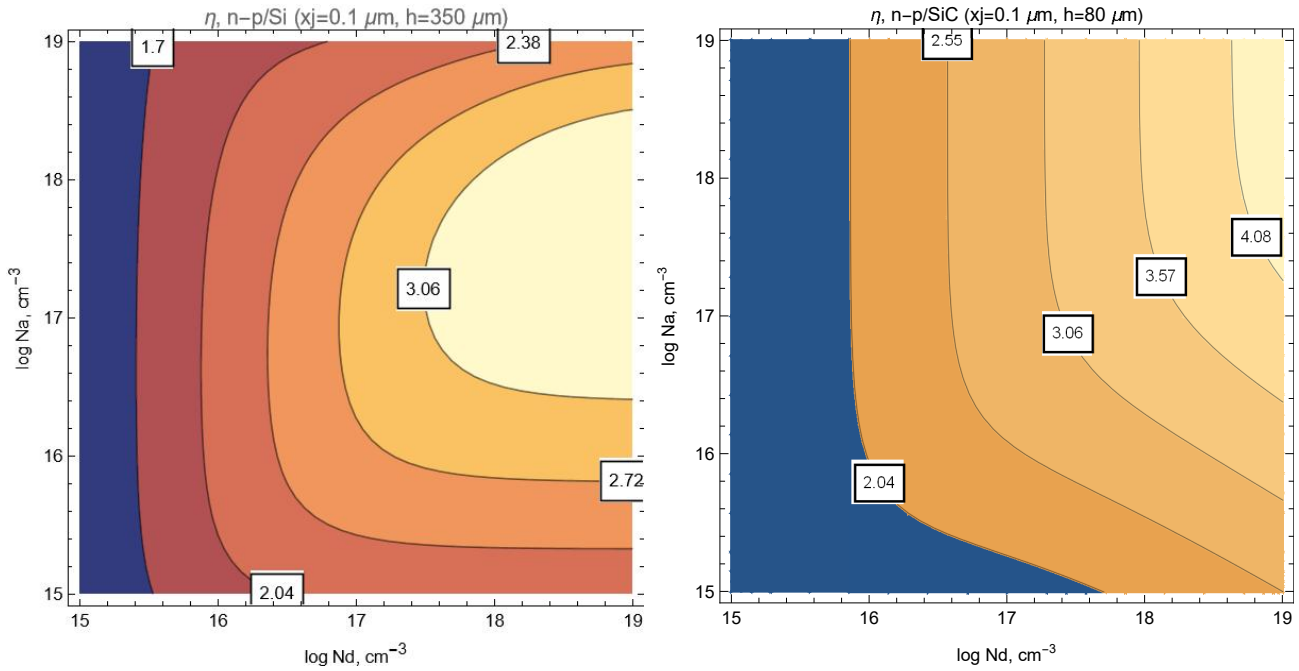


Рис. 1.3. КПД с p - n переходом в полупроводниковых материалах, Ni

Fig. 1.3. Efficiency with p - n junction in semiconductor materials, Ni

$$n_{total} = \frac{P_{max}}{AE_{avg}q} \quad (1.3)$$

Для данного случая встроенные напряжения V_{bi1} и V_{bi2} для первого и второго полупроводников соответственно вычисляются через термодинамические параметры и концентрации примесей в материалах. Конкретно они определяются выражениями:

$$V_{bi1} = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_a N_d}{n_{i1}^2} \right), \quad V_{bi2} = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{N_d N_a}{n_{i2}^2} \right), \quad (1.4)$$

где N_a и N_d — концентрации акцепторных и донорных примесей соответственно, n_{i1} и n_{i2} — интраиндуцированные концентрации носителей заряда в первом и втором материалах.

В результате суммарное встроенное напряжение $V_{biTotal}$ определяется как их сумма:

$$V_{biTotal} = V_{bi1} + V_{bi2}. \quad (1.5)$$

Этот метод позволяет более точно оценить влияние физических параметров на формирование встроенных напряжений в гетероструктурах на основе GaN, что имеет важное значение для дальнейшего понимания и оптимизации их электронных свойств и потенциальных применений.

В данной работе была проведена оптимизация параметров различных полупроводниковых материалов для создания и масштабирования наногетеропереходов [19], активируемых радионуклидами — активированных наногетеропереходов. На рис. 1.4 представлена теоретическая симуляция КПД для четырех моделей $^{63}\text{Ni} \rightarrow N - \text{GaP} - p - \text{SiC}$, $^{63}\text{Ni} \rightarrow P - \text{GaN} - n - \text{SiC}$, $^{63}\text{Ni} \rightarrow N - \text{SiC} - p - \text{Si}$ и $N - \text{SiC} \leftarrow ^{14}\text{C} \rightarrow p - \text{Si}$. В последней модели в качестве инжектора внутрь был имплантирован ^{14}C [20; 21]. Результаты моделирования согласуются с работами [13; 15; 18]. Для сравнения проведены расчеты для p - n перехода [22] и представлены на рис. 1.3. Эффективность преобразования при располо-

жении источника-инжектора внутри [23] оценивается примерно в 30 раз выше, чем при внешнем расположении.

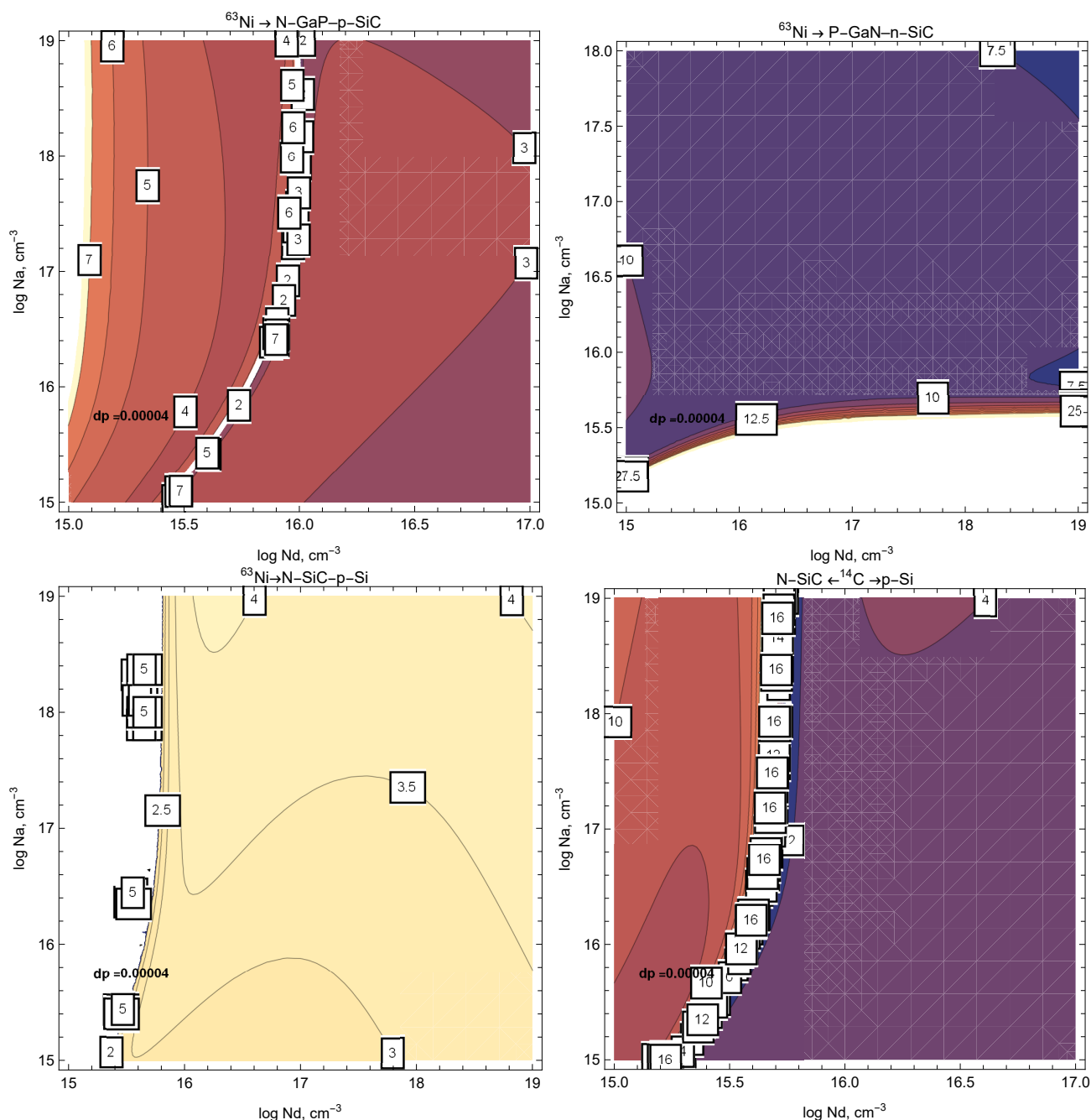


Рис. 1.4. КПД с гетеропереходом в полупроводниковых материалах ^{63}Ni и ^{14}C
Fig. 1.4. Heterojunction efficiency in ^{63}Ni and ^{14}C semiconductor materials

Закключение

В данной статье мы рассмотрели комплексную многокомпонентную аналитическую модель, которая учитывает фундаментальные физические параметры бетавольтаического элемента на основе тонких гетеропереходов с GaN и GaP на подложках Si и 3C-SiC/Si. Результаты моделирования показали, что в структуре устройства с глубиной перехода 0.1 мкм, коэффициентом заполнения 0.95, умеренными концентрациями легирования и низкими уровнями скоростей поверхностной рекомбинации как в излучателе-эмиттере, так и в подложке-базе, источник с плотностью активности $1\div 100$ мКи·см $^{-2}$

определяет хорошую работу бетавольтаического элемента. В частности, типичные электрические параметры элемента можно резюмировать следующим образом: плотность тока короткого замыкания до $200 \text{ нА}\cdot\text{см}^{-2}$ и напряжение открытой цепи до 3.7 В, плотность мощности до $700 \text{ нВт}\cdot\text{см}^{-2}$ и КПД до 25 %. Эффективность преобразования достигает максимального значения при использовании радиоизотопного источника с плотностью активности от 25 до $100 \text{ мКи}\cdot\text{см}^{-2}$. Полученные результаты могут оказаться очень полезными для оптимизации конструкции бетавольтаических устройств.

Литература

- [1] Moseley H.G.J. The Attainment of High Potentials by the Use of Radium // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1913, vol. 88, pp. 471–476. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1913.0045>.
- [2] Ehrenberg W., Lang C., West R. The Electron Voltaic Effect. // *Proceedings of the Physical Society. Section A*. 1951. Vol. 64, Number 4. Article number 424. DOI: <https://doi.org/10.1088/0370-1298/64/4/109>.
- [3] Rappaport P. The Electron-Voltaic Effect in p-n Junctions Induced by Beta-Particle Bombardment // *Phys. Rev.* 1954. Vol. 93, Issue 1, Article number 246. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.93.246.2>.
- [4] Spencer M.G., Alam T. High power direct energy conversion by nuclear batteries // *Applied Physics Reviews*. 2019. Vol. 6, Article number 031305. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5123163>.
- [5] Zhou Chunlin, Zhang Jinsong, Wang Xu, Yang Yushu, Xu Pan, Li Peixian, Zhang Lu, Chen Zhiyuan, Feng Huanran, Wu Weiwei. Review—Betavoltaic Cell: The Past, Present, and Future // *ECS Journal of Solid State Science and Technology*. 2021. Vol. 10, Number 2. Article number 027005. DOI: <https://doi.org/10.1149/2162-8777/abe423>.
- [6] Naseem M.B., Kim H.S., Lee J., Kim C.H., In S.-I. Betavoltaic Nuclear Battery: A Review of Recent Progress and Challenges as an Alternative Energy Source // *The Journal of Physical Chemistry C*. 2023. Vol. 127, Issue 16. Pp. 7565–7579. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.3c00684>.
- [7] Ho Wan, Chow Yi, Nakamura Shuji, Peretti Jacques, Weisbuch Claude, Speck James. Measurement of minority carrier diffusion length in p-GaN using electron emission spectroscopy (EES) // *Applied Physics Letters*. 2023. Vol. 122. Article number 212103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0150029>.
- [8] Чепурнов В.И., Долгополов М.В., Гурская А.В., Латухина Н.В. Способ получения пористого слоя гетероструктуры карбида кремния на подложке кремния // Патент на изобретение RU 2 653 398 C2, 08.05.2018. Заявка № 2016129598 от 19.07.2016. URL: https://yandex.ru/patents/doc/RU2653398C2_20180508.
- [9] Kuznetsova A., Chepurnov V., Dolgoplov M., Gurskaya A., Kuznetsov O., Mashnin A., Radenko V., Radenko A., Surnin O., Zanin G. Betavoltaic device in por-SiC/Si C-Nuclear Energy Converter // *EPJ Web of Conferences*. 2017. Vol. 158, Article number 06004. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715806004>.
- [10] Чепурнов В., Пузырная Г., Гурская А., Долгополов М., Анисимов Н. Экспериментальное исследование полупроводниковых структур источника питания на углероде-14 // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2019. Т. 22, № 3. С. 55–67. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.55-67>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ousjkw>.
- [11] Roccaforte F., Giannazzo F., Raineri V. Nanoscale transport properties at silicon carbide interfaces // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010. Vol. 43, Number 22. Article number 223001. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/43/22/223001>.
- [12] Протасов Д.Ю., Малин Т.В., Тихонов А.В., Цацульников А.Ф., Журавлев К.С. Рассеяние электронов в гетероструктурах AlGaN/GaN с двумерным электронным газом // *Физика и техника полупроводников*. 2013. Т. 47, Вып. 1. С. 36–47. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063782613010181>.
- [13] Reyhan Kavak Yuruk, Hayriye Tutunculer. Theoretical Investigation of High-Efficiency GaN-Si Heterojunction Betavoltaic Battery // *Canadian Journal of Physics*. 2019. Vol. 97, Issue 9. Pp. 1031–1038. DOI: <https://doi.org/10.1139/cjp-2018-0579>.
- [14] Demeter T., Athanassios A. Tsekouras. The electron affinity of gallium nitride (GaN) and digallium nitride (GaNGa): The importance of the basis set superposition error in strongly bound systems // *The Journal of Chemical Physics*. 2008. Vol. 128, Article number 144103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2883997>.
- [15] Wang Y., Lu J., Zheng R., Li X., Liu Y., Zhang X., Zhang Y., Chen Z. Theoretical study of a high-efficiency GaP-Si heterojunction betavoltaic cell compared with metal-Si Schottky barrier betavoltaic cell // *AIP Advances*. 2021. Vol. 11, Article number 065110. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0053917>.
- [16] Willardson R.K., Weber E.R. *SiC Materials and Devices*. London, UK: Elsevier Science, 1998, 420 p. URL: https://books.google.ru/books?id=bYms_kigMX8C&hl=en&redir_esc=y.

- [17] Lin Z. Simulation and optimization design of SiC-based pn betavoltaic microbattery using tritium source // Crystals. 2020. Vol. 10, Issue 2, Article number 105. DOI: <https://doi.org/10.3390/cryst10020105>.
- [18] Bouzid F., Pezzimenti F., Dehimi L. Modelling and performance analysis of a GaN-based n/p junction betavoltaic cell // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2020. Vol. 969, Article number 164103. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2020.164103>.
- [19] Долгополов М.В., Елисов М.В., Раджапов С.А., Чипура А.С. Модели масштабирования электрических свойств фото- и бета-преобразователей с наногетеропереходами // Computational Nanotechnology. 2023. Т. 10, № 1. С. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2023-10-1-138-146>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wkekac>.
- [20] Чепурнов В.И., Раджапов С.А., Долгополов М.В., Пузырная Г.В., Гурская А.В. Задачи определения эффективности для микроструктур SiC*/Si и контактообразования // Computational Nanotechnology. 2021. Т. 8, № 3. С. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2021-8-3-59-68>. EDN: <https://www.elibrary.ru/eybfqt>.
- [21] Гурская А.В., Долгополов М.В., Раджапов М.В., Чепурнов В.И. Контакты для SiC-преобразователей в диапазоне нано-микроватт // Вестник Московского университета. Сер.: 3. Физика. Астрономия. 2023. Т. 78, № 1. Номер статьи 2310103. DOI: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.78.2310103>.
- [22] Rahmani F., Khosravinia H. Optimization of silicon parameters as a betavoltaic battery: Comparison of Si p-n and Ni/Si schottky barrier // Radiation Physics and Chemistry. 2016. № 125. Pp. 205–212. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2016.04.012>.
- [23] Dolgoplov V.V., Chepurinov V.I., Chipura A.S. etc. Scaling and activation of nanoheterojunctions on silicon and silicon carbide substrates // In Proceedings of the International Conference “Fundamental and Applied Problems of Modern Physics”. 2023. Section II. P. 88–92. <https://elibrary.ru/item.asp?id=54922680>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-133-142

Submitted: 10.08.2023

Revised: 26.09.2023

Accepted: 05.12.2023

M.V. Dolgoplov

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: mikhaildolgoplov68@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8725-7831>

A.S. Chipura

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: al_five@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0425-0653>

MODELING OF NANOHETEROJUNCTION BETAVOLTAIC CELL ON GaN AND GaP WITH Si AND 3C-SiC/Si

ABSTRACT

In this paper, the electrophysical properties and efficiency of energy converters — betavoltaic elements, which contain a GaN and GaP heterojunction on Si and 3C-SiC/Si substrates, are modeled. For conversion into electrical energy, external ^{63}Ni or internal ^{14}C radioactive sources with a test specific activity of $100 \text{ mCi}\cdot\text{cm}^{-2}$ are investigated in the simulation. The system of parameters and characteristics is optimized: diffusion lengths, short-circuit current, open circuit voltage, filling factor, reverse saturation current and efficiency. It was shown in simulation results, that in the device structure with junction depth of 0.1 microns, the good operation of a betavoltaic element is determined, the short-circuit current density is up to $200 \text{ nA}\cdot\text{cm}^{-2}$, the open circuit voltage is up to 3.7 V, the power density is up to $700 \text{ nW}\cdot\text{cm}^{-2}$, efficiency up to 25 %. The conversion efficiency reaches its maximum value when using a radioisotope source with an activity density from 25 to $100 \text{ mCi}\cdot\text{cm}^{-2}$. The conversion efficiency with the location of the injector source inside is estimated to be about 30 times higher than with the external location.

Key words: analytical modeling; nanoheterojunction; heterostructure; gallium nitride; gallium phosphide; betavoltaic element; betavoltaic converter; nickel-63 radionuclide; carbon-14 radionuclide; radioactivity density; betavoltaic battery.

Citation. Dolgoplov M.V., Chipura A.S. Modeling of nanoheterojunction betavoltaic cell on GaN and GaP with Si and 3C-SiC/Si. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 133–142. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-133-142>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Dolgoplov M.V., Chipura A.S., 2023

Mikhail V. Dolgoplov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Alexander S. Chipura — researcher and lecturer of the Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Moseley H.G.J. The Attainment of High Potentials by the Use of Radium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1913, vol. 88, pp. 471–476. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1913.0045>.
- [2] Ehrenberg W., Lang C., West R. The Electron Voltaic Effect. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 1951, vol. 64, number 4, Article number 424. DOI: <https://doi.org/10.1088/0370-1298/64/4/109>.
- [3] Rappaport P. The Electron-Voltaic Effect in p-n Junctions Induced by Beta-Particle Bombardment. *Phys. Rev*, 1954, vol. 93, issue 1, Article number 246. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.93.246.2>.
- [4] Spencer M.G., Alam T. High power direct energy conversion by nuclear batteries. *Applied Physics Reviews*, 2019, vol. 6, Article number 031305. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5123163>.
- [5] Zhou Chunlin, Zhang Jinsong, Wang Xu, Yang Yushu, Xu Pan, Li Peixian, Zhang Lu, Chen Zhiyuan, Feng Huanran, Wu Weiwei. Review—Betavoltaic Cell: The Past, Present, and Future. *ECS Journal of Solid State Science and Technology*, 2021, vol. 10, number 2, Article number 027005. DOI: <https://doi.org/10.1149/2162-8777/abe423>.
- [6] Naseem M.B., Kim H.S., Lee J., Kim C.H., In S.-I. Betavoltaic Nuclear Battery: A Review of Recent Progress and Challenges as an Alternative Energy Source. *The Journal of Physical Chemistry C*, 2023, vol. 127, issue 16, pp. 7565–7579. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.3c00684>.
- [7] Ho Wan, Chow Yi, Nakamura Shuji, Peretti Jacques, Weisbuch Claude, Speck James. Measurement of minority carrier diffusion length in p-GaN using electron emission spectroscopy (EES). *Applied Physics Letters*, 2023, vol. 122, Article number 212103. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0150029>.
- [8] Chepurnov V.I., Dolgoplov M.V., Gurskaya A.V., Latukhina N.V. Method for producing a porous layer of a silicon carbide heterostructure on a silicon substrate. Patent for an invention RU 2 653 398 C2, 08.05.2018. Application № 2016129598 dated 19.07.2016. Available at: https://yandex.ru/patents/doc/RU2653398C2_20180508. (In Russ.)
- [9] Kuznetsova A., Chepurnov V., Dolgoplov M., Gurskaya A., Kuznetsov O., Mashnin A., Radenko V., Radenko A., Surnin O., Zanin G. Betavoltaic device in por-SiC/Si C-Nuclear Energy Converter. *EPJ Web of Conferences*, 2017, vol. 158, Article number 06004. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715806004>.
- [10] Chepurnov V.I., Puzyrnaya G.V., Gurskaya A.V., Dolgoplov M.V., Anisimov N.S. Experimental investigation of semiconductor structures of the power source based on carbon-14. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 55–67. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.55-67>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ousjkw>. (In Russ.)
- [11] Roccaforte F., Giannazzo F., Raineri V. Nanoscale transport properties at silicon carbide interfaces. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, vol. 43, no. 22, Article number 223001. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/43/22/223001>.
- [12] Protasov D.Y., Malin T.V., Tikhonov A.V. et al. Electron scattering in AlGaIn/GaN heterostructures with a two-dimensional electron gas. *Semiconductors*, 2013, vol. 47, pp. 33–44. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063782613010181>. (In English; original in Russian)
- [13] Reyhan Kavak Yuruk, Hayriye Tutunculer. Theoretical Investigation of High-Efficiency GaN-Si Heterojunction Betavoltaic Battery. *Canadian Journal of Physics*, 2019, vol. 97, issue 9, pp. 1031–1038. DOI: <https://doi.org/10.1139/cjp-2018-0579>.

- [14] Demeter T., Athanassios A. Tsekouras. The electron affinity of gallium nitride (GaN) and digallium nitride (GaNGa): The importance of the basis set superposition error in strongly bound systems. *The Journal of Chemical Physics*, 2008, vol. 128, Article number 144103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2883997>.
- [15] Wang Y., Lu J., Zheng R., Li X., Liu Y., Zhang X., Zhang Y., Chen Z. Theoretical study of a high-efficiency GaP–Si heterojunction betavoltaic cell compared with metal–Si Schottky barrier betavoltaic cell. *AIP Advances*, 2021, vol. 11, Article number 065110. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0053917>.
- [16] Willardson R.K., Weber E.R. SiC Materials and Devices. London, UK: Elsevier Science, 1998, 420 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=bYms_kigMX8C&hl=en&redir_esc=y.
- [17] Lin Z. Simulation and Optimization Design of SiC-Based PN Betavoltaic Microbattery Using Tritium Source. *Crystals*, 2020, vol. 10, issue 2, Article number 105. DOI: <https://doi.org/10.3390/cryst10020105>.
- [18] Bouzid F., Pezzimenti F., Dehimi L. Modelling and performance analysis of a GaN-based n/p junction betavoltaic cell. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2020, vol. 969, Article number 164103. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2020.164103>.
- [19] Dolgoplov M.V., Elisov M.V., Rajapov S.A., Chipura A.S. Scaling Models of Electrical Properties of Photo and Beta-Converters with Nano-Heterojunctions. *Computational Nanotechnology*, 2023, vol. 10, issue 1, pp. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2023-10-1-138-146>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wkekac>. (In Russ.)
- [20] Chepurnov V.I., Rajapov S.A., Dolgoplov M.V., Puzyrnaya G.V., Gurskaya A.V. Efficiency determination problems for SiC*/Si microstructures and contact formation. *Computational Nanotechnology*, 2021, vol. 8, no. 3, pp. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.33693/2313-223X-2021-8-3-59-68>. EDN: <https://www.elibrary.ru/eybfqt>. (In Russ.)
- [21] Gurskaya A.V., Dolgoplov M.V., Chepurnov V.I. [et al.]. Contacts for SiC Nano-Microwatt Energy Converters // *Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 3 Fizika Astronomiya*, 2023, vol. 78, issue 1, article number 2310103. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027134923010149>.
- [22] Rahmani F., Khosravinia H. Optimization of silicon parameters as a betavoltaic battery: Comparison of Si *p-n* and Ni/Si schottky barrier // *Radiation Physics and Chemistry*. 2016. № 125. Pp. 205–212. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.radphyschem.2016.04.012>.
- [23] Dolgoplov V.V., Chepurnov V.I., Chipura A.S. [et al.]. Scaling and activation of nanoheterojunctions on silicon and silicon carbide substrates // In Proceedings of the International Conference “Fundamental and Applied Problems of Modern Physics”. 2023. Section II. P. 88–92. <https://elibrary.ru/item.asp?id=54922680>

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <https://journals.ssau.ru/est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимает редколлегия журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются через сайт <https://journals.ssau.ru/est>.
2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.
3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.
4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.
5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.
6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.
7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.
8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\text{\LaTeX}$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стил `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций $\text{\TeX}$ крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\text{\LaTeX}$. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.
9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:
 - а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("--")¹, тройной дефис ("---")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;
 - б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;
 - в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;
 - г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;
 - д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала