



**САМАРСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва



ISSN 2541-7525 Print
ISSN 2712-8954 Online

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ
СЕРИЯ**

VESTNIK

OF SAMARA UNIVERSITY

**NATURAL SCIENCE
SERIES**

ТОМ 28 • №1-2 • 2022 ГОД

Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

**ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ**

- Математика
- Механика
- Математическое моделирование
- Математические методы в естественных науках
- Физика

ТОМ 28 • № 1-2 • 2022 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ ЖУРНАЛА

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНТИ ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ

Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. —

«Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

2022 Т. 28 № 1–2

Главный редактор:

Е.В. Шахматов, член-корреспондент РАН, д-р тех. наук, проф., научный руководитель Самарского университета, главный научный сотрудник института акустики машин, зав. кафедрой автоматических систем энергетических установок (Самара, Самарский университет, РФ)

Заместители главного редактора:

А.Ф. Крутов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики, зам. директора Межвузовского научно-исследовательского центра по теоретическому материаловедению (Самара, Самарский университет, РФ)

С.В. Асташкин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа и теории функций (Самара, Самарский университет, РФ)

Л.В. Степанова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф. кафедры математического моделирования в механике (Самара, Самарский университет, РФ)

Ответственный секретарь:

М.А. Лихобабенко, канд. физ.-мат. наук

Лит. редактирование, корректура

Т.И. Кузнецовой

Компьютерная верстка, макет

М.А. Лихобабенко

Выпускающий редактор

Т.А. Мурзинова

Информация на английском языке

М.С. Стрельникова

Издатель: Самарский университет

Адрес издателя:

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34, корп. 22а, 312 б.

Центр периодических изданий Самарского университета

Адрес редакции: 443011, Российская

Федерация, Самарская обл., г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: nsvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Свидетельство о регистрации средства массовой информации **ПИ № ФС 77-67328** от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в Объединенном

каталоге «Пресса России» 80307

ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

0+

Цена свободная

Подписано в печать 26.12.2022. Выход в свет 30.12.2022

Формат 60 × 84/8.

Бумага офсетная. Печать оперативная.

Печ. л. 17,25.

Тираж 200 экз. (первый завод — 28 экз.). Заказ №

Отпечатано в типографии Самарского университета

443086, Российская Федерация, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, 34.

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Редакционная коллегия:

В.Э. Видельман, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной механики и конструкционного материаловедения, директор Центра экспериментальной механики (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, РФ)

А.В. Горохов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры общей и теоретической физики (Самарский университет, Самара, РФ)

А.М. Зюзин, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой экспериментальной физики (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.В. Иважник, д-р физ.-мат. наук, проф., декан физического факультета, зав. кафедрой оптики и спектроскопии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.И. Кожанов, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций (Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

М.А. Леган, д-р тех. наук, доц., проф. кафедры прочности летательных аппаратов (Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, РФ)

Константин Панкрашкин, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры математики (Университет Париж-юг 11, Орсе, Франция)

А.Н. Панов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой алгебры и геометрии (Самарский университет, Самара, РФ)

А.В. Покоев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики твердого тела и неравновесных систем (Самарский университет, Самара, РФ)

Давиде М. Прозертио, д-р химии, проф. кафедры химии (Миланский университет, Милан, Италия)

Л.С. Пулькина, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры дифференциальных уравнений и теории управления (Самарский университет, Самара, РФ)

С.Г. Пятков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики; ведущий научный сотрудник (Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, РФ; Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, РФ)

В.В. Ревин, д-р биол. наук, проф., декан факультета биотехнологии и биологии, зав. кафедрой биотехнологии, биоинженерии и биохимии (Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск, РФ)

В.А. Салеев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры физики (Самарский университет, Самара, РФ)

В.А. Соболев, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, профессор кафедры кибернетики (Самарский университет, Самара, РФ)

П.А. Терехин, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры теории функций и стохастического анализа (Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, РФ)

А.И. Хромов, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры прикладной математики и информатики (Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Комсомольск-на-Амуре, РФ)

© Самарский университет, 2022

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

**VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES**

- *Mathematics*
- *Mechanics*
- *Mathematical
Modelling*
- *Mathematical
Methods
in Natural
Sciences*
- *Physics*

VOL. 28 • № 1-2 • 2022

JOURNAL FOUNDER AND PUBLISHER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI ULRICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet
All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation

The journal is published since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 —
Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Chief editor:

E.V. Shakhmatov, corresponding member of the RAS, Dr. of Science (Engineering), prof., scientific adviser of Samara National Research University, chief researcher of Machine Acoustics Institute, head of Department of Power Plant Automatic Systems (Samara, Samara National Research University, RF)

Deputy chief editors:

A.F. Krutov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., professor of Department of General and Theoretical Physics, deputy director of Samara Center for Theoretical Materials Science (Samara, Samara National Research University, RF)

S.V. Astashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the Department of Functional Analysis and Function Theory (Samara, Samara National Research University, RF)

L.V. Stepanova, Dr. of Phys.-Math. Sci., associate prof., prof. of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics (Samara, Samara National Research University, Russian Federation)

Executive editor:

M.A. Likhobabenko, Cand. of Phys.-Math. Sci.

Literary editing, proofreading

T.I. Kuznetsova

Computer makeup, dummy

M.A. Likhobabenko

Executive editor

T.A. Murzinova

Information in English

M.S. Strelnikov

Publisher: Samara National Research University

Address publisher:

312 b, building 22 a, 34, Moskovskoye shosse,
Samara, 443086, Samara region, Russian Federation.

Centre of Periodical Publications of Samara University

Address of editorial staff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011,
Samara region, Russian Federation.

E-mail: nvestnik@ssau.ru

www: <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>

Certificate of registration of means of mass media ПИ № ФС
77-67328 dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for
Supervision of Communications, Information Technology and Mass
Media.

**Subscription Index in the United catalog «Press of Russia»
80307**

ISSN 2541-7525

Author's articles do not necessarily reflect the views of the publisher.

0+

Price free

Passed for printing 26.12.2022.

Format 60 × 84/8.

Litho paper. Instant print.

Print. sheets 17,25.

Circulation 200 copies (first printing – 28 copies).

Order №

Printed on the printing house of Samara University

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Samara region, Russian
Federation

www: <http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit>

Editorial board:

V.E. Videlman, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Experimental Mechanics and Engineering Materials
Science, head of the Center of Experimental Mechanics (Perm
National Research Polytechnic University, Perm, RF)

A.V. Gorokhov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of General and Theoretical Physics (Samara National
Research University, Samara, RF)

A.M. Zyuzin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Experimental Physics (Ogarev Mordovia National
University, Saransk, RF)

V.V. Ivakhnik, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., dean of the Faculty
of Physics, head of the Department of Optics and Spectroscopy
(Samara National Research University, Samara, RF)

A.I. Kozhanov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., leading research
worker of the Laboratory of the Theory of Functions (Sobolev
Institute of Mathematics of the Siberian branch of the RAS,
Novosibirsk, RF)

M.A. Legan, Dr. of Engineering Sci., associate prof., prof. of the
Department of Strength of Flying Machines (Novosibirsk State
Technical University, Novosibirsk, RF)

Konstantin Pankrashkin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof. of the
Department of Mathematics (University of Paris-Sud 11, Orsay,
France)

A.N. Panov, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the
Department of Algebra and Geometry (Samara National Research
University, Samara, RF)

A.V. Pokoev, Dr. of Phys.-Math. Sci., professor, head of the
Department of Solid-State Physics and Nonequilibrium Systems
(Samara National Research University, Samara, RF)

Davide M. Proserpio, Dr. of Chemistry, prof. of the Department
of Chemistry (University of Milan, Milan, Italy)

L.S. Pulkina, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Differential Equations and Control Theory (Samara
National University, Samara, RF)

S.G. Pyatkov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Higher Mathematics; leading research worker (Yugra
State University, Khanty-Mansiysk, RF; Sobolev Institute of
Mathematics of the Siberian branch of the RAS, Novosibirsk, RF)

V.V. Revin, Dr. Degree in Biology, prof., dean of the Faculty
of Biotechnology and Biology, head of the Department of
Biotechnology, Bioengineering and Biochemistry (Ogarev Mordovia
National Research University, Saransk, RF)

V.A. Saleev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the Department
of Physics (Samara National Research University, Samara, RF)

V.A. Sobolev, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., head of the
Department of Differential Equations and Control Theory, prof.
of the Department of Engineering Cybernetics (Samara National
Research University, Samara, RF)

P.A. Terekhin, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Function Theory and Stochastic Analysis (Saratov
State University, Saratov, RF)

A.I. Khromov, Dr. of Phys.-Math. Sci., prof., prof. of the
Department of Applied Mathematics and Informatics (Komsomolsk-
na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, RF)

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Свистула М.Г., Срибная Т.А. Свойства мер на "устойчивых" булевых алгебрах	7
Страхов С.И. Как расстояние между подпространствами в метрике сферического раствора влияет на геометрическую структуру симметричного пространства	23
Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 8. Движение летательного аппарата и алгоритмы его диагностирования	32

Механика

Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть I	46
Лычева Т.Н., Лычев С.А. Эволюция поля распределенных дефектов в кристалле при контактном взаимодействии с системой жестких штампов	55

Математическое моделирование

Сюракшин А.В., Салеев В.А., Юшанхай В.Ю. Квантовые модели в биологии	74
---	-----------

Математические методы в естественных науках

Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа — Каммингса	95
Porfiriev D.P., Zavershinskii I.P., Agapova D.V. The structure of the swirling flow in the counterflow vortex reactor	106
Riashchikov D.S., Pomelnikov I.A., Molevich N.E. Growth time of acoustic perturbations in isentropically unstable heat-releasing medium	113

Физика

Agapova D.V., Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I. Fast and slow MHD waves in thermally active plasma slab	120
Ануфриев А.В., Салеев В.А. Рождение η_c с распадом в два фотона в обобщенной партонной модели при энергии коллайдера NICA	128

Требования к оформлению статей	137
---	------------

CONTENTS

Mathematics

Svistula M.G., Sribnaya T.A. Properties of measures on "stable" boolean algebras.....	7
Strakhov S.I. How the distance between subspaces in the metric of a spherical opening affects the geometric structure of a symmetric space	23
Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 8. Aircraft movement and algorithms for its diagnosis.....	32

Mechanics

Velikanov P.G., Artyukhin Y.P. General theory of orthotropic shells. Part I.....	46
Lycheva T.N., Lychev S.A. Evolution of the field of distributed defects in a crystal during contact interaction with a system of rigid stamps.....	55

Mathematical Modelling

Syurakshin A.V., Saleev V.A., Yushankhai V.Yu. Quantum models in biology	74
---	----

Mathematical Methods in Natural Sciences

Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of the three-qubits Tavis — Cummings model	95
Porfiriev D.P., Zavershinskii I.P., Agapova D.V. The structure of the swirling flow in the counterflow vortex reactor.....	106
Riashchikov D.S., Pomelnikov I.A., Molevich N.E. Growth time of acoustic perturbations in isentropically unstable heat-releasing medium	113

Physics

Agapova D.V., Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I. Fast and slow MHD waves in thermally active plasma slab.....	120
Anufriev A.V., Saleev V.A. Production of η_c with two-photon decay in the GPM at the energies of NICA collider	128
<i>Requirements to the design of articles</i>	137

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22

УДК 517.987

Дата: поступления статьи: 03.05.2022
после рецензирования: 14.06.2022
принятия статьи: 14.11.2022

М.Г. Свистула

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: marinasvistula@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2444-5605>

Т.А. Срибная

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: sribnayata@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1197-5650>

СВОЙСТВА МЕР НА "УСТОЙЧИВЫХ" БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

АННОТАЦИЯ

Изучаются свойства конечно-аддитивных мер со значениями в топологической абелевой группе и определенных на широком классе булевых алгебр, содержащем алгебры с SIP и алгебры Γ_ν (при определенных условиях на ν). Найдены достаточные условия для равномерной строгой непрерывности последовательностей таких мер. Новизна — в отсутствии требования равномерной исчерпываемости и в "ряде теорем" даже исчерпываемости мер. Даны приложения к слабой сходимости мер.

Ключевые слова: булева алгебра; топологическая абелева группа; строго непрерывная мера; исчерпывающая мера; равномерная исчерпываемость семейства мер; равномерная ограниченность семейства мер; слабая сходимость мер.

Цитирование. Свистула М.Г., Срибная Т.А. Свойства мер на "устойчивых" булевых алгебрах // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 7–22. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Свистула М.Г., Срибная Т.А., 2022

Марина Геннадьевна Свистула — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Татьяна Аркадьевна Срибная — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Для конечно-аддитивных мер аналогом неатомичности выступает строгая непрерывность. Известен ряд интересных результатов в различных направлениях для конечно-аддитивных мер, обладающих одновременно строгой непрерывностью и исчерпываемостью, см., например, [1–4]. Легко заметить, что строго непрерывная конечно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$, где $\mathcal{A}$ — булева алгебра и G — топологическая абелева группа с квазинормой, является ограниченной. Если при этом G является, например, банаховым пространством, не содержащим c_0 , то μ необходимо будет исчерпывающей [5, гл. I, § 4, теорема 2]. Следующий пример показывает, что также существуют строго непрерывные конечно-аддитивные меры без свойства исчерпываемости.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A}$ — σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0; +\infty)$, λ — мера Лебега, $A_n = [n-1; n)$, $n \in \mathbb{N}$. Определим конечно-аддитивную меру $\mu : \mathcal{A} \rightarrow l_\infty$, полагая $\mu(E) = \{\lambda(E \cap A_n)\}_n$, $E \in \mathcal{A}$. Очевидно, $\{A_n\}_n$ — дизъюнктивная последовательность в $\mathcal{A}$ с $\|\mu(A_n)\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, μ не является исчерпывающей. Вместе с тем μ строго непрерывна. Действительно, разобьем A_n на k дизъюнктивных промежутков $\{A_{ni}\}_{i=1}^k$ длины $1/k$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{ni}$, $i \in \overline{1; k}$. Очевидно, $\bigcup_{i=1}^k E_i = [0; +\infty)$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{A}](E_i) = 1/k$, $i \in \overline{1; k}$.

В данной статье нас прежде всего интересуют условия, при которых последовательность конечно-аддитивных мер будет равномерно строго непрерывной. При этом, в отличие от работы [2], мы стремимся отказаться от требования равномерной исчерпываемости последовательности мер и даже от исчерпываемости самих мер (см. раздел 2), что оправдано примерами 1 и 2. Вместе с тем пришлось наложить дополнительные условия на алгебры, выступающие в качестве областей определения мер. Это привело нас к понятию $\mathcal{ERD}$ -устойчивых алгебр (см. определение 2). "Устойчивые" алгебры представляют собой широкий класс, который содержит, например, алгебры с SIP^1 и алгебры Γ_ν (при определенных условиях на ν). Рассмотрение "устойчивых" алгебр оказалось продуктивным не только в связи с равномерной строгой непрерывностью мер, но и в связи с равномерной ограниченностью мер (см. раздел 6).

1. Основные определения и предварительные сведения

Далее всюду $\mathcal{A}$ — булева алгебра с единицей e и нулем o . Семейство элементов $\{a_t\}_{t \in T} \subset \mathcal{A}$ называем дизъюнктивным, если $a_i \wedge a_j = o$ при $i \neq j$.

Определение 1. Последовательность $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$, где $\mathcal{E}_n = \{e_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \mathcal{A}$ и $\bigvee_{i=1}^{k_n} e_i^n = e$, будем называть системой в $\mathcal{A}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$, пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ — некоторые классы элементов $\mathcal{A}$. Алгебру $\mathcal{A}$ назовем $\mathcal{ERD}$ -устойчивой при выполнении следующего условия: если $\{b_n\}_n$ такая дизъюнктивная последовательность в $\mathcal{R}$, что если для любого n существует $e_i^n \in \mathcal{E}_n$ такое что $b_k \leq e_i^n$ при всех $k \geq n$, то для любого бесконечного множества $M \subset \mathbb{N}$ существуют элемент $d \in \mathcal{D}$ и бесконечное множество $P \subset M$, для которых $b_k \leq d$ при всех $k \in P$ и $b_k \wedge d = o$ для всех $k \in \mathbb{N} \setminus P$.

Алгебру $\mathcal{A}$, обладающую SIP [6], можно рассматривать как $\mathcal{ERD}$ -устойчивую, где $\mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_n = \{e\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее будем рассматривать функции, определенные на $\mathcal{A}$, со значениями в топологической абелевой группе G ; буквами V , U , W обозначаем симметричные окрестности нуля в G ; полагаем $nU = \underbrace{U + \dots + U}_n$.

Функцию $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ называем:

– конечно-аддитивной мерой, если $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ для любой пары дизъюнктивных элементов a и b из $\mathcal{A}$;

– счетно-аддитивной мерой, если $\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n)$ для любой дизъюнктивной последовательности $\{a_n\}_n$ из $\mathcal{A}$ с $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{A}$.

Всюду в дальнейшем считаем все рассматриваемые функции из $\mathcal{A}$ в G как минимум конечно-аддитивными мерами.

Определение 3. Пусть $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ и $\mathcal{F}$ — некоторый класс элементов $\mathcal{A}$, содержащий o . Для элемента $a \in \mathcal{A}$ полагаем

$$\tilde{\mu}[\mathcal{F}](a) = \{\mu(b) : a \geq b \in \mathcal{F}\}.$$

Если G — таг с квазинормой $|\cdot|$, то полагаем

$$\tilde{\mu}[\mathcal{F}](a) = \sup\{|\mu(b)| : a \geq b \in \mathcal{F}\}.$$

Под квазинормой понимаем функционал $|\cdot| : G \rightarrow [0; +\infty)$, где $|O_G| = 0$, $|-x| = |x|$ и $|x+y| \leq |x| + |y|$ для любых $x, y \in G$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ — некоторые классы элементов $\mathcal{A}$, причем $o \in \mathcal{R} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Функцию $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ назовем $\mathcal{RD}$ -монотонной, если для любой окрестности U существует такая окрестность $W \subset U$, что если $r \in \mathcal{R}$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{R}](r) \subset W$, то $\tilde{\mu}[\mathcal{D}](r) \subset U$.

Ясно, что это свойство выполняется, если $\mathcal{R} = \mathcal{D}$ или, например, если μ неотрицательная и монотонная на $\mathcal{D}$.

¹Subsequential Interpolation Property

Определение 5. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторый класс элементов $\mathcal{A}$, содержащий o . Семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$ называем равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывным на элементе $r \in \mathcal{R}$, если для любой окрестности U существует дизъюнктивный набор $\{r_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee_{i=1}^n r_i = r$ и $\tilde{\mu}_t[\mathcal{R}](r_i) \subset U$ для всех $i \in \overline{1; n}$ и $t \in T$.

Если приведенное условие выполняется для любого элемента $r \in \mathcal{R}^2$, то семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$ называем равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывным. Если речь идет об одной функции, то в определениях опускаем слово "равномерно". Заметим, что выражение " μ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна" означает то же, что и часто используемое в литературе " μ строго непрерывна"³.

Очевидно, что если G — хаусдорфова таг и $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна, то μ неатомическая (т. е. для любого $a \in \mathcal{A}$ с $\mu(a) \neq 0$ существует элемент $b \in \mathcal{A}$ такой что $b \leq a$ и $0 \neq \mu(b) \neq \mu(a)$). Если же $\mathcal{A}$ — σ -алгебра и μ — счетно-аддитивная мера со свойством (C) (т. е. любое дизъюнктивное семейство элементов ненулевой меры не более чем счетно, например, когда G — линейное нормированное пространство), то верно и обратное утверждение [7, предложение 2].

Всюду в дальнейшем X — хаусдорфово топологическое пространство, $\tau(X)$ и $\mathcal{C}(X)$ — классы его открытых и замкнутых подмножеств, $\mathcal{B}(X)$ — борелевская σ -алгебра X (можем опускать обозначение пространства, если это не вызывает недоразумений). Напомним, что $\mu : \mathcal{B} \rightarrow G$ называется регулярной, если для любого множества $E \in \mathcal{B}$ и любой окрестности U в G существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset E$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](E \setminus C) \subset U$. Если C можно выбрать компактным, то μ называют радоновой. Говорят, что μ диффузная, если $\mu(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$. Нетрудно показать, что для счетно-аддитивной меры $\mu : \mathcal{B} \rightarrow G$, регулярной, если X со счетной базой, или радоновой в общем случае, условия диффузности, неатомичности и строгой $\mathcal{B}$ -непрерывности эквивалентны (при условии, что таг G хаусдорфова).

Говорим, что последовательность $\{\mu_n\}_n$, $\mu_n : \mathcal{D} \rightarrow G$, поточечно фундаментальна (поточечно сходится) на классе $\mathcal{D}$, если для любого элемента $a \in \mathcal{D}$ последовательность $\{\mu_n(a)\}_n$ фундаментальна (соответственно, сходится) в G .

Семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$ называют равномерно исчерпывающим (равномерно непрерывным сверху в нуле) на $\mathcal{A}$, если для любой дизъюнктивной последовательности $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ (для любой $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ с $a_n \searrow o$) имеем: для любой окрестности U найдется k такое, что $\mu_t(a_n) \in U$ для всех $n > k$ и $t \in T$. В случае одной функции в этих определениях опускаем слово "равномерно".

Далее ограниченные множества будем рассматривать только в таг с квазинормой и понимать под ограниченностью ограниченность по квазинорме.

Семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$, называем поточечно ограниченным на $\mathcal{A}$, если для любого $a \in \mathcal{A}$ множество $\{\mu_t(a) : t \in T\}$ ограничено; называем равномерно ограниченным на $\mathcal{A}$, если множество $\{\mu_t(a) : a \in \mathcal{A}, t \in T\}$ ограничено.

Приведем некоторые известные факты⁴ (напомним, что всюду как минимум $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ — конечно-аддитивная мера, $\mathcal{A}$ — булева алгебра, G — таг и, если речь идет об ограниченности, то с квазинормой).

(R1) Если $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ исчерпывающая, то она ограниченная. Для $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ верно и обратное утверждение.

(R2) Непрерывная сверху в нуле $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ счетно-аддитивна.

(R3) Если $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ — счетно-аддитивная мера, то она непрерывна сверху в нуле, если при этом $\mathcal{A}$ — σ -алгебра, то μ будет также исчерпывающей.

(R4) Пусть $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$ исчерпывающие и $\mathcal{A}$ — σ -алгебра; тогда если семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$ поточечно ограничено, то оно равномерно ограничено.

(R5) Пусть семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$, равномерно исчерпывающее. Тогда для любых дизъюнктивной последовательности $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ и окрестности U существует такое n_0 , что для любого k имеем $\tilde{\mu}_t[\mathcal{A}](\bigvee_{n=n_0}^{n_0+k} a_n) \subset U$ сразу для всех $t \in T$. Если к тому же μ_t непрерывны сверху в нуле, то для любой последовательности $\{a_n\}_n \subset \mathcal{A}$ с $a_n \searrow o$ имеем $\tilde{\mu}_t[\mathcal{A}](a_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in T$.

(R6) Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow G$ исчерпывающие и $\mathcal{A}$ — σ -алгебра; тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна, то она равномерно исчерпывающая. Если к тому же μ_n непрерывны сверху в нуле, то (в силу (R5)) последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно непрерывна сверху в нуле.

²Если $\mathcal{R}$ — алгебра, то для этого, очевидно, достаточно выполнения приведенного условия на элементе e .

³В [2] такую функцию также называли обладающей свойством Сакса.

⁴(R2) и (R3) очевидны, доказательства (R1), (R4) и (R6) можно найти, например, в [8, гл. 1, § 8; гл. 2, § 5, теорема 1], (R5) и (R7) см. в [9, гл. 4, теоремы 3.1 и 2.2]. Поскольку топология в таг порождается семейством квазинорм, результаты, приведенные в этих работах для таг с квазинормой, легко перенести на случай произвольной таг (см. [8, гл. 2, §6]); на булеву алгебру с алгебры множеств эти результаты также легко перенести либо фактически повторяя доказательства, либо используя теорему Стоуна о реализации булевой алгебры. Существует много обобщений приведенных результатов, здесь даны только необходимые нам для ссылок.

(R7) Пусть семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$, $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$, сконденсировано на алгебре $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ (то есть для любых элемента $a \in \mathcal{A}$, окрестности U и набора $\{\mu_{t_i}\}_{i=1}^n$ существует элемент $r \in \mathcal{R}$ такой, что $\tilde{\mu}_{t_i}[\mathcal{A}](a \triangle r) \subset U$ для всех $i \in \overline{1; n}$). Тогда из равномерной исчерпываемости семейства $\{\mu_t\}_{t \in T}$ на $\mathcal{R}$ следует его равномерная исчерпываемость на $\mathcal{A}$.

2. Основные результаты о равномерной строгой непрерывности мер

Теорема 1. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow G$ — конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{ERD}$ -устойчивой и выполняются следующие условия: (а) $\mathcal{R}$ — некоторая подалгебра $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$; (б) если $r \in \mathcal{R}$ и $d \in \mathcal{D}$, то $r \wedge d \in \mathcal{D}^5$; (в) $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{R}$. Далее, пусть каждая μ_n строго $\mathcal{R}$ -непрерывна и $\mathcal{RD}$ -монотонна.

Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на $\mathcal{D}$, то она равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывна.

Доказательство. Зафиксируем некоторую окрестность U в G . Положим $V = 5U$. В процессе доказательства будем использовать следующее рабочее определение: элемент $r \in \mathcal{R}$ обладает свойством $(*)$, если для любого дизъюнктного набора $\{r_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee_{i=1}^n r_i = r$ найдутся такие μ_n и r_i , что $\tilde{\mu}_n[\mathcal{R}](r_i) \notin V$.

Легко заметить, что если $r \in \mathcal{R}$ обладает свойством $(*)$, то в любом наборе $\{p_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee_{i=1}^k p_i = r$ найдется элемент p_i , тоже обладающий этим свойством.

Предположим, что элемент e обладает свойством $(*)$. Тогда некоторый элемент семейства $\{e_i^1 \wedge e_j^2, i \in \overline{1; k_1}, j \in \overline{1; k_2}\}$ тоже обладает этим свойством. Обозначим его a_1 . Заметим, что $a_1 \in \mathcal{R}$, и в каждом из наборов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ найдутся элементы, мажорирующие a_1 .

Поскольку a_1 обладает свойством $(*)$, то существуют функция μ_{n_1} и элемент $c \in \mathcal{R}$ такие, что $c \leq a_1$ и $\mu_{n_1}(c) \notin 4U$. Положим $\nu_1 = \mu_{n_1}$.

Так как функция ν_1 является $\mathcal{RD}$ -монотонной, то найдется такая окрестность $W \subset U$, что если $b \in \mathcal{R}$ и $\tilde{\nu}_1[\mathcal{R}](b) \subset W$, то $\tilde{\nu}_1[\mathcal{D}](b) \subset U$.

Поскольку функция ν_1 строго $\mathcal{R}$ -непрерывна, то существует дизъюнктный набор $\{r_1, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_n\} \subset \mathcal{R}$ такой, что $\bigvee_{i=1}^k r_i = c$, $\bigvee_{i=k+1}^n r_i = a_1 \setminus c$ и $\tilde{\nu}_1[\mathcal{R}](r_i) \subset W$ для всех $i \in \overline{1; n}$.

Так как a_1 обладает свойством $(*)$, то в указанном наборе найдется элемент r_l , тоже обладающий этим свойством. Обозначим его q . Очевидно, $\tilde{\nu}_1[\mathcal{D}](q) \subset U$. Если оказалось, что $q \leq c$, то полагаем $b_1 = c \setminus q$; если же $q \leq a_1 \setminus c$, то полагаем $b_1 = c$. В любом случае $\nu_1(b_1) \notin 3U$ и q обладает свойством $(*)$.

Очевидно, среди элементов семейства $\{q \wedge e_i^3 \wedge e_j^4, i \in \overline{1; k_3}, j \in \overline{1; k_4}\}$ найдется элемент, обладающий свойством $(*)$. Обозначим его a_2 . $\triangle$

Итак, имеем следующее:

$a_1, a_2, b_1 \in \mathcal{R}$, $a_1 \geq a_2$, $b_1 \leq a_1 \setminus a_2$, элемент a_1 мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_1$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_2$, элемент a_2 мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_3$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_4$;
 $\nu_1 = \mu_{n_1}$, $\nu_1(b_1) \notin 3U$, $\tilde{\nu}_1[\mathcal{D}](a_2) \subset U$;
 элемент a_2 обладает свойством $(*)$.

Рассмотрим a_2 вместо a_1 и т. д. Допустим, что на m -м шаге получили элементы $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, b_1, \dots, b_m \in \mathcal{R}$ и функции $\nu_1 = \mu_{n_1}$, $\nu_i = \mu_{n_i} - \mu_{n'_i}$, где $i \in \overline{2; m}$, $n_1 < n'_2 < n_2 < \dots < n'_m < n_m$ такие, что:

- для всех $i \in \overline{1; m}$ справедливы неравенства
- (C1) $a_i \geq a_{i+1}$, $b_i \leq a_i \setminus a_{i+1}$;
- для всех $i \in \overline{1; m+1}$
- (C2) a_i мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i-1}$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i}$;
- для всех $i \in \overline{2; m}$ выполняется
- (C3) $\nu_i(\bigvee_{j \in J} b_j) \in U$, где $J \subset \overline{1; i-1}$;
- для всех $i \in \overline{1; m}$ выполняется
- (C4) $\nu_i(b_i) \notin 3U$;
- для всех $i \in \overline{1; m}$ справедливо включение
- (C5) $\tilde{\nu}_i[\mathcal{D}](a_{i+1}) \subset U$;
- (C6) элемент a_{m+1} обладает свойством $(*)$.

⁵Отсюда будет следовать, что если $r \in \mathcal{R}$ и $d \in \mathcal{D}$, то $d \setminus r \in \mathcal{D}$.

Сделаем $(m+1)$ -й шаг. В силу поточечной фундаментальности последовательности $\{\mu_n\}_n$ на $\mathcal{D}$ (тем более на $\mathcal{R}$), существует такой номер $n'_{m+1} > n_m$, что если $p > n'_{m+1}$ и $J \subset \overline{1; m}$, то

$$(\mu_p - \mu_{n'_{m+1}})(\bigvee_{j \in J} b_j) \in U.$$

Теперь докажем, что найдутся номер $n_{m+1} > n'_{m+1}$ и элемент $c \in \mathcal{R}$ такие, что $c \leq a_{m+1}$ и

$$(\mu_{n_{m+1}} - \mu_{n'_{m+1}})(c) \notin 4U.$$

Из определения 5 очевидно, что конечное семейство строго $\mathcal{R}$ -непрерывных функций будет равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывным. Значит, существует дизъюнктивный набор $\{r_1, \dots, r_k\} \subset \mathcal{R}$ с $\bigvee_{i=1}^k r_i = a_{m+1}$ и $\tilde{\mu}_j[\mathcal{R}](r_i) \subset U$ для всех $i \in \overline{1; k}$ и $j \in \overline{1; n_{m+1}}$. Предположим, что не существует искомого номера n_{m+1} и элемента c . Тогда если $p > n'_{m+1}$, $a \in \mathcal{R}$ и $a \leq r_i$, где $i \in \overline{1; k}$, то

$$\mu_p(a) = (\mu_p - \mu_{n'_{m+1}})(a) + \mu_{n'_{m+1}}(a) \in 4U + U = V.$$

Получили противоречие тому, что элемент a_{m+1} обладает свойством (*).

Положим $\nu_{m+1} = \mu_{n_{m+1}} - \mu_{n'_{m+1}}$. Итак, $\nu_{m+1}(c) \notin 4U$.

Теперь дословно повторим текст, окруженный знаками ∇ и Δ , заменяя соответственно $a_1, \nu_1, b_1, e_i^3, e_j^4, k_3, k_4, a_2$ на $a_{m+1}, \nu_{m+1}, b_{m+1}, e_i^{2m+1}, e_j^{2m+2}, k_{2m+1}, k_{2m+2}, a_{m+2}$.

Продолжив процесс до бесконечности, получим убывающую последовательность $\{a_i\}_i$ и дизъюнктивную последовательность $\{b_i\}_i$ в $\mathcal{R}$, а также последовательность функций $\{\nu_i\}_i$ такие, что выполняются условия (C1)–(C5) и $\nu_1 = \mu_{n_1}$, $\nu_i = \mu_{n_i} - \mu_{n'_i}$, где $i \in \overline{2; \infty}$ и $n_1 < n'_2 < n_2 < \dots < n'_i < n_i < \dots$.

$\nabla \nabla$ Положим $h_i = (a_i \setminus a_{i+1}) \setminus b_i$, $i \in \overline{1; \infty}$. Рассмотрим дизъюнктивную последовательность $(b_1, h_1, \dots, b_i, h_i, \dots)$ в $\mathcal{R}$. Все ее элементы, начиная с n -го по счету, мажорируются некоторым элементом из $\mathcal{E}_n$.

По определению 2 найдутся элемент $d \in \mathcal{D}$ и подпоследовательность $\{b_{i_p}\}_{p=1}^\infty$ такие, что $b_{i_p} \leq d$ для всех $p \in \mathbb{N}$, $d \wedge b_j = o$ для $j \in \mathbb{N}$ и $j \neq i_p$, $d \wedge h_i = o$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Положим $z = d \wedge a_1$. Очевидно, $z \in \mathcal{D}$, $z \leq a_1$ и z обладает всеми указанными выше свойствами элемента d .

Положим $x_k = \bigvee_{p=1}^{k-1} b_{i_p}$, $y_k = z \setminus (\bigvee_{p=1}^k b_{i_p})$, $k \in \overline{2; \infty}$. Заметим, что $x_k \in \mathcal{A}$ и $y_k \in \mathcal{D}$. Имеем $z = x_k \vee b_{i_k} \vee y_k$.

Тогда

$$\nu_{i_k}(z) = \nu_{i_k}(x_k) + \nu_{i_k}(b_{i_k}) + \nu_{i_k}(y_k). \quad (2.1)$$

Далее, $y_k \leq a_1$ и y_k дизъюнктен со всеми $b_1, h_1, \dots, b_{i_k}, h_{i_k}$. Тогда $y_k \leq a_{i_k+1}$. В силу условия (C5) получаем $\nu_{i_k}(y_k) \in U$. $\Delta \Delta$

В силу условия (C3) имеем $\nu_{i_k}(x_k) \in U$. Теперь, используя условие (C4) и равенство (2.1), получаем $\nu_{i_k}(z) \notin U$ для всех $k \in \overline{2; \infty}$, что противоречит поточечной фундаментальности последовательности $\{\mu_n\}_n$ на $\mathcal{D}$.

Значит, элемент e не обладает свойством (*). В силу произвольности окрестности U последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывна на элементе e . Теорема доказана.

Полагая $\mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_n = \{e\}$, $n \in \mathbb{N}$, из теоремы 1 сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow G$ — конечно-аддитивные меры, каждая из которых строго $\mathcal{A}$ -непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ обладает SIP (например, σ -алгебра). Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на $\mathcal{A}$, то она равномерно строго $\mathcal{A}$ -непрерывна. Если к тому же $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на $\mathcal{A}$ к функции μ , то μ будет конечно-аддитивной строго $\mathcal{A}$ -непрерывной мерой.

Рассматриваемая далее алгебра множеств Γ_ν изучается подробно в разделе 3.

Теорема 3. Пусть $\mu_n : \Gamma_\nu \rightarrow G$ — конечно-аддитивные меры, каждая из которых строго Γ_ν -непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Здесь $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — регулярная строго $\mathcal{B}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера, X — нормальное пространство (например, ν — мера Лебега на прямоугольнике $X = [0; 1]^k$, $k \in \mathbb{N}$, и Γ_ν — алгебра борелевских измеримых по Жордану подмножеств X). Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν , то она равномерно строго Γ_ν -непрерывна. Если к тому же $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на Γ_ν к μ , то μ будет конечно-аддитивной строго Γ_ν -непрерывной мерой.

Доказательство. По теореме 5 алгебра Γ_ν удовлетворяет условию (4) из раздела 3. Остается применить теорему 1.

Для конечного набора $\mathcal{H} = \{E_i\}_{i=1}^n$ подмножеств некоторого метрического пространства через $\text{diam} \mathcal{H}$ обозначим наименьший из диаметров множеств E_i (диаметр пустого множества считаем равным 0).

Теорема 4. Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{A}$ — некоторые алгебры его подмножеств, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$; пусть $\mathcal{R}$ содержит некоторую систему $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ с $\text{diam} \mathcal{E}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (например, как в теореме 9, $X = [0; 1]^k$ с евклидовой метрикой, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{R}$ — алгебра конечных объединений прямоугольников из $\mathcal{B}$). Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow G$ — счетно-аддитивные меры, каждая из которых строго $\mathcal{R}$ -непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Далее, пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на классе $\mathcal{D}$, где

$$\mathcal{D} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{R}, \text{diam} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}.$$

Тогда последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывна.

Доказательство. Очевидно, условие (б) теоремы 1 выполнено.

Пусть $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ — система в $\mathcal{R}$, о которой говорится в условии теоремы 4, и $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n}$. Далее, пусть $\{F_n\}_n \subset \mathcal{R}$ и для любого n существует такое $E_i^n \in \mathcal{E}_n$, что $\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k \subset E_i^n$. Тогда $\text{diam} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_k \leq \text{diam} E_i^n \leq \text{diam} \mathcal{E}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Очевидно, $\bigcup_{n \in J} F_n \in \mathcal{D}$ для любого $J \subset \mathbb{N}$. Согласно определению 2 алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{ERD}$ -устойчивой.

Покажем, что любая счетно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ будет $\mathcal{RD}$ -монотонной. Пусть $2W \subset U$, где W и U — окрестности в G . Далее, пусть $E \in \mathcal{R}$, $\tilde{\mu}[\mathcal{R}](E) \subset W$ и $E \supset D \in \mathcal{D}$. Представим $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, где $\{R_n\}_n$ — дизъюнктивная последовательность в $\mathcal{R}$. В силу (R3) найдется k такое, что $\mu(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} R_n) \in W$. Имеем $\mu(D) = \mu(\bigcup_{n=1}^k R_n) + \mu(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} R_n) \in 2W \subset U$. Итак, $\tilde{\mu}[\mathcal{D}](E) \subset U$. Значит, каждая μ_n является $\mathcal{RD}$ -монотонной. Применим теорему 1.

Замечание 1. Теорема 4 будет верна, если вместо счетно-аддитивных мер со значениями в G рассматривать неотрицательные конечно-аддитивные меры. В этом случае доказательство остается прежним, за исключением доказательства $\mathcal{RD}$ -монотонности μ_n : она будет следовать из монотонности μ_n на $\mathcal{A}$.

3. Некоторые свойства мер на алгебре Γ_ν

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ является как минимум конечно-аддитивной мерой. Мы будем использовать такие ее очевидные свойства, как монотонность, конечная полуаддитивность (т. е. $\nu(E \cup F) \leq \nu(E) + \nu(F)$ для любых $E, F \in \mathcal{B}$), исчерываемость на $\mathcal{B}$ и свойство (C).

Определим

$$\Gamma_\nu = \{E \in \mathcal{B} : \nu(\partial E) = 0\},$$

где ∂E — граница E , т. е. $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$, где $\overline{E}$ — замыкание и E° — внутренность E .

Предложение 1. Γ_ν является подалгеброй $\mathcal{B}$, обладающей свойством (P): если $E_n, F_n \in \Gamma_\nu$, $\lim_n \nu(F_n) = 0$, $\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \subset F_n$ при $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n_m} \in \Gamma_\nu$ для любой подпоследовательности $\{E_{n_m}\}_m$.

Если, кроме того, X — нормальное пространство, то алгебра Γ_ν обладает также свойством (S): если $C \in \mathcal{C}$, $Q \in \tau$, $C \subset Q$, то существуют множества $Q_0 \in \tau \cap \Gamma_\nu$ и $C_0 \in \mathcal{C} \cap \Gamma_\nu$ такие, что $C \subset Q_0 \subset C_0 \subset Q$.

Отсюда, в частности, следует, что Γ_ν содержит базу топологии $\tau(X)$ ⁶.

Доказательство. Напомним, что для любых множеств E и F в X выполняется $\partial E = \partial(X \setminus E)$ и $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$. Теперь, используя монотонность и конечную полуаддитивность ν , легко показать, что Γ_ν является алгеброй.

Положим $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Имеем $\overline{E} = \bigcup_{i=1}^n \overline{E}_i \cup \overline{\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{E}_i \cup \overline{F}_{n+1}$ и $E^\circ \supset \bigcup_{i=1}^n E_i^\circ$. Поэтому $\partial E \subset (\bigcup_{i=1}^n \overline{E}_i \cup \overline{F}_{n+1}) \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i^\circ \subset \bigcup_{i=1}^n \partial E_i \cup \overline{F}_{n+1}$. Тогда $\nu(\partial E) \leq \nu(\overline{F}_{n+1}) = \nu(F_{n+1}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Значит, $\nu(\partial E) = 0$ и $E \in \Gamma_\nu$. Доказанное применимо к любой подпоследовательности $\{E_{n_m}\}_m$. Свойство (P) доказано.

По лемме Урысона в нормальном пространстве существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0; 1]$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in C$ и $f(x) = 1$ при $x \in X \setminus Q$. Очевидно, $\{f^{-1}(\alpha) : \alpha \in (0; 1)\}$ — дизъюнктивное семейство замкнутых множеств. Тогда множество таких $\alpha \in (0; 1)$, для которых $\nu(f^{-1}(\alpha)) \neq 0$, не более чем счетное. Значит, существует $\alpha_0 \in (0; 1)$ такое, что $\nu(f^{-1}(\alpha_0)) = 0$.

⁶Доказательство этого утверждения в случае счетно-аддитивной меры и вполне регулярного пространства содержится, например, в [10, предложение 8.2.7]

Положим $Q_0 = f^{-1}([0; \alpha_0])$ и $C_0 = \overline{Q_0}$. Ясно, что $Q_0 \in \tau$, $C_0 \in \mathcal{C}$, $C \subset Q_0 \subset C_0 \subset f^{-1}([0; \alpha_0]) \subset Q$. Далее, $\partial C_0 \subset \partial Q_0 \subset f^{-1}(\alpha_0)$. Теперь очевидно, что $Q_0, C_0 \in \Gamma_\nu$. Свойство (S) доказано.

Предложение 2. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — счетно-аддитивная мера. Пусть $\{E_n\}_n$ — дизъюнктная последовательность в Γ_ν с $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Gamma_\nu$.

Тогда если $E_n \supset P_n \in \Gamma_\nu$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \in \Gamma_\nu$.

Доказательство. Положим $F_i = \bigcup_{n=i}^{\infty} E_n$, $i \in \mathbb{N}$. Имеем $\Gamma_\nu \ni F_i \searrow \emptyset$. В силу (R3) $\lim_i \nu(F_i) = 0$.

Остается использовать свойство (P).

Предложение 3. Пусть X — нормальное пространство и $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow G$ — конечно-аддитивная регулярная мера. Тогда следующие условия эквивалентны:

(β) μ строго $\mathcal{B}$ -непрерывна;

(γ) μ строго Γ_ν -непрерывна

Доказательство. (β) $\implies$ (γ) Пусть V и W — окрестности в G и $2V \subset W$. Так как μ строго $\mathcal{B}$ -непрерывна, то существует дизъюнктный набор $\{B_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{B}$ с $\bigcup_{i=1}^n B_i = X$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](B_i) \subset V$, $i \in \overline{1; n}$.

Найдем окрестность U в G такую, что $nU \subset V$. Из конечной аддитивности и регулярности μ сразу следует существование множеств $C_i \in \mathcal{C}$ и $Q_i \in \tau$ таких, что $C_i \subset B_i \subset Q_i$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](Q_i \setminus C_i) \subset U$, $i \in \overline{1; n}$. Далее, в силу свойства (S) найдутся такие $E_i \in \Gamma_\nu$, что $C_i \subset E_i \subset Q_i$, $i \in \overline{1; n}$. Положим $E_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^n E_i$. Очевидно, $E_i \in \Gamma_\nu$ при $i \in \overline{0; n}$, $\bigcup_{i=0}^n E_i = X$, $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](E_i) \subset \tilde{\mu}[\mathcal{B}](E_i) \subset V + U \subset W$ при $i \in \overline{1; n}$ и $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](E_0) \subset \tilde{\mu}[\mathcal{B}](E_0) \subset \bigcup_{i=1}^n \tilde{\mu}[\mathcal{B}](U_i \setminus C_i) \subset nU \subset W$. Без ограничения общности можно считать, что $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

(γ) $\implies$ (β) Пусть V и W — окрестности в G и $3V \subset W$. Существует дизъюнктный набор $\{E_i\}_{i=1}^m \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup_{i=1}^m E_i = X$ и $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](E_i) \subset V$, $i \in \overline{1; m}$.

Зафиксируем $i \in \overline{1; m}$. Пусть $\mathcal{B} \ni B \subset E_i$. Так как μ регулярна, то существуют $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ такие, что $C \subset B \subset Q$ и $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](Q \setminus C) \subset V$. В силу свойства (S) найдется $E \in \Gamma_\nu$ такое, что $C \subset E \subset Q$. Положим $F = E \cap E_i$. Очевидно, $\Gamma_\nu \ni F \subset E_i$ и $C \subset F \subset Q$. Получаем $\mu(B) = \mu(C) + \mu(B \setminus C) = \mu(F) - \mu(F \setminus C) + \mu(B \setminus C) \in 3V \subset W$. Итак, $\tilde{\mu}[\mathcal{B}](E_i) \subset W$, $i \in \overline{1; m}$.

Предложение доказано.

Теперь мы установим взаимосвязь между следующими условиями:

- (1) ν является диффузной;
- (2) ν строго $\mathcal{B}$ -непрерывна;
- (3) ν строго Γ_ν -непрерывна;
- (4) существует такая система $\mathcal{E} \subset \Gamma_\nu$, что алгебра Γ_ν будет $\mathcal{E}\Gamma_\nu\Gamma_\nu$ -устойчивой.

Теорема 5. Пусть X — нормальное пространство и $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — конечно-аддитивная регулярная мера.

Тогда справедливы импликации (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\implies$ (4).

Доказательство. Импликация (2) $\implies$ (1) очевидна; (2) $\iff$ (3) следует из предложения 3, если $\mu = \nu$. Докажем, что (3) $\implies$ (4).

По условию (3) найдется набор $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$ и $\nu(E_i^n) < 1/n$, $i \in \overline{1; k_n}$. Очевидно, $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ — система в Γ_ν . Далее, пусть $\{B_n\}_n$ такая дизъюнктная последовательность в Γ_ν , что для любого n существует $E_i^n \in \mathcal{E}_n$ такое, что $B_k \subset E_i^n$ при всех $k \geq n$. По свойству (P) для любой подпоследовательности $\{B_{n_m}\}_m$ имеем $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{n_m} \in \Gamma_\nu$. Очевидно, алгебра Γ_ν является $\mathcal{E}\Gamma_\nu\Gamma_\nu$ -устойчивой.

Теорема 6. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство и $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — счетно-аддитивная мера.

Тогда справедливы импликации (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\implies$ (4).

Если, кроме того, X не имеет изолированных точек, то условия (1)–(4) эквивалентны.

Доказательство. Сначала заметим, что ν будет регулярной как борелевская мера на метрическом пространстве (например, см. [10, теорема 7.1.7]) и X — нормальное пространство. Поэтому в силу теоремы 5 достаточно доказать, что (1) $\implies$ (2) и, для доказательства второго утверждения, (4) $\implies$ (1).

Импликация (1) $\implies$ (2) известна, для полноты изложения докажем ее. Пусть последовательность $\{Q_n\}_n$ — база топологии τ . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ν диффузная и регулярная, то для любой точки $x \in X$ найдется $Q_n \ni x$ с $\nu(Q_n) < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $\nu(Q_n) < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Положим $E_1 = Q_1$, $E_n = Q_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i$ для $n \in \overline{2; \infty}$. Очевидно, $\{E_n\}_n$ — дизъюнктивная последовательность из $\mathcal{B}$. В силу счетной аддитивности ν существует такое m , что $\nu(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n) < \varepsilon$. Очевидно, условие (2) выполняется.

Пусть теперь X не имеет изолированных точек. Докажем (4) $\implies$ (1). Зафиксируем $x \in X$. Так как Γ_ν содержит базу топологии τ , то легко построить $\{V_n\}_n$ — базу окрестностей точки x такую, что $V_n \in \Gamma_\nu$ и $V_n \supset V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку точка x не является изолированной, то без ограничения общности можно считать, что $V_n \setminus V_{n+1} \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{E}$ — это та система, о которой говорится в условии (4), $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$, где $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \Gamma_\nu$ и $\bigcup_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$. Если x принадлежит границе одного из множеств E_i^n , то, очевидно, $\nu(\{x\}) = 0$. Иначе для любого $n \in \mathbb{N}$ точка x попадает во внутренность некоторого множества из набора $\mathcal{E}_n$. Тогда легко выделить подпоследовательность $\{V_{m_n}\}_n$ такую, что V_{m_n} покрывается некоторым множеством из $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что это сама последовательность $\{V_n\}_n$. Положим $B_n = V_n \setminus V_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, $\{B_n\}_n$ — дизъюнктивная последовательность из Γ_ν , такая что для любого n существует $E_i^n \in \mathcal{E}_n$, для которого $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \subset E_i^n$. Рассмотрим ее подпоследовательность $\{B_{2n}\}_n$. Из условия (4) и определения 2 следует, что существуют множество $D \in \Gamma_\nu$ и подпоследовательность $\{B_{2n_k}\}_k$ такие, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2n_k} \subset D$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2n+1} \subset X \setminus D$. Очевидно, $x \in \partial D$. Значит, $\nu(\{x\}) = 0$. Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть X — нормальное пространство, $\{\mu_t\}_{t \in T}$ — семейство регулярных конечно-аддитивных мер, где $\mu_t : \mathcal{B}(X) \rightarrow G$. Тогда если семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$ равномерно строго Γ_ν -непрерывно, то для любой окрестности W в G существует дизъюнктивный набор $\{E_i\}_{i=1}^k \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup_{i=1}^k E_i = X$ и $\tilde{\mu}_t[\mathcal{B}](E_i) \subset W$, $i \in \overline{1; k}$, $t \in T$; следовательно, $\{\mu_t\}_{t \in T}$ равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывно.

Доказательство. Пусть V и W — окрестности в G и $3V \subset W$. Существует дизъюнктивный набор $\{E_i\}_{i=1}^k \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup_{i=1}^k E_i = X$ и $\tilde{\mu}_t[\Gamma_\nu](E_i) \subset V$, $i \in \overline{1; k}$, $t \in T$. Зафиксируем $i \in \overline{1; k}$ и μ_t . Пусть $\mathcal{B} \ni B \subset E_i$. Повторим рассуждения из доказательства импликации $(\gamma) \implies (\beta)$ предложения 3, заменяя μ на μ_t . Получим, что $\tilde{\mu}_t[\mathcal{B}](E_i) \subset W$, $i \in \overline{1; k}$, $t \in T$.

Теорема 7. Пусть X — нормальное пространство, $\mu_n : \mathcal{B}(X) \rightarrow G$ — регулярные конечно-аддитивные меры, каждая из которых строго $\mathcal{B}$ -непрерывна, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — регулярная строго $\mathcal{B}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера. Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν , то она равномерно строго Γ_ν -непрерывна и равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывна.

Доказательство. В силу предложения 3 каждая μ_n строго Γ_ν -непрерывна. Тогда по теореме 2 последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго Γ_ν -непрерывна и по лемме 1 равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывна.

Хотя в следующих трех предложениях не рассматривается свойство строгой непрерывности мер, они делают картину более полной.

Предложение 4. Пусть $\mu_n : \Gamma_\nu \rightarrow G$ — исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$, где $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — счетно-аддитивная мера. Пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν . Далее, пусть $\{E_k\}_k$ — дизъюнктивная последовательность в Γ_ν с $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Gamma_\nu$. Тогда для любой окрестности W в G существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых l и n из $\mathbb{N}$ выполняется

$$\tilde{\mu}_n[\Gamma_\nu](\bigcup_{k=m+1}^{m+l} E_k) \subset W. \quad (3.1)$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют окрестность W в G , возрастающая последовательность $\{k_m\}_m \subset \mathbb{N}$, дизъюнктивная последовательность $\{P_m\}_m \subset \Gamma_\nu$ и подпоследовательность $\{\mu_{n_m}\}_m$ с $P_m \subset \bigcup_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} E_k$ и $\mu_{n_m}(P_m) \notin W$, $m \in \mathbb{N}$. Так как множества $\bigcup_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} E_k$, $m \in \mathbb{N}$, и их объединение принадлежат Γ_ν , то в силу предложения 3 имеем $\bigcup_{k \in J} P_k \in \Gamma_\nu$, где $J \subset \mathbb{N}$. Применим (R6), когда $\mathcal{A}$ — это σ -алгебра $\{\bigcup_{k \in J} P_k : J \subset \mathbb{N}\}$. Получим $\lim_m \mu_n(P_m) = 0$ равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$. Это противоречит тому, что $\mu_{n_m}(P_m) \notin W$, $m \in \mathbb{N}$. Предложение доказано.

Заметим, что если к условиям предложения 4 добавить поточечную сходимость последовательности $\{\mu_n\}_n$ на Γ_ν к некоторой функции μ , то μ будет конечно-аддитивной мерой, удовлетворяющей соотношению (3.1).

Предложение 5. Пусть $\mu_n : \Gamma_\nu \rightarrow G$ — счетно-аддитивные меры⁷, $n \in \mathbb{N}$, где $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — счетно-аддитивная мера. Пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν (или поточечно сходится на Γ_ν к некоторой функции μ). Далее, пусть $\{F_k\}_k \subset \Gamma_\nu$ и $F_k \searrow \emptyset$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $\tilde{\mu}_n[\Gamma_\nu](F_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$ (соответственно, $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](F_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и μ будет счетно-аддитивной мерой).

Доказательство. Положим $E_k = F_k \setminus F_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Получим дизъюнктивную последовательность $\{E_k\}_k \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = F_1 \in \Gamma_\nu$. Легко доказать соотношение (3.1). Для этого повторим рассуждения из предложения 4 (заметим, что на σ -алгебре $\mathcal{A}$ каждая μ_n будет исчерпывающей согласно (R3)). Пусть найдено m , как в предложении 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma_\nu \ni E \subset F_{m+1}$. Так как μ_n непрерывна сверху на пустом множестве, то $\lim_k \mu_n(E \cap F_k) = 0$. Поэтому существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\mu_n(E \cap F_{k_0}) \in W$. Получаем $\mu_n(E) = \mu_n(E \cap (F_{m+1} \setminus F_{k_0})) + \mu_n(E \cap F_{k_0}) \in 2W$. Отсюда следует доказываемое утверждение. Что касается μ , то она, очевидно, конечно-аддитивна и непрерывна сверху на пустом множестве и, значит, счетно-аддитивна в силу (R2).

Замечание 2. Из предложения 5 легко следует, что если $\{\mu_n\}_n$, ν , μ , как в условии, и $\{E_k\}_k$ — дизъюнктивная последовательность в Γ_ν с $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Gamma_\nu$, то для $\{\mu_n\}_n$ и μ выполняется соотношение (3.1).

Вернемся к ситуации, когда $\mu_n : \mathcal{B}(X) \rightarrow G$, $n \in \mathbb{N}$. Что будет, если последовательность $\{\mu_n\}_n$ все-таки является равномерно исчерпывающей на Γ_ν ?

Далее мы установим связь между следующими условиями:

- (I) $\{\mu_n\}_n$ равномерно исчерпывающая на Γ_ν ;
- (II) $\{\mu_n\}_n$ равномерно регулярна, то есть для любых множества $E \in \mathcal{B}$ и окрестности W в G существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset E$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \setminus C) \subset W$, $n \in \mathbb{N}$;
- (III) для любых множества $E \in \mathcal{B}$ и окрестности W в G существует такое $F \in \Gamma_\nu$, что $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \triangle F) \subset W$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (IV) $\{\mu_n\}_n$ равномерно исчерпывающая на $\mathcal{B}$;
- (V) $\{\mu_n\}_n$ равномерно непрерывна сверху на пустом множестве на $\mathcal{B}$.

Предложение 6. Пусть X — нормальное пространство, $\mu_n : \mathcal{B}(X) \rightarrow G$ — регулярные исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — конечно-аддитивная мера.

- (i) Тогда справедливы импликации $(III) \Leftarrow (II) \Leftarrow (IV) \Leftarrow (I)$.
- (ii) Если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν , то условия (I)–(IV) эквивалентны между собой и эквивалентны условию:

(VI) $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на $\mathcal{B}$.

- (iii) Если μ_n к тому же счетно-аддитивны, то в пунктах (i) и (ii) добавляется эквиваленция $(IV) \Longleftrightarrow (V)$.

Доказательство.

- (i) Импликация $(I) \Leftarrow (IV)$ очевидна.

Докажем $(I) \Rightarrow (IV)$. В силу (R7) для этого достаточно доказать сконденсированность последовательности $\{\mu_n\}_n$ на Γ_ν . Из регулярности всех μ_n следует, что для любых множества $E \in \mathcal{B}$, конечного набора $\{\mu_n\}_{n=1}^k$ и окрестности W в G существуют множества $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ такие, что $C \subset E \subset Q$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](Q \setminus C) \subset W$ для всех $n \in \overline{1; k}$. В силу свойства (S) (см. предложение 1) найдется $F \in \Gamma_\nu$ такое, что $C \subset F \subset Q$. Так как $E \triangle F \subset Q \setminus C$, то $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \triangle F) \subset W$ для всех $n \in \overline{1; k}$ и, значит, есть сконденсированность.

Импликация $(IV) \Rightarrow (II)$ известна, приведем доказательство. Предположим противное. Тогда существуют окрестность W в G и множество $E \in \mathcal{B}$ такие, что для любого $C \in \mathcal{C}$, где $C \subset E$, существует мера μ_n , для которой $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](E \setminus C) \not\subset 2W$. Положим $C_1 = \emptyset$ и рассмотрим множество $E \setminus C_1$. Найдутся μ_{n_1} и $B \in \mathcal{B}$ такие, что $B \subset E \setminus C_1$ и $\mu_{n_1}(B) \not\subset 2W$. Так как μ_{n_1} регулярна, то найдется $A_1 \in \mathcal{C}$ такое, что $A_1 \subset B$ и $\mu_{n_1}(B \setminus A_1) \in W$. Поскольку $\mu_{n_1}(B) = \mu_{n_1}(A_1) + \mu_{n_1}(B \setminus A_1)$, то $\mu_{n_1}(A_1) \not\in W$. Положим $C_2 = C_1 \cup A_1$. Очевидно, $C \ni C_2 \subset E$. Рассмотрим $E \setminus C_2$ вместо $E \setminus C_1$ и т. д. Продолжив процесс до бесконечности, получим дизъюнктивную последовательность $\{A_k\}_k \subset \mathcal{C}$ и последовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$ такие, что $\mu_{n_k}(A_k) \not\in W$, $k \in \mathbb{N}$, что противоречит условию (IV).

Импликация $(II) \Rightarrow (III)$ очевидна, если использовать свойство (S).

(ii) Пусть теперь последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно фундаментальна на Γ_ν . Тогда легко доказывается импликация $(III) \Rightarrow (VI)$. Действительно, для множества $E \in \mathcal{B}$ и окрестности нуля W в G найдем $F \in \Gamma_\nu$ согласно условию (III). Имеем $\mu_n(E) = \mu_n(E \setminus F) + \mu_n(F) - \mu_n(F \setminus E) \in \mu_n(F) + 2W$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu_n(E) - \mu_k(E) \in \mu_n(F) - \mu_k(F) + 4W$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$. Очевидно, из фундаментальности последовательности $\{\mu_n(F)\}_n$ следует фундаментальность $\{\mu_n(E)\}_n$.

Импликация $(VI) \Rightarrow (IV)$ следует из (R6).

⁷Напомним, что счетно-аддитивная мера на алгебре не обязана быть исчерпывающей, но является непрерывной сверху на пустом множестве (см. (R3) из раздела 1).

Пункт (iii) следует из (R5) и (R6). Предложение доказано.

Замечание 3. Очевидно, что доказательство первого утверждения предложения 6 остается верным для семейства функций $\{\mu_t\}_{t \in T}$ (а не только для последовательности).

4. Приложения к слабой сходимости мер

В данном параграфе X — совершенно нормальное пространство и под мерой будем понимать только счетно-аддитивную меру. Сразу заметим, что меры со значениями в $\mathbb{R}$ и определенные на $\mathcal{B}(X)$ будут регулярными [10, следствие 7.1.9]. Говорят, что последовательность $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ , если для любой непрерывной ограниченной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется $\lim_n \int_X f(x) d\mu_n = \int_X f(x) d\mu$.

Как известно, для неотрицательных мер слабая сходимость эквивалентна поточечной сходимости $\{\mu_n\}_n$ к μ на Γ_μ (см., например, [10, теорема 8.2.8]). Поэтому в силу пункта (ii) предложения 6 всякий раз, когда последовательность неотрицательных мер $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ и при этом нет ее поточечной сходимости на $\mathcal{B}(X)$, мы имеем пример последовательности мер, которая сходится поточечно на алгебре Γ_μ и при этом не является равномерно исчерпывающей на Γ_μ . Если к тому же X — сепарабельное метрическое пространство и μ диффузная, то найдется такая система $\mathcal{E}$ в Γ_μ , что алгебра Γ_μ будет $\mathcal{E}\Gamma_\mu\Gamma_\mu$ -устойчивой (см. теорему 6); если, кроме того, все μ_n диффузные, то последовательность $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно строго Γ_μ -непрерывной. Приведем конкретный пример.

Пример 2. Разобьем отрезок $[0; 1]$ на 2^{2n} равных частей, $n \in \mathbb{N}$. Положим $p_n(x) = 2^n$ для $x \in [k/2^n; k/2^n + 1/2^{2n}]$, где $k \in \overline{0; 2^n - 1}$, и $p_n(x) = 0$ для остальных $x \in [0; 1]$. Рассмотрим функции $F_n(x) = \int_0^x p_n(t) dt$, $x \in [0; 1]$. Справедлива оценка $k/2^n \leq F_n(x) \leq (k+1)/2^n$, если $k/2^n \leq x \leq (k+1)/2^n$. Отсюда $|F_n(x) - x| \leq 1/2^n$ для всех $x \in [0; 1]$. Значит, $\lim_n F_n(x) = x = F(x)$, $x \in [0; 1]$. Пусть $\mu_n, \mu : \mathcal{B}([0; 1]) \rightarrow [0; 1]$ — вероятностные меры, задаваемые функциями распределения F_n и F . Очевидно, μ — это мера Лебега. Далее, μ_n и μ диффузные, так как F_n и F непрерывны; $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ , так как $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ для всех $x \in [0; 1]$ [11, гл. III, § 1, теорема 2]. Значит, $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится к μ на алгебре Γ_μ , которая, как отмечалось выше, является $\mathcal{E}\Gamma_\mu\Gamma_\mu$ -устойчивой (можно напрямую показать, используя предложение 2, что в качестве $\mathcal{E}$ подойдет, например, $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^\infty$, где $\mathcal{E}_n = \{[(i-1)/n; i/n]\}_{i=1}^n$). Тогда $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго Γ_μ -непрерывна. При этом $\{\mu_n\}_n$ не является равномерно исчерпывающей на Γ_μ , так как нет ее поточечной сходимости на $\mathcal{B}([0; 1])$ к μ . Действительно, положим $E_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} [k/2^n; k/2^n + 1/2^{2n}]$. Имеем $\mu_n(E_n) = 1$ и $\mu(E_n) = 1/2^n$. Возьмем $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_{2n}$.

Очевидно, $E \in \mathcal{B}([0; 1])$, $\mu_{2n}(E) = 1$ и $\mu(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_{2n}) = \sum_{n=1}^\infty 1/2^{2n} = 1/3$. Итак, $\lim_n \mu_n(E) \neq \mu(E)$.

Вернемся к общей ситуации и предположим, что все μ_n диффузные и $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ . Допустим, что μ диффузная, будет ли тогда $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывной? Если X — сепарабельное метрическое пространство и меры неотрицательные, то ответ утвердительный (выше показано, что $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно строго Γ_μ -непрерывной и, следовательно, по лемме 1 равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывной). Здесь важную роль играет тот факт, что для неотрицательных мер из слабой сходимости следует поточечная сходимость на Γ_μ . Для мер со значениями в $\mathbb{R}$ мы не имеем такой теоремы и не знаем ответа на этот вопрос; можем лишь утверждать, что если X — полное сепарабельное метрическое пространство, то существует подпоследовательность $\{\mu_{n_i}\}_i$, которая равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывна (это легко доказать, раскладывая μ_n по Жордану и используя критерий Прохорова).

Как показывает следующий простой пример, равномерная строгая $\mathcal{B}$ -непрерывность $\{\mu_n\}_n$ не гарантирует диффузность μ .

Пример 3. Положим $p_n(x) = 2^n$ для $x \in [1 - 1/2^n; 1]$ и $p_n(x) = 0$ для остальных $x \in [0; 1]$, $n \in \overline{0; \infty}$. Функции распределения $F_n(x) = \int_0^x p_n(t) dt$ непрерывны и $\lim_n F_n(x) = F(x)$, где $F(x) = 0$ для $x \in [0; 1)$ и $F(1) = 1$. Отсюда ясно, что диффузные меры μ_n , задаваемые F_n , сходятся слабо к мере Дирака $\mu_{\{1\}}$. Возьмем $k \in \mathbb{N}$. Разобьем отрезки $[1 - 1/2^n; 1 - 1/2^{n+1}]$, $n \in \overline{0; \infty}$, на k равных частей. Объединение i -тых частей этих разбиений обозначим E_i , $i \in \overline{1; k}$. Имеем $\mu_n(E_i) = \int_{E_i} p_n(t) dt = 1/k$. Очевидно, $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывна.

Теоремы 8 и 9 дают достаточные условия того, чтобы последовательность диффузных мер слабо сходилась к диффузной мере. При их доказательстве используем критерий А.Д. Александрова в редакции [10, теорема 8.1.9], из которого следует, что если X — совершенно нормальное пространство, $\mu_n, \mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ — меры, то

1) $\{\mu_n\}_n$ фундаментальна в слабой топологии в точности тогда, когда она равномерно ограничена и для любых $\varepsilon > 0$ и множеств $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \mathcal{T}$ с $C \subset Q$ найдется такое m , что для всех $n, k > m$

$$\inf\{|\mu_n(A) - \mu_k(A)| : A \in \mathcal{T}, C \subset A \subset Q\} < \varepsilon; \quad (4.1)$$

2) $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ в точности тогда, когда она равномерно ограничена и для любых множеств $C \in \mathcal{C}$ и $Q \in \tau$ с $C \subset Q$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{|\mu_n(A) - \mu(A)| : A \in \tau, C \subset A \subset Q\} = 0. \quad (4.2)$$

Теорема 8. Пусть X — совершенно нормальное пространство, $\mu_n : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ — меры, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — строго $\mathcal{B}$ -непрерывная мера. Пусть последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на Γ_ν .

Тогда $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к некоторой мере $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\mu(E) = \lim_n \mu_n(E)$ при всех $E \in \Gamma_\nu$.

Если, кроме того, все μ_n строго $\mathcal{B}$ -непрерывны, то $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно строго Γ_ν -непрерывна (следовательно, равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывна) и μ будет строго Γ_ν -непрерывна (следовательно, строго $\mathcal{B}$ -непрерывна).

Доказательство. Положим $\varphi(E) = \lim_n \mu_n(E)$, $E \in \Gamma_\nu$. В силу предложения 5 φ будет мерой на Γ_ν . По теореме 13 последовательность $\{\mu_n\}_n$ равномерно ограничена на Γ_ν . Тогда φ ограниченная и, будучи скалярной, единственным образом продолжается с алгебры Γ_ν на порожденную σ -алгебру $\sigma(\Gamma_\nu)$, которая в нашем случае совпадает с $\mathcal{B}(X)$.⁸ Обозначим это продолжение через μ .

Далее, пусть $C \in \mathcal{C}$, $Q \in \tau$ и $C \subset Q$. В силу свойства (S) существует множество $E \in \tau \cap \Gamma_\nu$ такое, что $C \subset E \subset Q$. Очевидно,

$$\inf \{|\mu_n(A) - \mu(A)| : A \in \tau, C \subset A \subset Q\} \leq |\mu_n(E) - \mu(E)|.$$

Так как $|\mu_n(E) - \mu(E)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то выполняется условие (4.1). Значит, последовательность $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ . Первое утверждение доказано.

Последнее утверждение теоремы сразу следует из теоремы 7.

Теорема 9. Пусть $X = [0; 1]^k$ с евклидовой метрикой, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}$ — класс всех прямоугольников вида $\langle a_1; b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_k; b_k \rangle$ в X и $\mathcal{D} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{P}, \text{diam} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}$. Пусть $\mu_n : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ — диффузные меры, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на классе $\mathcal{D}$, то

- 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует дизъюнктный набор $\{P_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup_{i=1}^m P_i = X$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](P_i) < \varepsilon$, $i \in \overline{1; m}$, $n \in \mathbb{N}$; следовательно, $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{B}$ -непрерывна;
- 2) $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к некоторой диффузной мере μ .

Доказательство. Пункт 1 докажем с помощью теоремы 4. Пусть $\mathcal{R}$ — алгебра всех конечных объединений прямоугольников (можно считать их попарно дизъюнктными) из $\mathcal{P}$. Очевидно, определяя $\mathcal{D}$, можно брать $E_n \in \mathcal{R}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует набор $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$ и $\text{diam} \mathcal{E}_n \leq 1/n$. Таким образом, $\mathcal{R}$ содержит систему $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_n\}_n$ с $\text{diam} \mathcal{E}_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из регулярности и диффузности μ_n следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и точки $x \in X$ существует $P \in \mathcal{P} \cap \tau(X)$ такой, что $x \in P$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](P) < \varepsilon$. Используя компактность X , легко убедиться, что μ_n строго $\mathcal{R}$ -непрерывна. По теореме 4 $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{R}$ -непрерывна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует дизъюнктный набор $\{P_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup_{i=1}^m P_i = X$ и $\tilde{\mu}_n[\mathcal{R}](P_i) < \varepsilon$. Покажем, что $\tilde{\mu}_n[\mathcal{B}](P_i) < \varepsilon$. Для этого повторим доказательство импликации $(\gamma) \implies (\beta)$ предложения 3, заменив μ , E_i , Γ_μ на μ_n , P_i , $\mathcal{R}$. Вместо свойства (S) используем то, что в силу компактности C найдется $E \in \mathcal{R}^9$ такое, что $C \subset E \subset Q$.

Пункт 2. Из равномерной строгой $\mathcal{B}$ -непрерывности $\{\mu_n\}_n$ следует ее равномерная ограниченность. Применив разложение Жордана $\mu_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$ [12, гл. III, пункт 3.1], получим равномерно ограниченные последовательности неотрицательных диффузных мер $\{\mu_n^+\}_n$ и $\{\mu_n^-\}_n$. По критерию Прохорова [10, теорема 8.6.2] найдется возрастающая последовательность номеров $\{n_i\}_i$ такая, что подпоследовательности $\{\mu_{n_i}^+\}_i$ и $\{\mu_{n_i}^-\}_i$ сходятся к некоторым неотрицательным мерам φ и ψ . Очевидно, $\{\mu_{n_i}\}_i$ слабо сходится к $\mu = \varphi - \psi$. Теперь для доказательства слабой сходимости $\{\mu_n\}_n$ к μ достаточно доказать фундаментальность $\{\mu_n\}_n$ в слабой топологии. Как уже отмечалось, если $C \in \mathcal{C}$, $Q \in \tau$ и $C \subset Q$, то существует $E \in \mathcal{R} \cap \tau(X)$ такое, что $C \subset E \subset Q$. Отсюда и поточечной фундаментальности $\{\mu_n\}_n$ на $\mathcal{R}$ следует выполнение условия (4.1). Значит, $\{\mu_n\}_n$ слабо сходится к μ .

⁸Очевидно, всегда $\sigma(\Gamma_\nu) \subset \mathcal{B}(X)$. Если же X — совершенно нормальное пространство, то любое множество Q из τ представимо в виде $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \in \mathcal{C}$. Используя свойство (S) из предложения 1, получаем $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \Gamma_\nu$. Отсюда легко следует, что $\sigma(\Gamma_\nu) = \mathcal{B}(X)$.

⁹Множество E можно выбрать из $\mathcal{R} \cap \tau(X)$, это уточнение мы используем ниже.

Осталось доказать диффузность μ . Опять применим теорему 4, изменив рассматриваемые классы множеств по сравнению с пунктом 1. Положим $\nu = \varphi + \psi$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cap \Gamma_\nu$ и $\mathcal{D}^* = \{ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n : E_n \in \mathcal{R}^*, \text{diam} \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \}$.

Далее понадобится следующий известный факт: пусть $x \in Q \in \tau(X)$; тогда существует $P \in \mathcal{P} \cap \tau(X)$ такое, что $x \in P \subset Q$ и $\nu(\partial P) = 0$. Действительно, можно построить континуум прямоугольников из $\mathcal{P} \cap \tau(X)$, содержащих точку x и содержащихся в Q , с попарно дизъюнктными границами. Множество таких границ с ненулевой мерой ν не более, чем счетное. Значит, существует искомый прямоугольник P . Используя доказанное утверждение, легко построить набор $\mathcal{E}_n^* = \{E_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset \mathcal{P}$ с $\bigcup_{i=1}^{k_n} E_i^n = X$, где $E_i^n \in \mathcal{P} \cap \Gamma_\nu$ и $\text{diam} \mathcal{E}_n \leq 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\mathcal{R}^*$ содержит систему $\mathcal{E}^* = \{\mathcal{E}_n^*\}_n$ с $\text{diam} \mathcal{E}_n^* \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим последовательность $\{\mu_{n_i}^+\}_i$. Легко показать, что каждая $\mu_{n_i}^+$ строго $\mathcal{R}^*$ -непрерывна. Далее, очевидно, для $E \in \mathcal{R}^*$ имеем $\varphi(\partial E) = 0$. Так как $\{\mu_{n_i}^+\}_i$ сходится слабо к φ , то она сходится к φ поточечно на $\mathcal{R}^*$. Выполнены все условия теоремы 2. Значит, $\{\mu_{n_i}^+\}_i$ равномерно строго $\mathcal{R}^*$ -непрерывна и для любого $\varepsilon > 0$ существует дизъюнктивный набор $\{E_j\}_{j=1}^m \subset \mathcal{R}^*$ такой, что $\bigcup_{j=1}^m E_j = X$ и $\mu_{n_i}(E_j) < \varepsilon$, $j \in \overline{1; m}$, $i \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу поточечной сходимости $\{\mu_{n_i}^+\}_i$ на $\mathcal{R}^*$ к φ имеем $\varphi(E_j) < \varepsilon$, $j \in \overline{1; m}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ φ диффузная. Аналогично, ψ диффузная. Значит, μ тоже диффузная.

5. Об ослаблении условия строгой непрерывности меры

Следующее условие является более слабым, чем строгая $\mathcal{A}$ -непрерывность.

Определение 6. Функцию $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ (здесь по-прежнему $\mathcal{A}$ — булева алгебра) называем слабо $\mathcal{A}$ -непрерывной, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ и любой окрестности U в G существует дизъюнктивный набор $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ с $\bigvee_{i=1}^n a_i = a$ и $\mu(a_i) \in U$, $i \in \overline{1; n}$.

Для конечно-аддитивной $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty)$ в силу ее монотонности условия строгой и слабой $\mathcal{A}$ -непрерывности эквивалентны. В более общем случае справедлива

Теорема 10. Пусть $\{\mu_t\}_{t \in T}$, где $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$, — некоторое семейство слабо $\mathcal{A}$ -непрерывных конечно-аддитивных мер. Тогда если семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$ равномерно исчерпывающее, то оно равномерно строго $\mathcal{A}$ -непрерывное.

Доказательство. Пусть U — окрестность в G и $V = 2U$. Как и при доказательстве теоремы 1, будем говорить, что элемент $r \in \mathcal{A}$ обладает свойством $(*)$, если для любого дизъюнктивного набора $\{r_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ с $\bigvee_{i=1}^n r_i = r$ найдутся такие μ_t и r_i , что $\tilde{\mu}_t[\mathcal{A}](r_i) \notin V$.

Предположим, что элемент e обладает свойством $(*)$. Положим $a_1 = e$. Существуют функция μ_{t_1} и элемент $c \in \mathcal{A}$ такие, что $c \leq a_1$ и $\mu_{t_1}(c) \notin V$. В силу слабой $\mathcal{A}$ -непрерывности μ_{t_1} есть дизъюнктивный набор $\{r_1, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_n\} \subset \mathcal{A}$ с $\bigvee_{i=1}^k r_i = c$, $\bigvee_{i=k+1}^n r_i = a_1 \setminus c$ и $\mu_{t_1}(r_i) \in U$, $i \in \overline{1; n}$. Так как a_1 обладает свойством $(*)$, то в этом наборе найдется элемент r_l , также обладающий свойством $(*)$. Обозначим его q . Очевидно, $\mu_{t_1}(q) \in U$. Если оказалось, что $q \leq c$, то полагаем $b_1 = c \setminus q$; если же $q \leq a_1 \setminus c$, то полагаем $b_1 = c$. Получаем, что $\mu_{t_1}(b_1) \notin U$, $b_1 \wedge q = 0$ и q обладает свойством $(*)$.

Положим $a_2 = q$. Рассмотрим a_2 вместо a_1 . Повторим описанную выше процедуру. Продолжив процесс до бесконечности, получим дизъюнктивную последовательность $\{b_i\}_i \subset \mathcal{A}$ и последовательность $\{\mu_{t_i}\}_i$ такие, что $\mu_{t_i}(b_i) \notin U$, это противоречит равномерной исчерпываемости семейства $\{\mu_t\}_{t \in T}$. Значит, элемент e не обладает свойством $(*)$. Теорема доказана.

Из теоремы 10 сразу следует

Предложение 7. Исчерпывающая слабо $\mathcal{A}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow G$ будет строго $\mathcal{A}$ -непрерывной.

Замечание 4. Теорема 1 остается справедливой, если условие "каждая μ_n строго $\mathcal{R}$ -непрерывна" заменить на "каждая μ_n слабо $\mathcal{R}$ -непрерывна и исчерпывается на $\mathcal{R}$ "; если в теореме 2 от каждой μ_n требовать исчерпываемость и слабую $\mathcal{A}$ -непрерывность, то теорема остается верной и, кроме того, последовательность $\{\mu_n\}_n$ будет равномерно исчерпывающей, следовательно, к свойствам функции μ добавится еще исчерпываемость и т. д. Нетрудно также показать, что предложение 3 останется верным, если в (β) и (γ) слово "строго" заменить на "слабо".

Теперь рассмотрим конечно-аддитивные меры со значениями в банаховом пространстве Z . Согласно теореме Дистеля — Файреса [5, гл. I, § 4, теорема 2], если существует ограниченная конечно-аддитивная

мера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow Z$ на алгебре $\mathcal{A}$, которая не является исчерпывающей, то Z содержит подпространство топологически изоморфное c_0 ; если $\mathcal{A}$ — это σ -алгебра, то при выполнении тех же условий Z содержит подпространство топологически изоморфное l_∞ . Отсюда и из предложения 7 сразу следует

Предложение 8. Пусть $\mu : \mathcal{A} \rightarrow Z$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера, где $\mathcal{A}$ — это алгебра и Z не содержит c_0 . Тогда μ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна.

Вместе с тем справедливо

Предложение 9. Пусть $\mu : \mathcal{A} \rightarrow c_0$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера, пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{A}$ -устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Тогда μ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна.

Доказательство. Пусть $\{\mu_n\}_n$ — последовательность проекций μ . Очевидно, каждая $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера; как скалярная ограниченная она будет исчерпывающей и, по предложению 7, строго $\mathcal{A}$ -непрерывной. Далее, $\{\mu_n\}_n$ поточечно сходится на $\mathcal{A}$. Применим теорему 1, когда $\mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{A}$. Получим, что $\{\mu_n\}_n$ равномерно строго $\mathcal{A}$ -непрерывна и, следовательно, μ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна.

Из теоремы Дистеля — Файреса и предложения 7 также следует

Предложение 10. Пусть $\mu : \mathcal{A} \rightarrow Z$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера, где $\mathcal{A}$ — это σ -алгебра и Z не содержит l_∞ . Тогда μ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна.

Мы не знаем, будет ли справедливо предложение 10, если требовать, чтобы алгебра $\mathcal{A}$ была $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{A}$ -устойчивой, а не обязательно σ -алгеброй. Однако, например, на Γ_ν при определенных условиях этот результат распространяется, а именно справедливо

Предложение 11. Пусть $\mu : \Gamma_\nu \rightarrow Z$ — ограниченная слабо $\mathcal{A}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера. Здесь $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — регулярная слабо (= строго) $\mathcal{B}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера, X — нормальное пространство. Далее, пусть Z не содержит l_∞ . Тогда μ строго $\mathcal{A}$ -непрерывна.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что множество $F \in \Gamma_\nu$ обладает свойством (*), если для любого дизъюнктного набора $\{F_i\}_{i=1}^n \subset \Gamma_\nu$ с $\bigcup_{i=1}^n F_i = F$ найдется такое F_i , что $\tilde{\mu}[\Gamma_\nu](F_i) \geq \varepsilon$.

Построим систему $\mathcal{E}$ как в доказательстве импликации (3) $\implies$ (4) теоремы 5. Предположим, что множество X обладает свойством (*). Положим $A_1 = X$. Без ограничения общности можно считать, что A_1 включено в некоторое $E_i^1 \in \mathcal{E}_1$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 10, когда $\mu_{t_1} = \mu$, $U = \{z \in Z : \|z\| < \varepsilon\}$, $e = X$ и $a_1 = A_1$, найдем множества B_1 и A_2 из Γ_ν , такие что $B_1, A_2 \subset A_1$, $B_1 \cap A_2 = \emptyset$ и A_2 обладает свойством (*). Без ограничения общности можно считать, что A_2 включено в некоторое $E_i^2 \in \mathcal{E}_2$. Рассмотрим A_2 вместо A_1 и т. д. Продолжив процесс до бесконечности, получим дизъюнктную последовательность $\{B_k\}_k \subset \Gamma_\nu$ с $\|\mu(B_k)\| \geq \varepsilon$ и $\bigcup_{k \in J} B_k \in \Gamma_\nu$ для $J \subset \mathbb{N}$ (см. доказательство теоремы 5). С другой стороны, по теореме Дистеля — Файреса на σ -алгебре $\Sigma = \{\bigcup_{k \in J} B_k \in \Gamma_\nu : J \subset \mathbb{N}\}$ функция μ является исчерпывающей. Полученное противоречие говорит о том, что предположение было неверно.

6. О равномерной ограниченности мер

В данном параграфе G — таг с квазинормой $|\cdot|$.

Лемма 2. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{A}$ -устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Пусть $\{b_n\}_n$ такая дизъюнктная последовательность в $\mathcal{A}$, что для любого n существует $e_i^n \in \mathcal{E}_n$ такое, что $b_k \leq e_i^n$ при всех $k \geq n$. Тогда существует дизъюнктная последовательность $\{a_m\}_m \subset \mathcal{A}$ такая, что все множества $J_m = \{n : b_n \leq a_m\}$ бесконечные, $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Представим $\mathbb{N} = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$, где все M_m бесконечные и попарно дизъюнктные. По определению 2 для каждого M_m существуют элемент $d_m \in \mathcal{A}$ и бесконечное множество $P_m \subset M_m$, для которых $b_k \leq d_m$ при всех $k \in P_m$ и $b_k \wedge d_m = 0$ при всех $k \in \mathbb{N} \setminus P_m$. Преобразуем получившуюся последовательность $\{d_m\}_m$ в $\{a_m\}_m$, полагая $a_1 = d_1$, $a_m = d_m \vee (\bigvee_{i=1}^{m-1} d_i)$, $m \in \overline{2; \infty}$. Очевидно, $\{a_m\}_m$ искомая.

Теорема 11. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{A}$ -устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow G$ — исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно ограничена на $\mathcal{A}$, то она равномерно ограничена на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Далее обозначаем $\mathcal{L}_a = \{b \in \mathcal{A} : b \leq a\}$, $a \in \mathcal{A}$. Говорим, что элемент $a \in \mathcal{A}$ обладает свойством $(\diamond)$, если $\{\mu_n\}_n$ не является равномерно ограниченной на $\mathcal{L}_a$.

Часть 1. Сначала докажем, что если элемент $a \in \mathcal{A}$ обладает свойством $(\diamond)$, то существует дизъюнктная последовательность $\{a_m\}_m \subset \mathcal{L}_a$ такая, что каждый элемент a_m обладает свойством $(\diamond)$. Дей-

ствительно, в этом случае можно построить последовательность $\{b_n\}_n \subset \mathcal{L}_a$, удовлетворяющую условиям леммы 2, и последовательность $\{\nu_n\}_n \subset \{\mu_n\}_n$ такие, что $|\nu_n(b_n)| > n$, $n \in \mathbb{N}$ (см. часть 2). Далее найдем последовательность $\{a_m\}_m$ согласно лемме 2; можно считать все $a_m \leq a$. Очевидно, $\{a_m\}_m$ искома.

Часть 2. Предположим, что элемент e обладает свойством $(\diamond)$. Тогда некоторый элемент семейства $\{e_i^1 \wedge e_j^2, i \in \overline{1; k_1}, j \in \overline{1; k_2}\}$ тоже обладает этим свойством. Обозначим его a_1 . В силу поточечной ограниченности $\{\mu_n\}_n$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup_n |\mu_n(a_1)| < k$. Так как a_1 обладает свойством $(\diamond)$, то существуют $c \in \mathcal{L}_{a_1}$ и $\nu_1 \in \{\mu_n\}_n$ такие, что $|\nu_1(c)| > (k+1)$. Тогда, очевидно, $|\nu_1(c)| > 1$, $|\nu_1(e \setminus c)| > 1$ и хотя бы один из элементов c и $e \setminus c$ обладает свойством $(\diamond)$. Обозначим этот элемент q , а другой b_1 . В силу части 1 существует дизъюнктивная последовательность $\{q_m\}_m \subset \mathcal{L}_q$, где каждый элемент обладает свойством $(\diamond)$. Так как ν_1 исчерпывающая, то найдется q_l с $\tilde{\nu}_1[\mathcal{A}](q_l) < 1$. Очевидно, среди элементов семейства $\{q_l \wedge e_i^3 \wedge e_j^4, i \in \overline{1; k_3}, j \in \overline{1; k_4}\}$ найдется элемент, обладающий свойством $(\diamond)$. Обозначим его a_2 . Рассмотрим a_2 вместо a_1 и так далее.

Допустим, что на m -м шаге получили элементы $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, b_1, \dots, b_m$ в $\mathcal{A}$ и функции $\nu_1, \dots, \nu_m \in \{\mu_n\}_n$ такие, что:

- для всех $i \in \overline{1; m}$ справедливы неравенства
- (B1) $a_i \geq a_{i+1}, \quad b_i \leq a_i \setminus a_{i+1};$
- для всех $i \in \overline{1; m+1}$
- (B2) a_i мажорируется некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i-1}$ и некоторым элементом из $\mathcal{E}_{2i};$
- для всех $i \in \overline{1; m}$ выполняется
- (B3) $|\nu_i(\bigvee_{j \in J} b_j \vee b_i)| > i$ для любого $J \subset \overline{1; i-1};$
- для всех $i \in \overline{1; m}$ справедливо неравенство
- (B4) $\tilde{\nu}_i[\mathcal{A}](a_{i+1}) < 1;$
- (B5) элемент a_{m+1} обладает свойством $(\diamond)$.

Сделаем $(m+1)$ -й шаг. В силу поточечной ограниченности $\{\mu_n\}_n$ найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup_{j \in J} \{|\mu_n(\bigvee_{j \in J} b_j)|, |\mu_n(a_{m+1})|\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad J \subset \overline{1; m} > k. \quad (6.1)$$

Так как a_{m+1} обладает свойством $(\diamond)$, то существуют $c \in \mathcal{L}_{a_{m+1}}$ и $\nu_{m+1} \in \{\mu_n\}_n$ такие, что $|\nu_{m+1}(c)| > 2k + m + 1$. Очевидно, $|\nu_{m+1}(c)| > k + m + 1$, $|\nu_{m+1}(a_{m+1} \setminus c)| > k + m + 1$ и хотя бы один из элементов c и $a_{m+1} \setminus c$ обладает свойством $(\diamond)$. Обозначим этот элемент q , а другой b_{m+1} . Итак,

$$|\nu_{m+1}(b_{m+1})| > k + m + 1. \quad (6.2)$$

Из (6.1) и (6.2) получаем, что $|\nu_{m+1}(\bigvee_{j \in J} b_j \vee b_{m+1})| > (m+1)$, $J \subset \overline{1; m}$.

Подобно тому как это делалось на первом шаге, найдем обладающий свойством $(\diamond)$ элемент $q_l \leq q$ такой, что $\tilde{\nu}_{m+1}[\mathcal{A}](q_l) < 1$.

Среди элементов $\{q_l \wedge e_i^{2m+1} \wedge e_j^{2m+2}, i \in \overline{1; k_{2m+1}}, j \in \overline{1; k_{2m+2}}\}$ найдем обладающий свойством $(\diamond)$. Обозначим его a_{m+2} .

Продолжив процесс до бесконечности, получим убывающую последовательность $\{a_i\}_i$ и дизъюнктивную последовательность $\{b_i\}_i$ в $\mathcal{A}$, а также последовательность $\{\nu_i\}_i \subset \{\mu_i\}_i$ такие, что выполняются условия (B1)–(B4).

Теперь дословно повторим текст доказательства теоремы 1, окруженный знаками $\nabla \nabla$ и $\Delta \Delta$, заменяя $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ на $\mathcal{A}$, условие (C5) на (B4) и равенство (2.1) на следующее равенство:

$$\nu_{i_k}(z) = \nu_{i_k}(x_k \vee b_{i_k}) + \nu_{i_k}(y_k). \quad (6.3)$$

Из условия (B3) и равенства (6.3) получаем, что $|\nu_{i_k}(z)| > (i_k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$ (заметим, что последовательность $\{i_k\}_k$ возрастающая). Это противоречит поточечной ограниченности $\{\mu_n\}_n$. Значит, элемент e не обладает свойством $(\diamond)$.

Теорема 12. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является $\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{A}$ -устойчивой, где $\mathcal{E}$ — некоторая система в $\mathcal{A}$. Пусть $\mu_n : \mathcal{A} \rightarrow G$ — строго $\mathcal{A}$ -непрерывные конечно-аддитивные меры, $n \in \mathbb{N}$. Тогда если последовательность $\{\mu_n\}_n$ поточечно ограничена на $\mathcal{A}$, то она равномерно ограничена на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Доказательство повторяет часть 2 теоремы 11, за исключением того, что q_l находится из условия строгой $\mathcal{A}$ -непрерывности функции ν_{m+1} (а не исчерпываемости).

Замечание 3. Очевидно, теоремы 11 и 12 остаются верны, если последовательность $\{\mu_n\}_n$ заменить на семейство $\{\mu_t\}_{t \in T}$.

На основании теоремы 11 и замечания 5 можно, например, сформулировать следующую теорему, доказанную в [13, теорема 4.5] для алгебры $\mathcal{A}$ с SIP и обобщающую [14, предложение 3.3] в случае $\mathcal{A} = G_\nu$.

Теорема 13. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ обладает SIP или $\mathcal{A} = G_\nu$, где $\nu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty)$ — регулярная строго $\mathcal{B}$ -непрерывная конечно-аддитивная мера, X — нормальное пространство. Пусть $\mu_t : \mathcal{A} \rightarrow G$ —

исчерпывающие конечно-аддитивные меры, $t \in T$. Тогда из поточечной ограниченности семейства $\{\mu_t\}_t$ на $\mathcal{A}$ следует его равномерная ограниченность.

Литература

- [1] Bhaskara Rao M., Bhaskara Rao K.P.S. Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces // *Mathematika*. 1973. V. 20. Issue 12. P. 214–223. DOI: <http://dx.doi.org/10.1112/S0025579300004800>
- [2] Климкин В.М., Свистула М.Г. О поточечном пределе векторных зарядов, обладающих свойством Сакса // *Математические заметки*. 2003. Т. 74, № 3. С. 407–415. DOI: <http://doi.org/10.4213/MZM274>.
- [3] Luschgy H., Solecki S. Strong continuity of invariant probability charges // *Colloquium Mathematicum*. 2004. Vol. 101. Issue 1. P. 135–142. DOI: <http://dx.doi.org/10.4064/cm101-1-9>.
- [4] Cavaliere P., de Lucia P., Weber H. Approximation of finitely additive functions with values in topological groups // *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen = Journal of analysis and its applications*. 2013. Vol. 32, Issue 4. P. 477–495. DOI: <http://dx.doi.org/10.4171/ZAA/1495>.
- [5] Diestel J., Jr. Uhl J. Vector measures. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 15. Providence: American Mathematical Society, 1977. 319 p. Available at: <https://www.ams.org/books/surv/015/surv015-endmatter.pdf>.
- [6] Freniche F.J. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interpolation property // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1984. Vol. 92, Issue 3. P. 362–366. DOI: <http://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0759653-1>.
- [7] Musiał K. Absolute Continuity and the Range of Group Valued Measure // *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série de sciences math., astr. et phys.*, 1973, vol. XXI, no. 2, pp. 105–113. URL: https://www.researchgate.net/profile/Kazimierz-Musial-2/publication/284178504_Absolute_Continuity_and_the_Range_of_Group_Valued_Measure/links/564e305d08ae1ef9296c67ad/Absolute-Continuity-and-the-Range-of-Group-Valued-Measure.pdf.
- [8] Алексюк В.Н. Функции множеств. Ленинград: ЛГПИ, 1982. 78 с.
- [9] Климкин В.М. Введение в теорию функций множества. Саратов: Изд-во Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989, 210 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=583121&pg=1>.
- [10] Богачев В.И. Основы теории меры. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. Т. 2. 576 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=507098>.
- [11] Ширяев А.Н. Вероятность. Москва: Наука, 1980. 574 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=470836>.
- [12] Богачев В.И. Основы теории меры. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. Т. 1. 544 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=443457>.
- [13] Candeloro D. Alcuni teoremi di uniforme limitatezza // *Rendiconti dell'Accademia Nazionale detta dei XL*, 1985, vol. 9, pp. 249–260. Available at: https://www.researchgate.net/publication/237311429_Alcuni_teoremi_di_uniforme_limitatezza.
- [14] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 1983, 214, pp. 1–36. URL: <https://eudml.org/doc/268517>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22

Submitted: 03.05.2022

Revised: 14.06.2022

Accepted: 14.11.2022

M.G. Svistula

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: marinasvistula@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2444-5605>

T.A. Sribnaya

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: sribnayata@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1197-5650>

PROPERTIES OF MEASURES ON "STABLE" BOOLEAN ALGEBRAS

ABSTRACT

We study the properties of finitely additive measures with values in a topological abelian group and defined on a wide class of Boolean algebras, which covers algebras with SIP and algebras Γ_ν (if ν satisfies some conditions). We establish sufficient conditions for the sequences of such measures to be uniformly strongly

continuous. Novelty in this theme is that we do not require uniform exhaustivity and, in some theorems, even exhaustivity for measures. Applications to weak convergence of measures are presented.

Key words: boolean algebra; topological abelian group; strongly continuous measure; exhaustive measure; uniform exhaustibility of the family of measures; uniform boundedness of the family of measures; poor convergence of measures.

Citation. Svistula M.G., Sribnaya T.A. Properties of measures on "stable" boolean algebras. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 7–22. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-7-22>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Svistula M.G., Sribnaya T.A., 2022

Marina G. Svistula — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Tatyana A. Sribnaya — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Bhaskara Rao M., Bhaskara Rao K.P.S. Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces. *Mathematika*, 1973, vol. 20, issue 02, pp. 214–223. DOI: <http://dx.doi.org/10.1112/S0025579300004800>.
- [2] Klimkin V.M., Svistula M.G. On the Pointwise Limit of Vector Charges with the Saks Property. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, issue 3, pp. 407–415. DOI: <https://doi.org/10.4213/MZM274>. (In Russ.)
- [3] Luschgy H., Solecki S. Strong continuity of invariant probability charges. *Colloquium Mathematicum*, 2004, vol. 101, issue 1, pp. 135–142. DOI: <http://dx.doi.org/10.4064/cm101-1-9>.
- [4] Cavaliere P., de Lucia P., Weber H. Approximation of finitely additive functions with values in topological groups. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen = Journal of analysis and its applications*, 2013, vol. 32, no. 4, pp. 477–495. DOI: <http://dx.doi.org/10.4171/ZAA/1495>.
- [5] Diestel J., Jr. Uhl J. Vector measures. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 15. Providence: American Mathematical Society, 1977, 319 p. Available at: <https://www.ams.org/books/surv/015/surv015-endmatter.pdf>.
- [6] Freniche F.J. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the Subsequential Interpolation Property. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1984, vol. 92, issue 3, pp. 362–366. DOI: <http://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0759653-1>.
- [7] Musiał K. Absolute Continuity and the Range of Group Valued Measure. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série de sciences math., astr. et phys.*, 1973, vol. XXI, no. 2, pp. 105–113. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Kazimierz-Musial-2/publication/284178504_Absolute_Continuity_and_the_Range_of_Group_Valued_Measure/links/564e305d08ae1ef9296c67ad/Absolute-Continuity-and-the-Range-of-Group-Valued-Measure.pdf.
- [8] Alekseyuk V.N. Set functions. Leningrad: LGPI, 1982, 78 p. (In Russ.)
- [9] Klimkin V.M. Introduction to the theory of set functions. Saratov: Izd-vo Saratovskogo universiteta, Kuibyshevskii filial, 1989, 210 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=583121&pg=1>. (In Russ.)
- [10] Bogachev V.I. Fundamentals of measure theory. Moscow-Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2003, vol. 2, 576 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=507098>. (In Russ.)
- [11] Shiryaev A.N. Probability. Moscow: Nauka, 1980, 574 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=470836>. (In Russ.)
- [12] Bogachev V.I. Fundamentals of measure theory. Moscow-Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2003, vol. 1, 544 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=443457>. (In Russ.)
- [13] Candeloro D. Alcuni teoremi di uniforme limitatezza. *Rendiconti dell'Accademia Nazionale detta dei XL*, 1985, vol. 9, pp. 249–260. Available at: https://www.researchgate.net/publication/237311429_Alcuni_teoremi_di_uniforme_limitatezza.
- [14] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 1983, 214, pp. 1–36. Available at: <https://eudml.org/doc/268517>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31

УДК 517.982.22

Дата: поступления статьи: 30.08.2022
после рецензирования: 05.10.2022
принятия статьи: 14.11.2022

С.И. Страхов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: www.stepan121@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2905-9124>

КАК РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ В МЕТРИКЕ СФЕРИЧЕСКОГО РАСТВОРА ВЛИЯЕТ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА¹

АННОТАЦИЯ

Найдена связь между метрикой сферического раствора на пространстве всех подпространств симметричного пространства и некоторой числовой характеристикой подпространства. Известно, что, например, в L_1 эта характеристика принимает лишь два значения (т. е. это бинарное пространство), а в L_2 бесконечно много значений. С помощью найденной связи обобщены необходимые условия бинарности симметричного пространства.

Ключевые слова: симметричное пространство; пространство Орлича; сферический раствор между подпространствами; дизъюнктные функции; независимые функции; сильно вложенное подпространство.

Цитирование. Страхов С.И. Как расстояние между подпространствами в метрике сферического раствора влияет на геометрическую структуру симметричного пространства // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 23–31. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Страхов С.И., 2022

Степан Игоревич Страхов — ассистент кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В статье мы изучаем геометрическую структуру симметричных пространств (с.п.), рассматривая следующую числовую характеристику. Пусть X — с.п., $H \subset X$ — его подпространство и

$$\eta_X(H) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{x \in H, \|x\|=1} \sup_{e \in [0,1], \mu(e) \leq \tau} \|x\chi_e\|_X. \quad (1)$$

Подпространства с.п. разделяют на два противоположных класса: *сильно вложенные*, т. е. такие, в которых сходимость по норме эквивалентна сходимости по мере, и подпространства, содержащие последовательности почти дизъюнктных функций (все определения см. в следующем параграфе). Следующие три простых факта дают некоторое понимание о значениях η_X :

- 1) если $H \subset X$ содержит почти дизъюнктную последовательность, то $\eta_X(H) = 1$;

¹Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-878).

- 2) если $\eta_X(H) < 1$, то H — сильно вложенное подпространство;
 3) $\eta_X(H) = 0$, если и только если функции единичного шара B_H имеют равностепенно непрерывные нормы, т. е.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{e \in [0,1]: \mu(e) \leq \tau} \sup_{x \in B_H} \|x\chi_e\|_X = 0.$$

Обратные импликации к пунктам 1) и 2) не всегда имеют место, более подробно см. [1].

Мы называем с.п. X бинарным, если η_X принимает лишь два значения 0 и 1. В статье [2] показано, что при $p \in [1, 2)$ пространства Лебега L_p бинарны, а при $p > 2$ характеристика (1) принимает бесконечно много значений в L_p . Этот результат интересно сравнить с тем фактом, что геометрическая структура пространства L_p в случае $p \in [1, 2)$ сложнее, чем при $p \geq 2$. Также стоит отметить, что бинарность L_p при $p \in [1, 2)$ в других терминах и с помощью иной техники доказана в [3, теорема 13].

Более того, в [2] были даны достаточные условия небинарности с.п.: если в с.п. функции Радемахера эквивалентны стандартному базису l_2 и существует нормированная дизъюнктивная последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, для которой выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right\|_X \leq \|(a_i)\|_{l_2}, \quad (2)$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$, то с.п. X небинарно. Мы обобщим эти достаточные условия: каждому с.п. можно поставить в соответствие два множества пространств последовательностей: первое из них связано с подпространствами, содержащими последовательности почти дизъюнктивных функций, а второе с подпространствами, единичный шар которых имеет равностепенно непрерывные нормы. Если эти множества пересекаются, то с.п. небинарно.

При доказательстве этого результата мы использовали связь характеристики (1) с так называемой метрикой раствора на пространстве всех подпространств с.п. X . Для подпространства $H \subset X$ значение $\eta_X(H)$ сверху и снизу оценивается через расстояния в этой метрике до множества подпространств с крайними значениями рассматриваемой характеристики (см. неравенство (4)).

1. Предварительные сведения

Банахово пространство X измеримых на $[0, 1]$ функций называется *симметричным* или *перестановочно-инвариантным*, если

- 1) оно идеально, т. е. из $|x(t)| \leq |y(t)|$ для п.в. $t \in [0, 1]$, измеримости x и $y \in X$ следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$;
 2) из *равноизмеримости* функций x и y , т. е. равенства

$$\mu(\{t \in [0, 1] : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in [0, 1] : |x(t)| > u\}), \quad \forall u > 0,$$

где $\mu(e)$ — мера Лебега множества $e \subset \mathbb{R}$, и $y \in X$ вытекает $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0, 1]$ функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geq 0 : \mu(\{s \in [0, 1] : |x(s)| > u\}) < t\}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Хорошо известно, что всякое с.п. является промежуточным между L_∞ и L_1 , т.е. $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Стандартный пример с.п. — пространство Лебега L_p , $p \in [1, \infty]$. Естественным обобщением L_p служат так называемые пространства Орлича. Функция $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией Орлича, если она строго возрастает, непрерывна, $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$, $F(0) = 0$ и $F(1) = 1$. Пространство Орлича L_F состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_F} = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 F\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leq 1 \right\}$$

конечна. Аналогично вводится понятие пространств Орлича последовательностей l_F . Последовательность вещественных чисел $(a_n)_{n=1}^\infty \in l_F$ тогда и только тогда, когда

$$\|(a_n)\|_{l_F} = \inf \left\{ u > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{|a_n|}{u}\right) \leq 1 \right\} < \infty.$$

В работе мы будем рассматривать лишь сепарабельные с.п. Пространство Орлича L_F сепарабельно тогда и только тогда, когда $F \in \Delta_2^\infty$, т. е. существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t > t_0$ имеет место неравенство $F(2t) \leq KF(t)$, для некоторой константы $K > 0$.

Ещё одним классическим примером с.п. служат пространства Лоренца. Пусть $\varphi(t)$ — положительная непрерывная возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$ такая, что $\varphi(0) = 0$. Пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left(\int_0^1 (x^*(t))^p d\varphi(t) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Для функции Орлича F определим следующие подмножества пространства $C[0, 1]$:

$$E_{F,A}^\infty = \overline{\left\{ G(x) = \frac{F(xy)}{F(y)} : y > A > 0 \right\}}, \quad C_{F,A}^\infty = \overline{\text{conv} E_{F,A}^\infty},$$

$$E_F^\infty = \bigcap_{A>0} E_{F,A}^\infty, \quad C_F^\infty = \bigcap_{A>0} C_{F,A}^\infty,$$

где замыкание берётся в $C[0, 1]$. Как легко видеть, множество C_F^∞ состоит из выпуклых возрастающих функций на $[0, 1]$.

С помощью этих множеств изучают геометрическую структуру подпространств пространства L_F , порождённых последовательностью дизъюнктивных функций, а именно: в сепарабельном пространстве L_F существует последовательность дизъюнктивных функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которая эквивалентна каноническому базису пространства Орлича последовательностей l_G , если и только если $G \in C_F^\infty$ (см. [4, предложение 4]).

Если $F(t) = t^p$ (случай, когда пространство Орлича совпадает с пространством Лебега L_p), то $E_{F,A}^\infty = E_F^\infty = C_{F,A}^\infty = C_F^\infty = \{t^p\}$. Более того, для произвольной функции Орлича F множество C_F^∞ всегда содержит некоторую степенную функцию. Точнее, степенная функция $t^p \in C_F^\infty$, если и только если $p \in [\alpha_F^\infty, \beta_F^\infty]$, где α_F^∞ и β_F^∞ — индексы Орлича — Матушевской, определяемые следующим образом:

$$\alpha_F^\infty = \sup \left\{ p : \sup_{x,y \geq 1} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} < \infty \right\}, \quad \beta_F^\infty = \inf \left\{ p : \inf_{x,y \geq 1} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} > 0 \right\}.$$

Определение 1. Пусть X — с.п. Последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $\|g_n\|_X = 1$, называется почти дизъюнктивной, если $\|g_n - f_n\|_X \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторой дизъюнктивной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X$.

Примером сильно вложенного подпространства служит замкнутая линейная оболочка функций Радемахера $[r_n]$. Напомним, что для $n \in \mathbb{N}$ функции Радемахера задаются как

$$r_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Очевидно, что $|r_n(t)| \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$, $t \in [0, 1]$ и, следовательно, каждое с.п. X содержит все функции Радемахера. Из неравенства Хинчина (см., например, [5]) легко вывести, что $[r_n]$ сильно вложенное подпространство, например, во всех L_p , $p \in [1, \infty)$.

Пусть X — с.п. и $\mathfrak{R}$ — множество всех замкнутых подпространств из X . Как показано в работе [6], $\mathfrak{R}$ — полное метрическое пространство с метрикой

$$\tilde{\Theta}(H, E) = \max \left\{ \sup_{h \in S_H} \rho(h, S_E), \sup_{f \in S_E} \rho(f, S_H) \right\},$$

где H, E — подпространства из X , $S_H = \{x \in H : \|x\|_X = 1\}$, а ρ — стандартное расстояние от элемента до множества в нормированном пространстве. Если H или E равно $\{0\}$, то положим $\tilde{\Theta}(H, E) = 2$. Введённую метрику называют сферическим раствором. На $\mathfrak{R}$ ещё рассматривают и обычный раствор между подпространствами:

$$\Theta(H, E) = \max \left\{ \sup_{h \in S_H} \rho(h, E), \sup_{f \in S_E} \rho(f, H) \right\},$$

который не всегда является метрикой на $\mathfrak{R}$, но он более удобен в вычислениях, а главное имеют место неравенства:

$$\frac{\tilde{\Theta}(H, E)}{2} \leq \Theta(H, E) \leq \tilde{\Theta}(H, E). \quad (3)$$

2. Основные результаты

Следующий результат говорит о том, что характеристика η_X является непрерывной функцией на $(\mathfrak{R}, \tilde{\Theta})$.

Теорема 1. Пусть X — с.п., H и E — подпространства из X . Тогда

$$|\eta_X(H) - \eta_X(E)| \leq \tilde{\Theta}(H, E).$$

Доказательство. Пусть $\eta_X(H) = \alpha$, $\eta_X(E) = \beta$. Из формулы (1) следует, что существуют последовательности $\{h_n\}_{n=1}^\infty \in S_H$ и $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset [0, 1]$, $\mu(e_n) \rightarrow 0$ такие, что

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n \chi_{e_n}\|.$$

По определению сферического раствора имеем

$$\sup_{h \in S_H} \rho(h, S_E) \leq \tilde{\Theta}(H, E),$$

откуда для всех $n = 1, 2, \dots$

$$\rho(h_n, S_E) \leq \tilde{\Theta}(H, E).$$

В силу определения инфимума для произвольного $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset S_E$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\|h_n - f_n\| \leq \rho(h_n, S_E) + \varepsilon \leq \tilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon.$$

Тогда, применяя неравенство треугольника, идеальность нормы и последнее неравенство, получим

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n \chi_{e_n}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n \chi_{e_n} + f_n \chi_{e_n} - f_n \chi_{e_n}\| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n \chi_{e_n}\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_n - f_n) \chi_{e_n}\| \leq \\ &\leq \eta_X(E) + \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - f_n\| \leq \beta + \tilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оценку для β :

$$\beta \leq \alpha + \tilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon,$$

т. е. для всякого $\varepsilon > 0$

$$|\alpha - \beta| \leq \tilde{\Theta}(H, E) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем утверждение теоремы.

Следствие 1. Пусть X — с.п. и E, H, K — подпространства из X . Тогда

$$\eta_X(K) - \tilde{\Theta}(K, H) \leq \eta_X(H) \leq \eta_X(E) + \tilde{\Theta}(H, E).$$

В частности, если E_1 — подпространство, содержащее почти дизъюнктную последовательность (т. е. $\eta_X(E_1) = 1$), а E_0 — подпространство, функции единичного шара которого имеют равностепенно непрерывные нормы (т. е. $\eta_X(E_0) = 0$), то для произвольного подпространства $H \subset X$

$$1 - \tilde{\Theta}(H, E_1) \leq \eta_X(H) \leq \tilde{\Theta}(H, E_0). \quad (4)$$

В [7] показано, что $\eta_X(E) = 0$, если E — конечномерное подпространство сепарабельного с.п. X . Отсюда может возникнуть идея о том, что с помощью конечномерных подпространств, применяя правую часть неравенства (4), можно получать верхнюю оценку для $\eta_X(H)$ в случае бесконечномерного подпространства H . Но это невозможно, так как метрика сферического раствора между подпространствами различных размерностей больше либо равна 1 (см. [8, с. 87]).

Следующая теорема обобщает результат из работы [2], давая более общие достаточные условия небианарности с.п. Мы немного упростили формулировку, а именно теорема остаётся верной, если вместо пространств последовательностей l_G и l_F взять банаховы пространства последовательностей с базисами, удовлетворяющими условиям теоремы.

Теорема 2. Пусть G и F — функции Орлича такие, что $l_G \subset l_F$ и $C\|x\|_{l_G} \geq \|x\|_{l_F}$ для всех $x \in l_G$. Предположим, что в с.п. X существуют базисные последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\eta_X([g_n]) = 0$, $\|g_n\| = 1$, $\text{supp } g_n \subset [0, \frac{1}{2}]$, $n = 1, 2, \dots$, и существует $A > 0$ такое, что для всех $\beta_n \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$A\|(\beta_n)\|_{l_G} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n \right\|_X.$$

2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность дизъюнктных функций, $\|f_n\| = 1$, $\text{supp } f_n \subset [\frac{1}{2}, 1]$, $n = 1, 2, \dots$, и существует $D > 0$ такое, что для всех $\beta_n \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n \right\|_X \leq D \|(\beta_n)\|_{l_F}.$$

Тогда X — небинарное пространство.

Доказательство.

Пусть $\lambda \in (0, \infty)$. Построим подпространство $H_\lambda \subset X$ такое, что

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} \leq \eta_X(H_\lambda) \leq 2\lambda \frac{DC}{A}. \quad (5)$$

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности из условия теоремы. Рассмотрим функции $h_n = g_n + \lambda f_n$, $n = 1, 2, \dots$ и обозначим

$$H_\lambda := [h_n].$$

Так как функции f_n , $n = 1, 2, \dots$, попарно дизъюнкты, то

$$\eta_X(H_\lambda) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|h_n \chi_{\text{supp} f_n}\|}{\|h_n\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda \|f_n\|}{\|g_n\| + \lambda \|f_n\|} = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

По теореме 1 и неравенству (3) получим верхнюю оценку через раствор:

$$\eta_X(H_\lambda) \leq 2\Theta(H_\lambda, [g_n]). \quad (6)$$

Для того чтобы оценить сверху $\Theta(H_\lambda, [g_n])$, рассмотрим сначала

$$\sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \rho(h, [g_n]).$$

Пусть $h \in S_{H_\lambda}$, т. е. для некоторых $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$

$$h := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (g_i + \lambda f_i)$$

и $\|h\| = 1$. Тогда из условия теоремы и идеальности нормы получим

$$1 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (g_i + \lambda f_i) \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i \right\| \geq A \|(\beta_i)\|_{l_G}.$$

В частности, отсюда следует, что функция $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i$ принадлежит $[g_n]$. Тогда из последней оценки вытекает:

$$\begin{aligned} \sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \rho(h, [g_n]) &\leq \sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (g_i + \lambda f_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i \right\| = \\ &= \sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \left\| \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f_i \right\| \leq \sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \lambda D \|(\beta_i)\|_{l_F} \leq \\ &\leq \sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \lambda DC \|(\beta_i)\|_{l_G} \leq \lambda \frac{DC}{A}. \end{aligned}$$

Теперь оценим сверху

$$\sup_{g \in [g_n], \|g\|=1} \rho(g, H_\lambda).$$

Пусть

$$g := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i,$$

для некоторых $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$ и $\|g\| = 1$. Заметим, что последовательность коэффициентов $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_G$ и, значит, функция $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (g_i + \lambda f_i)$ принадлежит пространству H_λ (напомним, что по условию $l_G \subset l_F$). Более того,

$$1 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i \right\| \geq A \|(\beta_i)\|_{l_G} \geq \frac{A}{C} \|(\beta_i)\|_{l_F}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{g \in [g_n], \|g\|=1} \rho(g, H_\lambda) &\leq \sup_{g \in [g_n], \|g\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (g_i + \lambda f_i) \right\| = \\ &= \sup_{g \in [g_n], \|g\|=1} \left\| \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f_i \right\| \leq \\ &\leq \sup_{g \in [g_n], \|g\|=1} \lambda D \|(\beta_i)\|_{l_F} \leq \lambda \frac{DC}{A}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок имеем следующее неравенство:

$$\Theta(H_\lambda, [g_n]) = \max \left(\sup_{h \in H_\lambda, \|h\|=1} \rho(h, [g_n]), \sup_{g \in [g_n], \|g\|=1} \rho(g, H_\lambda) \right) \leq \lambda \frac{DC}{A},$$

откуда, в силу (6), следует справедливость правого неравенства в (5). Выбирая нужным образом число λ_0 , получим подпространство H_{λ_0} такое, что

$$0 < \eta_X(H_{\lambda_0}) < 1.$$

Таким образом, X — небинарное пространство.

Схема доказательства приведённого результата основана на идее из [2]. Там роль последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ играет система Радемахера, "перенесённая" на $[0, \frac{1}{2}]$, которая при неограничительных условиях эквивалентна каноническому базису пространства l_2 (см. [5]). Кроме того, требовалось наличие в с.п. нормированной последовательности дизъюнктивных функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ с условием (2). Отметим, что результат из [2] применим к пространствам Лебега L_p и Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$, при $2 \leq p < \infty$, пространствам Орлича L_F с верхним индексом Орлича — Матушевской $\beta_F^\infty \geq 2$.

В той же работе [2] была доказана бинарность пространства Лебега и Лоренца при $p \in [1, 2)$. Для пространств Орлича случай $\beta_F^\infty < 2$ оставался невыясненным. Только что доказанная теорема позволяет получить результат об отсутствии бинарности в некоторых пространствах Орлича с верхним индексом $\beta_F^\infty < 2$. Следующий пример дан С.В. Асташкиным.

Пример 1. Пусть $F(t) = t^p \log^{-\frac{3}{2}}(et)$, $t \geq 1$, где $p \in (1, 2)$. Легко понять, что $t^p \in E_F^\infty$, и, значит, в L_F существует последовательность дизъюнктивных функций $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$, эквивалентная каноническому базису пространства l_p [4, предложение 4].

Заметим, что функция $t^{-\frac{1}{p}} \in L_F$, так как

$$\int_0^1 F(t^{-\frac{1}{p}}) dt = \int_1^\infty \frac{1}{u \log^{\frac{3}{2}}(eu)} du < \infty.$$

Пусть $\{g'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых функций, равноизмеримых с $t^{-\frac{1}{p}}$. Тогда по теореме 3.8 из [9] она эквивалентна каноническому базису пространства l_p во всяком с.п. X таком, что $L_F \subset X$. В частности, отсюда следует, что подпространство $[g'_n]$ сильно вложено в L_F . Теперь в качестве последовательностей $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ в теореме 2 можно взять следующие:

$$f_n(t) = f'_n(2t-1)\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(t), \quad 0 < t \leq 1,$$

$$g_n(t) = g'_n(2t)\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t), \quad 0 < t \leq 1.$$

В итоге, применяя теорему 2, получаем, что L_F небинарно.

Результаты о бинарности некоторых пространств Орлича содержатся в [1; 10]. В работе [10] доказано, что, например, полумультимпликативные функции Орлича с индексами $1 < \alpha_F^\infty \leq \beta_F^\infty < 2$ порождают бинарные пространства Орлича; в работе [1] показано, что если $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = 1$ и в L_F выполняется аналог критерия Данфорда — Петтиса о слабой компактности, то L_F бинарно.

В связи с неравенством (4) возникает вопрос: насколько хорошо значение характеристики $\eta_X(H)$ можно приблизить с помощью растворов. Более точно: если X — небинарное с.п. с η -нормальной структурой, то имеют ли место следующие равенства:

$$\eta_X(H) = 2 \inf_{E_0 \subset X} \Theta(H, E_0), \quad (7)$$

$$\eta_X(H) = 1 - 2 \inf_{E_1 \subset X} \Theta(H, E_1),$$

где H — подпространство из X , E_0 — подпространство, у которого функции шара имеют равностепенно непрерывные нормы, а E_1 — подпространство, содержащее последовательность дизъюнктивных функций.

Нетрудно показать, что такие равенства не всегда имеют место. Действительно, равенство (7) не выполняется для любого подпространства $H \subset L_2$, с $\eta_{L_2}(H) \in (0, 1)$. Согласно результатам из работы [11] раствор и сферический раствор для любых подпространств H и E из L_2 связаны соотношением

$$\tilde{\Theta}(H, E) = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \Theta^2(H, E)})}.$$

Пусть в L_2 существует подпространство H , для которого выполняется равенство (7), т. е. имеет место равенство

$$\alpha := \eta_X(H) = 2\Theta(H, E_0)$$

(общий случай, когда инфимум может не достигаться, рассматривается аналогично). Тогда в силу неравенства (4)

$$\alpha \leq \tilde{\Theta}(H, E_0) = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}})},$$

откуда

$$3 \leq \alpha^2,$$

что невозможно.

Отметим, что в L_2 раствор связан с оценками норм ортогональных проекторов на подпространства. А именно по теореме 1 из [12] выполняется следующее равенство:

$$\Theta(H, E) = \|P_H - P_E\|,$$

где P_H и P_E — ортогональные проекторы на подпространства H и E соответственно. Отсюда теорема 1 в случае $X = L_2$ принимает следующий вид (см. неравенство (3)):

Теорема 3. Пусть H и E — подпространства из L_2 , а P_H и P_E — ортогональные проекторы на эти подпространства соответственно. Тогда

$$|\eta_{L_2}(H) - \eta_{L_2}(E)| \leq 2\|P_H - P_E\|.$$

В заключение применим технику, связанную с характеристикой (1), для доказательства рефлексивности сильно вложенных подпространств.

Предложение 1. Пусть X — с.п. Если подпространство $H \subset X$ сильно вложено, то H рефлексивно.

Доказательство. Предположим противное, пусть H — нерефлексивное подпространство. Так как по условию H сильно вложено, то на H сходимость в X и L_1 -норме эквивалентны. Поэтому H изоморфно подпространству из L_1 (более точно, тождественный оператор $I : (H, \|\cdot\|_X) \rightarrow (H, \|\cdot\|_{L_1})$ будет изоморфизмом). Заметим, что $(H, \|\cdot\|_{L_1})$ — сильно вложенное подпространство в L_1 . Свойство рефлексивности пространства инвариантно относительно изоморфизма, и, значит, H — нерефлексивное подпространство в L_1 .

Как уже говорилось, L_1 бинарно, откуда для подпространства H возможны лишь два варианта: $\eta_{L_1}(H) = 0$ или $\eta_{L_1}(H) = 1$. Предположим, что $\eta_{L_1}(H) = 0$. Тогда, по лемме 2 из [13] функции единичного шара подпространства H имеют равностепенно непрерывные нормы в L_1 , следовательно, по теореме Данфорда — Петтиса этот шар — относительно слабо компактное подмножество в L_1 . Отсюда H — рефлексивное подпространство L_1 , что противоречит предположению.

Пусть теперь $\eta_{L_1}(H) = 1$. По [7, теорема II.2] для L_1 это условие эквивалентно тому, что H не содержится в так называемом множестве Кадеца — Пелчинского

$$M_{L_1, \varepsilon} = \{x \in L_1 : \mu(t : |x(t)| \geq \varepsilon \|x\|_{L_1}) \geq \varepsilon\}$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Отсюда по теореме Кадеца — Пелчинского (см. [14, теорема 4.1]) H содержит почти дизъюнктивную последовательность, что противоречит сильной вложенности H в L_1 .

Литература

- [1] Страхов С.И. Об одной характеристике сильно вложенных подпространств в симметричных пространствах // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 25–32. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-25-32>. EDN: <https://www.elibrary.ru/syswca>

- [2] Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В. Структура подпространств пространств $\Lambda_p(\phi)$ // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 552–554. URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42865&option_lang=rus.
- [3] Rosenthal H.P. On subspaces of L_p // Annals of Mathematics. 1973. Vol. 97, № 2. P. 344–373. DOI: <http://doi.org/10.2307/1970850>.
- [4] Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces. III // Israel Journal of Mathematics. 1971. Vol. 10. No. 3, pp. 368–389. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02764715>.
- [5] Асташкин С.В. Система Радемахера в функциональных пространствах. Москва: Физматлит, 2017. 549 с. URL: <https://fireras.su/biblio/?p=16653>.
- [6] Berkson E. Some metrics on the subspaces of a Banach space // Pacific Journal of Mathematics. 1963. Vol. 13, № 1. P. 7–22. DOI: <http://doi.org/10.2140/PJM.1963.13.7>.
- [7] Новиков С.Я. Геометрические свойства симметричных пространств: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Воронеж, 1980.
- [8] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // УМН. 1957. Т. 12, Вып. 2 (74). С. 43–118. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=7581&option_lang=rus.
- [9] Astashkin S.V. On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces // Commentationes Mathematicae. 2016. Vol. 56, № 1. P. 29–44. DOI: <http://doi.org/10.14708/CM.V56I1.1113>.
- [10] Astashkin S.V. The structure of subspaces in Orlicz spaces between L_1 and L_2 . 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2208.07215>.
- [11] Nakamoto R. The spherical gap of operators // Linear Algebra and Its Applications. 1997. Vol. 251, P. 89–95. DOI: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00697-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00697-4).
- [12] Ostrovskii M.I. Topologies on the set of all subspaces of a Banach space and related questions of Banach space geometry // Quaestiones Mathematicae. 1994. Vol. 17, Issue 3. P. 259–319. URL: <http://doi.org/10.1080/16073606.1994.9631766>.
- [13] Асташкин С.В., Страхов С.И. О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2018. № 8. С. 3–11. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=9381&option_lang=rus; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35097504>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xqlfbz>.
- [14] Figiel T., Johnson W.B., Tzafriri L. On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces // Journal of Approximation Theory. 1975. Vol. 13, Issue 4. P. 395–412. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045\(75\)90023-4](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045(75)90023-4).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31

Submitted: 30.08.2022

Revised: 05.10.2022

Accepted: 14.11.2022

S.I. Strakhov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: www.stepan121@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2905-9124>

HOW THE DISTANCE BETWEEN SUBSPACES IN THE METRIC OF A SPHERICAL OPENING AFFECTS THE GEOMETRIC STRUCTURE OF A SYMMETRIC SPACE²

ABSTRACT

A relationship is found between the metric of a spherical opening on the space of all subspaces of a symmetric space and some numerical characteristic of the subspace. It is known that, for example, in L_1 this characteristic takes only two values (i.e. this is a binary space), while in L_2 there are infinitely many values. Using the connection found, the necessary conditions for the binarity of a symmetric space were generalized.

²The work was completed as a part of the implementation of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center the Volga Federal District, agreement no. 075-02-2022-878.

Key words: symmetric space; Orlicz space; spherical opening between subspaces; disjoint functions; independent functions; strongly embedded subspace.

Citation. Strakhov S.I. How the distance between subspaces in the metric of a spherical opening affects the geometric structure of a symmetric space. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 23–31. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-23-31>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Strakhov S.I., 2022

Stepan I. Strakhov — assistant of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Strakhov S.I. On a characteristic of strongly embedded subspaces in symmetric spaces. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 25–32. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-25-32>. EDN: <https://www.elibrary.ru/syswca>. (In Russ.)
- [2] Novikov S.Ya., Semenov E.M., Tokarev E.V. The structure of subspaces of the space $\Lambda_p(\phi)$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1979, vol. 20, pp. 760–761. Available at: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42865&option_lang=rus (English; Russian original).
- [3] Rosenthal H.P. On subspaces of L_p . *Annals of Mathematics*, 2nd Ser., 1973, vol. 97, № 2, pp. 344–373. DOI: <http://doi.org/10.2307/1970850>.
- [4] Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces. III. *Israel Journal of Mathematics*, 1971, vol. 10, no. 3, pp. 368–389. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF02764715>.
- [5] Astashkin S.V. The Rademacher system in function spaces. Moscow: Fizmatlit, 2017, 549 p. Available at: <https://fireras.su/biblio/?p=16653>. (In Russ.)
- [6] Berkson E. Some metrics on the subspaces of a Banach space. *Pacific Journal of Mathematics*, 1963, vol. 13, no. 1, pp. 7–22. DOI: <http://doi.org/10.2140/PJM.1963.13.7>.
- [7] Novikov S.Ya. Geometric properties of symmetric spaces: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Voronezh, 1980. (In Russ.)
- [8] Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indexes of linear operators. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, issue 2 (74), pp. 43–118. Available at: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=7581&option_lang=rus. (In Russ.)
- [9] Astashkin S.V. On symmetric spaces containing isomorphic copies of Orlicz sequence spaces. *Commentationes Mathematicae*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 29–44. DOI: <http://doi.org/10.14708/CM.V56I1.1113>.
- [10] Astashkin S.V. The structure of subspaces in Orlicz spaces between L_1 and L_2 , 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2208.07215>.
- [11] Nakamoto R. The spherical gap of operators. *Linear Algebra and Its Applications*, 1997, vol. 251, pp. 89–95. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00697-4](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(95)00697-4).
- [12] Ostrovskii M.I. Topologies on the set of all subspaces of a Banach space and related questions of Banach space geometry. *Quaestiones Mathematicae*, 1994, vol. 17, issue 3, pp. 259–319. DOI: <http://doi.org/10.1080/16073606.1994.9631766>.
- [13] Astashkin S.V., Strakhov S.I. On Symmetric Spaces With Convergence in Measure on Reflexive Subspaces. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 8, pp. 1–8. DOI: <http://doi.org/10.3103/S1066369X18080017>. EDN: <https://www.elibrary.ru/vcdwts>. English; Russian original.
- [14] Figiel T., Johnson W.B., Tzafriri L. On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces. *Journal of Approximation Theory*, vol. 13, issue 4, April 1975, pp. 395–412. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045\(75\)90023-4](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9045(75)90023-4).



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-32-45

УДК 517+531.01

Дата: поступления статьи: 12.04.2022
после рецензирования: 18.05.2022
принятия статьи: 14.11.2022

М.В. Шамолин

Институт механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ. ЧАСТЬ 8. ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА И АЛГОРИТМЫ ЕГО ДИАГНОСТИРОВАНИЯ

АННОТАЦИЯ

Данная статья является восьмой работой цикла по дифференциальной и топологической диагностике. В ней проводится качественный и численный математический эксперимент по диагностике системы управления летательным аппаратом при его планировании с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Предлагаемые алгоритмы диагностирования успешно работают при поиске различного рода опорных неисправностей, в частности, неисправностей датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы, неисправностей, близких к опорным, при траекторных измерениях с ошибкой, а также в случае непрерывной экспресс-диагностики. При этом строится и используется определенный алгоритм диагностирования в соответствии с разработанной ранее методикой.

Ключевые слова: задача дифференциальной диагностики; система прямого (непрямого) управления; диагностирование; априорный список неисправностей.

Цитирование. Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 8. Движение летательного аппарата и алгоритмы его диагностирования // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 32–45. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-32-45>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Шамолин М.В., 2022

Максим Владимирович Шамолин — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики, эксперт РАН, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

Введение

Как уже отмечалось ранее [1; 8; 9], задача дифференциальной диагностики функционального состояния объектов управления может быть сведена к двум самостоятельным последовательно решаемым задачам: задаче контроля, т. е. установлению критерия наличия неисправности в системе, и задаче диагностирования, т. е. поиску происшедшей неисправности. Критерием наличия неисправности в системе может быть выход траектории объекта на некоторую заранее выбранную поверхность. Неисправность может произойти в любой заранее неизвестный момент времени движения объекта, в любой точке внутри данной поверхности контроля [10–12].

Исходной информацией при решении задачи контроля является математическая модель движения рассматриваемого объекта, ограниченная область ее начальных условий и априорный список

математических моделей движения объекта с той или иной возможной неисправностью. По этой информации может быть выбрана поверхность контроля. Задача же диагностирования может быть решена путем последующего слежения за траекторией объекта после ее выхода на поверхность контроля. При этом необходимо, чтобы процесс диагностики совершался во время движения объекта, был осуществлен в течение весьма короткого интервала времени. Эти обстоятельства иногда не позволяют использовать довольно громоздкие алгоритмы теории идентификации и приводят к необходимости построения алгоритмов непрерывной экспресс-диагностики [13–15].

Рассматривается применение развиваемой методики диагностирования к теории летательных аппаратов.

В качестве численного эксперимента было рассмотрено движение летательного аппарата (ЛА), описываемого уравнениями, приведенными в [16]. ЛА находится в режиме планирующего спуска с высот, близких к орбитальным ($\cong 100$ км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Воспроизведем полнее и уточним уравнения движения ЛА и покажем, что они приводятся в некотором смысле к каноническому виду.

Остановимся на общем описании рассматриваемого подхода подробнее. Проектирование современных систем управления движением сопряжено со значительными трудностями. Аналитическое исследование ограничено, поскольку порядок системы уравнений движения достаточно высок, сами уравнения нелинейны, нестационарны и многопараметричны. Имеются также такие факторы, как нецентральность поля тяготения, несферичность поверхности Земли и др.

В то же время можно решить рассматриваемый круг задач с помощью метода математического моделирования. Оно используется для синтеза законов управления летательных аппаратов, определения влияния ошибок датчиков инерциальной информации на характеристики движения.

1. Системы, описывающие движение летательного аппарата

Эти уравнения имеют следующую структуру.

Динамические уравнения центра масс (штрихом в системах нормального вида обозначается производная по времени)

$$V'_{y_i} = -W_{e_{y_i}} + g_{y_i} + \frac{F_{y_i}}{m}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где V_{y_i} — проекции вектора путевой скорости ЛА $\mathbf{V}$ на оси системы координат M_{y_i} , связанной с географической вертикалью и ориентированной в азимуте в ортодромической координатной сетке, $W_{e_{y_i}}$ — проекции составляющей ускорения точки M , обусловленной кривизной и вращением Земли на те же оси, g_{y_i} — проекции ускорения силы тяжести на рассматриваемую подвижную систему координат, F_{y_i} — проекции силы $\mathbf{F}$, действующей на ЛА, где $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{T}$, $\mathbf{A}$ — аэродинамическая сила, $\mathbf{T}$ — сила тяги двигателя, m — масса ЛА.

Кинематические уравнения движения центра масс имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{V_{y1}}{r \cos \sigma_2}, \\ \sigma'_2 &= \frac{V_{y2}}{r}, \\ r' &= V_{y3}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь σ_1 и σ_2 — ортодромические долгота и широта центра масс (точки M) летательного аппарата, r — радиус-вектор этой точки в системе O_{y_i} .

Уравнения движения ЛА вокруг центра масс в проекциях на оси $M_s = M_{s1}, M_{s2}, M_{s3}$ системы, жестко связанной с ЛА, таковы:

$$\begin{aligned} I_{s1} \frac{d\omega_{s1}}{dt} + (I_{s3} - I_{s2})\omega_{s2}\omega_{s3} - I_{s2s3}(\omega_{s2}^2 - \omega_{s3}^2) &= M_{s1}, \\ I_{s2} \frac{d\omega_{s2}}{dt} + (I_{s1} - I_{s3})\omega_{s1}\omega_{s3} - I_{s2s3} \left(\frac{d\omega_{s3}}{dt} + \omega_{s2}\omega_{s3} \right) &= M_{s2}, \\ I_{s3} \frac{d\omega_{s3}}{dt} + (I_{s2} - I_{s1})\omega_{s1}\omega_{s2} - I_{s2s3} \left(\frac{d\omega_{s2}}{dt} - \omega_{s1}\omega_{s2} \right) &= M_{s3}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь I_{s1}, I_{s2}, I_{s3} — главные, а I_{s2s3} — центробежный моменты инерции, $\omega_{s_i}, i = 1, 2, 3$, — угловые скорости ЛА; все — в проекциях на оси M_s .

Так как

$$\omega_s = \omega_c + \alpha' + \beta' + \gamma'_c, \quad (1.4)$$

где ω_c — угловая скорость траекторной системы координат, α — угол атаки, β — угол скольжения, γ_c — угол скоростного крена, то имеем еще одну группу кинематических уравнений:

$$\omega_s = D_{sc}\omega_c + \gamma'_c D_{sn} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

в которой сами уравнения можно разрешить относительно $\alpha', \beta', \gamma'_c$. Здесь D_{sc}, D_{sn} — матрицы перехода [17; 18].

Кроме того, имеем группу уравнений, выражающих величину ω_c через $U, \sigma_1, \sigma_2, \psi_c$ и θ , где U — угловая скорость вращения Земли, ψ_c — угол скоростного курса, θ — угол наклона траектории:

$$\omega_c = D_{cy} \left[U_y + \psi'_c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sigma'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \sigma'_1 D_{c\zeta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \theta' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где $D_{cy}, D_{c\zeta}$ — соответствующие матрицы перехода [19; 20].

Из определения углов ψ_c и θ следуют соотношения

$$\theta' = \frac{\psi'_c = -\frac{V'_{y1} \cos \psi_c + V'_{y2} \sin \psi_c}{V'_{y3} \cos \theta + \sin \theta (V'_{y1} \sin \psi_c - V'_{y2} \cos \psi_c)}, \quad (1.7)$$

где V — абсолютная величина вектора путевой скорости ЛА.

Уравнения (1.1)–(1.7) могут быть представлены в виде одного уравнения нормального вида на своем 14-мерном фазовом многообразии как

$$x' = K(x), \quad (1.8)$$

где x — 14-мерный вектор [21]:

$$x = (V_{y1}, V_{y2}, V_{y3}, \psi_c, \theta, r, \lambda, \varphi, \omega_{s1}, \omega_{s2}, \omega_{s3}, \alpha, \beta, \gamma_c). \quad (1.9)$$

Здесь (для простоты) рассмотрен случай, когда полюс ортодромии лежит на оси вращения Земли, т. е. $\sigma_1 = \lambda$, $\sigma_2 = \varphi$, где λ и φ — геоцентрические долгота и широта центра масс ЛА [22; 23].

2. Система управления летательного аппарата

Аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} X &= c_x \frac{\rho V^2}{2} S, \quad Y = c_y \frac{\rho V^2}{2} S, \quad Z = c_z \frac{\rho V^2}{2} S, \\ M_{s1} &= \frac{\rho V^2}{2} S b_a m_z, \quad M_{s2} = \frac{\rho V^2}{2} S l m_x, \quad M_{s3} = \frac{\rho V^2}{2} S l m_y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ρ — плотность воздуха на высоте полета, S — характерная площадь ЛА, b_a — средняя аэродинамическая хорда, l — размах крыльев, c_x, c_y, c_z — аэродинамические коэффициенты сил, m_x, m_y, m_z — аэродинамические коэффициенты моментов.

Будем рассматривать аэродинамические коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} c_x &= c_{x\alpha}(M, \alpha) + c_{xTP}(M, h), \\ c_y &= c_{y\alpha}(M, \alpha) + c_y^{\delta_b}(M) \delta_b, \\ c_z &= c_z^{\beta}(M, \alpha) \beta + c_z^{\delta_H}(M, \alpha) \delta_H, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} m_x &= m_{s1} = m_{s1\alpha}(M, \alpha) + m_{s1}^{\omega_{s1}}(M) \frac{b_a}{V} \omega_{s1} + m_{s1}^{\delta_b}(M) \delta_b, \\ m_y &= m_{s2} = m_{s2}^{\beta}(M, \alpha) \beta + m_{s2}^{\omega_{s2}}(M) \frac{l}{2V} \omega_{s2} + m_{s2}^{\omega_{s3}}(M) \frac{l}{2V} \omega_{s3} + \\ &\quad + m_{s2}^{\delta_H}(M, \alpha) \delta_H + m_{s2}^{\delta_E}(M) \delta_E, \\ m_z &= m_{s3} = m_{s3}^{\beta}(M, \alpha) \beta + m_{s3}^{\omega_{s2}}(M) \frac{l}{2V} \omega_{s2} + m_{s3}^{\omega_{s3}}(M) \frac{l}{2V} \omega_{s3} + \\ &\quad + m_{s3}^{\delta_H}(M, \alpha) \delta_H. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\delta_b, \delta_E, \delta_H$ имеют вполне ясный геометрический смысл, а именно отклонение рулей высоты, элеронов и рулей направления, соответственно.

Структура системы управления отклонением рулей высоты, направления и элеронов зависит от выбранной программы движения. В данной работе рассмотрено управления следующего вида:

$$\delta_u = f(\delta_{u\max}, \delta_u^0), \quad u = b, E, H, \quad (2.4)$$

где $\delta_{u\max}$ — максимальная величина отклонения величин $\delta_b, \delta_E, \delta_H$, соответственно, а f — некоторая (не обязательно гладкая) функция.

Переменные δ_u^0 определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta_b^0 &= r_1 \omega_{s1} - r_2 \Phi[1] + f(\alpha_m, \sigma_b), \\ \delta_E^0 &= k_1 \omega_{s2} - k_2 \Phi[2] + f(\gamma_m, \sigma_E) + k_7 \Phi[3], \\ \delta_H^0 &= l_1 \omega_{s3} - l_2 \Phi[3] + f(\beta_m, \sigma_H) + l_7 \Phi[2]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\Phi[1] = \theta'$, $\Phi[2] = \gamma_n - \gamma'_s$, $\Phi[3] = -\beta'$ — сигналы, поступающие с гироскопа [24]: значения углов тангажа (θ'), скольжения ($-\beta'$) и разности между программным (γ_n) и вычисленным (γ'_s) значениями угла крена.

Сигналы с постоянными коэффициентами r_i, k_j, l_s формируются в зависимости от углового движения ЛА. Сигналы $f(\sigma_u)$ формируются в зависимости от характеристик траекторного движения ЛА. Здесь $f(\sigma_u)$ также некоторая (не обязательно гладкая) функция. Сигналы формируются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_b &= r_3(\alpha' - \alpha_n) + r_4(\tilde{\alpha}' - \alpha_n) + r_5 \int_{t_0}^t (\alpha' - \alpha_n) dt, \\ \sigma_E &= k_3(\sigma_{2n}^0 - \sigma_{2n}) + k_4(\tilde{\sigma}_{2n}^0 - \tilde{\sigma}_{2n}) + k_5 \int_{t_0}^t (\sigma_{2n}^0 - \sigma_{2n}) dt + k_6(\psi'_s - \psi_{sn}), \\ \sigma_H &= l_3(\sigma_{2n}^0 - \sigma_{2n}) + l_4(\tilde{\sigma}_{2n}^0 - \tilde{\sigma}_{2n}) + l_5 \int_{t_0}^t (\sigma_{2n}^0 - \sigma_{2n}) dt + l_6(\psi'_s - \psi_{sn}).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Здесь величины K' (со штрихом) — суть вычисленные значения переменных, K_n (с индексом “ n ”) — программные значения этих переменных, r_i, k_j, l_s — постоянные коэффициенты, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ — постоянные, ограничивающие значения рассматриваемых сигналов траекторного слежения.

Значения коэффициентов r_i, k_j, l_s приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1
Table 2.1

	1	2	3	4	5	6	7
r	20	0	10	0	0	0	0
k	0,4	0,3	0	0	0	0	1
l	7	7	0	0	0	0	0,3

Уравнения (1.8) совместно с (1.9)–(2.6) и с учетом табл. 2.1 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}x'' &= X(x) + A(x)\xi, \\ \xi &= \Phi(\delta), \\ \delta &= Bx^* + f(\sigma), \\ \sigma &= Cx^{**}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Здесь

$$x^* = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}, \theta^*, \gamma_n - \gamma_s^*, -\beta) \quad (2.8)$$

и

$$x^{**} = (\alpha^* - \alpha_n, \psi_s^* - \psi_n, \sigma_s^* - \sigma_n) \quad (2.9)$$

— шестимерный и трехмерный векторы, составляющие которых представляют значения некоторых координат фазового вектора состояния x , вычисленные на ЛА в процессе полета или сигналов, поступающих с гироскопов;

$$\delta = (\delta_b^0, \delta_E^0, \delta_H^0) \quad (2.10)$$

— трехмерный вектор переменных вида (2.5);

$$\Phi(\delta) = (f(\delta_{b \max}, \delta_b^0), f(\delta_{E \max}, \delta_E^0), f(\delta_{H \max}, \delta_H^0)) \quad (2.11)$$

и

$$f(\sigma) = (f(\alpha_m, \sigma_b), f(\gamma_m, \sigma_E), f(\beta_m, \sigma_H)) \quad (2.12)$$

— трехмерные векторы допустимых нелинейных функций, имеющих вид (2.5)–(2.6), где

$$\sigma = (\sigma_b, \sigma_E, \sigma_H) \quad (2.13)$$

— трехмерный вектор сигналов (2.6);

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2 & k_7 \\ 0 & 0 & l_1 & 0 & l_7 & -l_2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

и

$$C = \begin{pmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_6 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

— постоянные матрицы;

в настоящей работе в численном эксперименте коэффициенты k_6 и l_6 принимались равными нулю.

Уравнение

$$x'' = X(x) + A(x)\xi, \quad (2.16)$$

где x — 14-мерный фазовый вектор (1.9) системы (2.7), $\xi = (\delta_b, \delta_E, \delta_H)$ — 3-мерный вектор управления, $X(x)$ и $A(x)$ — матрицы-функции с довольно громоздкими коэффициентами — здесь не приводятся [25].

Система (2.7) представляет в настоящей работе систему с прямым перекрестным управлением по отклонениям рулей высоты, элеронов и направления.

3. Численный эксперимент и анализ пространства неисправностей

Мы моделировали движение ЛА, представляющее собой планирующий спуск с высот, близких к орбитальным ($\cong 100$ км), с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Программное движение определялось заданием программного угла атаки и угла крена.

Численный эксперимент заключался в моделировании различных неисправностей в системе управления (2.5) и (2.6). Был составлен список возможных неисправностей, в соответствии с классификацией неисправностей, приведенной в [26].

Первый список возможных неисправностей включал следующие неисправности, происходящие в первом канале управления (2.5), т. е. в канале управления рулями высоты δ_b .

3.1. Априорный список неисправностей № 1

Список состоял из 5 следующих неисправностей.

1) *Отказ датчика угловой скорости ω_{s_1}* . Неисправность моделировалась путем обнуления коэффициента r_1 в матрице B в момент времени $t = t_0$, t_0 — момент возникновения неисправности.

Таким образом, при неисправности 1 из априорного списка неисправностей № 1 выполняется условие

$$r_1(t) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (3.1)$$

2) *Отказ при формировании сигнала σ_b* . Моделируется путем обнуления коэффициента r_3 в матрице C :

$$r_3(t) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (3.2)$$

3) *Нарушение симметрии функции $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0)$* . Моделируется путем замены $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0)$ на $f(\delta_{b\max}, \delta_b^0 + \delta')$, т. е. сдвига графика функции f по оси x .

4) *Заклинивание управляющего органа (руля высоты)*. Моделируется как $\delta_b(t) = \delta_b(t_0)$ при $t \geq t_0$, где t_0 — момент возникновения неисправности.

5) *Активный отказ управляющего органа (руля высоты)*. Значение δ_b в момент возникновения неисправности t_0 скачком меняется на $\delta_{b\max}$ — максимально возможное значение δ_b .

Таким образом, при неисправности 5 из априорного списка неисправностей № 1 выполняется условие

$$\delta_b(t) = \delta_{b\max}, \quad t \geq t_0. \quad (3.3)$$

В процессе полета тяжелого ЛА, уравнения движения которого рассмотрены выше, характерно наличие двух существенно отличных по временным характеристикам движений. Это движения вокруг центра масс с постоянными времени порядка минут.

Все перечисленные выше неисправности приводят к изменениям относительно исправного движения вокруг центра масс. В то же время движения ЛА относительно центра масс при различных неисправностях различны между собой и приводят к выходу на поверхность контроля через разные промежутки времени, начиная с момента возникновения неисправности.

Численное интегрирование исправной и соответствующих неисправных систем (2.7) проводилось с шагом $h = 0,8$ с, характерным для движения относительно центра масс тяжелого ЛА с данными уравнениями движения.

3.2. О поверхности контроля

Вектор контроля $y(t)$ для данной системы состоял из одной компоненты — угла атаки α . Множество начальных условий представляло собой сферу $S_{0,1}^{x_{0,1}}$ радиуса 0,1 (рад) в пространстве фазовых переменных с центром в точке

$$x_0 = (V_{y_1}^0, V_{y_2}^0, V_{y_3}^0, \psi_c^0, \theta^0, r^0, \lambda^0, \varphi^0, \omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma_c^0). \quad (3.4)$$

Здесь используются следующие постоянные:

$$\begin{aligned} V_{y_1}^0 &= 7350 \text{ км}, \quad V_{y_2}^0 = 0, \quad V_{y_3}^0 = 0, \\ \lambda^0 &= 0, \quad \varphi^0 = 45^\circ, \quad \omega_{s_1}^0 = 0, \quad \omega_{s_2}^0 = 0, \quad \omega_{s_3}^0 = 0, \\ \alpha^0 &= 0,519 \text{ рад}, \quad \gamma_c^0 = 0, \quad \beta^0 = 0, \\ r^0 &= 646572 \text{ м} \quad (h = 100 \text{ км}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Промежуток времени процесса построения был выбран в следующих пределах:

$$[0; 2000 \text{ с}]. \quad (3.6)$$

Для такого множества начальных условий X^0 , вектора контроля $y(0)$ и априорного списка неисправностей методом статистических испытаний [27] была получена поверхность контроля π_k — отрезок $[0, 499; 0, 539]$ (в радианах). При исправном движении ЛА значение угла атаки находится внутри π_k . Поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей 0,95 (доказанное утверждение).

3.3. Об обнаружении неисправностей

Путем численного интегрирования системы (2.7) моделировалось исправное функционирование объекта (полет ЛА), затем возникновение некоторой (j -й) неисправности из априорного списка в момент времени t_0 и дальнейшее функционирование вплоть до выхода траектории на поверхность π_k . Времена выхода на π_k для разных неисправностей из списка приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1
Table 3.1

Номер неисправности	1	2	3	4	5
Время выхода на поверхность контроля π_k (с)	28	118	16	36	2,4

По выходе траектории на π_k включается алгоритм диагностирования с вектором диагностирования $z = \alpha$, т. е. содержащим ту же компоненту фазового вектора, что и вектор контроля.

Характеристиками алгоритма являются время диагностирования τ и число измерений N (так как численное интегрирование осуществлялось с шагом $h = 0,8$ с, то N и τ связаны соотношением $\tau = Nh$).

Численный эксперимент показал, что для всех номеров i из априорного списка неисправностей алгоритм диагностирования правильно определяет априорные неисправности при $N = 3$ ($\tau = 2,4$ с). Моделировалось также обнаружение неисправностей с вектором диагностирования

$$\bar{z} = (\omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0). \quad (3.7)$$

Численный эксперимент также показал, что для $\bar{z}$ все неисправности из априорного списка определялись однозначно за число измерений $N = 3$.

Прежде чем переходить к неисправностям не из априорного списка, сделаем ряд топологических замечаний.

Определение 3.1. *Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков, которой становится в соответствие набор возможных опорных неисправностей H_j с их окрестностями O_j , подвергающихся диагностированию посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.*

Уточним математическую структуру всего диагностического пространства:

$$(M; O_1, O_2, \dots, O_l; A_1, A_2, A_3), \quad (3.8)$$

где M — множество рассмотренных неисправностей $H_1, \dots, H_l$ вместе с их окрестностями $O_1, \dots, O_l$. Аксиомы A_1, A_2, A_3 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 : & \forall H_j \in M \exists O_j (H_j \subset O_j); \\ A_2 : & \forall O_j \exists H_j (H_j \subset O_j); \\ A_3 : & H_j \subset O_j \cap O_k \Rightarrow \exists O_\mu (H_j \subset O_\mu \subset O_j \cap O_k \vee O_\mu \subset O_j \cup O_k). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аксиома A_1 утверждает, что окрестности O_j , являющиеся подмножествами множества M , покрывают все M , а из аксиомы A_2 следует, что эти окрестности не пусты.

Аксиома A_3 позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j :

$$H_j = \lim_{\mu \rightarrow \infty} O_\mu \Leftrightarrow \forall O_\mu \exists \bar{M} (\mu > \bar{M} \Rightarrow H_j \subset O_\mu), \quad (3.10)$$

каждая окрестность O_μ которого содержит H_j и “близкие” к H_j неподвижные и не содержащиеся в рассматриваемом наборе неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях O_j , надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей.

Если же под элементом x понимать не только событие H_j , но и непредвиденное событие (не включенное в список H возможных неисправностей), которое может произойти в любой

точке M и которое требуется диагностировать посредством H_j , то аксиомы математической структуры диагностического пространства (3.8) могут быть записаны в следующем виде:

$$A_1 : \forall x \in M \exists O_i (x \in O_i), \quad (3.11)$$

то есть окрестности покрывают все M ;

$$A_2 : \forall O_i \exists x (x \in O_i), \quad (3.12)$$

то есть окрестности не пусты;

$$A_3 : x \in O_i \cap O_j \Rightarrow \exists O_k (x \in O_k \subset O_i \cap O_j \vee O_k \subset O_i \cup O_j), \quad (3.13)$$

то есть окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу x .

Предел последовательности $\{O_k\}$ можно определить как элемент

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} O_k, \quad (3.14)$$

каждая окрестность $O_j(x)$ которого содержит H_j и “близкие” к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях $O_j(H_j)$, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей:

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} O_k \Leftrightarrow \forall O_k(x) \exists \bar{K} (k > \bar{K} \Rightarrow x \in O_k, H_j \subset O_k, j = 1, \dots, l). \quad (3.15)$$

Математическая структура диагностического пространства (3.8) позволяет обеспечить ситуацию, при которой решения рассматриваемой динамической системы и системы с неисправностями в системе управления с одинаковыми начальными условиями x^0 из некоторого ограниченного пространства будут отличаться друг от друга, а решения рассматриваемой системы с опорной неисправностью H_j и с не предусмотренной априорным списком (непредвиденной) неисправностью из окрестности O_j этой опорной неисправности с одинаковыми начальными условиями x^0 будут “близкими”, то есть “мало” отличаться друг от друга, и они могут быть диагностированы как опорные неисправности.

Это во всяком случае будет справедливо для непересекающихся окрестностей O_j , $j = 1, \dots, l$, или окрестностей, пересекающихся только вдоль прямых по оси времени.

А вот теперь переходим к неисправностям не из априорного списка.

3.4. Определение неисправностей не из априорного списка

Располагая априорным списком неисправностей, можно определить неисправность, не находящуюся в списке, но близкую к одной из списочных.

Были рассмотрены две неисправности не из списка.

1. Постепенное ухудшение качества показаний датчика угловой скорости $\omega_{s_1}^0$ вплоть до полного исчезновения поступающего с него сигнала.

Эта неисправность моделировалась путем уменьшения r_1 до нуля по линейному закону:

$$r_1(t) = r_{1N}c_1(t - t_0), \quad t > t_0, \quad (3.16)$$

где r_{1N} — номинальное значение коэффициента r_1 , c_1 — отрицательная константа. Достигнув нуля, значение r_1 больше не меняется. Значение $r_1 = 0$ достигается за время $\tau \cong 30 \div 40$ с, т. е. после выхода неисправной системы на поверхность контроля. Таким образом, эта неисправность близка к неисправности из априорного списка неисправностей № 1, но не совпадает с ней, так как в момент выхода на π_k коэффициент r_1 еще не равен нулю.

2. Постепенный отказ в формировании сигнала σ_b . Моделируется как

$$r_3(t) = r_{3N}c_3(t - t_0), \quad t > t_0. \quad (3.17)$$

Здесь r_{3N} — номинальное значение коэффициента r_3 , c_3 — некоторая отрицательная константа.

Достигнув нуля, величина r_3 далее не меняется. Значение $r_3 = 0$ достигается за время $\tau \cong 140 \div 150$ с, т. е. после выхода системы на π_k . Эта неисправность близка к неисправности из априорного списка неисправностей № 1.

Линейный закон в последних двух случаях 1 и 2 из раздела 3.4 взят в принципе на предварительном этапе. Ну а в дальнейших исследованиях предполагается также и нелинейная аппроксимация рассматриваемых величин.

Обнаружение неисправностей 1 и 2 из раздела 3.4 (т. е. не из априорного списка неисправностей № 1) моделировалось следующим образом: возникновение неисправности 1 (неисправности 2) в момент t_0 , включение алгоритма на выходе на π_k (время выхода на π_k для неисправности 1 — 78 с, для

неисправности 2 — 224 с), включение алгоритма с одним из векторов диагностирования z , $\bar{z}$ и выбор минимума из S_j^N , $j = 1, \dots, 5$.

Обнаружением рассматриваемой неисправности 1 (неисправности 2) из раздела 3.4 в данном случае является определение случившейся неисправности как неисправности 1 (неисправности 2) из априорного списка неисправностей № 1.

Численное моделирование показало, что для $N = 5$ ($\tau = 4$ с) алгоритм с векторами диагностирования z и $\bar{z}$ правильно обнаруживает рассматриваемые неисправности 1 и 2.

3.5. Априорный список неисправностей № 2

Каждая неисправность из этого списка характеризовалась наличием функций f_j , $j = 1, \dots, 17$, где f_j содержала j -й набор значений коэффициентов $r_1, r_3, k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$ в цепях формирования сигналов δ_u^0 из (2.5). Различные комбинации приведены в табл. 3.2. В ней индекс Nom означает номинальное значение коэффициента. Из таблицы видно, что неисправности с номерами 1–3 относятся к первому каналу управления из (2.5), формирующему величину δ_b , с номерами 4–10 — ко второму (формирующему величину δ_E), а с номерами 11–17 — к третьему (формирующему величину δ_H).

По этим опорным неисправностям проводилось затем определение несписочных неисправностей в каналах управления. В этом случае распознавался только номер канала: при номере i минимального из чисел S_j^N , $j = 1, \dots, 17$, равном 1, 2 или 3, неисправность определялась как случившаяся в первом канале управления (δ_b), при номере $i = 4, \dots, 10$, — во втором (δ_E), при номере $i = 11, \dots, 17$, — в третьем (δ_H).

Таблица 3.2

Table 3.2

N	r_1	r_3	k_1	k_2	k_3	l_1	l_2	l_3
1	0	Nom						
2	Nom	0						
3	0	0						
4			0	Nom	Nom			
5			Nom	0	Nom			
6			Nom	Nom	0			
7			0	0	Nom			
8			Nom	0	0			
9			0	Nom	0			
10			0	0	0			
11						0	Nom	Nom
12						Nom	0	Nom
13						Nom	Nom	0
14						0	0	Nom
15						Nom	0	0
16						0	Nom	0
17						0	0	0

Поверхность контроля π_k в данном случае при векторе контроля $y = \alpha$ и множестве начальных условий была получена такой же, как и для априорного списка неисправностей № 1 (множество начальных условий такое же, как и для априорного списка неисправностей № 1):

$$\pi_k : [0, 499; 0, 539]. \quad (3.18)$$

Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s_1}^0, \omega_{s_2}^0, \omega_{s_3}^0)$ за число измерений $N = 8$ ($\tau = 6,4$ с) привело к правильному определению номера канала, в котором произошла неисправность. Набор несписочных

неисправностей, для которых проводилось определение номера неисправного канала, приведен в табл. 3.3.

Номинальные значения коэффициентов в цепях управления (2.7) приведены в табл. 2.1.

При этом были выбраны следующие значения постоянных:

$$r_1 = 20, \quad r_3 = 10, \quad k_1 = 7, \quad k_2 = 1, \quad (3.19)$$

$$k_3 = 0,3, \quad l_1 = 7, \quad l_2 = 1, \quad l_3 = 0,7. \quad (3.20)$$

Таблица 3.3

Table 3.3

Номер канала	Коэффициенты	в цепи	управления
1	$r_1 = 5$	$r_3 = 10$	
1	$r_1 = 1$	$r_3 = 5$	
1	$r_1 = 0$	$r_3 = 2$	
2	$k_1 = 0,5$	$k_2 = 1$	$k_3 = 0,3$
2	$k_1 = 1$	$k_2 = 0$	$k_3 = 0$
2	$k_1 = 3$	$k_2 = 0$	$k_3 = 1$
3	$l_1 = 3$	$l_2 = 1$	$l_3 = 0,7$
3	$l_1 = 1$	$l_2 = 0$	$l_3 = 0,3$
3	$l_1 = 1$	$l_2 = 0$	$l_3 = 0$

3.6. Обнаружение неисправностей без применения метода поверхности контроля

Возможно обнаружение неисправностей по алгоритму диагностирования без построения самой поверхности контроля π_k . При этом:

1. Под номером 0 в априорный список неисправностей вносится *исправная* система.
2. Алгоритм диагностирования в принципе включается *циклически*, с некоторым интервалом времени Δt .
3. Если обнаружена так называемая “неисправность” под номером 0, то есть система *исправна*, продолжается функционирование объекта до момента нового включения алгоритма диагностирования.
4. Если обнаружена неисправность с номером $i \neq 0$, выдается сообщение *о наличии этой неисправности*.

Численное моделирование диагностики с циклическим включением алгоритма показало, что при интервалах включения алгоритма $\Delta t = 10, 20, 30$ с все вышеперечисленные неисправности из априорного списка неисправностей № 1 и априорного списка неисправностей № 2 были правильно определены.

Алгоритм диагностирования работал с векторами диагностирования $z = \alpha$ и $\bar{z} = (\omega_{s1}, \omega_{s2}, \omega_{s3})$ и числом измерений $N = 5$ ($\tau = 4$ с).

Таким образом, с помощью предлагаемого алгоритма диагностирования численным экспериментом показана возможность диагностирования неисправностей датчиков управляющих сигналов, формирующих СУ движением ЛА и, в частности, датчиков управляющих сигналов с гиростабилизированной платформы [28–30].

Таблица 3.2 представляет собой в некотором роде опорные неисправности. В этой таблице неисправности 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 17 формируются, в частности, отказами датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы. Эти неисправности правильно диагностируются [31; 32].

По опорным неисправностям (табл. 3.2) проводилось диагностирование не списочных неисправностей (табл. 3.3) в каналах управления движением ЛА (неисправности 5, 6, 8, 9 формируются в табл. 3.3 и с помощью отказов датчиков сигналов управления с гиростабилизированной платформы). В этом случае распознавался только номер канала управления движением летательного аппарата. Численное моделирование показало, что диагностирование неисправностей за вполне приемлемое время привело к правильному определению номера сигнала управления, в котором произошла неисправность.

Численный эксперимент, таким образом, показал работоспособность предлагаемого алгоритма диагностирования.

4. Диагностика в условиях измерения части фазового вектора

Для практического применения алгоритма диагностирования неисправностей, как показано в предыдущем разделе о численном эксперименте, требуется знание начальных условий для всего 14-мерного фазового вектора состояния x . Это несколько затрудняет возможность практического применения алгоритма диагностирования неисправностей.

Из системы уравнений (2.7) может быть выделена динамическая подсистема из 3-х уравнений (рассматриваемая на алгебре Ли $so(3)$) относительно угловых скоростей $\omega_{s_i}, i = 1, 2, 3$. В нормальном виде она может быть представлена как

$$\begin{aligned}\omega'_{s_1} &= \frac{\rho V_e^2}{2} \frac{S b_a}{I_{s_1}} \left(m_{s_1}^\alpha + m_{s_1}^{\delta_e} \delta_e + m_{s_1}^{\omega_{s_1}} \frac{b_a}{V_e} \omega_{s_1} \right) + \\ &\quad + \frac{I_{s_2} - I_{s_3}}{I_{s_1}} \omega_{s_2} \omega_{s_3} + \frac{M_{s_1}^\theta}{I_{s_1}}, \\ \omega'_{s_2} &= \frac{\rho V_e^2}{2} \frac{S L}{I_{s_2}} \left(m_{s_2}^\beta (\beta - \beta_e) + m_{s_2}^{\delta_E} \delta_E + m_{s_2}^{\delta_H} \delta_H + m_{s_2}^{\omega_{s_2}} \frac{L}{2V_e} \omega_{s_2} \right) + \\ &\quad + \frac{I_{s_3} - I_{s_1}}{I_{s_2}} \omega_{s_1} \omega_{s_3} + \frac{M_{s_2}^\theta}{I_{s_2}}, \\ \omega'_{s_3} &= \frac{\rho V_e^2}{2} \frac{S L}{I_{s_3}} \left(m_{s_3}^\beta (\beta - \beta_e) + m_{s_3}^{\delta_H} \delta_H + m_{s_3}^{\omega_{s_2}} \frac{L}{2V_e} \omega_{s_2} + m_{s_3}^{\omega_{s_3}} \frac{L}{2V_e} \omega_{s_3} \right) + \\ &\quad + \frac{I_{s_1} - I_{s_2}}{I_{s_3}} \omega_{s_1} \omega_{s_2} + \frac{M_{s_3}^\theta}{I_{s_3}}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Эти уравнения имеют место при совпадении главных осей инерции с так называемыми “строительными осями”, т. е. при тензоре инерции следующего вида:

$$I = \begin{pmatrix} I_{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{s_3} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь ρ, L, S, I_{s_i} — вполне определенные физические константы, m_{s_i} — медленно меняющиеся коэффициенты аэродинамических моментов, которые можно считать постоянными на времени работы алгоритма диагностирования. Величины ω_{s_i} наблюдаются и, таким образом, начальные условия для уравнения (4.1) известны. Величины $\delta_e, \delta_E, \delta_H$ известны в любой момент времени, так как это — формируемое управление.

Таким образом, измеряя величины $V_e, \beta - \beta_e$, присутствующие в правой части, можно замкнуть систему уравнений (4.1) и численно ее интегрировать на некотором промежутке времени (диагностирования) $[t_0, t]$ с начальными условиями $\omega_{s_i}(t_0)$.

Численный эксперимент представлял собой диагностирование неисправностей из априорного списка неисправностей № 1 в условиях неточных измерений величин $V_e, \beta - \beta_e$ (измеренные значения отличались (при каждом измерении) на $5 \div 10$ % от действительных). Измеряемый вектор $z(t) = (\omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3})$, компоненты расчетного вектора z_j получались путем численного интегрирования системы (4.1). Алгоритм диагностирования работал циклически (под № 0 в него была включена исправная система) с интервалом включения $15 \div 20$ с и правильно определял происшедшее в системе управления ЛА неисправности за $15 \div 20$ измерений ($8 \div 14$ с).

Заключение

Итак, в данной статье был проведен математический эксперимент на компьютере по диагностике системы управления летательным аппаратом при его планировании с высот, близких к орбитальным, с начальной скоростью, близкой к первой космической скорости. Показано, что предлагаемые алгоритмы диагностирования успешно работают при поиске различного рода опорных неисправностей, неисправностей, близких к опорным, при траекторных измерениях с ошибкой, а также в случае непрерывной экспресс-диагностики.

Литература

- [1] Шамолдин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 1. Уравнения движения и классификация неисправностей // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 1. С. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>. EDN: <https://www.elibrary.ru/mkmcfn>.

- [2] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 2. Задача дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 22–32. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qdyiym>.
- [3] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 3. Задача контроля // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25. № 4. С. 36–47. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>. EDN: <https://www.elibrary.ru/akuxxj>.
- [4] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 4. Задача диагностирования (случай точных траекторных измерений) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26. № 1. С. 52–68. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>. EDN: <https://www.elibrary.ru/bnhmum>.
- [5] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 5. Задача диагностирования (случай траекторных измерений с ошибкой) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2020. Т. 26. № 3. С. 30–39. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39>. EDN: <https://www.elibrary.ru/hogyhw>.
- [6] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 6. Статистическое решение задачи дифференциальной диагностики // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27. № 1. С. 74–80. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-74-80>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wlossr>.
- [7] Шамолин М.В. Задачи дифференциальной и топологической диагностики. Часть 7. Диагностирование в системах прямого и непрямого управления // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27. № 3. С. 31–45. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-31-45>.
- [8] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5, вып. 3. С. 775–790. URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v5/i3/p775>.
- [9] Шамолин М.В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и доп. Москва: Экзамен, 2007. URL: <http://http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>.
- [10] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114, № 1. P. 976–1024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [11] Пархоменко П.П., Сагомоян Е.С. Основы технической диагностики. Москва: Энергия, 1981. URL: <https://djvu.online/file/FmH1gaq0Jm2AJ>.
- [12] Мироновский Л.А. Функциональное диагностирование динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 96–121. URL: <http://mi.mathnet.ru/at7158>.
- [13] Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. Москва: Изд-во МГУ, 1983.
- [14] Чикин М.Г. Системы с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 38–46. URL: <http://mi.mathnet.ru/at4566>.
- [15] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. С. 24–36. URL: <http://mi.mathnet.ru/at3855>. EDN: <https://elibrary.ru/ksxnrh>.
- [16] Жуков В.П. О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 30–38. URL: <http://mi.mathnet.ru/at587>. EDN: <https://elibrary.ru/mushhp>.
- [17] Жуков В.П. О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2005. № 12. С. 51–64. URL: <http://mi.mathnet.ru/at1475>. EDN: <https://elibrary.ru/ntgnbh>.
- [18] Борисенок И.Т., Шамолин М.В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 29–31. URL: <http://mi.mathnet.ru/vmumm1441>.
- [19] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization // Operations Research Letters. May 2003. Vol. 31, № 3. P. 167–175. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](http://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6). EDN: <https://elibrary.ru/yjpwtr>.
- [20] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography // SIAM Journal on Optimization. 2001. Vol. 12, No. 1. P. 79–108. DOI: <http://doi.org/10.1137/S1052623499354564>. EDN: <https://elibrary.ru/qxquyu>.
- [21] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov's Accelerated Gradient Method: Theory and Insights // The Journal of Machine Learning Research. 2016, № 17(153). P. 1–43. URL: https://www.researchgate.net/publication/311221666_A_differential_equation_for_modeling_Nesterov; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45851747>. EDN: <https://elibrary.ru/vbriua>.

- [22] Шамолин М.В. Диагностика гиросtabilизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата // Электронное моделирование. 2011. Т. 33:3. С. 121–126. URL: <http://http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/61768>.
- [23] Шамолин М.В. Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска // Электронное моделирование. 2010. Т. 32:5. С. 31–44. URL: <http://dSPACE.nbuv.gov.ua/handle/123456789/61677>.
- [24] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions // SIAM Journal of Control. 1968. Vol. 6, № 2. P. 194–214. DOI: <http://doi.org/10.1137/0306015>.
- [25] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2014. Vol. 50, № 3, P. 2119–2326. DOI: <http://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [26] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2015. Vol. 78, № 1. P. 159–179. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [27] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes // Acta Applicandae Mathematicae. 2002. Vol. 74, № 2. P. 155–175. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1020669212384>. EDN: <https://elibrary.ru/bcicqf>.
- [28] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model // Mathematical Methods of Operations Research. 2009. Vol. 70. P. 567–596. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [29] Chiang M., Tan C.W., Han P., Lan T. Power control in wireless cellular networks // Foundations and Trends in Networking. 2008. Vol. 2, № 4, P. 381–533. DOI: <https://doi.org/10.1561/13000000009>.
- [30] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54, № 10. P. 2328–2340. DOI: <http://doi.org/10.1109/tac.2009.2028960>. EDN: <https://elibrary.ru/mwvfkj>.
- [31] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 1991. Vol. 29, № 6. P. 1251–1287. DOI: <http://doi.org/10.1137/0329065>.
- [32] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach // Linear Algebra and Its Applications. 1989. Vol. 122–124. P. 23–64. DOI: [http://doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-32-45

Submitted: 12.04.2022

Revised: 18.05.2022

Accepted: 14.11.2022

M. V. Shamolin

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9534-0213>

PROBLEMS OF DIFFERENTIAL AND TOPOLOGICAL DIAGNOSTICS. PART 8. AIRCRAFT MOVEMENT AND ALGORITHMS FOR ITS DIAGNOSIS

ABSTRACT

This work is the eighth work of the cycle on differential and topological diagnostics. In it, a qualitative and numerical mathematical experiment is carried out to diagnose the control system of an aircraft during its planning from altitudes close to orbital, with an initial velocity close to the first cosmic velocity. And we have shown that the proposed diagnostic algorithms work successfully when searching for various kinds of reference faults, in particular, malfunctions of control signal sensors from a gyrostabilized platform, malfunctions close to the reference ones, for trajectory measurements with an error, as well as in the case of continuous express diagnostics. At the same time, a certain diagnostic algorithm is built and used in accordance with the previously developed methodology.

Key words: problem of differential diagnostics; direct (indirect) control system; diagnostics; a priori list of faults.

Citation. Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 8. Aircraft movement and algorithms for its diagnosis. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 32–45. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-32-45>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Shamolin M.V., 2022

Maxim V. Shamolin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, leading researcher of the Institute of Mechanics, expert of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, 1, Michurinsky Avenue, Moscow, 119192, Russian Federation.

References

- [1] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 1. Motion equations and classification of malfunctions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 32–43. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-32-43>. EDN: <https://www.elibrary.ru/mkmcfn>. (In Russ.)
- [2] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 2. Problem of differential diagnostics. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 22–32. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-22-32>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qdyim>. (In Russ.)
- [3] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 3. The checking problem. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 36–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-36-47>. EDN: <https://www.elibrary.ru/akuxxj>. (In Russ.)
- [4] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 4. The case of exact trajectorial measurements. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 52–68. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-1-52-68>. EDN: <https://www.elibrary.ru/bnhmum>. (In Russ.)
- [5] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 5. The case of trajectorial measurements with error. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 30–39. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-30-39>. EDN: <https://www.elibrary.ru/hogyhw>. (In Russ.)
- [6] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 6. Statistical solving of the problem of differential diagnostics. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 74–80. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-74-80>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wlossr>. (In Russ.)
- [7] Shamolin M.V. Problems of differential and topological diagnostics. Part 7. Differential diagnostics in some systems of direct and indirect control. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 31–45. DOI: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-31-45>. (In Russ.)
- [8] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Resolving a problem of differential diagnostics. *Fundamental and Applied Mathematics*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 775–790. Available at: <http://mi.mathnet.ru/rus/fpm/v5/i3/p775>. (In Russ.)
- [9] Shamolin M.V. Certain problems of differential and topological diagnostics. 2nd edition, revised and enlarged. Moscow: Ekzamen, 2007. Available at: <http://http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Shamolin2007-2ru.pdf>. (In Russ.)
- [10] Shamolin M.V. Foundations of Differential and Topological Diagnostics. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 114, no. 1, pp. 976–1024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1021807110899>.
- [11] Parkhomenko P.P., Sagomonian E.S. Foundations of Technical Diagnostics. Moscow: Energiya, 1981. Available at: <https://djvu.online/file/FmH1gaq0Jm2AJ>. (In Russ.)
- [12] Mironovskii L.A. Functional diagnosis of dynamical systems. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1980, no. 8, pp. 96–121. Available at: <http://mi.mathnet.ru/at7158>. (In Russ.)
- [13] Okunev Yu.M., Parusnikov N.A. Structural and Algorithmic Aspects of Modeling for Control Problems. Moscow: Izd-vo MGU, 1983. (In Russ.)
- [14] Chikin M.G. Phase-constrained systems. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1987, no. 10, pp. 38–46. Available at: <http://mi.mathnet.ru/at4566>. (In Russ.)

- [15] Zhukov V.P. On the sufficient and necessary conditions for the asymptotic stability of nonlinear dynamical systems. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 321–330. Available at: <http://mi.mathnet.ru/at3855> (English; Russian original).
- [16] Zhukov V.P. On the sufficient and necessary conditions for robustness of the nonlinear dynamic systems in terms of stability retention. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 1, pp. 27–35. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0005117908010037> (English; Russian original).
- [17] Zhukov V.P. Reduction of Stability Study of Nonlinear Dynamic Systems by the Second Lyapunov Method. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 12, pp. 1916–1928. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10513-005-0224-9> (English; Russian original).
- [18] Borisenok I.T., Shamolin M.V. Solving the problem of differential diagnostics by the method of statistical tests. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika = Moscow University Mechanics Bulletin*, 2001, no. 1, pp. 29–31. Available at: <http://mi.mathnet.ru/vmumm1441> (in Russian)
- [19] Beck A., Teboulle M. Mirror Descent and Nonlinear Projected Subgradient Methods for Convex Optimization. *Operations Research Letters*, 2003, vol. 31, issue 3, pp. 167–175. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0167-6377\(02\)00231-6](http://doi.org/10.1016/S0167-6377(02)00231-6). EDN: <https://elibrary.ru/yjpwtr>.
- [20] Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The Ordered Subsets Mirror Descent Optimization Method with Applications to Tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, vol. 12, no. 1, pp. 79–108. DOI: <http://doi.org/10.1137/S1052623499354564>. EDN: <https://elibrary.ru/qxquyu>.
- [21] Su W., Boyd S., Candes E. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. *The Journal of Machine Learning Research*, 2016, no. 17 (153), pp. 1–43. Available at: https://www.researchgate.net/publication/311221666_A_differential_equation_for_modeling_Nesterov; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45851747>. EDN: <https://elibrary.ru/vbriua>.
- [22] Shamolin M.V. Diagnostics of Gyro-Stabilized Platform, Included in the Aircraft Motion Control System. *Elektronnoe modelirovanie = Electronic Modeling*, 2011, vol. 33, no. 3, pp. 121–126. Available at: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/61768>. (In Russ.)
- [23] Shamolin M.V. Diagnostics of Aircraft Motion in Planning Descent Mode. *Elektronnoe modelirovanie = Electronic Modeling*, 2010, vol. 32, no. 5, pp. 31–44. Available at: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/61677>. (In Russ.)
- [24] Fleming W.H. Optimal Control of Partially Observable Diffusions. *SIAM Journal on Control*, 1968, vol. 6, no. 2, pp. 194–214. DOI: <http://doi.org/10.1137/0306015>.
- [25] Choi D.H., Kim S.H., Sung D.K. Energy-efficient Maneuvering and Communication of a Single UAV-based Relay. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 2119–2326. DOI: <http://doi.org/10.1109/TAES.2013.130074>.
- [26] Ho D.-T., Grotli E.I., Sujit P.B., Johansen T.A., Sousa J.B. Optimization of Wireless Sensor Network and UAV Data Acquisition. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2015, vol. 78, no. 1, pp. 159–179. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10846-015-0175-5>.
- [27] Ceci C., Gerardi A., Tardelli P. Existence of Optimal Controls for Partially Observed Jump Processes. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2002, vol. 74, no. 2, pp. 155–175. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1020669212384>. EDN: <https://elibrary.ru/bcicqf>.
- [28] Rieder U., Winter J. Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2009, vol. 70, pp. 567–596. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00186-009-0284-7>.
- [29] Chiang M., Tan C.W., Hande P., Lan T. Power control in wireless cellular networks. *Foundations and Trends in Networking*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 381–533. DOI: <https://doi.org/10.1561/1300000009>.
- [30] Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B.J., Shwartz A. Power control in wireless cellular networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, no. 10, pp. 2328–2340. DOI: <http://doi.org/10.1109/tac.2009.2028960>. EDN: <https://elibrary.ru/mwvfkj>.
- [31] Ober R.J. Balanced Parameterization of Classes of Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 1251–1287. DOI: <http://doi.org/10.1137/0329065>.
- [32] Ober R.J., McFarlane D. Balanced Canonical Forms for Minimal Systems: A normalized Coprime Factor Approach. *Linear Algebra and Its Applications*, 1989, Vol. 122–124, pp. 23–64. DOI: [http://doi.org/10.1016/0024-3795\(89\)90646-0](http://doi.org/10.1016/0024-3795(89)90646-0).

МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54

УДК 531.39

Дата: поступления статьи: 12.04.2022
после рецензирования: 18.05.2022
принятия статьи: 14.11.2022

П.Г. Великанов

Казанский (Приволжский) федеральный университет;
Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ,
г. Казань, Российская Федерация
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Ю.П. Артюхин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, Российская Федерация
E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК. ЧАСТЬ I

АННОТАЦИЯ

Современное машиностроение ставит задачи расчета тонкостенных конструкций, одновременно сочетающих в себе порой взаимоисключающие свойства: легкость и экономичность, с одной стороны, и высокую прочность и надежность — с другой. В связи с этим использование ортотропных материалов и пластиков представляется вполне оправданным.

В статье продемонстрирована методика комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которая позволила в комплексной форме существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Особенностью предложенной методики для ортотропных оболочек является появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

Проверка правильности предложенной методики была продемонстрирована на пологой ортотропной сферической оболочке вращения под действием распределенной нагрузки. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Ключевые слова: механика; дифференциальные уравнения; ортотропные пластинки и оболочки; пологие оболочки вращения; осесимметричная деформация; уравнение и функции Бесселя; функция Ломмеля; гипергеометрические функции.

Цитирование. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 46–54. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., 2022

Пётр Геннадьевич Великанов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; кафедра реактивных двигателей и энергетических установок, Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. К. Маркса, 10.

Юрий Павлович Артюхин — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

1. Предварительные сведения

Комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек было сделано В.В. Новожиловым [1]. Представление уравнений в комплексной форме позволило сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Попытка построения аналогичного комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек натолкнулась на следующую трудность: появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, что не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Но тем не менее эта запись позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

2. Постановка задачи

Рассмотрим комплексное преобразование исходных уравнений общей теории ортотропных оболочек (более общее преобразование сделано Ю.П. Артюхиным для многослойной оболочки, составленной из произвольного числа ортотропных слоев [2], а также в [3]). Пусть тонкая ортотропная оболочка постоянной толщины испытывает упругие деформации, малые углы поворота и прогибы. Оси ортотропии параллельны координатным линиям кривизны α_1, α_2 . Считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява. Положительными направлениями для тангенциальных усилий (растяжения/сжатия и сдвига) T_j , S и моментов (изгибающих и крутящего) M_j, H считаются направления, принятые в монографии [1].

Уравнения равновесия малого элемента оболочки в линиях кривизны α_1, α_2 имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} L_1(T_1, T_2, S) + \frac{A_1 A_2 N_1}{R_1} + A_1 A_2 q = 0, \quad (\overleftarrow{1, 2}); \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 N_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{T_1}{R_1} - \frac{T_2}{R_2} + q_3 = 0; \\ L_1(M_1, M_2, H) - A_1 A_2 N_1 = 0, \quad (\overleftarrow{1, 2}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $L_1(T_1, T_2, S) = \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1}$; A_j — коэффициенты Ляме; N_j — перерезывающие силы; R_j — радиусы кривизны; q_j, q_3 — касательные и нормальная нагрузки; $L_j(M_j, M_{3-j}, H)$, $(j = 1, 2)$ — операторы, имеющие структуру операторов $L_j(T_j, T_{3-j}, S)$, в которых вместо T_j, T_{3-j}, S поставлены соответственно M_j, M_{3-j}, S . Символ $\overleftarrow{1, 2}$ означает, что последующее выражение получается из предыдущего путем перестановки индексов.

Шестое уравнение равновесия удовлетворяется тождественно с погрешностью, не превышающей погрешности исходных гипотез.

К уравнениям (2.1) следует добавить три уравнения совместности деформаций (ε_j, ω — тангенциальные, κ_j, τ — изгибные деформации):

$$\begin{aligned} L_1(\kappa_2, \kappa_1, -\tau) + \frac{1}{R_1} L_1(-\varepsilon_2, -\varepsilon_1, \frac{\omega}{2}) + \frac{A_1}{R_1} \frac{\partial(\omega/2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\omega}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} = 0, \quad (\overleftarrow{1, 2}); \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} L_1(\varepsilon_2, \varepsilon_1, -\frac{\omega}{2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} L_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, -\frac{\omega}{2}) \right] + \frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{\kappa_1}{R_2} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Исключим из первых трех уравнений равновесия перерезывающие силы N_j . В соответствующих двух уравнениях совместности деформаций (2.2) опустим часть несущественных (подчеркнутых) членов порядка h/R (h — толщина; R — наименьший радиус кривизны оболочки) по сравнению с 1. Тогда из преобразованных уравнений равновесия (2.1) и совместности деформаций (2.2) следует аналогия [1]:

$$\begin{aligned} T_1 \leftrightarrow \kappa_2; \quad T_2 \leftrightarrow \kappa_1; \quad S \leftrightarrow -\tau; \\ M_1 \leftrightarrow -\varepsilon_2; \quad M_2 \leftrightarrow -\varepsilon_1; \quad H \leftrightarrow \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соотношения упругости для ортотропных оболочек имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1 (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), \quad (\overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}); \quad S = \tilde{G} h \omega; \\ M_1 &= D_1 (\kappa_1 + \nu_2 \kappa_2), \quad (\overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}); \quad H = (\tilde{G} h^3 / 6) \tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}$, $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$, $\tilde{G}$ — модуль сдвига; E_j , ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления.

Вводя следующие комплексные величины

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_1 - i \mu \kappa_2, \quad (\overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}); \quad \tilde{S} = S + i \mu \tau; \quad i = \sqrt{-1}; \\ \tilde{M}_1 &= M_1 + i \mu \varepsilon_2, \quad (\overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}); \quad \tilde{H} = H - i \mu (\omega/2); \quad \mu = h^2 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

можно (2.4) представить следующим образом:

$$\tilde{M}_1 = i c (\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1); \quad \tilde{M}_2 = i c \delta (\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2); \quad \tilde{H} = -i c [\lambda \tilde{S} + (\varepsilon + \nu_2) \tilde{S}], \quad c = h/K. \quad (2.6)$$

Здесь $\tilde{T}_1$, $\tilde{S}$ — комплексно-сопряженные величины.

Безразмерные величины δ , λ , ε , K полностью определяют упругие свойства материала:

$$\delta = \frac{E_2}{E_1}; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \delta; \quad \lambda = \frac{E_2}{4\tilde{G}} + \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\tilde{G}} - \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} - \nu_2. \quad (2.7)$$

Для изотропного материала эти параметры равны:

$$\delta = \lambda = 1; \quad \varepsilon = 0; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.8)$$

Если допустить, что для ортотропного материала между модулем сдвига и модулями упругости существует связь

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})}, \quad (2.8')$$

то $\delta = \lambda^2$; $\varepsilon = 0$; $K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \lambda$, и задача путем аффинного преобразования координат может быть сведена к задаче деформирования изотропной оболочки. В этом случае решение будет зависеть только от отношения модулей $\delta = E_2/E_1$. Такое решение может давать неплохие результаты, если сдвиговая деформация мало влияет на другие искомые характеристики интегрального типа.

Для дальнейших преобразований в статических уравнениях с коэффициентами $1/R_j$ используются моменты, выраженные через изменения кривизн, а в геометрических уравнениях аналогичные слагаемые с тангенциальными деформациями выражаются в соответствии с (2.4) через усилия.

Кроме того, в этих малых членах уравнений применяются приближенные равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} &\approx -\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1}, \quad (\overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}); \\ \frac{\partial A_1 \tau}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 \tau}{\partial \alpha_2} &\approx \frac{\partial A_2 \kappa_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2 \kappa_1}{\partial \alpha_1}, \quad (\overleftarrow{1}, \overleftarrow{2}). \end{aligned}$$

Такая замена внесет в уравнения погрешность порядка не более $(h/R)^2$ по сравнению с единицей (для грузового члена уравнения погрешность порядка h/R). Итак, согласно этим преобразованиям и введения комплексных усилий (2.5), получим [2]:

$$\begin{aligned} L_1 (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}) + \frac{i c}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] &= -A_1 A_2 q_1; \\ L_2 (\tilde{T}_2, \tilde{T}_1, \tilde{S}) + \frac{i c}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] &= -A_1 A_2 q_2; \\ \frac{\tilde{T}_1}{R_1} + \frac{\tilde{T}_2}{R_2} - \frac{i c}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] + \right. & \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] \right\} &= q_3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полагая в уравнениях (2.9) $\delta = \lambda = 1$; $\varepsilon = 0$, что соответствует случаю изотропной оболочки, получим уравнения, приведенные В.В. Новожиловым в [1]. Комплексные уравнения для ортотропных оболочек, полученные в [5], при переходе к изотропии отличаются некоторыми малыми членами от уравнений, приведенных в [1].

3. Пологие оболочки

Рассмотрим изгиб пологой оболочки нормальной нагрузкой $q_3(\alpha_1, \alpha_2)$. В этом случае в первых двух уравнениях (2.9) можно пренебречь членами уравнения с множителями $1/R_j$ по сравнению с остальными (главными). Упрощенным таким образом двум уравнениям удовлетворим с помощью комплексной функции усилий [1]:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1}, \quad (\overleftarrow{1, 2}); \\ \tilde{S} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1} \right) \right]; \quad \tilde{F} = F - i\mu w,\end{aligned}\quad (3.1)$$

где F — вещественная функция усилий; w — прогиб.

Вводя усилия (3.1) в третье уравнение (2.9), получим:

$$\begin{aligned}\frac{ic}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \nabla_1^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \nabla_2^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\nabla_1^2 \tilde{F} - \nabla_2^2 \tilde{F} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\nabla_2^2 \tilde{F} - \nabla_1^2 \tilde{F} \right) \right] + \varepsilon \nabla_3^4 \tilde{F} \right\} - D(\tilde{F}) = q_3,\end{aligned}\quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_1^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right] + [\overleftarrow{1, 2}] \right\}; \\ \nabla_2^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \right] + \delta [\overleftarrow{1, 2}] \right\}; \\ \nabla_3^4 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} [\overleftarrow{1, 2}] \right\} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right] - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} [\overleftarrow{1, 2}] \right\}; \\ D(\cdot) &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2 A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right].\end{aligned}$$

Пологие оболочки, прямоугольные в плане, отнесем к декартовой системе координат $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$.

Поэтому $A_1 = A_2 = 1$ и уравнение (3.2) примет вид:

$$ic \left(\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x^4} + 2\lambda \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial y^4} + 2\varepsilon \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \nabla_k^2 \tilde{F} = q_3, \quad (3.3)$$

где $\nabla_k^2 = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $k_j = \frac{1}{R_j}$.

Уравнение (3.3) не отличается от уравнения, приведенного в [5].

4. Пологие оболочки вращения

Пусть оболочка получена вращением пологой меридиана вокруг полюса. Причем оболочка обладает криволинейной ортотропией: вдоль меридиана и по окружности. Полюс является особой точкой и может быть исключен из рассмотрения. Уравнения равновесия такой оболочки в комплексной форме, отнесенной к полярным координатам ρ , θ , можно получить из (3.2), полагая $\alpha_1 = \rho$; $\alpha_2 = \theta$; $A_1 = 1$; $A_2 = \rho$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \nabla_1^2 \tilde{F} + \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \nabla_2^2 \tilde{F} + \frac{i}{c} \nabla_R^2 \tilde{F} + \varepsilon \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} \right) \tilde{F} = -\frac{i}{c} q_3, \quad (4.1)$$

где

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \lambda \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right); \quad \nabla_2^2 = \lambda \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \delta \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right); \quad \nabla_R^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{R_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_1 \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right].$$

Связь между комплексными усилиями и комплексной функцией усилий $\tilde{F}$ осуществляется следующими соотношениями:

$$\tilde{T}_1 = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}; \quad \tilde{T}_2 = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \rho^2}; \quad \tilde{S} = \frac{1}{2} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \rho \partial \theta} \right]. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1) и соотношения (4.2) справедливы для общего случая деформации оболочки. Для осесимметричной деформации члены уравнения с комплексно-сопряженной функцией $\bar{\tilde{F}}$ пропадают.

5. Осесимметричная деформация пологой сферической оболочки

Для решения многих задач теории круглых пластин, сферических и конических оболочек вращения эффективно используются гипергеометрические функции.

Плодотворность привлечения для указанной цели теории гипергеометрических функций объясняется тем, что разрешающие дифференциальные уравнения при определенных профилях пластин и законах изменения кривизны оболочек вращения, имеющих практическое значение, приводятся к хорошо изученным гипергеометрическим уравнениям. В то же время использование многочисленных соотношений между этими функциями дает возможность существенно улучшать решения: усиливать сходимость и сокращать число рядов, подлежащих суммированию — операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики WolframMathematica [6; 7]. Ниже приведены результаты по применению гипергеометрических функций в теории оболочек.

5.1. Сферическая оболочка под действием распределённой нагрузки

Из уравнения равновесия в комплексной форме (4.1) в силу осевой симметрии задачи получим:

$$\frac{d^4 \tilde{F}}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 \tilde{F}}{d\rho^3} + n^2 \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 \tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{d\tilde{F}}{d\rho} \right) + ia^2 \left(\frac{d^2 \tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{F}}{d\rho} \right) = -\frac{i}{c} q_3(\rho). \quad (5.1)$$

Здесь $n = \nu = \delta = \frac{E_2}{E_1}$; $a^2 = \frac{1}{cR}$; $c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu_1\nu_2)\delta}}$.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку под действием равномерно распределенной нагрузки

$$q_3 = -q = \text{const} = -\frac{q\rho}{\rho}.$$

Представим уравнение (5.1) в следующем виде:

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \left[\frac{d^2 \tilde{f}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{f}}{d\rho} + \left(ia^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \tilde{f} \right] \right\} = \tilde{C}\rho, \quad (5.2)$$

где $\tilde{f} = \frac{d\tilde{F}}{d\rho}$; $\tilde{C} = \frac{iq}{c}$.

Найдем решение однородного уравнения (5.2). Так как выражение в прямых скобках есть уравнение Бесселя, то двумя частными решениями однородного уравнения (5.2) будут функции Бесселя первого и второго рода $J_n(\sqrt{ia}\rho)$ и $Y_n(\sqrt{ia}\rho)$. Третье частное решение однородного уравнения получим, интегрируя (5.2) при $\tilde{C} = 0$:

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{f}}{d\rho} + \left(ia^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \tilde{f} = \frac{C}{\rho}. \quad (5.3)$$

Полагая в (5.3) $C = \sqrt{ia}$ и делая замену переменной $z = \sqrt{ia}\rho$, приведем (5.3) к виду:

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\tilde{f}}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) \tilde{f} = \frac{1}{z}. \quad (5.4)$$

Частным интегралом уравнения (5.4) является функция Ломмеля $s_{0,n}(z)$ [8]. Функции $J_n(z)$, $Y_n(z)$, $s_{0,n}(z)$ оказываются линейно независимыми [9] и их можно использовать для построения общего решения однородного уравнения (5.2).

Для определения частного решения уравнения (5.2) проинтегрируем его по ρ :

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{f}}{d\rho} + \left(ia^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \tilde{f} = \frac{\tilde{C}\rho}{2}. \quad (5.5)$$

Уравнению (5.5), когда правая часть представляет любую степенную функцию от ρ , удовлетворяет функция Ломмеля $S_{m,n}(z)$:

$$w'' + \frac{w'}{z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) w = z^{m-1}. \quad (5.6)$$

Поэтому частным решением уравнения (5.5), а следовательно уравнения (5.2), будет функция Ломмеля $S_{2,n}(z)$. Функция Ломмеля связана с обобщенной гипергеометрической функцией, которая успешно табулирована в пакете WolframMathematica [6; 7] и вычисляется как обычная тригонометрическая функция:

$$s_{m,n}(z) = \frac{z^{m+1}}{[(m+1)^2 - n^2]} {}_1F_2 \left[\{1\}; \left\{ \frac{m-n+3}{2}, \frac{m+n+3}{2} \right\}; -\frac{z^2}{4} \right]. \quad (5.7)$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.1) для равномерной нагрузки примет вид:

$$\tilde{F}(\rho) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \int J_n(z) d\rho + \tilde{C}_3 \int Y_n(z) d\rho + \tilde{C}_4 \int s_{0,n}(z) d\rho - \frac{iq}{2} cR^2 \int s_{2,n}(z) dz. \quad (5.8)$$

Рассмотрим теперь пологую сферическую оболочку под действием неравномерной нагрузки. На оболочку действует неравномерное давление

$$q_3(\rho) = -\frac{q\rho}{\rho} (1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_l\xi^l) = -\frac{q\rho}{\rho} f(\xi), \quad (5.9)$$

где $f(\xi)$ — полином степени l , $f(\xi) = \sum_{k=0}^l a_k \xi^k$, $a_0 = 1$, $\xi = \frac{\rho}{b}$, другие коэффициенты a_k — заданы, b — радиус плана оболочки.

При $l = 0$ получим предыдущий случай равномерного нагружения. Для нашего случая (5.9) уравнение (5.5) при $\rho = \frac{z}{\sqrt{ia}}$ примет вид:

$$\tilde{f}''(z) + \frac{1}{z} \tilde{f}'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \tilde{f}(z) = \frac{\tilde{C}}{(\sqrt{ia})^3} \sum_{k=0}^l \frac{a_k}{(k+2)} \frac{z^{k+1}}{(\sqrt{ig})^k}, \quad (5.10)$$

где

$$g = ab = \sqrt[4]{12(1 - \nu_1\nu_2)} \delta \sqrt{K_R}; \quad K_R = \frac{b^2}{Rh}. \quad (5.11)$$

Сменим немой индекс суммирования k на m из условия $k+1 = m-1$. Откуда $k = m-2$, и сумму перепишем следующим образом:

$$\sum_{k=0}^l \frac{a_k}{(k+2)} \frac{z^{k+1}}{(\sqrt{ig})^k} = \sum_{m=2}^{l+2} \frac{a_{m-2}}{m} \frac{z^{m-1}}{(\sqrt{ig})^{m-2}}. \quad (5.12)$$

Из (5.6), (5.10) и (5.12) следует частное решение для нагрузки (5.9):

$$f_q(z) = \frac{\tilde{C}}{(\sqrt{ia})^3} \sum_{m=2}^{l+2} \frac{a_{m-2}}{m (\sqrt{ig})^{m-2}} s_{m,n}(z) = \frac{\tilde{C}}{(\sqrt{ia})^3} f_{l,n}(z).$$

Окончательно общий интеграл для неравномерного поперечного давления примет вид:

$$\tilde{F}(\rho) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \int_0^\rho J_n(z) d\rho + \tilde{C}_3 \int_0^\rho Y_n(z) d\rho + \tilde{C}_4 \int_0^\rho s_{0,n}(z) d\rho + \int_0^\rho f_q(z) dz. \quad (5.13)$$

Для оболочки без отверстия в полюсе постоянные

$$\tilde{C}_3 = \tilde{C}_4 = 0.$$

В случае скользящего заземленного контура

$$\tilde{F}(b) = \frac{d\tilde{F}(b)}{d\rho} = 0,$$

получим решение вида:

$$\tilde{F} = F - i\mu w = \frac{\tilde{C}}{(\sqrt{ia})^3} \left\{ \frac{f_{l,n}(\sqrt{ig})}{J_n(\sqrt{ig})} \int_\rho^b J_n(z) d\rho - \int_\rho^b f_{l,n}(z) d\rho \right\}. \quad (5.14)$$

Бесселевы и гипергеометрические функции представляют собой сходящиеся ряды, поэтому легко интегрируются:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, n, g) &= \int J_n(\sqrt{ig}\xi) d\xi = \left(\frac{\sqrt{ig}\xi}{2}\right)^n \frac{\xi}{\Gamma(n+2)} {}_1F_2 \left\{ \left\{ \frac{n+1}{2} \right\}; \left\{ n+1, \frac{n+3}{2} \right\}; -i \left(\frac{g\xi}{2}\right)^2 \right\}; \\ S_{m,n}(\xi, g) &= \int S_{m,n}(\sqrt{ig}\xi) d\xi = \\ &= \frac{\xi (\sqrt{ig}\xi)^{m+1}}{(m+2) [(m+1)^2 - n^2]} {}_2F_3 \left\{ \left\{ 1, 1 + \frac{m}{2} \right\}; \left\{ 2 + \frac{m}{2}, \frac{3+m+n}{2}, \frac{3+m-n}{2} \right\}; -i \left(\frac{g\xi}{2}\right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Выделяя мнимую часть уравнения (5.14) с учетом введенных обозначений интегралов, найдем прогиб:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\xi) &= \frac{1}{g^3} \text{Im} \left[i^{3/2} \left\{ \frac{f_{l,n}(\sqrt{ig})}{J_n(\sqrt{ig})} [\Phi(1, n, g) - \Phi(\xi, n, g)] - \sum_{m=2}^{l+2} \frac{a_{m-2}}{m (\sqrt{ig})^{m-2}} [S_{m,n}(1, g) - S_{m,n}(\xi, g)] \right\} \right]; \\ \tilde{w} &= \frac{wD_1}{qb^4}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

При $l = 0$, что соответствует равномерному давлению, сумма превращается в один член ряда, а $m = 2$:

$$f_{0,n}(\sqrt{ig}) = \frac{1}{2} s_{2,n}(\sqrt{ig}); \quad S_{m,n}(\xi, g)|_{m=2} = S_{2,n}(\xi, g).$$

В этом случае безразмерный прогиб

$$\tilde{w}(\xi) = \frac{1}{2g^3} \text{Im} \left[i^{3/2} \left\{ \frac{s_{2,n}(\sqrt{ig})}{J_n(\sqrt{ig})} [\Phi(1, n, g) - \Phi(\xi, n, g)] - [S_{2,n}(1, g) - S_{2,n}(\xi, g)] \right\} \right], \quad (5.16)$$

а прогиб в вершине оболочки вычисляется по формуле:

$$\tilde{w}(0) = \frac{1}{2g^3} \text{Im} \left[i^{3/2} \left\{ \frac{s_{2,n}(\sqrt{ig})}{J_n(\sqrt{ig})} \Phi(1, n, g) - S_{2,n}(1, g) \right\} \right]. \quad (5.17)$$

Рассмотрим несколько композитных материалов (однонаправленные композиты на основе эпоксидной смолы) [10] с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу:

- 1) углепластик (волокна AS);
- 2) стеклопластик (Е-волокна);
- 3) органопластик (кевлар-49);
- 4) углепластик (волокна IM6);
- 5) материал, по свойствам близкий к изотропному.

Механические характеристики приведенных в [10] материалов следующие:

- 1) $n = 0,064$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,019$;
- 2) $n = 0,235$, $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,061$;
- 3) $n = 0,072$, $\nu_1 = 0,33$, $\nu_2 = 0,024$;
- 4) $n = 0,056$, $\nu_1 = 0,32$, $\nu_2 = 0,018$;
- 5) $n = 0,98$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,294$.

Достоверность формул (5.16) и (5.17) исследуем на примере расчета сферической оболочки, изготовленной из материала со свойствами, близкими к изотропному (материал № 5) [10], для параметра кривизны $K_R = 1$.

Согласно (5.17) для этого материала и кривизны $\tilde{w}(0) = -0,01507$. Сопоставим этот результат с численным значением прогиба $\bar{w}(0) = \frac{\zeta}{\bar{q}}$ изотропной сферической оболочки в [11], вычисленным методом конечных разностей (МКР), где $\zeta = \frac{w(0)}{h}$; $\bar{q} = \frac{qb^4}{E_1 h^4}$ для такого же параметра кривизны. При $\zeta = 0,124$ и $\bar{q} = 0,75$ в [11] значение $\tilde{w}(0) = \frac{\bar{w}(0)}{12(1-\nu_1\nu_2)} = -0,01511$, что отличается на 0,3 % от приведенного в настоящей статье значения, вычисленного по формуле (5.17).

Расположим волокна сферической оболочки, изготовленной из композитного материала (материал № 4) [10], сначала вдоль радиуса сферической оболочки, а затем — по окружности. В первом случае жесткость оболочки уменьшится вдвое $\tilde{w}(0) = -0,03808$, а во втором случае увеличится на два порядка $\tilde{w}(0) = -0,0003125$, по сравнению с изотропией.

Выводы

В статье была исследована методика использования комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которая позволила существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений, даже несмотря на появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволила более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях появилась возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь, поэтому для указанных случаев были исследованы пологие ортотропные сферические оболочки вращения под действием различных нагрузок. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Литература

- [1] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Москва: Судпромгиз, 1962. 431 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=661745>.
- [2] Артюхин Ю.П. Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1966. Вып. 4. С. 91–110. URL: <http://mi.mathnet.ru/kutpo593>.
- [3] Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Действие локальных нагрузок на ортотропную сферическую и коническую оболочки вращения // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: материалы Всероссийского семинара. Казань: Изд-во КГУ, 2008. С. 22–23. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408.
- [4] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Физматгиз, 1961. 384 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=438699>.
- [5] Стэнеску К., Виссарион В. Статико-геометрическая аналогия для тонких упругих оболочек с ортотропией материала и ее применение к расчету пологих оболочек и цилиндрических оболочек круглого сечения // Revue de Mechanique Appliquee. (RPR), 1958. Vol. 3, № 1.
- [6] Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике: учебное пособие. Казань: Казанское математическое общество, Изд-во КамПИ, 2002. 415 с. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958.
- [7] Великанов П.Г. Основы работы в системе Mathematica: лабораторный практикум. Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. 40 с. URL: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/.
- [8] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с. URL: <http://www.vixri.ru/?p=991>.
- [9] Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Ортотропные пластины и пологие оболочки. Теория, методы решения краевых задач. Казань: КГУ, 2002. 112 с.
- [10] Мэттьюз Ф., Роллингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. Москва: Техносфера, 2004. 408 с. URL: <https://www.technosfera.ru/lib/book/89?read=1>.
- [11] Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. Москва: Наука, 1968. 260 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54

Submitted: 12.04.2022

Revised: 18.05.2022

Accepted: 14.11.2022

P.G. Velikanov

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation,
Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, Kazan, Russian Federation
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Y.P. Artyukhin

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>

GENERAL THEORY OF ORTHOTROPIC SHELLS. PART I

ABSTRACT

Modern mechanical engineering sets the tasks of calculating thin-walled structures that simultaneously combine sometimes mutually exclusive properties: lightness and economy on the one hand and high strength and reliability on the other. In this regard, the use of orthotropic materials and plastics seems quite justified.

The article demonstrates the complex representation method of the equations of the orthotropic shells general theory, which allowed in a complex form to significantly reduce the number of unknowns and the order of the system of differential equations. A feature of the proposed technique for orthotropic shells is the appearance of complex conjugate unknown functions. Despite this, the proposed technique allows for a more compact representation of the equations, and in some cases it is even possible to calculate a complex conjugate function. In the case of axisymmetric deformation, this function vanishes, and in other cases the influence of the complex conjugate function can be neglected.

Verification of the correctness of the proposed technique was demonstrated on a shallow orthotropic spherical shell of rotation under the action of a distributed load. In the limiting case, results were obtained for an isotropic shell as well.

Key words: mechanics; differential equations; orthotropic plates and shells; shallow shells of rotation; axisymmetric deformation; Bessel equation and functions; Lommel function; hypergeometric functions.

Citation. Velikanov P.G., Artyukhin Y.P. General theory of orthotropic shells. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 1–5. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-46-54>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Velikanov P.G., Artyukhin Y.P., 2022

Peter G. Velikanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation; assistant professor of the Department of Jet Engines and Power Plants, Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, 10, K. Marx Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

Yuri P. Artyukhin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation.

References

- [1] Novozhilov V.V. Theory of thin shells. Moscow: Sudpromgiz, 1962, 431 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=661745>. (in Russ.)
- [2] Artyukhin Y.P. Calculation of single-layer and multilayer orthotropic shells for local loads. *Research on the theory of plates and shells*. Kazan: Izd.-vo KGU, 1966, issue 4, pp. 91–110. Available at: <http://mi.mathnet.ru/kutpo593>. (in Russ.)
- [3] Artyukhin Y.P., Velikanov P.G. Effect of local loads on orthotropic spherical and conical shells of rotation. In: *Analytical mechanics, stability and motion control: materials of the All-Russian seminar*. Kazan: Izd.-vo KGU, 2008, pp. 22–23. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408. (In Russ.)
- [4] Ambartsumyan S.A. General theory of anisotropic shells. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 384 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=438699>. (In Russ.)
- [5] Stanescu K., Vissarion V. Static-geometric analogy for thin elastic shells with orthotropy of the material and its application to the calculation of flat shells and cylindrical shells of circular cross-section. *Revue de Mechanique Appliquee (RPR)*, 1958, vol. 3, no. 1. (In Russ.)
- [6] Artyukhin Yu.P., Guryanov N.G., Kotlyar L.M. The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics: textbook. Kazan: Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo. Izd-vo KamPI, 2002, 415 p. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958. (In Russ.)
- [7] Velikanov P.G. Fundamentals of work in the Mathematics system: laboratory workshop. Kazan: Izd-vo Kazanskogo gos. tekhn. un-ta, 2010, 40 p. Available at: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/. (In Russ.)
- [8] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums of series and products. Moscow: Nauka, 1971, 1108 p. Available at: <http://www.vixri.ru/?p=991>. (In Russ.)
- [9] Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. Orthotropic plates and flat shells. Theory, methods of solving boundary value problems. Kazan: KGU, 2002, 112 p. (In Russ.)
- [10] Matthews F., Rollings R. Composite materials. Mechanics and technology. Moscow: Tekhnosfera, 2004, 408 p. Available at: <https://www.technosfera.ru/lib/book/89?read=1>. (In Russ.)
- [11] Kornishin M.S., Isanbayeva F.S. Flexible plates and panels. Moscow: Nauka, 1968, 260 p. (In Russ.)



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 19.04.2022
после рецензирования: 02.06.2022
принятия статьи: 14.11.2022

Т.Н. Лычева

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: taniko81@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8802-022X>

С.А. Лычев

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДЕФЕКТОВ В КРИСТАЛЛЕ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ

АННОТАЦИЯ

В работе развивается методика математического моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния и полей дефектов в кристаллах при их контактном взаимодействии с системой жестких штампов. С макроскопической точки зрения перераспределение дефектов характеризуется неупругой (вязкопластической) деформацией, в связи с чем исследуемые процессы можно классифицировать как упруго-вязкопластические. Упругие и неупругие деформации предполагаются конечными. Для учета неупругих деформаций предлагается использовать дифференциально-геометрический подход, в рамках которого эволюция полей распределенных дефектов полностью характеризуется мерами несовместных деформаций; в качестве последних используются инварианты материальной связности. Эта связность порождается неевклидовой метрикой, которая, в свою очередь, задается полем симметричных линейных отображений, вычисляемых по локальным (несовместным) деформациям кристалла. Поскольку развитие локальных деформаций зависит как от контактного взаимодействия на границе, так и от распределения дефектов в объеме кристалла, то задача моделирования оказывается полностью связанной. Полагается, что локальное изменение плотности дефектов определяется эволюционным законом первого порядка Александера — Хаасена — Сумино, учитывающим девиаторную часть поля напряжений. Для нахождения связанных полей, определяющих локальные деформации и распределенные дефекты, разработан итерационный алгоритм. Произведены модельные вычисления для кристалла кремния в форме параллелепипеда, одна грань которого жестко закреплена, а на противоположную действует система жестких штампов. Для моделирования локального упругого отклика использовался трехконстантный потенциал Муни — Ривлина.

Ключевые слова: распределенные дефекты; конечные деформации; гиперупругость; несовместность деформаций; эволюция полей дефектов; контактное взаимодействие; конечные элементы.

Цитирование. Лычева Т.Н., Лычев С.А. Эволюция поля распределенных дефектов в кристалле при контактном взаимодействии с системой жестких штампов // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 55–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Лычева Т.Н., Лычев С.А., 2022

Татьяна Николаевна Лычева — инженер лаборатории трибологии, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Сергей Александрович Лычев — доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Введение

В настоящее время в микросистемной технике широко применяются микроэлектромеханические устройства (MEMS). Характерный размер таких устройств — от нескольких десятков нанометров до микрона [1; 2]. В отличие от микроэлектронных компонент элементы MEMS подвержены воздействию не только электромагнитных полей, но также действию объемных и поверхностных сил, возникающих в областях механических контактов подвижных частей [3]. Вызванное этими усилиями напряженно-деформированное состояние микроэлектромеханической системы оказывает существенное влияние на ее эксплуатационные свойства и должно учитываться при расчетах и проектировании. Поскольку элементы таких устройств имеют характерные размеры порядка микрона и менее, моделирование их напряженного состояния обладает масштабной спецификой: существенное влияние на него оказывают силы поверхностного натяжения и внутренние источники напряжений, возникающие из-за присутствия дефектов в кристаллической структуре образующего эти элементы материала. В качестве последнего, как правило, используют кристаллический или аморфный кремний. Распределение дефектов в кристалле зависит от напряженного состояния, и его изменение приводит к перераспределению дефектов в объеме кристалла — дефекты мигрируют. Подобная миграция с макроскопической точки зрения может быть представлена как эволюция неупругих (пластических) деформаций. В этой связи актуальным как в теоретическом, так и в прикладном плане, является математическое моделирование эволюции напряженного состояния и связанной с ней структуры дефектов в микромасштабных кристаллических телах при их контактном взаимодействии. В настоящей работе развиваются общие способы постановок подобных контактных задач и рассматриваются модельные примеры о квазистатическом взаимодействии упругого кристалла с системой жестких штампов. При этом в кристалле задается некоторое начальное распределение дефектов, изменение которого в процессе контактного взаимодействия определяется из решения эволюционной задачи.

1. Ход исследования

1°. Континуальная теория дефектов давно является классическим разделом нелинейной механики деформируемого твердого тела, однако её основные положения и методы продолжают интенсивно развиваться и определять перспективные на сегодняшний день общетеоретические и прикладные задачи. Близким в смысле объекта исследования, но существенно отличающимся по методам и моделям является раздел физики твердого тела, изучающий дефекты как нарушения регулярной структуры кристалла. Основное различие состоит в способе математической формализации влияния совокупности дефектов на макроскопические свойства содержащего их тела. Континуальная теория, что соответствует ее названию, представляет всю совокупность дефектов как непрерывное поле локальных деформаций, не удовлетворяющих условиям совместности и вызывающих дополнительную деформацию и соответствующее напряженно-деформированное состояние, подобно тому, как неравномерный нагрев вызывает термоупругие напряжения. Физические теории дефектов, в частности теория дислокаций, рассматривают дискретные структуры кристаллов с нарушенным порядком и, образно говоря, следят за отдельными нарушителями и изменением энергетического состояния кристалла при их миграциях между узлами кристаллической решетки. Несмотря на впечатляющие вычислительные возможности, предоставляемые современными компьютерами, прямое моделирование дискретных структур с дефектами, например, методами молекулярной динамики можно выполнить за разумное время только в очень небольших объемах и на интервалах времени, не превышающих нескольких миллисекунд. В этой связи синтез двух указанных подходов, при котором моделирование влияния большого числа дефектов на напряженно-деформированное тело осуществляется в рамках континуального подхода, в то время как уравнения эволюции полей дефектов определяются физическими моделями взаимодействия дефекта с соседними атомами основного материала, представляет актуальную задачу современной механики континуума. Настоящая работа представляет некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Исторически континуальная и атомистическая теории дефектов возникли независимо друг от друга, но почти одновременно. Начала континуальной теории были заложены в работах Фойгта, Вайнгартена,

Вольтерра более 100 лет назад [4; 5]. Основным объектом в этих исследованиях были уравнения совместности Сен-Венана и возможные способы модификации тела, которые приводили к тому, что уравнения Сен-Венана переставали выполняться (для чего изменялся индекс связности тела за счет разрезов, склеек и пр.). В некотором смысле эти исследования были чисто теоретическими: они позволили математически строго сформулировать понятие несовместной деформации и ее внутренних источников — дислокаций Вольтерра. Следует отметить, что это понятие, несмотря на название, не имело отношения к физике атомистических структур, утративших по тем или иным причинам регулярность своего строения. Но как раз этот вопрос оказался в фокусе внимания в начале XX века, когда теория атомистического строения вещества получила признание (Эйнштейн-броуновское движение, Резерфорд планетарная модель атома, Бор — старая квантовая теория) и стала развиваться семимильными шагами. С аппаратом квантовой механики, казалось, легко можно было бы реализовать грандиозный замысел Коши — получить все уравнения механики континуума из анализа атомистического строения вещества [6; 7]. Однако математическое моделирование макроскопических свойств привело к столь разительному отличию от эксперимента (Френкель [8]), что стала ясна необходимость поиска какой-то совершенно новой идеи. Вскоре она была высказана Поляни [9], Орованом [10] и Тейлором [11; 12]: причина неудовлетворительного соотношения теоретических предсказаний и эксперимента кроется том, что кристаллическая структура материала предполагалась идеальной, в то время как реальные структуры насыщены дефектами. Они-то и являются внутренними источниками напряжений, подобно разрезам и склейкам в теории Вольтерра, а это "собственное" напряженное состояние кардинально меняет физико-механические свойства макроскопического тела, которые в эксперименте определяются как отклик на внешние поля. Действительно, математическая теория идеального кристалла предполагала, что эти поля являются единственной причиной напряжений, а в эксперименте они накладывались на уже присутствующее в кристалле, самоуравновешенное, но отнюдь не малое напряженное состояние.

Построение континуальной теории дислокаций было начато в работах [11; 12], и достаточно быстро было обнаружено большое сходство между уравнениями, возникающими при описании несовместных деформаций, вызываемых дислокациями, и уравнениями общей теории относительности (Экхарт [13], Бильби [14] и Кондо [15]). Это привело к идее использовать методы неевклидовой геометрии для описания дополнительных полевых величин, характеризующих распределенные дефекты как источники внутренних напряжений (Кренер [16]). Образно говоря, тело, деформации которого несовместны, не может быть целиком преобразовано в ненапряженное состояние посредством какой-либо непрерывной деформации в объемлющем физическом пространстве, однако можно формально перенести его в пространство большего числа измерений, в котором оно найдет свою ненапряженную форму. Эта форма будет существовать на некоторой гиперповерхности расширенного пространства, геометрические свойства которой, такие как кривизна или кручение, не будут отвечать условиям евклидова пространства, и именно эти дополнительные геометрические параметры будут служить математическим описанием отличительной особенности тела, вызванной наличием в нем дефектов. Конечно, эта иллюстрация очень груба, и для более детального обсуждения методов неевклидовой геометрии в приложении к обсуждаемой задаче потребуются более детальное описание элементов теории. Это будет сделано дальше.

Существенное развитие математическая теория распределенных дефектов получила в работах Нолла [17], Вана [18] и Де Вита [19]. В них было сформулировано математически строго понятие материального многообразия как структуры, полностью описывающей совокупность материальных точек, составляющих тело и служащей основой для построения различных геометрий, евклидовых и неевклидовых, посредством задания метрики и аффинной связности на них. Кроме того, были выделены источники внутренних напряжений особого вида — дисклинации, которые возникали при определенных условиях в дополнение к распределенным дислокациям, но оказывали влияние на самонапряженное состояние образом, отличным от последних. Замечательное достижение математической теории дефектов состояло в том, что дефектам различных типов нашлись принципиально различные геометрические образы: дислокациям соответствует кручение материальной связности, дисклинациям — кривизна, объемным дефектам — неметричность.

2°. В работе используются методы анализа на гладких многообразиях, с которыми можно ознакомиться например, в руководствах Спивака [20] и Ли [21]. Приложение этих методов к механике континуума подробно изложено в монографиях Марсдена & Хьюгса [22], Ракотомананы [23], Френкеля [25], Эпштейна [24], Штайнмана [26], Лычева & Койфмана [27].

Для того чтобы выйти за границы евклидова пространства, следует подготовить структуру, позволяющую это осуществить. Таковой структурой является гладкое многообразие, которое в своем определении не содержит каких-либо конструкций, связанных с метрической геометрией, и является в образном смысле чистым холстом, на котором возможно изобразить как картину в евклидовом стиле, так и нечто более общее. Размерность и топология — все, что требуется при этом учесть. В рамках рассматриваемой в статье задачи будем полагать, что эти два свойства ассоциированы с множеством материальных

точек, составляющих тело, и они не изменяются. В этой связи наиболее подходящим объектом, формализуемым как гладкое многообразие, является тело, которое как раз и понимается интуитивно как совокупность материальных точек.

Итак, тело $\mathfrak{B}$ может быть математически формализовано посредством следующей структуры, задаваемой упорядоченной четверкой

$$\mathfrak{B} := (\mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mu).$$

Первый элемент четверки, $\mathcal{B}$, задает некоторое непустое множество. Его элементы уникальным образом идентифицируют материальные точки, составляющие тело. Второй элемент, $\mathcal{F}$, определяет топологию на этом множестве, превращая его в топологическое пространство. Третий элемент, $\mathcal{A}$, представляет собой максимальный атлас, элементы которого — карты — позволяют установить соответствие между элементами множества $\mathcal{B}$ и упорядоченными n -ками действительных чисел, т. е. элементами $\mathbb{R}^n$. Такие соответствия в областях картирования U_α задаются картирующими отображениями — гомеоморфизмами $\varphi_\alpha : \mathcal{B} \supset U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, где индекс α пробегает множество $\mathcal{I}$, индексирующее все карты атласа. При этом требуется выполнение двух свойств: полноты и C^k согласованности.

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha = \mathfrak{B}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{I} \quad \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \Big|_{\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} \in C^k(\mathbb{R}^n).$$

Последний элемент определяет меру на $\mathfrak{B}$, с помощью которой можно выполнять интегрирование на $\mathfrak{B}$ и его подмногообразиях. Пока что все перечисленные элементы никак не конкретизированы и, по существу, представляют стандартные конструкции дифференциальной геометрии [21]. Это, с одной стороны, подчеркивает тот факт, что тело не является непосредственно наблюдаемым, а представляет себя посредством форм-образов вложения в физическое пространство, т. е. более конкретное определение может быть дано только после формализации соответствующих структур для физического пространства. С другой стороны, это обстоятельство предоставляет определенную свободу для определения на теле структур более общих, чем те, что можно получить из физического пространства. Эта возможность существенно используется в настоящей работе для построения неевклидовой отсчетной формы [28; 29].

3°. Тело как совокупность материальных точек (либо некоторых абстрактных меток этих точек, что эквивалентно приведенному выше определению, поскольку здесь материальные точки не несут дополнительных физических атрибутов, таких как масса, заряд и пр.) не является непосредственно наблюдаемым и в некотором смысле находится в абстрактном платоновом мире идей. Наблюдаемыми будут лишь формы тела-образы его вложения в физическое пространство, которые можно математически формализовать в том же ключе, как подмногообразия некоторого объемлющего гладкого многообразия, формально характеризующего физическое пространство. Но, в отличие от тела, на которое при его формализации не накладывалось никаких ограничений на выбор геометрии (связности и метрики), формы оказываются не такими свободными. Поскольку они по своему физическому смыслу должны представлять некоторые регионы физического пространства, то геометрия на них должна быть индуцирована последним. Это означает, что многообразия, представляющие формы, наделяются вполне определенной связностью и метрикой, индуцированной (образно говоря, "скопированной") объемлющим физическим пространством. Таким образом, для полного задания форм требуется представить физическое пространство тоже как многообразие, но наделенное специальной метрикой и связностью. Оставаясь в рамках классической физики, определим эти свойства с помощью классической вспомогательной структуры, которая, однако, оказывается весьма полезной сама по себе в дальнейших построениях.

В рамках классического (нерелятивистского) подхода физическое пространство $\mathfrak{B}$ может быть математически формализовано как аффинное пространство, определяемое структурой

$$\mathfrak{P} := (\mathcal{P}, \mathcal{V}, \text{vec}, o). \quad (1)$$

Первый элемент этой структуры, $\mathcal{P}$, представляет собой непустое множество. Элементы этого множества с физической точки зрения указывают на места, занимаемые материальными точками в составе формы. Вторым элементом является векторное трансляционное пространство $\mathcal{V}$, которое само является структурой над полем действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{V} = (\mathfrak{V}, \mathbb{R}, \oplus, \odot),$$

где $\mathfrak{V}$ — множество, элементами которого определяют трансляционные векторы, $\oplus$ — операция внутренней композиции $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$, $\odot$ — операция внешней композиции $\mathbb{R} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$. Векторное пространство обладает характеристикой — размерностью. В работе она полагается равной трем, и эта величина интерпретируется как размерность аффинного пространства $\mathfrak{P}$. Третий элемент структуры vec задает операцию, согласующую элементы множества $\mathcal{P}$ и трансляционные векторы из $\mathcal{V}$, она определяется как отображение $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$, удовлетворяющее условиям

$$\forall O \in \mathcal{P} \quad V_O : \mathcal{P} \ni A \mapsto \text{vec}(O, A) \in \mathcal{V} \quad \text{биективна,}$$

$$\forall a, b, c \in \mathcal{P} \quad \text{vec}(a, b) + \text{vec}(b, c) + \text{vec}(c, a) = 0 \in \mathcal{V}.$$

Наконец, последний элемент структуры, o , задает ориентацию векторного пространства, определяя один из возможных классов эквивалентных базисов — левых или правых. Свойство базисов принадлежать одному и тому же классу характеризуется знаком определителя матрицы, преобразующей один базис в другой.

Выбор некоторой точки $O \in \mathcal{P}$ и некоторого базиса в $\mathcal{V}^*$, скажем $(e^\alpha)_{\alpha=1}^3$, позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками $\mathcal{P}$ и упорядоченными n -ками чисел. Это соответствие задается отображением, которое далее будем называть арифметизацией пространства $\mathcal{P}$:

$$C_{O; (e^\alpha)_{\alpha=1}^3} := (e^\alpha \circ \text{vec}(O, \cdot))_{\alpha=1}^3. \quad (2)$$

Алгебраическая структура физического пространства, построенная к настоящему моменту изложения, достаточно бесформенна — в ней не определены метрические свойства, такие как длины, углы, не задано свойство ортогональности. Все это определяется заданием метрики, наделяющей аффинное пространство евклидовой структурой. Метрика может быть задана как билинейное отображение, ставящее в соответствие каждой паре векторов (u, v) число

$$g(u, v) = \alpha \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющее условиям

$$\forall u, v \in \mathfrak{P} \quad g(u, v) = g(v, u), \quad \forall u \in \mathfrak{P} \quad g(u, u) \geq 0, \quad (g(u, u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0).$$

В координатной форме это отображение может быть представлено тензором типа $(0, 2)$:

$$g = g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta,$$

где $g_{\alpha\beta}$ — элементы симметричной положительно определенной матрицы, e^α — элементы дуального базиса в $\mathfrak{V}^*$. Выбор конкретных значений метрической матрицы $g_{\alpha\beta}$ осуществляется относительно некоторого выбранного базиса, выбор которого апеллирует к некоторой процедуре экспериментальной идентификации, которую, в свою очередь, можно осуществить только после полного определения метрической матрицы. Эта ситуация похожа на классическую проблему определения шахматной фигуры, скажем коня: его абстрактное определение основано на правилах игры, которые, в свою очередь, требуют для полного описания предварительное определение всех фигур, в том числе и коня. Для выхода из порочного круга следует сослаться на известную теорему алгебры, согласно которой для любой положительно определенной симметричной матрицы существует базис, в котором она приводится к единичной. В этой связи можно полагать, что выбор метрики и базиса, в котором она представлена единичной матрицей, осуществляется в рамках единого акта идентификации, а выбранный базис приобретает особый статус декартового базиса c^α . В нем

$$g = \delta_{\alpha\beta} c^\alpha \otimes c^\beta.$$

Для всех других базисов соответствующие метрические матрицы могут быть определены как результат линейного преобразования

$$e_\alpha = \Omega_\alpha^\beta c_\beta, \quad e^\alpha = \Upsilon_\beta^\alpha c^\beta, \quad g = g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta, \quad \Omega_\alpha^\beta \Upsilon_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu} \Omega_\alpha^\mu \Omega_\beta^\nu.$$

Заметим, что поскольку при определении $\mathfrak{P}$ была выбрана одна из возможных ориентаций, то $\det \Omega_\alpha^\beta > 0$.

Метрический тензор определяет согласованные с ним меры длины, площади объема посредством внешних форм

$$\epsilon = c^1 \wedge c^2 \wedge c^3 = J e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \\ s_1 = c^2 \wedge c^3 = J_1 e^2 \wedge e^3, \quad s_2 = c^3 \wedge c^1 = J_2 e^3 \wedge e^1, \quad s_3 = c^1 \wedge c^2 = J_3 e^1 \wedge e^2, \quad (3)$$

где $J = \det[\Omega_\alpha^\beta]$, а J_1, J_2, J_3 — обобщенные миноры матрицы $[\Omega_\alpha^\beta]$.

4°. Алгебраическая структура, построенная для формализации физического пространства, обладает достаточно мощным инструментарием для описания объектов аналитической геометрии, однако непрерывно изменяемые объекты, такие как кривые, поверхности, пока не доступны для формализации, поскольку само понятие непрерывности оказывается за ее пределами. Для преодоления этой трудности предлагается использовать, наряду с алгебраической структурой, структуру гладкого многообразия, элементы которой для своего определения существенно используют уже построенные алгебраические объекты. Она может быть определена следующим образом:

$$\mathfrak{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{L}, \nu). \quad (4)$$

На первом месте стоит множество $\mathcal{P}$ — то же, что и в алгебраической структуре (1). Второй элемент, $\mathcal{T}$, определяет топологию, которая, в отличие от топологии тела, не определяется произвольно, а индуцируется метрической топологией открытых шаров в аффинном пространстве

$$\mathcal{T} = \left\{ O \mid C_{O, (e^\alpha)_{\alpha=1}^3}(O) \text{ открыт в } \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Третий элемент определяет максимальный атлас, который содержит декартово картирование, порождаемое арифметизацией (2), и всевозможные непрерывные отображения открытых подмножеств $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Последние определяют различные криволинейные координаты, используемые для описания мест в физическом пространстве. Последний элемент структуры (4) задает меру на многообразии таким образом, что мера линейных объектов (векторов, бивекторов, поливекторов) совпадает со значениями форм (3).

5°. Поскольку в рамках настоящей работы релятивистские эффекты не учитываются, изменения напряженно-деформированного состояния и связанных с ним полей дефектов можно рассматривать как зависимости от абсолютного времени. Оно количественно характеризуется координатами отдельного одномерного (хронометрического) многообразия $\mathfrak{T}$, топологически эквивалентного $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{T} = ((a, b), T, R, M), \quad (a, b) \subset \mathbb{R}.$$

Здесь T – сужение стандартной топологии интервалов числовой оси на (a, b) , R – атлас, состоящий из всех непрерывных отображений $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, M – мера, которая порождается мерой интервалов

$$M(a, b) := \varphi(b) - \varphi(a), \quad \varphi \in R.$$

Пространство-время $\mathfrak{S}$ как четырехмерное многообразие представляет собой глобально тривиальное расслоение над базой $\mathfrak{T}$ и типовыми слоями $\mathfrak{M}$, топология которого представляет собой топологию прямого произведения пространств $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{M}$, атлас – прямое произведение атласов этих многообразий, а мера задается как произведение мер.

6°. Тело $\mathfrak{B}$ в физическом пространстве представлено своей формой $\mathcal{S}_t$, которая может изменяться во времени, т. е. зависит от значения координаты t на базе расслоения $\mathfrak{T}$. Форма определяется как образ многообразия $\mathfrak{B}$ относительно функции $\varkappa$, осуществляющей вложение многообразия $\mathfrak{B}$ в многообразие $\mathfrak{P}$. Требование к функции $\varkappa$ быть вложением исключает самопересечения образа и нарушение его непрерывности, наделяя тем самым форму свойствами подмногообразия физического многообразия $\mathfrak{P}$. В этой связи форму можно интерпретировать как "непрерывное" множество мест материальных точек, в совокупности составляющих тело. Функции $\varkappa_t$ будем называть конфигурациями. Композиция двух конфигураций

$$\gamma = \varkappa_1 \circ \varkappa_2^{-1}$$

определяет непрерывное отображение одной формы на другую:

$$\gamma : \mathfrak{P} \supset \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2 \subset \mathfrak{P}.$$

Такое отображение будем называть деформацией. По построению деформация является гомеоморфизмом, однако для дальнейших построений понадобятся более жесткие требования, позволяющие дифференцировать это отображение, ввиду чего будем рассматривать только те деформации, которые являются диффеоморфизмами.

Семейство форм в $\mathfrak{S}$ образует мировую трубку тела

$$\mathfrak{S} \supset \mathcal{U} = \hat{\varkappa}(\mathfrak{B}, \mathfrak{T}), \quad \hat{\varkappa}(x, t) := \varkappa_t(x),$$

которая представляет все формы как единый геометрический объект. Семейство деформаций $\{\gamma_t\}_{t \in \mathfrak{T}}$, послойно преобразующее сечения двух мировых трубок, определяемых одним и тем же временным слоем, позволяет однозначно восстановить одну из мировых трубок по другой. При этом одна из мировых трубок может быть ассоциирована с отсчетным состоянием, а вторая – с актуальным. Формы, мировые трубки, конфигурации и деформации тела, обладающего ненапряженной формой, иллюстрируются рис. 1. На этом рисунке сечение отсчетной трубки не изменяется во времени. В общем случае изменение сечения отсчетной трубки характеризует эволюцию отсчетного описания. Изменение сечения актуальной трубки характеризует наблюдаемую в физическом пространстве деформацию. Рис. 2 иллюстрирует эту ситуацию.

7°. Физическое состояние тела определяется из условия стационарности действия

$$\delta \mathcal{A} = 0.$$

Действие $\mathcal{A}$ задается как скалярнозначная функция, аргументами которой служат две мировые трубки тела, первая – отсчетная трубка, вторая – актуальная:

$$\mathcal{A} : (\mathcal{U}_R, \mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Поскольку мировые трубки полностью определяются телом и соответствующими семействами конфигураций, то действие может быть представлено как функция четырех аргументов: многообразия, представляющего тело, хронометрического многообразия и двух обобщенных конфигураций:

$$\mathcal{A} : (\mathfrak{B}, \mathfrak{T}, \hat{\varkappa}_R, \hat{\varkappa}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

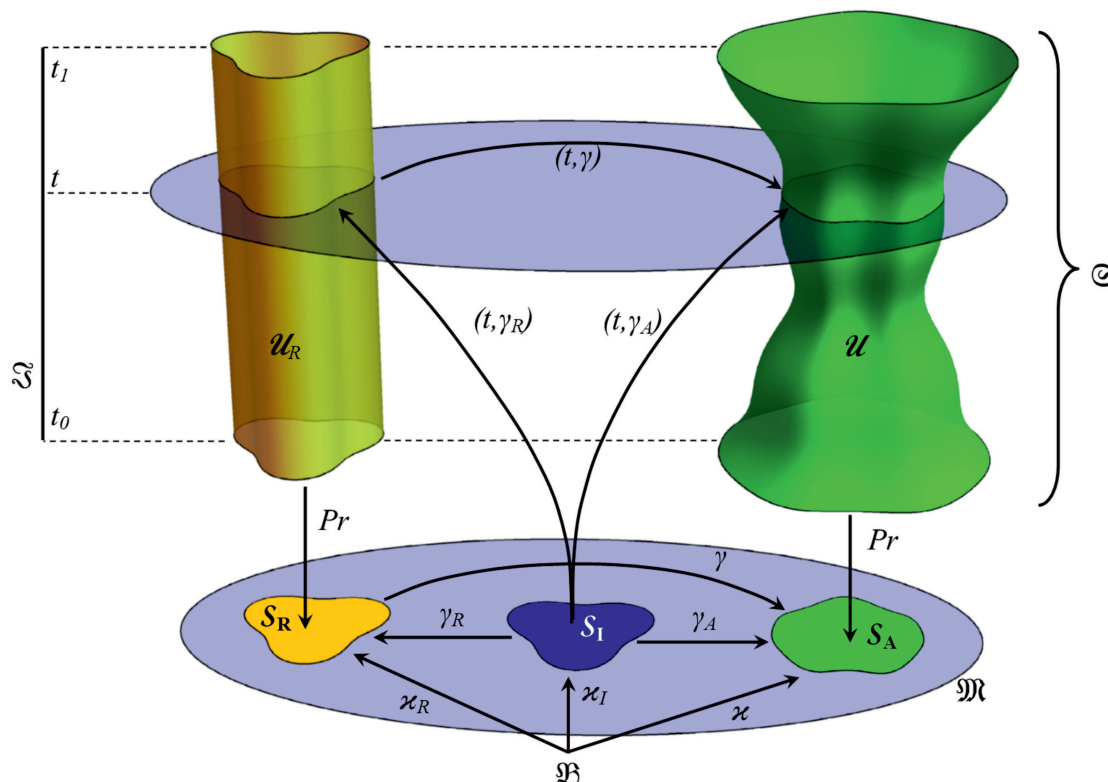


Рис. 1. Формы, мировые трубки, конфигурации и деформации тела, обладающего ненапряженной формой
 Fig. 1. Shapes, world tubes, configurations and deformations of a body with an unstressed shape

Число аргументов можно сократить до трех, если вместо тела использовать одну из его форм, $\mathcal{S}_i$, которую далее будем называть промежуточной, и двух обобщенных деформаций:

$$\mathcal{A} : (\mathcal{S}_i, \hat{\gamma}_R, \hat{\gamma}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

На рис. 1, 2 промежуточная форма обозначена символом $\mathcal{S}_I$ и изображена синим цветом.

Существенного упрощения формулировки можно достичь, если ввести следующие предположения.

1. Действие может быть представлено в аддитивной форме

$$\mathcal{A} = \int_{\mathcal{U}} \mathcal{L}(x, \hat{\gamma}_R, \hat{\gamma}) dv(x).$$

Здесь, однако, подынтегральное выражение – плотность действия $\mathcal{L}$ – все еще очень сложно, поскольку второй и третий его аргументы представляют собой функции, определяющие соответствующие трубки, т. е. в такой формулировке плотность действия представляет собой функционал, действующий на функциональном пространстве обобщенных деформаций.

2. В силу принципа локализации обобщенные деформации могут быть заменены их формулами Тейлора первого порядка:

$$\hat{\gamma}(x+h) = \gamma(x) + \hat{F}_x h + o(\|h\|), \quad \hat{F}_x = D_x \hat{\gamma}.$$

Это позволяет записать плотность действия как функцию, аргументы которой представляют собой тензорные величины, вычисленные в точке x :

$$\mathcal{L}(x, \hat{\gamma}_R, \hat{\gamma}) \approx \hat{\mathcal{L}}(x, \hat{\gamma}_R(x), \hat{\gamma}(x), \hat{F}_{xR}, \hat{F}_x).$$

3. В силу (нерелятивистского) принципа объективности плотность действия должна быть инвариантна относительно преобразований Галилея, т. е. трансляций и поворотов в слоях $\mathfrak{M}$ и сдвигов базы $\mathfrak{T}$. В этой связи $\mathcal{L}$ не может явно зависеть от $\hat{\gamma}(x)$, $\hat{F}_{xR}$ и, кроме того, зависимость $\hat{F}_{xR}$, $\hat{F}_x$ усекается до зависимости только от симметричных частей этих тензоров, т. е.

$$\mathcal{L}(x, \hat{\gamma}_R, \hat{\gamma}) \approx \hat{\mathcal{L}}(x, \hat{F}_{xR}^{\text{sym}}, \hat{F}_x^{\text{sym}}).$$

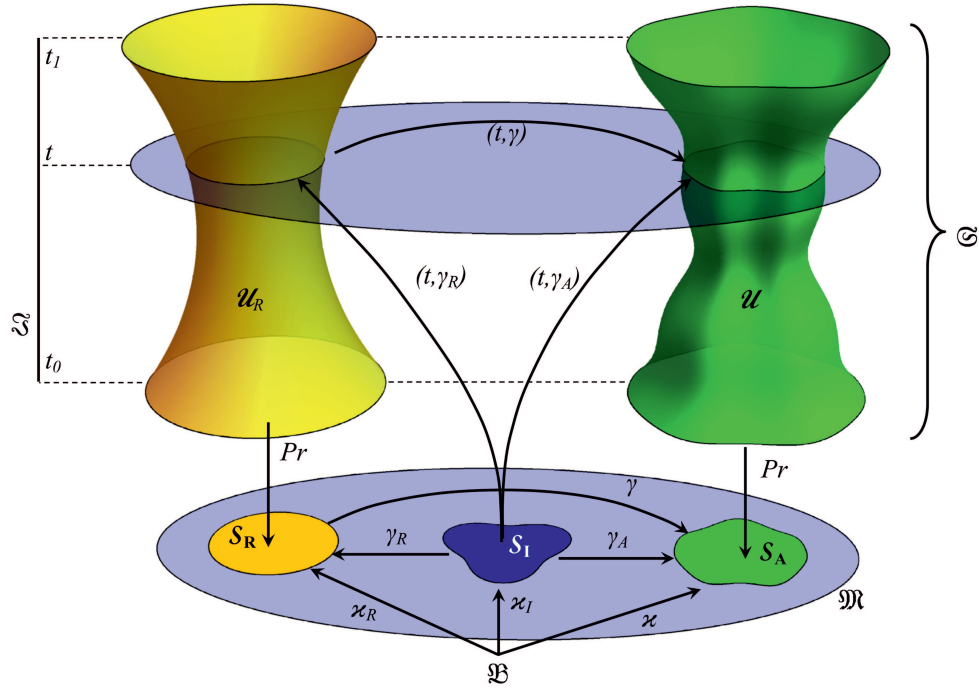


Рис. 2. Формы, мировые трубки, конфигурации и деформации тела в общем случае эволюции отсчетной и актуальной форм
 Fig. 2. Shapes, world tubes, configurations and deformations of the body in the general case of evolution of reference and actual shape

Эквивалентную зависимость в более лаконичном (и более привычном) виде можно получить, если ввести тензоры деформаций

$$C_R := \mathbf{F}_{xR}^T \circ \mathbf{F}_{xR}, \quad C := \mathbf{F}_x^T \circ \mathbf{F}_x.$$

Если дополнительно предположить определенный тип анизотропии плотности действия относительно промежуточной формы, то она может быть задана следующей зависимостью:

$$\mathcal{L}(x, I_1^R, \dots, I_n^R; I_1, \dots, I_n),$$

где $I_1^R, \dots, I_n^R, I_1, \dots, I_n$ – инварианты тензоров C_R, C , причем в случае анизотропии материала $n = 3$ и

$$I_1^R = C_R : \mathbf{I}, \quad I_2^R = \frac{1}{2} ((C_R : \mathbf{I})^2 - C_R^2 : \mathbf{I}), \quad I_3^R = \frac{1}{3} ((C^R)^3 : \mathbf{I} - (I_1^R)^3 + 3I_1^R I_2^R);$$

$$I_1 = C : \mathbf{I}, \quad I_2 = \frac{1}{2} ((C : \mathbf{I})^2 - C^2 : \mathbf{I}), \quad I_3 = \frac{1}{3} (C^3 : \mathbf{I} - I_1^3 + 3I_1 I_2),$$

а для анизотропного материала количество инвариантов возрастает. Так, для ортотропного материала, который, в основном используется в MEMS, добавляются два инварианта, совместных с вектором ориентации $\mathbf{A}$ (или $\mathbf{A}_R$) плоскости анизотропии:

$$I_4^R = \mathbf{A}_R \cdot C_R \cdot \mathbf{A}_R, \quad I_5^R = \mathbf{A}_R \cdot C_R \cdot C_R \cdot \mathbf{A}_R; \quad I_4 = \mathbf{A} \cdot C \cdot \mathbf{A}, \quad I_5 = \mathbf{A} \cdot C \cdot C_R \cdot \mathbf{A}.$$

Явные представления плотности действия могут быть получены как минимум двумя способами. Первый предполагает вывод соотношений из более детализированных физических теорий, опираясь на моделирование атомистических и квантомеханических представлений. Этот подход, интенсивно развиваемый в настоящее время, получил название "первых принципов" или *ab initio*. Второй предполагает непосредственную аппроксимацию результатов испытаний некоторого представительного объема материала, который, как правило, в начале испытания приводится в некоторое однородное состояние. Оба подхода предполагают построение соотношений для достаточно малой части тела, причем внешнее воздействие, реакция на которое непосредственно описывается этими соотношениями, прикладывается к части, заранее приведенной в некоторое стандартное состояние. Задача моделирования деформирования тела — воспользоваться этими соотношениями и получить зависимости для физических полей во

всем теле, представляя его как соединение достаточно большого числа достаточно малых частей (стро-го говоря, инфинитезимальных). Если удастся найти такое соединение, в котором все части окажутся в стандартном состоянии, то задача существенно упрощается, а моделирование осуществляется класси-ческими методами механики континуума. Такое соединение будет отвечать стандартной (свободной от напряжений) отсчетной форме. Проблема лишь в том, что в реальности таких форм не существует, поскольку во всех телах присутствуют внутренние источники напряжений — дефекты. В этом случае вместо одной отсчетной формы необходимо рассматривать континуальное семейство форм (рис. 3):

$$\mathfrak{B} \ni x \mapsto \mathcal{U}_x. \quad (5)$$

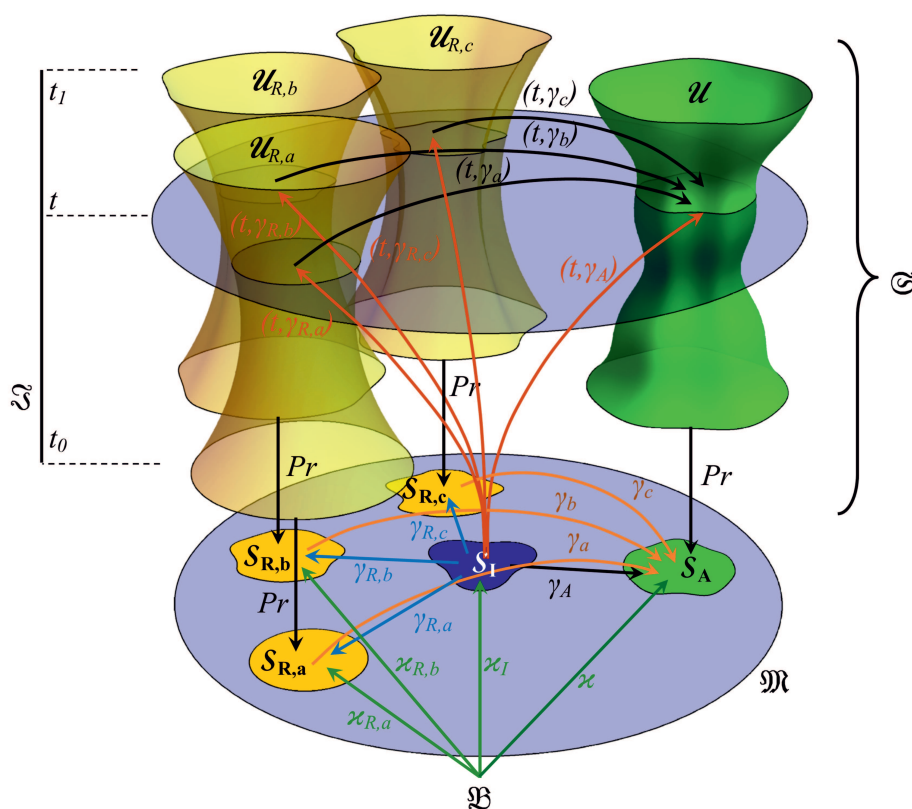


Рис. 3. Семейство отсчетных форм и семейство отсчетных трубок
 Fig. 3. Family of reference shapes and a family of reference tubes

Такая формализация отсчетных состояний окрестностей материальных точек предполагает возмож-ность их локальной разгрузки при деформации промежуточной формы посредством преобразований, индивидуальных для каждой точки тела:

$$\gamma_x \mathcal{S}_R \Big|_x = \text{typ},$$

где символом typ обозначен одинаковый для всех точек элементарный объем-прототип. Градиент этих деформаций, вычисленный для каждой точки тела, определяет поле импланта $\mathbf{K}$:

$$\mathfrak{x} \mapsto \text{grad} \gamma_{\mathfrak{x}} =: \mathbf{K}^{-1},$$

которое может быть использовано для задания метрики на $\mathfrak{B}$ посредством следующих соотношений:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := g(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{v}). \quad (6)$$

Поскольку поле импланта $\mathbf{K}$ в общем случае не является градиентом векторного поля, то построен-ная таким образом метрика определяет риманово пространство с ненулевой кривизной. Этой метрике отвечает (материальная) связность

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = u^i (\partial_i v^k + v^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k = u^i \nabla_i v^k \partial_k,$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{G^{kl}}{2} (\partial_i G_{jl} + \partial_j G_{il} - \partial_l G_{ij}).$$

Кривизна построенной таким образом связности:

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{lj}^i - \partial_l \Gamma_{kj}^i + \Gamma_{kr}^i \Gamma_{lj}^r - \Gamma_{lr}^i \Gamma_{kj}^r,$$

характеризует меру несовместности деформаций, или, иначе, плотность распределения дефектов, или же плотность распределения собственных источников напряжений. Все три определения с макроскопической точки зрения эквивалентны. Дифференциально-геометрическое описание является наиболее строгой математической характеристикой феномена собственного напряженного состояния, порождаемого распределенными в теле дефектами, на что мы уже указывали в начале статьи, ссылаясь на классические работы [13; 15–17]. Более подробно эти вопросы изложены, в частности, в [30–32].

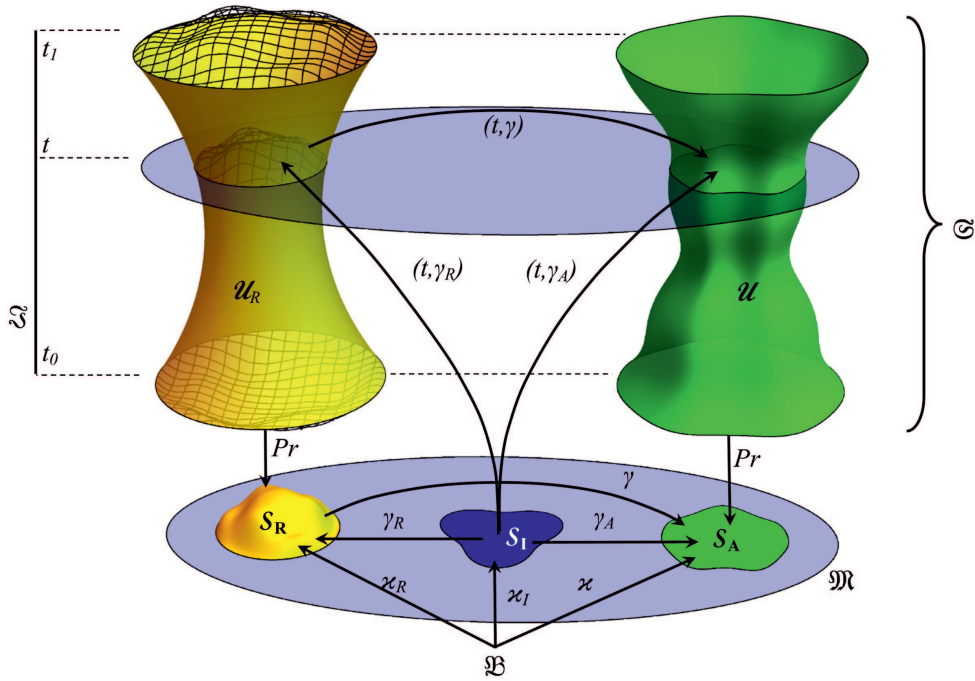


Рис. 4. Неевклидова отсчетная форма и соответствующая трубка

Fig. 4. Non-Euclidean reference shape and corresponding tube

8°. Для вычислительного моделирования эволюции поля деформации промежуточной формы в актуальную и поля имплантата, которое характеризует изменение пространственного распределения дефектов, предлагается использовать метод конечных элементов, адаптированный к рассматриваемым проблемам. Для простоты ограничимся конечноэлементными моделями, образуемыми конформными тетраэдральными сетками с линейной интерполяцией поля перемещений внутри каждого элемента (т. н. функциями формы).

Конечноэлементную модель определим с помощью конформной тетраэдральной сетки в области S_I , занимаемой промежуточной формой. При этом перемещения из промежуточной формы S_I в актуальную S_A (т. е. разность значений $\mathbf{x}$ деформации γ_A и мест соответствующих точек в промежуточной форме $\mathbf{X}$) аппроксимируется непрерывными функциями, линейными на каждом тетраэдре.

Пусть один из таких тетраэдров $\mathcal{T}_R$ с вершинами $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ и ориентированным объемом

$$\mathcal{V}_R = \frac{1}{6} (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1) \cdot ((\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1))$$

трансформируется в результате деформации $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ в тетраэдр $\mathcal{T}$ с вершинами $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4$ и ориентированным объемом

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} (\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1) \cdot ((\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \times (\mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_1)).$$

Символом J обозначим якобиан преобразования, $J = \mathcal{V}/\mathcal{V}_R > 0$.

Пусть $\lambda_1(\mathbf{X})$, $\lambda_2(\mathbf{X})$, $\lambda_3(\mathbf{X})$, $\lambda_4(\mathbf{X})$ — барицентрические координаты точки $\mathbf{X}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\mathbf{X}) \\ \lambda_2(\mathbf{X}) \\ \lambda_3(\mathbf{X}) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{P}_1), \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,$$

где тензор $\mathbf{T}$ представлен "декомпозицией по столбцам", роль которых играют векторы $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1$. Тогда координаты каждой точки $\mathbf{X}$ внутри тетраэдра перед деформацией и координаты ее положения $\mathbf{x}$ после деформирования могут быть представлены в форме

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(\mathbf{X}) \mathbf{S}_i.$$

Используя формулу для обращения матрицы 3×3 :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} (\vec{x}_2 \times \vec{x}_3)^T \\ (\vec{x}_3 \times \vec{x}_1)^T \\ (\vec{x}_1 \times \vec{x}_2)^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{bmatrix},$$

представим градиент деформации из промежуточной формы в актуальную следующим образом

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{D}_i = \frac{(-1)^i}{6V_R} ((\mathbf{P}_{\{i+2\}} - \mathbf{P}_{\{i+1\}}) \times (\mathbf{P}_{\{i+3\}} - \mathbf{P}_{\{i+1\}})),$$

где $\{i\} := i - 4 \lfloor \frac{i-1}{4} \rfloor$ обозначает оператор индексирования узлов в диапазоне $(1 \dots 4)$, $\lfloor \dots \rfloor$ — целая часть числа.

Локально искажения при деформации из промежуточной формы в актуальную характеризуются правым тензором деформаций Коши — Грина:

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{D}_i \otimes \mathbf{D}_j,$$

однако его недостаточно для полного определения локального напряженно-деформированного состояния актуальной формы, поскольку напряженное состояние промежуточной формы (ввиду наличия дефектов и собственных напряжений) не учтено. Для его учета определим правый тензор полных деформаций Коши — Грина следующим образом:

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} = \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \otimes \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{K}.$$

Инварианты тензора $\mathbf{C}$ находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{D}_j, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left(I_1^2 - \sum_{i,j,p,q=1}^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_q \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{D}_p \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{D}_q \right), \\ I_3 &= J^2 |\mathbf{K}|^2, \\ I_4 &= \sum_{i,j=1}^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1, \\ I_5 &= \sum_{i,j,p,q=1}^4 \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_q \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \mathbf{D}_p \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{D}_q \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1. \end{aligned}$$

В силу линейности функций формы упругий потенциал $W(\mathbf{C})$ постоянен внутри тетраэдра. При этом энергия упругого деформирования, запасаемая в тетраэдре, определяется равенством

$$\mathcal{U}_R = V_R W(\mathbf{C}).$$

Сила упругого взаимодействия, действующая на i -ю вершину тетраэдра $\mathcal{T}_R$, находится из соотношения (дискретного аналога формулы Дойля — Эриксона):

$$\mathbf{f}_i^{(\mathcal{T}_R)} = - \frac{\partial \mathcal{U}_R}{\partial \mathbf{S}_i} = - |V_R| \sum_{s=1}^5 \frac{\partial W}{\partial I_s} \frac{\partial I_s}{\partial \mathbf{S}_i}.$$

Таблица 1
Table 1

Гиперупругие потенциалы

Наименование	Потенциал W
Муни — Ривлина (1)	$\frac{\mu}{4} \left[(1-\beta) \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + (\beta+1) \left(\frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right] + \frac{3\lambda+2\mu}{6} (\sqrt{I_3}-1)^2$
Синьорини (2)	$\sqrt{I_3} \left(\frac{p}{2} \left(\frac{I_1}{I_3} + 1 \right) + \frac{\lambda+\mu-p}{8} \left(\frac{I_2^2}{I_3^2} + 3 \right) + \frac{p-3\lambda-\mu}{4} \left(\frac{I_2}{I_3} - 1 \right) \right) - \mu - p$
Мурнагана (3)	$\frac{\lambda+2\mu}{8} (I_1 - 3)^2 - \frac{\mu}{2} (3 - 2I_1 + I_2) +$ $+ a(I_1 - 3)^2 + b(I_1 - 3)(3 - 2I_1 + I_2) + c(I_1 - I_2 + I_3 - 1)$
Блейтца и Ко (4)	$\frac{\mu}{4} (\beta+1) \left(I_1 + \frac{1}{\nu} (I_3^{-\nu} - 1) - 3 \right) + \frac{\mu}{4} (1-\beta) \left(\frac{I_2}{I_3} + \frac{1}{\nu} (I_3^{-\nu} - 1) - 3 \right)$

Таблица 2
Table 2

Производные гиперупругих потенциалов

	$\frac{\partial W}{\partial I_1}$	$\frac{\partial W}{\partial I_2}$	$\frac{\partial W}{\partial I_3}$
1	$\frac{(1-\beta)\mu}{4\sqrt[3]{I_3}}$	$\frac{(\beta+1)\mu}{4I_3^{2/3}}$	$\frac{(\beta-1)I_1 \sqrt[3]{I_3} \mu - 2(\beta+1)I_2 \mu + \left(I_3^{5/3} - I_3^{7/6} \right) (6\lambda+4\mu)}{12I_3^{5/3}}$
2	$\frac{p}{2\sqrt{I_3}}$	$\frac{I_2(\lambda+\mu-p) + I_3(p-3\lambda-\mu)}{4I_3^{3/2}}$	$\frac{I_3(I_3(9\lambda+5\mu-p) - 4I_1 p) + 3I_2^2(p-\lambda-\mu) + 2I_2 I_3(3\lambda+\mu-p)}{16I_3^{5/2}}$
3	$2\left(a-b+\frac{\lambda+2\mu}{4}\right)(I_1-3) + b(3-2I_1+I_2) + \mu + c$	$b(I_1-3) - c - \frac{\mu}{2}$	c
4	$\frac{1}{4}(\beta+1)\mu$	$-\frac{(\beta-1)\mu}{4I_3}$	$\frac{\mu}{4} I_3^{-\nu-2} \left((\beta-1) (I_2 I_3^\nu - I_3^{2\nu+1}) - (\beta+1) I_3 \right)$

Входящие в это соотношение производные инвариантов по узловым смещениям вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{S}_i} &= 2 \sum_{n=1}^4 \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{D}_i \mathbf{S}_n, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{S}_i} &= \sum_{n=1}^4 \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{K} \cdot (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{D}_i \mathbf{S}_n, \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{S}_i} &= 2J |\mathbf{K}|^2 \frac{\partial J}{\partial \mathbf{S}_i}, \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{S}_i} = \frac{(-1)^i}{6V_R} (\mathbf{S}_{\{i+1\}} - \mathbf{S}_{\{i+3\}}) \times (\mathbf{S}_{\{i+2\}} - \mathbf{S}_{\{i+3\}}), \\ \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{S}_i} &= 2 \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \sum_{n=1}^4 \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_n, \\ \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{S}_i} &= 2 \sum_{n=1}^4 \left\{ \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{D}_n \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \right\} \mathbf{S}_n. \end{aligned}$$

Если положить $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, то эти формулы преобразуются к известным соотношениям [33].

Производные плотности упругой энергии $\frac{\partial W}{\partial I_s}$ зависят от выбранного гиперупругого потенциала W . Четыре варианта формулировки W , наиболее часто используемые при анализе конечных деформаций гиперупругих тел, приведены в таб. 1. Выражения для производных $\frac{\partial W}{\partial I_s}$ в явной форме приведены в таб. 2. Нумерация строк таб. 1, указанная в первой колонке, соответствует нумерации потенциалов в таб. 2.

Таким образом, силы в вершинах тетраэдров могут быть найдены в виде аналитических (алгебраических) зависимостей от позиций вершин, задаваемых векторами $\mathbf{S}_i$, $i \in (1, \dots, 4)$.

Сила, действующая на i -ю вершину тетраэдра со стороны внешних силовых полей (объемной плотностью $\mathbf{b}$ и поверхностной, $\mathbf{t}$), определяется следующим интегралом:

$$\mathbf{f}_{i,\text{ext}}^{(\mathcal{T}_R)} = \int_{\Gamma_\sigma(t) \cap \mathcal{T}} \mathbf{t} \lambda_i ds + \int_{\mathcal{T}} \mathbf{b} \lambda_i d\Omega.$$

Здесь $\mathcal{T}$ — регион, занимаемый тетраэдром в составе актуальной формы.

Располагая выражениями для зависимости узловых сил, сформулируем нелинейную систему алгебраических уравнений относительно узловых смещений из промежуточной формы, актуальную в квазистатическом приближении (без учета сил инерции):

$$\sum_{\mathcal{T} \in \Sigma_i} \left(\mathbf{f}_i^{(\mathcal{T}_R)} + \mathbf{f}_{i,\text{ext}}^{(\mathcal{T}_R)} \right) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где Σ_i обозначает множество тетраэдров с вершиной в узле номер i .

Эта система содержит значения тензорного поля импланта $\mathbf{K}$ в качестве параметра. Если положить $\mathbf{K} \equiv \mathbf{I}$, то промежуточная форма окажется свободной от напряжений, и решение системы (7) будет определять напряженно-деформированное состояние актуальной формы в смысле классической гиперупругости. Отличие $\mathbf{K}$ от единичного тензора характеризует внутренние источники деформаций, роль которых играют распределенные дефекты. В этом случае с каждым абстрактным тетраэдром конечно-элементной модели связаны три его метрических представления: ненапряженный тетраэдр, отсчетный тетраэдр в составе промежуточной формы и актуальный тетраэдр в составе актуальной формы (рис. 5). Все три тетраэдра в отдельности являются регионами физического пространства, и потому для их описания не требуется неевклидовых представлений. Вместе с тем совокупности тетраэдров, образующих конечноэлементные сети, могут быть вложены в физическое (евклидово) пространство только для промежуточной и актуальной форм. Отсчетные тетраэдры в общем случае могут быть вложены в физическое пространство в составе конечноэлементной сети, индивидуальной для каждого из них. В этом состоит аналогия дискретизированного состояния с семейством отсчетных форм (5). Попытка погрузить совокупность отсчетных тетраэдров, не нарушая совпадения узлов, в физическое пространство окажется безуспешной, поскольку длины ребер соседних тетраэдров не будут совпадать в евклидовой метрике. Надлежащая "подстройка" метрики (6) над многообразием, получаемым из аффинного пространства за счет "стирания" метрики ассоциированного с ним трансляционного евклидова пространства, приводит к построению риманового пространства, в которое все ненапряженные тетраэдры вкладываются в совокупности без разрывов конечноэлементной сети.

Несколько слов следует сказать о вычислении производных второго и третьего порядков, требуемых для вычисления связности и кривизны по полю импланта, определяемого из конечноэлементного расчета. Непосредственное дифференцирование кусочно-линейной аппроксимации ничего, кроме нулевых (либо несуществующих) значений, не даст, и для вычисления производных требуется иной подход. При построении алгоритма производные вычислялись как проекции на специальные базисные функции, т. е. процедура дифференцирования заменялась интегрированием по объему тела. Базисные функции определялись как элементы системы, биортогональной к элементарным мономам $(1, x, x^2, xy, xz, \dots)$. Биортогональность понималась в смысле квадратичной метрики пространства функций, задаваемых над областью, занимаемой промежуточной формой.

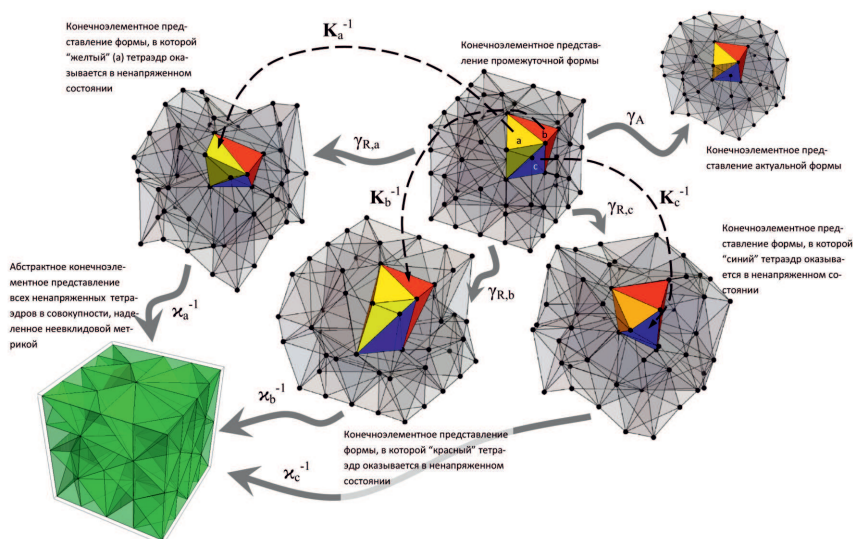


Рис. 5. Неевклидова отсчетная форма, семейство отсчетных форм, промежуточная и актуальная формы в конечноэлементном представлении

Fig. 5. Non-Euclidean reference shape, family of reference shapes, intermediate and actual shapes in finite element representation

9°. Если поле импланта $\mathbf{K}$ полагать заданным, то в результате решения алгебраической системы (7) можно определить напряженно-деформированное состояние отсчетной и актуальной форм, вызванное действием внешних полей и внутренних источников напряжений, количественно полностью характеризуемых полем $\mathbf{K}$. Такая задача в нелинейной теории упругости обычно называется задачей о (несовместной) дисторсии, и ей посвящены многочисленные работы, начиная с работ Вольтерры. Более сложной является задача о переменной дисторсии, которая эволюционирует в процессе деформирования тела. В этом случае поле $\mathbf{K}$ изменяется во времени, и это изменение следует находить из дополнительного уравнения, характеризующего физические процессы типа миграции дефектов или какого-либо иного фи-

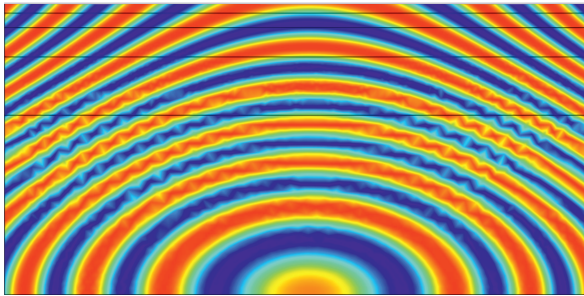
зического механизма, с макроскопической точки зрения описываемого как вязко-пластичность. Для того чтобы конкретизировать этот механизм, следует выбрать некоторое уравнение эволюции для поля $\mathbf{K}$. В рамках настоящей статьи, не погружаясь в физические детали теории дислокаций, которые можно найти в работах [34–36], будем полагать, что эволюция отсчетной формы определяется в рамках дислокационной модели Александра — Хаасена — Сумино. Поле этом $\mathbf{K}$ определяется из эволюционного уравнения, связанного с эволюционным уравнением для плотности дефектов N :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}} &= A N \left\langle \sqrt{J_2} - B \sqrt{N} \right\rangle^p \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{J_2}}, \\ \dot{N} &= C \left\langle \sqrt{J_2} - A \sqrt{N} \right\rangle^{p+\lambda}.\end{aligned}\quad (8)$$

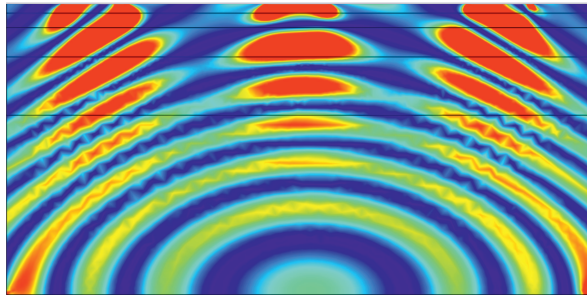
Здесь A , B , C , p , λ — эмпирические константы (более точно, функции температуры), причем A , C характеризует подвижность дефектов, а B — упрочнение материала, связанное с их перераспределением; $\mathbf{S}$ — девиаторная часть тензора напряжений Коши, $J_2 = \mathbf{S} : \mathbf{S}^T / 2$, а угловые скобки определяют "одностороннюю связь":

$$\langle x \rangle = \{ x, x > 0, x \leq 0 \}.$$

В рамках развиваемой в статье вычислительной квазистатической модели процесс деформирования эволюции поля дефектов разбивается на слои по времени. На первом слое решается задача о дисторсии в гиперупругом теле для заданного поля $\mathbf{K}$. При этом начальное распределение дефектов N также полагается заданным. На втором слое по вычисленному распределению напряжений Коши и его девиаторной части определяются конечные приращения $\delta \mathbf{K}$ и δN из дискретных аналогов (8) и значения полей $\mathbf{K}$ и N корректируются. На последующих слоях процесс продолжается. Таким образом моделируется процесс развития неупругих деформаций и соответствующего перераспределения дефектов. С макроскопической точки зрения этот процесс характеризует упруго-вязко-пластическую деформацию, причем вязкость как реологическое свойство проявляется в силу того, что перераспределение дефектов и, следовательно, напряженно-деформированное состояние тела зависит от темпа нагружения, учитываемого эволюционными уравнениями (8).



(a) Начальное распределение



(b) Финальное распределение

Рис. 6. Плотность распределения дефектов в начале и в конце процесса контактного взаимодействия
 Fig. 6. The distribution density of defects at the beginning and at the end of the process of contact interaction

10°. При действии на тело и его границу заданных силовых полей на каждом временном слое решения нелинейной системы уравнений (7) полностью определяют напряжения и деформации. При этом на части узлов может быть задано смещение, в результате чего эти узлы исключаются из множества неизвестных и число уравнений сокращается. В этой связи учет контактного взаимодействия с жестким штампом при фиксированной области контакта выполняется по описанному выше алгоритму, который лишь упрощается за счет уменьшения числа неизвестных. Конечно, при этом задается смещение штампа, а результирующие сила и момент вычисляются по ним. Если из условий расчета известны усилия, приложенные к штампу, то для моделирования контактного взаимодействия требуется выполнить итерационный процесс, в ходе которого задаются пробные смещения, которые затем корректируются из условия минимизации фактических усилий на штампе и их заданных значений. Однако если область контакта заранее неизвестна, то, даже при кинематическом задании внедрения штампа указать смещения узлов сразу не удастся. Здесь также требуется итерационный вычислительный процесс, на первом шаге которого задаются смещения узлов (по профилю штампа), актуальные позиции которых попадают в пробную область контакта. При этом позиции части узлов, не попавших в пробную область, могут оказаться внутри области пространства, занимаемой штампом. Такое "проникновение" означает, что пробная область слишком мала и её требуется увеличить. Добавляя соседние узлы к пробной области, повторяем расчет до тех пор, пока не исключим "проникновение". Если внедрение штампа задано

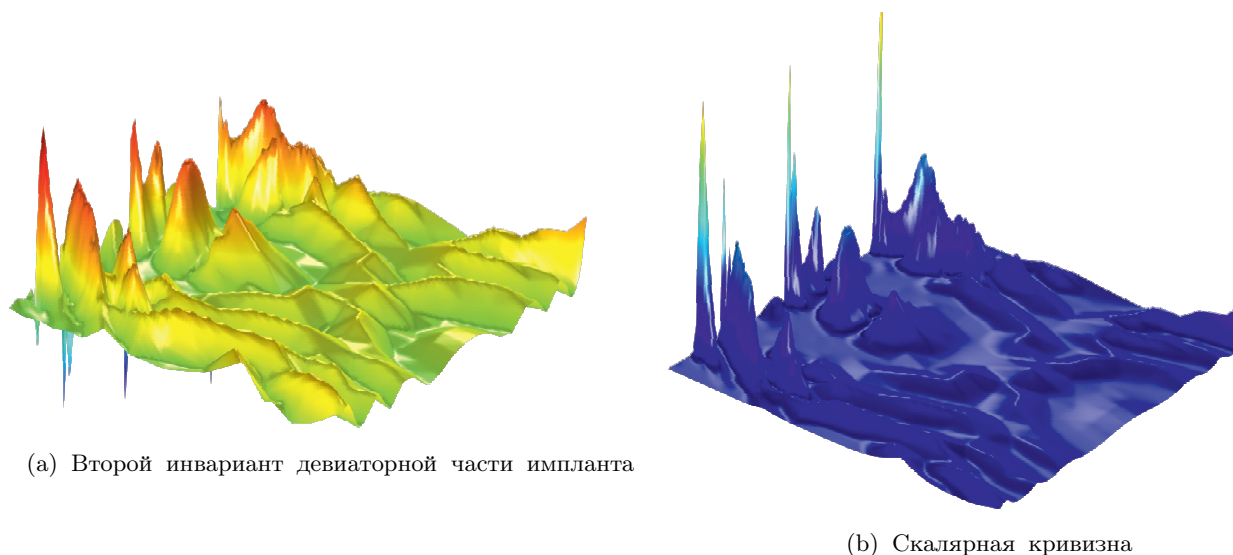


Рис. 7. Распределения характеристик несовместности деформаций
Fig. 7. Distributions of strain incompatibility characteristics

не кинематически, а посредством результирующей силы и момента, то итерационный процесс происходит по силовым и контактным параметрам — результирующим усилиям и форме пробной области. В случае осесимметричной формы штампа итерационный процесс существенно упрощается, поскольку пробная область задается скалярным параметром — ее диаметром. Вычисления, проводимые в настоящей работе, предполагают такую симметрию штампов.

Заключение

С помощью изложенного выше алгоритма были произведены тестовое моделирование эволюции напряженно-деформированного состояния и распределения дефектов в параллелепипеде при внедрении системы трех жестких штампов со сферической формой поверхности контакта. Материальные характеристики, используемые при моделировании, соответствуют кремнию (в рамках потенциала Муни — Ривлина при $\beta = 0$ и не учитывая фактора анизотропии), а размеры параллелепипеда $2\mu\text{m} \times 1\mu\text{m} \times 1\mu\text{m}$. Диаметр каждого штампа составил $1/10$ от наибольшего размера тела, т. е. $0.1\mu\text{m}$, расстояние между штампами $0.2\mu\text{m}$. Параметры эволюционных уравнений для дефектов взяты из [37]. Программа нагружения штампов — линейная по времени, до достижения максимального напряжения, равного пределу пластичности. Длительность процесса нагружения — 100 мин, интервал одного временного слоя — 1 мин. Начальное распределение дефектов полагалось квазипериодическим, графически пространственное распределение N в среднем сечении параллелепипеда показано на рис. 6а. Финальное распределение — на рис. 6б. Поле $\mathbf{K}$ в начале расчета полагалось единичным, что соответствует отсутствию собственных (несовместных) деформаций в начале нагружения. Для характеристики изменения $\mathbf{K}$ в финале процесса на рис. 7а показано распределение в среднем сечении скалярной величины — второго инварианта его девиаторной части. (такой выбор продиктован ассоциацией с определяющей характеристикой поля напряжений в классической пластичности). Рис. 7б иллюстрирует распределение скалярной кривизны материальной связности в среднем сечении параллелепипеда.

Результаты моделирования показывают, что в окрестности контактных областей происходит интенсивное перераспределение дефектов и развитие неупругих деформаций. Следует отметить, что полученные результаты в целом демонстрируют работоспособность предлагаемой схемы вычислительного моделирования, но о моделировании реальных физических эффектов пока говорить рано. Требуются более тщательная проработка уравнений эволюции распределения дефектов и выбор упругого потенциала в приложении к конкретным материалам, используемым в MEMS, а также экспериментальная верификация и идентификация параметров моделирования. Авторы надеются получить эти результаты в последующих работах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-01-00400 А.

Литература

- [1] Bei Yu, Pan D.Z. Design for Manufacturability with Advanced Lithography. Springer, 2016. 175 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-20385-0>.
- [2] Xi Chen Ed. Mechanical Self-Assembly. Springer, 2013. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4614-4562-3>.
- [3] Lobontiu N., Garcia E. Mechanics of Microelectromechanical Systems. Springer-Verlag US, 2005. DOI: https://doc.lagout.org/science/0_Computer%20Science/8_Electronics%20%26%20Robotics/Mechanics%20of%20Microelectromechanical%20Systems%20-%20N.Lobontiu%20and%20E.Garcia.pdf.
- [4] Weingarten J. Sulle superficie di discontinuita nella teoria della elasticita dei corpi solidi // Rend. Reale Accad. dei Lincei, classe di sci., fis., mat. e nat., 1901. Vol. 10.1. P. 57–60.
- [5] Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 3. 1907. Vol. 24. P. 401–517. DOI: <http://doi.org/10.24033/asens.583>.
- [6] Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un corps solide // Ex. de Math. 1827. P. 42–56. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511702662.007>.
- [7] Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides // Ex. de Math. 1827. P. 60–69. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511702662.009>.
- [8] Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit kristallinischer Körper // Zeitschrift für Physik, 1926. Vol. 37, no. 7–8. Pp. 572–609. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01397292>.
- [9] Polanyi M. Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte // Zeitschrift für Physik, 1934. Vol. 89, no. 9–10. Pp. 660–664. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01341481>.
- [10] Orowan E. Zur Kristallplastizität. I // Zeitschrift für Physik, 1934. Vol. 89, no. 9–10, pp. 605–613. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01341478>.
- [11] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1934. Vol. 145, no. 855. P. 362–387. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1934.0106>.
- [12] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1934. Vol. 145, no. 855. P. 388–404. DOI: <http://doi.org/10.1098/RSPA.1934.0107>.
- [13] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. 1948. Vol. 73, issue 4. P. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [14] Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1955. Vol. 231, no. 1185. P. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [15] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In: Kondo K. (ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry. 1955b. Vol. 1. P. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [16] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=789336&pg=1>.
- [17] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, no. 1. P. 1–32. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [18] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, no. 1. P. 33–94. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [19] Де Вит Р. Континуальная теория дислокаций. Москва: Мир, 1977. 208 с.
- [20] Спивак М. Математический анализ на многообразиях. Москва: Мир, 1968. 164 с. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Spivak1968ru.pdf>.
- [21] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer New York, 2012. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [22] Marsden J.E., Hughes T.J.R. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 556 p. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3167757>.
- [23] Rakotomanana L. A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua. Birkhäuser Boston, MA, 2004. 265 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-0-8176-8132-6>.
- [24] Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762673>.
- [25] Frankel T. The geometry of physics: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.882494>.

- [26] Steinmann P. Geometrical Foundations of Continuum Mechanics. Springer Berlin Heidelberg, 2015. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-46460-1>.
- [27] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2018. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [28] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2016. Vol. 7. issue 3, pp. 177–233. DOI: <http://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [29] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part II. Strain and Stress Measures // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. 2019. Vol. 10, issue 2. P. 97–121. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018024573>.
- [30] Lychev S., Koifman K. Material Affine Connections for Growing Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, issue 10. P. 2034–2052. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1995080220100121>.
- [31] Lychev S., Koifman K. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, issue 8. P. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1995080221080187>.
- [32] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite Incompatible Deformations in Elastic Solids: Relativistic Approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, issue 7. P. 1670–1695. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [33] Salamatova V.Yu. Finite Element Method for 3D Deformation of Hyperelastic Materials // Differential Equations. 2019, Vol. 55, no. 7. P. 990–999. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0012266119070115>.
- [34] Alexander H., Haasen P. Dislocations and Plastic Flow in the Diamond Structure // Solid State Physics. 1969. Vol. 22. P. 27–158. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0081-1947\(08\)60031-4](http://doi.org/10.1016/S0081-1947(08)60031-4).
- [35] Yonenaga I., Sumino K. Dislocation dynamics in the plastic deformation of silicon crystals I. Experiments. // Physica Status Solidi A. 1978. Vol. 50, issue 2. P. 685–693. DOI: <https://doi.org/10.1002/pssa.2210500239>.
- [36] Suezawa M., Sumino K., Yonenaga I. Dislocation dynamics in the plastic deformation of silicon crystals. II. Theoretical analysis of experimental results // Physica Status Solidi A. 1979. Vol. 51, issue 1. P. 217–226. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783112495209-025>.
- [37] Maohua Lin, Xinjiang Wu, Xinqin Liao, Min Shi, Disheng Ou, Chi-Tay Tsai. 3D Viscoplastic Finite Element Modeling of Dislocation Generation in a Large Size Si Ingot of the Directional Solidification Stage // Materials. 2019. Vol. 12, issue 17. P. 2783. DOI: <http://doi.org/10.3390/ma12172783>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73

Submitted: 19.04.2022

Revised: 02.06.2022

Accepted: 14.11.2022

T.N. Lycheva

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: taniko81@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8802-022X>

S.A. Lychev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

EVOLUTION OF THE FIELD OF DISTRIBUTED DEFECTS IN A CRYSTAL DURING CONTACT INTERACTION WITH A SYSTEM OF RIGID STAMPS

ABSTRACT

The article discusses the mathematical modeling for the evolution of the stress-strain state and fields of defects in crystals during their contact interaction with a system of rigid punches. From a macroscopic point of view, the redistribution of defects is characterized by inelastic (viscoplastic) deformation, and therefore the processes under study can be classified as elastic-viscoplastic. Elastic and inelastic deformations are assumed to be finite. To take into account inelastic deformations, it is proposed to use a differential-geometric approach, in which the evolution of the fields of distributed defects is completely characterized by measures of incompatible deformations and quantified by material connection invariants. This connection is generated by a non-Euclidean metric, which, in turn, is given by a field of symmetric linear mappings that define

(inconsistent) deformations of the crystal. Since the development of local deformations depends both on the contact interaction at the boundary and on the distribution of defects in the bulk of the crystal, the simulation problem turns out to be coupled. It is assumed that the local change in the defect density is determined by the first-order Alexander — Haasen — Sumino evolutionary law, which takes into account the deviatoric part of the stress field. An iterative algorithm has been developed to find coupled fields of local deformations and defects density. The numerical analysis for the model problem was provided for a silicon crystal in the form of a parallelepiped, one face of which is rigidly fixed, and a system of rigid stamps acts on the opposite face. The three-constant Mooney — Rivlin potential was used to model the local elastic response.

Key words: distributed defects; finite strains; hyperelasticity; strain incompatibility; evolution of defect fields; contact interaction; finite elements.

Citation. Lycheva T.N., Lychev S.A. Evolution of the field of distributed defects in a crystal during contact interaction with a system of rigid stamps. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 55–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Lycheva T.N., Lychev S.A., 2022

Tatiana N. Lycheva — tribology laboratory engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1, Avenue Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Sergey A. Lychev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, leading researcher, Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1, Avenue Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

References

- [1] Bei Yu, Pan D.Z. Design for Manufacturability with Advanced Lithography. Springer, 2016. 175 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-20385-0>.
- [2] Xi Chen Ed. Mechanical Self-Assembly. Springer, 2013. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4614-4562-3>
- [3] Lobontiu N., Garcia E. Mechanics of Microelectromechanical Systems. Springer-Verlag US, 2005, 405 p. DOI: https://doc.lagout.org/science/0_Computer%20Science/8_Electronics%20%26%20Robotics/Mechanics%20of%20Microelectromechanical%20Systems%20-%20N.Lobontiu%20and%20E.Garcia.pdf.
- [4] Weingarten J. Sulle superficie di discontinuita nella teoria della elasticita dei corpi solidi. *Rend. Reale Accad. dei Lincei, classe di sci., fis., mat. e nat.*, 1901, vol. 10.1, pp. 57–60.
- [5] Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 3*, 1907, vol. 24, pp. 401–517. DOI: <http://doi.org/10.24033/asens.583>.
- [6] Cauchy A.-L. De la pression ou tension dans un corps solide. *Ex. de Math.*, 1827, pp. 42–56. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511702662.007>.
- [7] Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides. *Ex. de Math.*, 1827, pp. 60–69. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511702662.009>.
- [8] Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit kristallinischer Körper. *Zeitschrift für Physik*, 1926, vol. 37, no. 7–8, pp. 572–609. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01397292>.
- [9] Polanyi M. Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. *Zeitschrift für Physik*, 1934, vol. 89, no. 9–10, pp. 660–664. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01341481>.
- [10] Orowan E. Zur Kristallplastizität. I. *Zeitschrift für Physik*, 1934, vol. 89, no. 9–10, pp. 605–613. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01341478>.
- [11] Taylor G. I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 145, no. 855, pp. 362–387. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1934.0106>.
- [12] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 145, no. 855, pp. 388–404. DOI: <http://doi.org/10.1098/RSPA.1934.0107>.
- [13] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, no. 4, pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.

- [14] Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [15] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, vol. 1, pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai (1955b)
- [16] Kroner E. General continuum theory of dislocations and self-stresses. Moscow: Mir, 1965, 103 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=789336&pg=1> (In Russ.)
- [17] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 1–32. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [18] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 33–94. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [19] De Vit R. Continuum theory of dislocations. Moscow: Mir, 1977, 208 p. (In Russ.)
- [20] Spivak M. Calculus on manifolds. Moscow: Mir, 1968, 164 p. Available at: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Spivak1968ru.pdf> (In Russ.)
- [21] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer New York, 2012. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [22] Marsden J.E., Hughes T.J.R. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3167757>.
- [23] Rakotomanana L. A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua. Birkhäuser Boston, MA, 2004. 265 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-0-8176-8132-6>.
- [24] Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762673>.
- [25] Frankel T. The geometry of physics: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.882494>.
- [26] Steinmann P. Geometrical Foundations of Continuum Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-46460-1>.
- [27] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2018. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [28] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2016, vol. 7, issue 3, pp. 177–233. DOI: <http://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>
- [29] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part II. Strain and Stress Measures. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2019, vol. 10, issue 2, pp. 97–121. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018024573>.
- [30] Lychev S., Koifman K. Material Affine Connections for Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, issue 10, pp. 2034–2052. DOI: <http://doi.org/10.1134/s1995080220100121>.
- [31] Lychev S., Koifman K. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, issue 8, pp. 1852–1875. DOI: <http://doi.org/10.1134/s1995080221080187>.
- [32] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite Incompatible Deformations in Elastic Solids: Relativistic Approach. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, issue 7, pp. 1670–1695. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [33] Salamatova V.Yu. Finite Element Method for 3D Deformation of Hyperelastic Materials. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 7, pp. 990–999. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0012266119070115>.
- [34] Alexander H., Haasen P. Dislocations and Plastic Flow in the Diamond Structure. *Solid State Physics*, 1969, vol. 22, pp. 27–158. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0081-1947\(08\)60031-4](http://doi.org/10.1016/S0081-1947(08)60031-4).
- [35] Yonenaga I., Sumino K. Dislocation dynamics in the plastic deformation of silicon crystals I. Experiments. *Physica Status Solidi A*, 1978, vol. 50, issue 2, pp. 685–693. DOI: <http://doi.org/10.1002/pssa.2210500239>.
- [36] Suezawa M., Sumino K., Yonenaga I. Dislocation dynamics in the plastic deformation of silicon crystals. II. Theoretical analysis of experimental results. *Physica Status Solidi A*, 1979, vol. 51, issue 1, pp. 217–226. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783112495209-025>.
- [37] Maohua Lin, Xinjiang Wu, Xinqin Liao, Min Shi, Disheng Ou, Chi-Tay Tsai. 3D Viscoplastic Finite Element Modeling of Dislocation Generation in a Large Size Si Ingot of the Directional Solidification Stage. *Materials*, 2019, vol. 12, issue 17, p. 2783. DOI: <http://doi.org/10.3390/ma12172783>.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-74-94

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 23.03.2022
после рецензирования: 26.04.2022
принятия статьи: 14.11.2022

А.В. Сюракшин

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Asyurakshin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4676-3092>

В.А. Салеев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: vasaleev@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

В.Ю. Юшанхай

Лаборатория теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт
ядерных исследований, г. Дубна, Российская Федерация
E-mail: yushankh@theor.jinr.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4313-4626>

КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ

АННОТАЦИЯ

Проникновение квантовых концепций в биологическую науку, начавшись вскоре после рождения квантовой механики, за последние два десятилетия оформилось в новую междисциплинарную научную дисциплину – квантовую биологию. Один из ключевых вопросов квантовой биологии получил следующую формулировку: существуют ли биологические системы, использующие квантовые эффекты для выполнения задачи, которая не может быть реализована классически? В более широком смысле, адаптируют ли некоторые виды организмов в процессе своего эволюционного развития эффективные квантовые механизмы с целью получить преимущество перед своими конкурентами? В круг актуальных проблем новой дисциплины, обсуждаемых в данной статье, включены вопросы общего, исторического и методологического характера, а также обобщены некоторые теоретические модели, направленные на описание квантовых процессов, включая фотосинтез бактерий, магниторецепцию птиц и механизм обоняния в живых организмах.

Ключевые слова: квантовый транспорт; когерентность; интерференция; фотосинтез; магниторецепция; биосенсоры.

Цитирование. Сюракшин А.В., Салеев В.А., Юшанхай В.Ю. Квантовые модели в биологии // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 74–94. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-74-94>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Сюракшин А.В., Салеев В.А., Юшанхай В.Ю., 2022

Антон Викторович Сюракшин — аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Владимир Анатольевич Салеев — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Юшанхай Виктор Юлиевич — ведущий научный сотрудник, Лаборатория теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, 141980, Российская Федерация, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6.

Введение

В последнее время можно наблюдать, как квантовые компьютеры и вычисления из разряда экзотических постепенно становятся областью рутинных теоретических и лабораторных поисков и исследований. На наш взгляд, что-то подобное происходит с областью, возникшей на стыке квантовой физики и биологии. Предпринятые еще создателями квантовой механики, Н. Бором и Э. Шредингером, усилия применить ее общие концепции к объяснению структуры и функционирования живых организмов получили дальнейшее развитие в работах многих исследователей. На этом пути сформулировано большое разнообразие суждений, прежде всего теоретического характера, отраженных в научной литературе. С учетом сложности исследуемого объекта — живых организмов, а также отсутствия на данном этапе возможности экспериментальной проверки, многие суждения на долгое время остаются в статусе фантазии, удачной визионерской догадки, спекуляции или, возможно, просто ошибочного утверждения. Вместе с тем за последние годы многие теоретические конструкции обрели статус хорошо разработанных научных гипотез, а некоторые из них получили экспериментальную проверку.

В данном кратком обзоре, посвященном применению квантовой механики к проблемам биологии, мы постарались затронуть как вопросы общего, методологического характера, так и рассмотреть конкретные примеры успешного применения математического формализма и моделей квантовой теории к описанию на атомно-молекулярном уровне процессов, происходящих в биосистемах. Особое внимание уделено детальному обсуждению процесса, лежащему в основе фотосинтеза, а именно квантовому транспорту электронного возбуждения — экситона.

1. Квантовая биология как междисциплинарная наука

1.1. От постановки проблем к целям

До двадцатого века пути биологии и физики практически не пересекались. Биологические системы считались слишком сложными и не поддающимися изучению глубокими математическими методами. Ведь как мог набор дифференциальных уравнений в совокупности с физическими принципами пролить свет на нечто столь сложное, как живое существо? В XX веке с появлением мощных микроскопов и методов лабораторного анализа открылись возможности более глубоко вникать в микроструктуру биологических систем на атомно-молекулярном уровне, что, в свою очередь, дало толчок к их теоретическому осмыслению с применением физическо-математических моделей. Среди первых исследователей на этом пути следует прежде всего упомянуть самих создателей квантовой механики. В статье, опубликованной в «Nature» в 1933 году, Нильс Бор [1] исследовал значение принципа дополнительности, одной из самых общих и фундаментальных концепций квантовой теории, для понимания тонкой организации живых организмов. Из этой статьи становится ясно, что еще в то время Бор представлял себе, что биофизику фотосинтеза в живых организмах придется описывать с привлечением квантовой теории. В своей книге «Что такое жизнь?», опубликованной в 1944 г., Э. Шредингер [2], применив аргументы статистической физики, предсказал несколько самых общих функциональных особенностей молекулярных носителей наследственности.

На определенном этапе естественным образом возник вопрос: могут ли, как указал Н. Бор, не только общие принципы квантовой физики, но и весь математический формализм квантовой механики быть плодотворно использованы в биологии? На первый взгляд, это уже было реализовано вскоре после создания квантовой теории. Действительно, утвердительно ответить на поставленный вопрос можно, приняв во внимание, что молекулярная структура и функционирование организмов основаны на биохимических реакциях, а последние, в свою очередь, могут быть объяснены в терминах квантовой химии и, более того, количественно описаны в рамках математического формализма этой дисциплины. Но логика такого рассуждения ведет к чрезмерному упрощению вопроса и сводит ответ к известному ранее утверждению, а именно: процесс установления химических связей между атомами основан на квантово-механических закономерностях. Это, безусловно, нетривиальное утверждение, сформулированное вскоре после возникновения квантовой механики в трудах В. Гайтлера и Ф. Лондона, и развитое позже Л. Поулингом [3] и другими, скорее демонстрирует фундаментальную роль физики по отношению к химии.

По сравнению с объектом и целями химии, биология призвана раскрыть структуру и механизмы функционирования материи на гораздо более высоком уровне ее организации. Отмечено [4], что, по мнению ряда исследователей, квантовая механика во многих отношениях все еще остается концепцией чуждой биологии, особенно при описании физиологически важных процессов, протекающих на относительно большом временном масштабе. Вместе с тем, благодаря продолжающемуся в последние годы междисциплинарному взаимодействию квантовой физики и биологии, стала возможной новая постановка вопросов и внедрение новых методологических подходов к проблеме в целом, в частности, со стороны деятельности, направленной на создание квантовых компьютеров.

Известно, что квантовые компьютеры в перспективе имеют значительное преимущество над своими классическими аналогами. На этом пути недавний технический прогресс в применении квантовых концепций для обработки информации и шифрования неожиданно помог взглянуть на интересующий нас предмет в ином свете. Например, один из ключевых вопросов получил следующую формулировку: существуют ли биологические системы, использующие квантовые эффекты для выполнения задачи, которая не может быть реализована классически, либо они способствуют более эффективному выполнению этой задачи, чем даже лучший классический аналог? В более широком смысле, адаптируют ли некоторые виды организмов в процессе своего эволюционного развития эффективные квантовые механизмы с целью получить преимущество перед их конкурентами? Многие попытки найти примеры такого явления вначале были встречены резкой критикой как со стороны физиков, так и биологов. Например, известный советский физик А.С. Давыдов в своей книге «Биология и квантовая механика» [5] утверждал, что квантовая механика наиболее актуальна для изолированных систем в чистом квантовом состоянии и поэтому не имеет большого значения для биологических систем, находящихся в статистических смешанных состояниях и взаимодействующих с окружающей средой.

Однако осуществленные за последнее два десятилетия экспериментальные наблюдения и теоретические разработки подтвердили существование ряда примеров, когда нетривиальные квантовые механизмы используются организмом для своего более эффективного функционирования и тем самым для получения биологического преимущества. Достигнутое при этом успешное применение концепций и математического формализма квантовой механики для описания биологических объектов дало основание объявить о возникновении новой междисциплинарной области — квантовой биологии [4; 6; 7].

В разделе 3 представлены некоторые из наиболее ярких примеров квантовых процессов в биосистемах, а также объясняющие их квантовые механизмы и модели, находящиеся в центре внимания современной квантовой биологии. Мы предваряем это представление моделей коротким подразделом 1.2, где применяемые в дальнейшем квантовые концепции поясняются с использованием простой терминологии. Подготовленный читатель может пропустить эту часть. Раздел 2 более широкого плана посвящен обсуждению вопросов междисциплинарного взаимоотношения квантовой физики и биологии. Физик, прошедший к изучению проблем биологии, ожидаемо задается подобными, в том числе сопряженными с философией, вопросами и мы предлагаем наши, а также почерпнутые из литературы суждения на этот счет. Некоторые вопросы методологии биологического эксперимента, а также короткое резюме сформулированы в заключительном разделе.

1.2. Концепции квантовой механики как основа теоретической квантовой биологии

Среди ключевых постулатов квантовой механики [8] находится принцип суперпозиции, согласно которому различные формы волновой функции Ψ микрочастицы можно получить варьированием амплитуд c_i в разложении Ψ в ряд по другим базисным функциям ψ_i , причем линейным образом: $\Psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n$. Здесь число n членов ряда диктуется размерностью функционального пространства, амплитуды c_i — комплексные числа. Таким образом, изменяя величины амплитуд c_i , в разложении можно трансформировать форму волновой функции Ψ от узкого частицеподобного волнового пакета, хорошо локализованного в малой области пространства, к делокализованной в широкой области пространства волне.

Реализация одной из альтернативных форм волновой функции диктуется прежде всего характером пространственной зависимости статического потенциала, в котором находится микрочастица, и ее полной энергией, что явно учитывается посредством решения уравнения Шредингера. Кроме того, наличие дополнительного взаимодействия микрочастицы с флуктуирующими полями окружающей среды также может кардинально повлиять на форму ее волновой функции. Эффекты такого влияния в значительной степени продиктованы особенностями динамики окружающей микрочастицу атомно-молекулярной среды, а их учет требует выхода за рамки уравнения Шредингера в пользу более полного описания, основанного на решении квантового уравнения Лиувилля для матрицы плотности полной системы «микрочастица + окружающая среда». Следует подчеркнуть, что двойственное (дуальное) поведение микрообъек-

та, например, трансформация его волновой функции из локализованного в делокализованное состояние ярко проявляет себя при исследовании механизмов квантового транспорта заряженных электронного и дырочного носителей или нейтрального электронного возбуждения (экситона) в биомолекулярных комплексах, что будет детально обсуждаться в следующих разделах.

Помимо дуальности, был выявлен ряд других квантовых эффектов, оказывающих значительное влияние на протекающие в организмах биопроцессы с участием заряженных носителей и экситонов. В этом ряду находятся классически запрещенное подбарьерное туннелирование, когерентность и явление интерференции электронных волновых функций, а также квантовая запутанность. Если представление о подбарьерном туннелировании общедоступно, то квантовые интерференция, когерентность и запутанность требуют разъяснений.

Эта цель достигается формально разными способами при описании микрообъекта в трех фундаментально различных квантовых состояниях – чистом, смешанном и запутанном. Ограничимся волновой функцией Ψ чистого состояния и взаимосвязь когерентности и интерференции поясним на простейшем примере линейной суперпозиции $\Psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ двух базисных функций ψ_1 и ψ_2 . Согласно постулатам квантовой механики, экспериментально измеряемой величиной является не сама волновая функция, а квадрат ее модуля

$$\Psi^*\Psi = |c_1|^2\psi_1^*\psi_1 + |c_2|^2\psi_2^*\psi_2 + c_1^*c_2\psi_1^*\psi_2 + c_2^*c_1\psi_2^*\psi_1.$$

В этом выражении наличие двух последних вкладов описывает явление квантовой интерференции – усиление вероятности нахождения микрочастицы в одних областях пространства (конструктивная интерференция) и подавление в других областях (деструктивная интерференция). Интерференционная волновая картина разворачивается в пространстве и времени, что означает сохранение во времени когерентности, т. е. согласованности между различными вкладами, $c_1\psi_1$ и $c_2\psi_2$, в общую волновую функцию Ψ чистого квантового состояния микрообъекта. Важно понимать, что в рамках стандартного формализма квантовой механики описание временной эволюции какой-либо квантовой системы в форме когерентного чистого состояния оправдано лишь в определенном временном интервале, например, между приготовлением чистого состояния системы в начальный момент времени t_0 и до момента $t_{\text{изм.}}$, когда система взаимодействует с измерительным макроскопическим прибором, а ее волновая функция случайным образом коллапсирует в одно из базисных состояний прибора. Для многих реальных ситуаций, включая биосистемы – субструктуры живых организмов, описание их временной эволюции в форме когерентного состояния имеет гораздо более жесткие ограничения. В таких системах когерентность сохраняется лишь некоторое характерное время $t < t_{\text{ког.}}$ и постепенно разрушается на больших временах $t > t_{\text{ког.}}$ в результате воздействия на рассматриваемую квантовую систему флуктуирующих полей окружающей среды. Декогерентизация, т. е. процесс разрушения когерентности в результате воздействия на квантовую систему случайных динамически флуктуирующих полей окружения, хорошо изучена для многочисленных систем, реализованных в неорганическом мире. Полученные на этом пути выводы и представления были использованы и развиты при изучении процессов, протекающих в биосистемах с разной структурой и функциональностью [9–12].

Здесь еще раз подчеркнем общую задачу, решаемую квантовой биологией, – выявить и провести анализ тех случаев, в которых квантовые эффекты играют ключевую роль в повышении эффективности биологической функции молекулярной органической системы. Решение этой задачи во многом основывается на обобщении результатов изучения характерных субструктур биосистем, таких как молекулярные комплексы наномасштабных и субмикронных размеров с характерными временами протекающих в них биопроцессов фемто- и пикосекундных масштабов. Каждый такой молекулярный комплекс рассматривается как относительно самостоятельная часть живого организма, выполняющая или поддерживающая на микроуровне некоторую определенную функцию этого организма. Базовые представления о ряде таких биосистем с указанием задействованных в них квантовых эффектов изложены в разделе 3.

2. Биосистемы как объект физического и философского анализа

2.1. Биологические объекты

В первой половине XX века главенствующей концепцией в биологии была синтетическая теория эволюции, осуществившая синтез законов Менделя (переоткрытых в 1900 г., К. Коренсом, Э. Чермаком и Г. де Фризом [13]) в хромосомной интерпретации и принципа естественного отбора Дарвина. В рамках этой теории изучалась не столько первооснова живого, сколько его проявления – феномены, т. е. биология в своей основе оставалась феноменологической наукой. После открытия в 1953 г. Дж. Уотсоном и Ф. Криком структуры ДНК и расшифровки генетического кода для синтеза белка началось быстрое развитие молекулярной биологии. На смену прежней статической по своему характеру феноменологии

пришло требование динамического объяснения происхождения и эволюции биологических явлений. Последние 30 лет произошла значительная трансформация биологии – ее математизация и компьютеризация. Вместе с тем укрепилась такое направление, как биофизика, внедрившая в биологические исследования практику применения методов физического эксперимента и теоретического анализа, основанного на математических моделях физики, включая динамические квантовые модели.

Биология по определению занимается изучением биологических объектов. Вопрос о том, какие специфические свойства природных объектов позволяют отнести их к биосистемам, не только относится к самой биологии как конкретной научной дисциплине, но и имеет метанаучное содержание [14; 15] и тем самым обращен к философии. Объекты живой природы можно классифицировать на основе определенных иерархических подходов, которых в литературе предложено несколько. Один из доминирующих подходов, развитый Д. Уилсоном [16], предлагает выделять три главных иерархических уровня организации, а именно гены, организмы (индивиды) и группы особей (виды и роды). В рамках каждого иерархического уровня может быть предложена своя иерархия, отражающая структурную и функциональную специфику объектов, что, в свою очередь, диктует методику их научного исследования.

В интересующем нас случае следует стартовать от уровня организма-индивида и рассмотреть ключевые признаки индивида на этом уровне организации:

- (1) специализированные органы и выполняемые ими физиологические функции,
- (2) внутренние механизмы, ответственные за выполнение этих функций,
- (3) разнообразные органические молекулы и их комплексы как материальная основа для выполнения на микроуровне функций организма.

Ограничившись явной формулировкой трех типов признаков, подчеркнем, что этот список следует продолжить далее, включив в него такие макрохарактеристики организма, как его рост и развитие, воспроизводство и способность к самовосстановлению, адаптация к среде и другие.

В этот список не может быть включен признак, обозначенный термином “живой”, так как он выступает не как элементарный, но как системный признак. Это означает, что такая категория, как “живой организм”, может быть применена к тем биологическим объектам, которые обладают полным набором признаков, входящих в соответствующий исчерпывающий список. Но можно ли составить такой исчерпывающий список?

Квантовая биология как субдисциплина занимается вопросами (1)–(3), фокусируя внимание на влиянии квантовых эффектов на биомолекулярные процессы в организме. В дальнейшем объектами квантовой биологии будем называть биомолекулярные комплексы нано- и субмикронных пространственных размеров, а также физико-химические процессы в них на характерных временах пико- и фемто-секундных диапазонов. Внутренние процессы, лежащие в основе физиологической деятельности организма и выступающие в качестве одного из его ключевых признаков, теперь могут быть исследованы и осмыслены на самом глубоком микроуровне – это уровень физико-химических моделей квантовой теории. При этом важно подчеркнуть, что в экспериментальном плане, т. е. как предмет лабораторного изучения, биологический объект в силу своей специфики не может быть сведен до уровня физического, что будет аргументировано ниже. В частности, особенности методологии биологического эксперимента будут рассмотрены в заключительной части обзора, в контексте квантового механизма магнитной рецепции у перелетных птиц.

2.2. Особенности экспериментального наблюдения в квантовой физике и квантовой биологии

В 20–30 гг. прошлого столетия Н. Бор, В. Гейзенберг и другие сформулировали концептуальную картину квантовой механики, названную копенгагенской интерпретацией [8]. Одновременно и позже появились принципиально другие интерпретации, но копенгагенский вариант, по-видимому, преобладает во взглядах современных физиков. Центральным пунктом копенгагенской интерпретации направлен, во-первых, на разъяснение того, что собой представляет процедура измерения и, во-вторых, на устранение парадоксов вокруг измерения квантовых состояний микрочастицы или более широко квантовой системы в целом. В рамках копенгагенской интерпретации методологическая основа для понимания процедуры измерения содержится в принципе дополнительности. Согласно этому принципу, квантовый объект может проявлять себя различными, возможно даже взаимоисключающими, способами, как это, например реализуется для микрочастицы посредством дуализма “волна-частица”. Согласно копенгагенской интерпретации в процедуру измерения включено принципиально неконтролируемое взаимодействие между объектом и измерительным прибором. В результате этого взаимодействия “объект-прибор” сформированное ранее квантовое состояние объекта коллапсирует вероятностным способом до одного из состояний

возможного “базисного” набора состояний. Базисный набор определяется субъектом-наблюдателем путем выбора и настройки свойств измерительного прибора с целью наблюдения конкретных квантовых характеристик объекта. Представленное выше обсуждение методологических аспектов квантовой механики, связанных с наблюдением и измерением квантовых объектов, объясняется тем, что они в полной мере переносятся и на область экспериментальной квантовой биологии.

Вместе с тем важно осознавать существенные методологические различия в планировании и проведении экспериментов в физике и биологии. В физической науке понимание явления означает построение модели, ее количественное изучение и проверку результатов применительно к данному явлению или кругу явлений. С этой целью существует принципиальная возможность создать так называемый модельный объект и подробно исследовать его свойства физическими измерительными приборами. Модельный объект – это искусственно созданная реальная физическая система, максимально “очищенная” от лишних деталей и связей так, чтобы, по возможности, полно воспроизвести внутри себя строение и структуру взаимодействий исследуемой модели. Если временно отойти от фундаментальных в сторону практических целей, в качестве примера модельных систем можно привести широко применяемую в настоящее время практику создания новых материалов с наперед заданными функциональными свойствами, которые хорошо описываются в рамках существующих физических моделей. Возвращаясь вновь к фундаментальной стороне вопроса, экстраполяция и проверка применимости физической модели на более широкий круг явлений может осуществляться посредством развития самой модели совместно с контролируемым усложнением ее реального дубликата – лабораторной модельной системы. Если понимать теорию как систему хорошо разработанных и взаимосвязанных между собой моделей, то на обозначенном выше пути физика движется к своему идеалу – созданию безошибочной, истинной и всеобъемлющей теории.

Экспериментатор-биолог не имеет той свободы, которой обладает физик. Биологический объект изначально предстает как сложная структура, обладающая определенными функциональными свойствами. Биообъект не может быть редуцирован структурно до уровня модельной системы путем отсечения лишних деталей и связей без того, чтобы не лишиться своих функциональных свойств. Как следствие, в модельное описание биосистемы должно быть включено очень большое число степеней свободы, и модель приобретает стохастический характер. Стохастические модели большого числа частиц широко применяются в статистической физике, но при этом анализ движения частиц может быть проведен на базисном микроуровне динамического (т. е. без участия стохастических эффектов) взаимодействия частиц. Для биосистем процессы и механизмы, действующие на таком физическом базисном микроуровне, не рассматриваются как предмет экспериментальной проверки. Они включаются в модельное описание биосистемы как феноменологические сущности, связанные причинно-следственными связями, в совокупности формирующими функциональные свойства целостной биосистемы. На первоначальном этапе различные модели рассматриваются как конкурирующие гипотезы, и задача эксперимента заключается в выявлении таких сведений о биосистеме, которые помогут в выборе лучшего объяснения ее поведения [17]. Выбор лучшего объяснения предполагает следующие этапы исследования: (а) фиксация фактов из наблюдений за биосистемой, (б) осуществление на их основе дедуктивных выводов и (в) их сравнение с модельными предсказаниями с целью выбора лучшей объяснительной модели.

Следует признать, что такая логика выдвижения и проверки теоретических моделей в биологии сильно отличается с логикой построения физических теорий. Идеал физики заключается в движении к истинной теории, например, через построение безошибочных количественных моделей для определенного круга физических явлений. Полагание наличия таких моделей окружающего мира является одним из основополагающих принципов физической науки, плодотворность которого доказано успешным развитием физики со времен Галилея и Ньютона. Физика использует математику как наиболее адекватный язык для выражения структуры и причинно-следственных отношений внешнего мира и находит обоснование своим принципам в самой себе. Биология для своего обоснования, помимо своих собственных ресурсов, обращается к химии и физике, их методам и концепциям. При этом на настоящем этапе развития биология как научная дисциплина не ставит задачу построения безошибочных количественных моделей, как это делает физика. Биология ограничена поиском лучшего объяснения на основе в строгом смысле приближенных полуколичественных и полуфеноменологических моделей. С позиций физики биологические теории имеют статус хорошо разработанных гипотез.

2.3. Редукционизм и антиредукционизм в биологии

Теперь обратимся к двум общим вопросам, которыми занимается философия биологии [14; 15]: в чем состоит сущность жизни и чем живое отличается от неживого?

Прежде всего, следует назвать два сформированных в философии предельно разных подхода к этим вопросам: витализм и редукционизм. Витализм исходит из наличия особого фактора, разделяющего объ-

екты живой и неживой природы, который не может быть объяснен в терминах химии и физики. Редукционизм утверждает, что жизнь можно полностью понять и объяснить, исходя из принципов физической и химической организации биологических объектов.

Первоначальная идея витализма содержится в аристотелевской философии, трактовавшей объекты как соединение материи и формы. Материя – это то, из чего объект состоит, а также дает возможность для его реализации. Форма (энтелехия) делает объект тем, что он есть, и составляет его суть. Форму живого тела Аристотель назвал душой, которая является формирующей, движущей и целевой причиной пребывания в этом мире. В дальнейшем витализм как учение получил развитие в рамках философского направления, названного “телеологией” (от греческого ‘телос’ — цель). Оставляя в стороне оценку учения в целом, по нашему убеждению, общий виталистический взгляд, в основе которого лежит представление об удивительной целесообразности, упорядоченности и целостности объектов живой природы, в настоящее время разделяется многими учеными. Допуская полярно иной взгляд, а именно редукционистское отрицание фундаментальной специфики жизни и полную ее сводимость к феноменам физики и химии, следует отметить, что на протяжении XIX–XX веков в философии биологии возникли и развивались другие подходы и направления мысли.

С утверждением физико-химического подхода к пониманию основ жизни на рубеже XIX–XX веков получила развитие так называемая «эмергентная теория». Здесь «эмергентность» понимается как возникновение нового качества (от английского ‘emergence’ – появление, возникновение). Суть этой теории может быть выражена следующим образом. По мере усложнения физико-химической организации у составной системы на определенном этапе возникают (возможно скачком) новое качество и новые общие свойства, которые несводимы к свойствам отдельных компонентов системы в том смысле, что сами компоненты изначально этими общими свойствами не обладают. Первый такой скачок связывают с возникновением из относительно простых органических молекул первых живых организмов, а дальнейшее усложнение их биологической организации сопровождалось новыми качественными скачками и появлением новых свойств жизни в процессе биологической эволюции.

Понимание целостности и целесообразности живого организма положено в основу возникшего в XX веке холистического подхода в философии биологии. В самом общем понимании методологический принцип целостности (греч. *holos* — целый, весь) выражается в утверждении, что “целое больше, чем сумма его частей”. Сильный импульс в своем развитии биологический холизм получил от теории сложных систем, основанной на концепциях динамического хаоса и неравновесной термодинамики (И. Пригожин, И. Стенгерс [18]). В рамках этой теории формулируются математические модели, описывающие возникновение в сложной системе порядка из хаоса, что ассоциируется с процессом самоорганизации в живых организмах. Нетрудно видеть, что здесь имеется некоторое сходство с появлением нового качества в эмергентном походе.

С появлением кибернетики – науки об управлении и связи в машинах и живых организмах [19] — проблема целостности и целесообразности живого организма была осознана с новой стороны. Моделью живого организма был объявлен компьютер-робот. В кибернетике подчеркивается целостность функционирующей системы, находящаяся в гибкой взаимозависимости с ее частями, которые могут быть подвергнуты направленным изменениям. При этом возникает понятие цели, но в ее операциональном определении свободном от телеологической интерпретации.

Принципиально новый подход в теоретической биологии, возникший в результате влияния кибернетики, исходит из способности живого организма воспринимать, перерабатывать, хранить информацию, а также использовать ее для поддержания функциональной устойчивости, развития и самопроизводства. Однако на первом этапе применения этого подхода возникла проблема, а именно ограниченный смысл используемой в кибернетике информации. Возникшая в результате решения проблем технического характера теория информации в кибернетике была прежде всего направлена на задачи ее кодировки посредством формальной последовательности знаков, но была неспособна оценивать смысл, содержащийся в этой последовательности. Эта задача была решена в дальнейшем в результате развития семантической теории информации, позволившей соотносить знаковые последовательности с заключенными в них смыслами. На этой основе сформировалось новое направление теоретической биологии – биосемиотика [20]. Этот яркий пример демонстрирует нередукционистский путь развития биологии.

3. Проблемы квантовой биологии

3.1. Общая картина: задачи квантовой биологии

Развитие квантовой биологии [6; 9–12; 21; 22] идет, прежде всего, по пути изучения в живых системах конкретных квантовых сетей, ответственных за транспортировку заряда и энергии, а также за сенсорные функции организма — восприятие им внешних раздражителей и формирование отклика на

них в виде поступающих на рецепторы сигналов. На этом пути, во-первых, формируются новые квантовые модели, а их свойства исследуются физико-математическими методами. Во-вторых, решается более общая задача – на основе анализа частных примеров квантовых эффектов в различных по своей структуре биомолекулярных комплексах ведется поиск объединяющих принципов, объясняющих общие свойства квантовых сетей и их функций в биологических системах. Здесь и далее термины «биосистема», «биомолекулярный комплекс» и «биологический объект» квантовой биологии будут пониматься как взаимозаменяемые.

Параллельно ставится вопрос: как природа оптимизировала структуру той или иной биосистемы, чтобы добиться эффективного функционирования в ней квантовой сети с целью получения эволюционного преимущества для вида, представленного данным организмом?

Выделяя в биосистеме субструктуру – квантовую сеть, выполняющую определенную функцию организма с участием квантовых процессов, следует учесть, что эта субструктура находится в контакте с окружением, т. е. другими частями полной системы, в которую эта квантовая сеть погружена. Окружающая среда с характерными для нее особенностями атомно-молекулярной структуры имеет динамические зарядовые, магнитные (спиновые) и колебательные (вибрационные) степени свободы, взаимодействующие с квантовой сетью и влияющие на протекающие в ней процессы. Вполне вероятно, что для достижения оптимальной производительности обе части организма, квантовая сеть и структура окружающей ее среды подверглись эволюционной адаптации.

Исследователи пришли к выводу, что природа действительно имеет в своем распоряжении широкий спектр возможностей для настройки квантовых сетей и их окружения для создания и поддержания надежных и эффективных функциональных механизмов внутри живых организмов. Некоторые средства, которыми природа располагает для достижения этой структурной адаптации и настройки на оптимальность, обсуждаются в последующих разделах, а также отражены в обзорах [4; 23; 24].

3.2. Резонансный электронно-вибрационный механизм сенсоров обоняния

Применение концепций квантовой механики позволило исследователям обнаружить, что объединение электронных и вибрационных движений молекул может лежать в основе функции биологических сенсоров. Например, предполагается, что подобный механизм обеспечивает важный вклад в функцию сенсоров обоняния [11; 25].

В течение почти ста лет исследователи с ограниченным успехом пытались определить принципы, позволяющие предсказывать запахи. Основная проблема состоит в отсутствии детального понимания того, что на самом деле происходит во время и вскоре после присоединения одоранта – молекулы, стимулирующей обоняние, к связывающему карману активного центра обонятельного рецептора, выполняющего функцию распознавания запаха. В настоящее время исследуются два механизма, получивших название «замок-ключ» и «туннелирование электрона, сопровождаемое виброном», основанные на совершенно разных принципах, классическом и квантовом, соответственно. Так как оба принципа совместимы, исследователи полагают, что сочетание обоих механизмов формируют обоняние.

Идея принципа «замок-ключ» заключается в следующем. В отсутствие одоранта связывающий карман и рецептор имеют некоторую равновесную форму – конформацию. Одоранты достигают рецептора путем диффузии через воздух, но только определенные типы одорантов могут прикрепляться к карману. Выбор определяется химическим родством, формой и т. д. (это часть принципа «ключ в замке»). После прикрепления взаимодействие между одорантом и рецептором приводит к изменению конформации рецептора. Затем это конформационное изменение вызывает дальнейшие процессы и инициирует сигнальную цепь (эта часть представляет собой часть принципа «поворот ключа»).

Однако существует не менее 100 000 одорантов, но гораздо меньше обонятельных рецепторов, так что нет конкретного рецептора для каждого отдельного одоранта, чтобы дифференцировать достаточно широкий спектр запахов. Таким образом, необходим дополнительный механизм для идентификации захваченного рецептором определенного одоранта. Такой механизм основан на физических свойствах молекул, а не на химических признаках или идеях формы, лежащих в основе принципа «замок-ключ». Еще в 1938 г. известный физик Дайсон предположил, что запах молекулы можно определить по ее колебательному спектру, и, следовательно, обонятельная система эффективно действует как колебательный спектрометр. Отметим, что для обозначения квантов колебаний молекулы также часто используется синоним «виброн» или «вибронное возбуждение». Много позже, в 1996 г. Л. Турин выдвинул гипотезу [26], предложив квантовый механизм неупругого туннельного переноса электрона, с помощью которого обонятельная система действительно сможет идентифицировать определенные колебательные режимы одоранта (см. рис. 3.1). Согласно этому механизму, между сопряженными частями рецептора А и D имеются высокий потенциальный барьер для движения электрона и сильное различие электронных уровней по разные стороны барьера. В отсутствие молекулы одоранта в кармане рецептора туннелирование

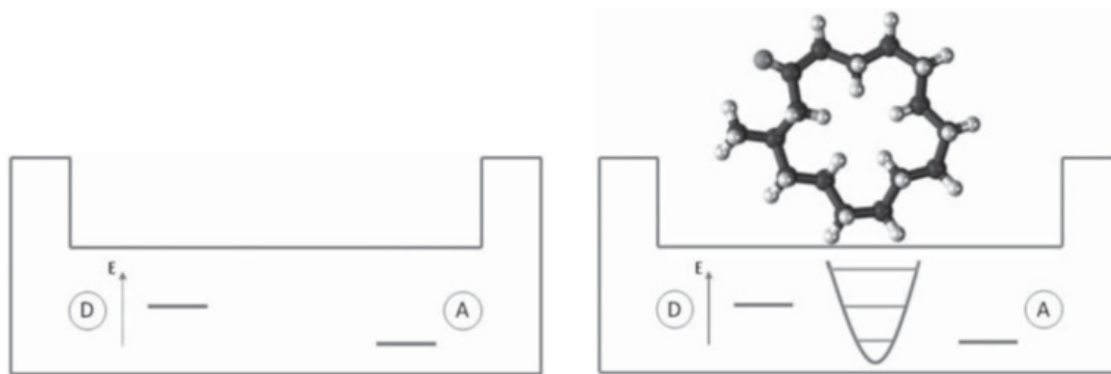


Рис. 3.1. Схематическое изображение принципа туннелирования электронов с помощью вибронов как основы квантового механизма обоняния [23]. Связывающий карман активного центра обонятельного рецептора находится между донором (D) и акцептором (A) электронов, которые имеют разные энергии, что понижает вероятность туннелирования

Fig. 3.1. Schematic representation of the principle of electron tunneling supported by vibrons as the basis of the quantum mechanism of olfactory sense [23]. The binding pocket of the active site of the olfactory receptor is located between the electrons donor (D) and acceptor (A) whose different energies reduce the probability of electron tunneling

электрона невозможно из-за сильного различия локальных электронных уровней. После присоединения молекулы одоранта в карман рецептора туннелирование электрона становится возможным, если выполняется резонансное условие, а именно энергия вибронного возбуждения одоранта равна разности энергий электрона до и после перехода. Тогда при туннельном переносе электрона с нижнего на верхний уровень квант колебаний молекулы одоранта поглощается или происходит испускание при обратном переходе.

Существуют другие примеры биологических систем [23], эффективное функционирование которых объясняется, используя физическую терминологию, сильной взаимосвязью электронной и колебательной степеней свободы. Эта взаимосвязь реализуется благодаря настройке системы на резонанс между разностью энергий двух квантовых состояний, между которыми осуществляется переход электрона, и энергией одиночных квантов колебательного движения. Условие резонанса обеспечивает повышенную эффективность переноса заряда (доставка электронного возбуждения к реакционному центру или перенос электрона, который стимулирует последующую реакцию рецептора) и, таким образом, приводит к заметному усилению эффекта на физиологическом уровне. Это свидетельствует о важном и универсальном значении для функционирования биологических систем резонансных процессов, управляемых на квантовом уровне.

Не все биологические системы обладают долгоживущими резонансными колебательными модами, которые за счет сильной связи с электронными степенями свободы могут играть важную роль в протекающих в системах функциональных процессах. Более того, во всех биологических системах присутствуют колебательные движения иного сорта, а именно хаотические тепловые флуктуации атомов, формирующих рассматриваемые биомолекулярные объекты, а также входящих в состав окружающей среды, в которую погружены эти объекты. Такие случайные движения следует рассматривать как шумовой фон, наличие широкого спектра частот в котором, как правило, приводит к подавлению механизма когерентного волнового движения электрона, такого как рассмотренное выше подбарьерное туннелирование. В таком случае потеря когерентности характеризуется как дефазировка, а именно, когда под воздействием тепловых флуктуаций первоначально широкая и плавно меняющаяся в пространстве волновая функция электрона локализуется в узкий волновой пакет. Несколько огрубляя, такую трансформацию можно охарактеризовать как редукцию “волны” (широкая делокализованная волновая функция электрона) в “частицу” (узкая локализованная волновая функция). Подавление когерентного движения сопровождается усилением роли классических надбарьерных прыжков в процессе переноса электрона между различными частями биологического объекта.

Учитывая, что жизнь протекает при конечных температурах, можно задаться следующим вопросом: «Не используют ли некоторые организмы квантовую когерентную динамику для поддержки жизненных процессов, несмотря на постоянное дефазировующее воздействие на них тепловых источников шума?» К своему удивлению, исследователи обнаружили свидетельства в пользу нескольких функциональных механизмов [7], с помощью которых дефазировующий шум может фактически поддерживать эффективный перенос квантового микрообъекта – квазичастицы и тем самым усилить функциональные свойства

фундаментальных биологических процессов. Наиболее яркий пример представлен механизмом транспорта энергии электронного возбуждения в фотосинтезирующих комплексах.

3.3. Фотосинтез как пример оптимизации квантовых и классических механизмов переноса электронного возбуждения

Фотосинтез – процесс поглощения солнечной энергии и ее преобразования в химическую форму – имеет ключевое значение в поддержании жизнедеятельности растений и ряда бактерий. Этот процесс осуществляется пигментно-белковым комплексом. Светособирающий пигментный центр комплекса, представленный хлорофиллом в растениях и бактериохлорофиллом в бактериях, осуществляет поглощение солнечного излучения и преобразование его в энергию электронного возбуждения молекулы пигмента – один из его электронов испытывает квантовый скачок на более высокий уровень энергии. На следующем этапе квантовая сеть из близко расположенных пигментных молекул обеспечивает быстрый и эффективный транспорт энергии электронного возбуждения к реакционному центру, где эта энергия превращается в химическую.

Была отмечена высокая эффективность переноса электронного возбуждения от светособирающих пигментов к реакционному центру, что проявляется в коротких временах переноса и малых потерях энергии. Немедленно был поднят вопрос о том, является ли режим, приводящий к оптимальным транспортным характеристикам, классическим – в том смысле, что некогерентная динамика хорошо представлена моделью, основанной на классических кинетических уравнениях, или же, несмотря на обусловленный окружающей средой дефазирующий шум, транспортное поведение системы характеризуется квантово-механическим волновым режимом, в котором квантовая когерентная динамика лишь слабо возмущается дефазирующим шумом.

На вопросы такого типа ответы получены на основе количественной оценки параметров, которые входят в динамические уравнения при описании фотосинтезирующих комплексов. Так анализ показал, что внутрисетевая связь, т. е. величина прыжковых интегралов электронного возбуждения по внутренним узлам сети – молекулам пигмента, сравнима со связью "квантовая сеть -окружающая среда". Отсюда уже следует ожидать, что процесс переноса электронного возбуждения происходит в "смешанном" режиме, когда отсутствует доминирование одного из двух конкурирующих факторов – квантовой когерентной динамики и дефазирующих шумов. Это дополнительно подтверждается экспериментальным исследованием [27; 28] свойств динамики системы, которые совершенно ясно демонстрируют, что на более коротких длинах и временных масштабах квантовая когерентность присутствует в системе, в то время как для больших расстояний и времен доминируют классические свойства. Это говорит о том, что на самом деле оптимальный режим работы в этих условиях оказывается «на полпути» между классическим и квантовым миром.

В следующем разделе рассмотрена фотосинтезирующая система зеленой серобактерии и сформулирована квантовая модель транспортной сети, соединяющей светособирающий комплекс и реакционный центр этой системы. При наличии конкуренции квантовой когерентности и дефазирующих шумов проанализированы условия реализации оптимального режима переноса электронного возбуждения по этой сети.

3.4. Фотосинтезирующая система зеленых серобактерий. Флуктуационный механизм переноса электронного возбуждения

Рассмотрим фотосинтезирующую систему (ФС) зеленых серобактерий, схематично изображенную на рис. 3.2. Светособирающий комплекс ("антенна") в ФС представляет собой заключенную в белково-липидную оболочку самоорганизованный ансамбль молекул бактериохлорофиллов с (BChl c), поглощающих фотоны в видимой и ультрафиолетовой части спектра. Энергия поглощенного фотона преобразуется в электрон-дырочное возбуждение (экситон Френкеля) молекулы, которое передается следующим молекулам к периферии антенного комплекса, где расположена встроенная в оболочку базисная пластина – паракристаллическая структура, содержащая бактериохлорофилл а (BChl a). Примыкающий к этой пластине пигментно-белковый комплекс Фенна – Мэттьюса – Олсона (ФМО) действует как канал передачи экситонного возбуждения от базисной пластины антенного комплекса в реакционный центр (РЦ), где оно преобразуется в полезную химическую энергию.

Одной из самых интересных особенностей этой биологической машины является высокоэффективный механизм транспорта электронного возбуждения через ФС в реакционный центр почти с единичным квантовым выходом, т. е. практически каждый поглощенный фотон преобразуется в химическую форму энергии. Как видим, ФС зеленых серобактерий имеет несколько сопряженных друг с другом

молекулярных структур, осуществляющих целенаправленный перенос и преобразование энергии экситонного возбуждения. Из них экспериментально наиболее подробно изучены структура и функциональные особенности комплекса ФМО, и поэтому именно этот комплекс выбран объектом теоретического исследования квантового переноса экситонного возбуждения в ФС зеленых серобактерий. Ниже на примере относительно простой модели [27; 28] проанализирована роль квантовой когерентности в повышении эффективности экситонного транспорта. Отметим, что необходимость в развитии подобных моделей продиктована экспериментальными наблюдениями.

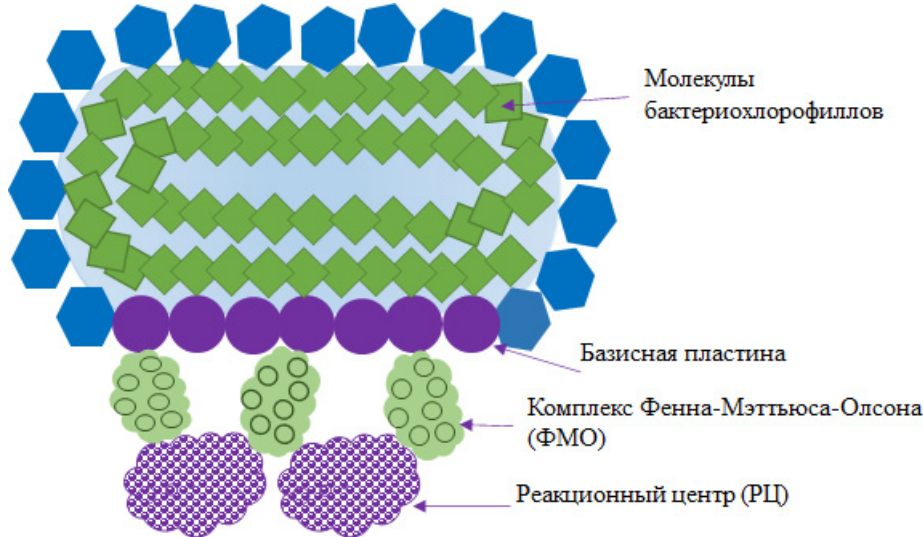


Рис. 3.2. Схематическое изображение фотосинтезирующей системы зеленых серобактерий. Функции составляющих частей системы описаны в основном тексте
 Fig. 3.2. Schematic representation of the photosynthetic system of green sulfur bacteria. Functions of the parts of the system are described in the main text

Спектроскопические измерения методом двумерной электронной спектроскопии на комплексе ФМО при температуре жидкого азота [29] и комнатной температуре [30] показали квантовые биения: зависящие от времени осцилляции амплитуд спектральных сигналов. Наблюдение [29; 30] указало на то, что квантовая динамика экситонов имеет когерентный характер и определяется долгоживущими и делокализованными по всему комплексу квантовыми состояниями экситонов. Напомним, что с формальной точки зрения делокализованное возбужденное состояние есть суперпозиция возбуждений, локализованных на узлах системы так, что сохраняется высокая степень согласованности (когерентности) фаз отдельных вкладов. Результат [30] оказался неожиданным, так как при относительно высокой, комнатной температуре наличие тепловых флуктуаций, как правило, оказывает дефазировующее воздействие на квантовые экситонные состояния и приводит к разрушению их когерентности. Вместе с тем в ответ на эти наблюдения был сформулирован механизм [23], согласно которому стохастическое воздействие тепловых флуктуаций белковой оболочки комплекса, а также термически возбужденные внутримолекулярные (вибронные) колебания самого комплекса помогают поддержать когерентный характер процесса переноса экситонного возбуждения в нем.

Гамильтониан, описывающий квантовую динамику экситона в транспортной сети ФМО (рис. 3.3), имеет вид

$$H_s = \sum_{i=1}^N E_i a_i^+ a_i + \sum_{i \neq j} J_{ij} (a_i^+ a_j + a_j^+ a_i). \quad (3.1)$$

Здесь $a_i^+(a_i)$ — оператор рождения (уничтожения) экситона в i -м узле: $a_i^+|0\rangle = |1_i\rangle$, $a_i|1_i\rangle = |0_i\rangle$. При достаточно общих условиях прыжковый интеграл J_{ij} полагается ограниченной сверху величиной $0 < J_{ij} < J_m$. В общем случае локальный уровень экситона E_i имеет нерегулярные переменные в пространстве и флуктуирующие во времени вклады $E_i = E_0 + \varepsilon_i + \xi_i(t)$. Здесь зависящая от i статическая составляющая ε_i обусловлена нерегулярной пространственной структурой ФМО-комплекса. Флуктуирующий во времени вклад $\xi_i(t)$, вызванный тепловыми колебаниями хромофорных узлов, а также ближайших к ним молекул окружающей среды, означает, что экситон обменивается энергией с колебательными степенями свободы как самого ФМО-комплекса, так и его окружения. Вторая причина, по которой ФМО-комплекс представляет собой открытую квантовую систему, — это наличие канала стока экситонного возбуждения в РЦ. Для определенности будем считать, что этот канал диссипации возбуждения

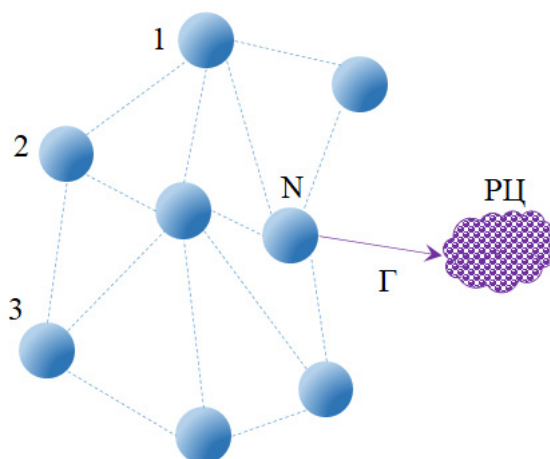


Рис. 3.3. Комплекс ФМО как квантовая транспортная сеть, состоящая из хромофорных узлов $i = 1, 2, \dots, N$. Стрелкой указан канал необратимого перехода экситонного возбуждения из транспортной сети в узел-сток, имитирующий реакционный центр фотосинтезирующего комплекса; скорость такого перехода обозначена как Γ

Fig. 3.3. The FMO complex as a quantum transport network consisting of chromophore sites $i = 1, 2, \dots, N$. The arrow indicates the channel of the irreversible transition of an exciton from the transport network to the sink node, which imitates the reaction center of the photosynthetic complex; the rate of such a transition is denoted as Γ

со скоростью Γ осуществляется через узел N (рис. 3.3). Далее рассмотрим, как по мере усложнения модели становится возможным учитывать различные аспекты динамического поведения экситона.

В отсутствие беспорядка, $\varepsilon_i = \xi_i = 0$, поиск собственных значений E_M гамильтониана, $H_s|M\rangle = E_M|M\rangle$ приводит к собственным состояниям $|M\rangle$, в которых возбуждение делокализовано по N узлам транспортной системы

$$|M\rangle = \sum_{i=1}^N b_i(M)|\psi_i\rangle, \quad (3.2)$$

где $|\psi_i\rangle = a_i^+|0\rangle$ и $|b_i(M)|^2$ — вероятность обнаружить экситон на узле i в состоянии $|M\rangle$. Суперпозиции (3.2) отвечают когерентным делокализованным по всей сети состояниям экситона. Волновая функция экситона, первоначально инжектированного из антенного комплекса в 1-й узел $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_1\rangle$, может быть представлена в базисе $\{|M\rangle\}$: $|\psi_1\rangle = \sum_M c_M(1)|M\rangle$. Действие оператора эволюции приводит при $t > 0$ к волновой функции

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi_1\rangle = \sum_M c_M(1)e^{-iE_M t}|M\rangle, \quad (\hbar = 1). \quad (3.3)$$

Простой анализ показывает, что $\langle\psi_N|\psi(t=0)\rangle = 0$, а при $t > 0$ вероятность обнаружить экситон на N -м узле, $w_N(t) = |\langle\psi_N|\psi(t)\rangle|^2$, имеет характер квантовых биений

$$w_N(t) = \left| \sum_M c_M^*(N)c_M(1)e^{-iE_M t} \right|^2, \quad w_N(0) = 0. \quad (3.4)$$

С увеличением $w_N(t)$ растет вероятность диссипации — ухода экситона на РЦ.

Итак, в отсутствие беспорядка квантовый транспорт экситона по ФМО комплексу из 1-го в N -й узел и его последующий сток в РЦ обеспечивается делокализованными когерентными состояниями экситона. Включение в рассмотрение статического беспорядка в системе локальных уровней $E_i = E_0 + \varepsilon_i$, где вклад ε_i стохастически распределен в пределах $-\varepsilon_m < \varepsilon_i < \varepsilon_m$, в случае сильного беспорядка: $\varepsilon_m \gg J_m$, приводит систему в режим локализации Андерсона [31]. Это означает, что возле узлов комплекса ФМО формируются потенциальные ямы различной глубины, способные захватить экситон. Волновая функция инжектированного экситона локализуется в одной из этих ям, а процесс движения по узлам за счет последовательного туннельного перехода в соседние ямы затруднен по причине большого различия локальных энергетических уровней в этих ямах. Тем самым в режиме сильного статического беспорядка транспорт экситона замораживается, и ФМО-комплекс не может эффективно осуществлять функцию передачи экситонной энергии от светособирающей антенны в реакционный центр. Это объясняется разрушением когерентности состояний (3.2) вследствие стохастизации амплитуд $b_i(M)$ и деструктивной интерференцией вкладов в разложении (3.2). Локализация собственных состояний гамильтониана под

действием случайных статических полей, по существу, означает возврат к исходному базису $|\psi_i\rangle$. При этом следует объяснить, как в режиме разрушенной когерентности в принципе возможно наблюдаемое в реальности явление быстрого переноса экситонов через ФМО-комплекс?

Ответ был найден [27; 28] посредством включения в анализ эффектов динамического беспорядка в форме флуктуирующего вклада $\xi_i(t)$ в положение каждого уровня $E_i = E_0 + \varepsilon_i + \xi_i(t)$ экситона. Этот модельный вклад имитирует тепловой шум, который неотвратимо присутствует в биологических системах, функционирующих вблизи комнатной температуры.

Как правило, в изначально регулярных (при $T = 0$) системах тепловой шум на классическом уровне служит деструктивным источником, снижающим функциональную эффективность физико-химических процессов. В квантовых системах растущие с температурой деструктивные эффекты теплового шума также выражаются в подавлении долговременных динамических процессов, что объясняется дефазирующим влиянием шума, разрушающим когерентность соответствующих квантовых состояний изначально регулярной системы.

Если выбрать простейшую модель шума: в последовательные, $n = 1, 2, \dots$, моменты времени $t_n = n\Delta t$, разделенные интервалом Δt , случайная величина $\xi(t_n)$ принимает с одинаковой вероятностью значения $\{-\xi/2, \xi/2\}$ с нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$. В этих терминах дефазирующее действие шума на квантовые состояния экситона определяется величиной $\gamma \approx \xi_0^2 \Delta t$. Однако дальнейший анализ показывает, что в рассматриваемом случае транспортной системы ФМО-комплекса с внутренним статическим беспорядком тепловой шум может играть конструктивную роль, улучшая квантовый транспорт экситонных возбуждений.

Лежащий в основе такого поведения механизм может быть охарактеризован в самых общих чертах следующим образом. Эффективность переноса экситона из узла $i = 1$ при $t = 0$ в узел $j = N$ за время $t < t_{\max}$ определяется интегралом

$$\eta_N = \int_0^{t_{\max}} dt w_N(t), \quad (3.5)$$

где, например, $t_{\max} \sim 1 \div 2$ нс – характерное время излучательного распада экситона. Расчёты для η_N , полученные на основе модели (3.1) и близких ее вариантов [27; 28], здесь представлены на рис. 3.4 обобщающей зависимостью η_N от безразмерного отношения γ/J_m при наличии сильного статического беспорядка $\varepsilon_m \gg J_m$.

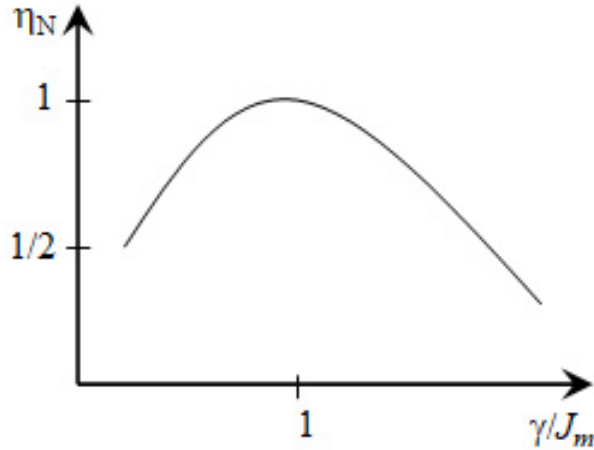


Рис. 3.4. Эффективность переноса экситона по квантовой транспортной сети с сильным статическим беспорядком и дефазирующим воздействием $\sim \gamma$ теплового шума от колебательных степеней свободы
 Fig. 3.4. Dependence of the efficiency of exciton transfer along a quantum transport network with strong static disorder and dephasing effect $\sim \gamma$ of thermal noise on vibrational degrees of freedom

Зависимость на рис. 3.4 объясняется тем, что когерентность, разрушенная статическим беспорядком $\sim \varepsilon_m$, частично восстанавливается динамическими флуктуациями локальных электронных уровней. Механизм поддержки межузельного переноса электронной энергии посредством дефазирующего шума можно объяснить с динамической точки зрения. Действительно, хаотические внутриузельные колебания и флуктуационные движения атомов и молекул окружающей среды приводят к тому, что уровни энергий электронных возбуждений на каждом узле также испытывают случайные динамические флуктуации. Как следствие, возникают временные окна, когда эти флуктуирующие энергетические уровни

узлов приближенно совпадают, что позволяет реализовать передачу энергии возбуждения посредством резонансного туннелирования экситона как между хлороформными узлами, так и между N - хлороформом и реакционным центром. Оптимальный режим достигается при $\gamma/J_m \sim 1$.

3.5. Магниторецепция у мигрирующих птиц: механизм спинового биохимического компаса

Уточним прежде всего смысл термина «рецепция» (от лат. receptio принятие) в физиологии как осуществляемое рецепторами восприятие энергии, поступающей от раздражителей и последующее преобразование ее в нервное возбуждение. Хорошо известно влияние слабого магнитного поля на рост растений, а также замечательные способности к ориентации и навигации у птиц, млекопитающих, рептилий, амфибий, рыб, ракообразных и насекомых.

Рассматриваются как минимум два альтернативных механизма, с помощью которых живым организмом воспринимается внешнее магнитное поле. Согласно первому механизму, восприятие поля обеспечивается встроенными в организм ферромагнитными частицами оксида железа, и это, по существу, классический эффект. Второй основан на магниточувствительных химических реакциях свободных радикалов. Ранее такого сорта реакции были известны и изучались методами квантовой химии в органических молекулах, но за рамками биологических систем. В 90-х годах прошлого века в ряде работ было сформулировано предположение, согласно которому криптохромы в сетчатке глаза перелетных птиц обеспечивают потенциальную физиологическую реализацию такого механизма, что и мотивировало последующий рост внимания к этой проблеме со стороны квантовых физиков.

Сначала обсудим общий сценарий работы механизма химического компаса как пример решающей роли квантовой динамики полного спина двух электронов, распределенных по одному на каждом из радикалов пары «донор-акцептор», возникающей в результате фотохимической реакции (см. рис. 3.5). Изначально молекулярная система, выполняющая функции химического компаса, находится в своем основном (т. е. с самой низкой суммарной энергией) электронном состоянии – это совокупность спин-синглетных состояний электронов, попарно занимающих низшие молекулярные орбитали системы. Синглетное состояние продиктовано требованием выполнения принципа Паули и означает, что суммарный спиновый момент $S = s_1 + s_2$ каждой локальной пары электронов равен нулю, $S = 0$. Поглощение кванта энергии фотона сопровождается разрывом одной из локальных синглетных пар и пространственным расхождением электронов по двум противоположно заряженным молекулярным группам без изменения суммарного спина $S = 0$. Эту вновь образованную структуру терминологически обозначают как радикальная пара «донор-акцептор», которая может рекомбинировать либо участвовать в последующем химическом преобразовании системы. Это преобразование с участием радикальной пары может протекать по двум альтернативным каналам в зависимости от эволюции квантового спинового состояния. Действительно, сразу после своего образования разделенная пара электронов испытывает на себе воздействие, во-первых, внутренних магнитных полей от близких ядер атомов, входящих в состав системы и, во-вторых, внешнего магнитного поля, определенным образом ориентированного в пространстве. В результате такого воздействия возникают осцилляции спинового состояния радикальной пары, а именно синглетное состояние переходит в триплетное $S = 1$ и обратно. Продукты последующей спин-зависимой химической реакции с участием радикальной пары различны для синглетного и триплетного каналов, их относительное количество анализируется на биохимическом уровне соответствующим рецепторным механизмом, включенным в состав обсуждаемого здесь биохимического компаса. Предполагается, что результаты работы рецепторного механизма на конечном этапе преобразуются в нервное возбуждение, сигнализирующее организму о его пространственной ориентации относительно внешнего магнитного поля.

Простая схема реакции пары радикалов, которая может действовать как механизм химического магниторецептора, первоначально была предложена Шульценом с соавторами [32] и изображена на рис. 3.5.

Итак, согласно описанному выше сценарию, реакции в донорно-акцепторной паре молекул происходят в три этапа. На первом этапе молекула донора, поглотив фотон, переходит в возбужденное электронное состояние D^* и отдает электрон на молекулу акцептора A , в результате чего образуется пара радикалов $D^+ + A^-$. Для эффекта магнитного поля крайне важно, чтобы радикальная пара образовывалась в определенном спин-коррелированном, синглетном или триплетном, электронном состоянии. Обычно фотовозбужденный донор и акцептор находятся в синглетном состоянии до переноса электрона. В этом случае перенос электрона не меняет спиновую корреляцию и общее синглетное состояние.

Далее спин-коррелированное синглетное состояние радикальной пары будет преобразовано за счет сверхтонкого взаимодействия с магнитными моментами ядер атомов, составляющих пару, в триплетное состояние и обратно. На это синглетно-триплетное взаимопревращение, представляющее собой вторую стадию схемы реакции пары радикалов, может влиять слабое внешнее магнитное поле, как подробно описано ниже. При этом учитывается, что радикальные пары могут рекомбинировать со скоростью k_r в на-

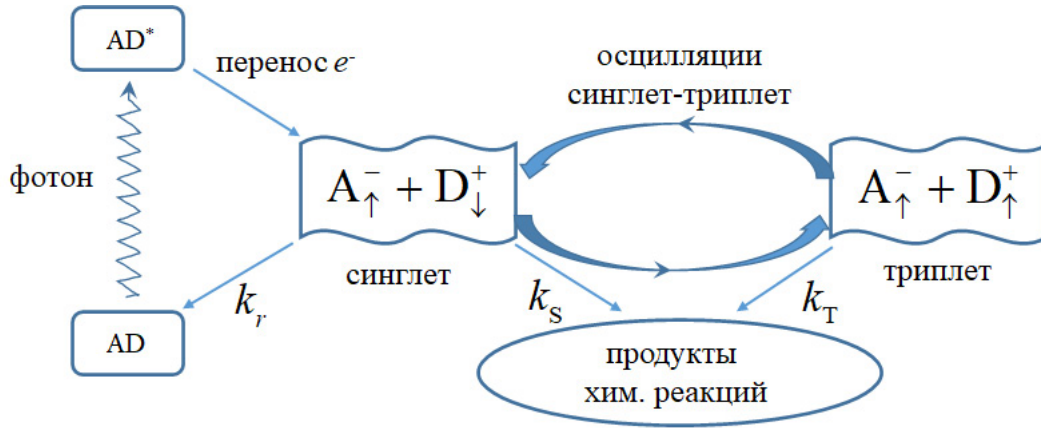


Рис. 3.5. Возможная схема реакции пары радикалов, чувствительной к эффектам магнитного поля как основа магниторецепции мигрирующих птиц

Fig. 3.5. A possible scheme for the reaction of a pair of radicals sensitive to the effects of a magnetic field as the basis for the magnetoreception of migratory birds

чальное, также синглетное состояние. Нерекombинированные радикалы образуют новые химические продукты, различные для исходного либо триплетного или синглетного состояния. Влияя на спиновые состояния радикальной пары, внешнее магнитное поле регулирует баланс между радикальными парами, рекомбинирующими и либо образующими спин-зависимые продукты. Таким образом, внешнее магнитное поле либо усиливает рекомбинацию (из-за уменьшения синглет-триплетного взаимопревращения), либо увеличивает образование нового продукта (из-за усиления синглет-триплетного взаимопревращения).

Скорости химических реакций в синглетном и триплетном каналах обозначим величинами k_S и k_T , соответственно. Далее, для оценки выхода реакции в триплетном канале предположим, что радикальная пара геометрически закреплена в подложке и на первом этапе образована в синглетном состоянии. Выход триплета Φ^T определяется [33] как количество продуктов, возникших в триплетном канале химических реакций, следовательно,

$$\Phi^T = \int_0^\infty k_T T(t) dt. \quad (3.6)$$

Долю $T(t)$ радикальных пар в триплетном состоянии в любой момент времени t можно оценить по уравнению

$$T(t) = \text{Tr} [Q^T \rho(t)], \quad (3.7)$$

где $\text{Tr} A = \sum_i A_{ii}$, $Q^T = |T_+\rangle\langle T_+| + |T_0\rangle\langle T_0| + |T_-\rangle\langle T_-|$ — оператор проектирования на триплетные состояния ($|T_+\rangle, |T_0\rangle, |T_-\rangle$), $\rho(t)$ — матрица плотности, зависимость которой от времени определяется стохастическим уравнением Лиувилля

$$\dot{\rho}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] - \frac{k_S}{2} [Q^S, \rho(t)]_+ - \frac{k_T}{2} [Q^T, \rho(t)]_+ \quad (3.8)$$

с начальным условием $\rho(0) = Q^S / \text{Tr} Q^S$, где $Q^S = |S\rangle\langle S|$ — оператор проектирования на синглетное состояние и $[A, B]_\pm = AB \pm BA$.

Если предположить, что скорости реакций не зависят от спина, т. е. $k_S = k_T = k$, то матрицу плотности можно выразить в виде

$$\rho(t) = \frac{1}{N} e^{-iHt/\hbar} Q^S e^{iHt/\hbar} e^{-kt}. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.7), получаем

$$T(t) = \frac{1}{N} e^{-kt} \cdot \sum_{m=1}^{4N} \sum_{n=1}^{4N} Q_{mn}^T Q_{mn}^S \cos[(\varepsilon_m - \varepsilon_n)t/\hbar], \quad (3.10)$$

где ε_n обозначает энергию собственного состояния $|n\rangle$ гамильтониана H . Интегрирование в (3.6) приводит к следующей величине выхода химической реакции в триплетном канале:

$$\Phi^T = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{4N} \sum_{n=1}^{4N} Q_{mn}^T Q_{mn}^S \frac{k^2}{k^2 + (\varepsilon_m - \varepsilon_n)^2 / \hbar^2}. \quad (3.11)$$

Отметим, что выход реакции в синглетном канале получается из равенства $\Phi^S + \Phi^T = 1$. Из (3.11) следует, что выход реакции определяется суммой умноженных на соответствующие матричные элементы функций Лоренца, каждая из которых полностью определяется, помимо величины скорости реакции k , энергий перехода $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)$ между собственными состояниями $|m\rangle$ и $|n\rangle$ спинового гамильтониана $H(\vec{B}) = H_1(\vec{B}) + H_2(\vec{B})$ радикальной пары ($j = 1, 2$):

$$H_j(\vec{B}) = g\mu_B \vec{S}_j \cdot (\vec{B} + A_j \vec{I}_j). \quad (3.12)$$

Здесь S_j и I_j – операторы спиновых моментов соответственно электрона и ядра на j -м радикале. Внешнее магнитное поле $\vec{B} = B_0(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ задается в полярной системе координат, связанной с неподвижной радикальной парой. При этом ось Ox можно выбрать так, что азимутальный угол $\phi = 0$. Спиновая связь “электрон-ядро” описывается анизотропным тензором A_j сверхтонкого взаимодействия.

Под действием внешнего магнитного поля и сверхтонкого взаимодействия синглетное состояние $|S\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ электронов радикальной пары испытывает переходы в триплетные состояния $(|T_+\rangle, |T_0\rangle, |T_-\rangle)$ и обратно. С учетом возможных спиновых состояний ядер синглет-триплетные осцилляции реализуются на многих частотах $(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/\hbar$. На рис. 3.6 в качестве примера показаны результаты численного анализа выражения (3.11) для Φ^T как функции полярного угла θ внешнего магнитного поля $\vec{B}$.

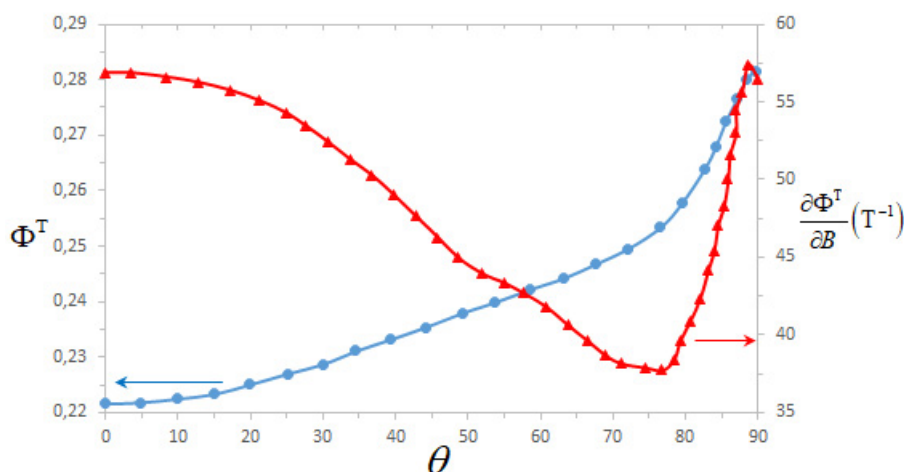


Рис. 3.6. Триплетный выход химической реакции с участием радикальной пары $[FADH\bullet Trp\bullet]$ (синие точки и фитирующая кривая) и магнитная чувствительность химического компаса (красные треугольники и кривая). Обсуждение деталей см. в работе [34]

Fig. 3.6. Triplet outcome of a chemical reaction involving the $[FADH\bullet Trp\bullet]$ radical pair (blue dots and fitting curve) and the magnetic sensitivity of the chemical compass (red triangles and curve). See [34] for a detailed discussion

Рассмотрим также магнитную чувствительности химического компаса, которая определяется как $\partial\Phi^T/\partial B$. Из рис. 3.6 следует, что чувствительность вблизи углов 0° и 90° максимальна и примерно одинакова. Это указывает на то, что птицы могут определять направления меридианов и параллелей, поскольку компас наиболее чувствителен в этих двух направлениях.

Заключение

Здесь уместно вернуться к теме, различные аспекты которой обсуждались в предыдущих разделах, — методологии биологического эксперимента, взяв в качестве основы рассмотренный выше спиновый механизм магнитной рецепции у перелетных птиц. Следует особо подчеркнуть, что процессы спиновой трансформации в неживой природе и в живых организмах имеют сугубо квантовый характер. Само понятие “спин” микрочастицы возникло с появлением квантовой механики. Возможность регистрации спина у квантового состояния микросистемы с помощью измерительных приборов, принадлежащих классическому макромиру, обусловлена тем, что микрочастица, имеющая спин, автоматически несет на себе, подобно замкнутому контуру с током, физическую величину классического мира — магнитный момент. Значения спина и магнитного момента количественно связаны друг с другом одной из фундаментальных постоянных — магнетоном Бора, а наличие и величина магнитного момента микрочастицы могут

быть измерены с помощью лабораторного магнитного поля. Магнитный момент микрочастицы, как и спин, квантуется, а его временная эволюция в магнитном поле описывается квантовыми уравнениями.

В рассмотренном выше механизме магнитной рецепции спиновое состояние у возникшей в результате фотохимической реакции радикальной пары трансформируется под действием магнитного поля, один из вкладов в которое – это поле Земли. Воздействия этих спиновых трансформаций на ход биохимических реакций рассматриваются как один из ключевых и относительно самостоятельных механизмов, составляющих предложенную целостную картину магнитной рецепции птиц. Поставим следующий вопрос: «Могут ли этот ключевой механизм и его роль в магнитной рецепции быть подтверждены экспериментально?». В поиске ответа следует принять во внимание, что при существующих методах лабораторных исследований прямые измерения *in vivo* невозможны, а результаты, полученные *in vitro*, не будут решающими, так как с разрушением целостности биосистемы процессы, находящиеся в фокусе исследования, будут неконтролируемым образом искажены.

Согласно М. Веберу [17], биологический эксперимент, среди прочих, может состоять в наблюдении и фиксации фактов изменения поведения организма при помещении его в различные, в том числе, искусственно созданные условия. Такое наблюдение ведет к созданию правдоподобных и плодотворных теорий и гипотез об основополагающих механизмах функционирования организма как целого, так и составляющих его относительно самостоятельных частей, а также на преодоление проблем сопутствующих этим теории. Включенные в рассмотрение основополагающие механизмы М. Вебер классифицирует как феномены, «...которые следует объяснять непосредственно законами физики и химии, с учетом специфики изучаемых систем». Вебер не требует редукции законов биологии к закономерностям физики, он просто считает, что нет оснований вводить в обиход такое понятие, как «закон биологии». При этом, согласно Веберу, биология обходится без концепта истины, а биологические теории направлены на поиск лучшего объяснения, например, на основе хорошо разработанной модели. Модельный конструкт исследуемой биосистемы оперирует феноменами (феноменологическими сущностями) и сетью причинно-следственных связей между ними, что в совокупности призвано объяснить функциональные свойства биосистемы в целом.

В качестве феноменологических сущностей модельного описания могут выступать процессы и механизмы, существование которых на базисном физическом микроуровне доказано на примере более простых физико-химических систем. В модельном описании исследуемых биосистем такие феномены уже не рассматриваются как предмет экспериментальной проверки. Спин-зависящие биохимические реакции следует называть в качестве примера феноменологической сущности, включенной, наряду с другими, в модель спинового биохимического компаса.

Подводя итог вышеизложенному, можно сделать вывод, что теоретические конструкты биологии, такие как модель спинового биохимического компаса, с точки зрения физики имеют статус феноменологических теорий либо могут считаться хорошо разработанными гипотезами. Это означает, что на данный момент каждая отдельно взятая общепризнанная теория дает наилучшее объяснение отдельному кругу биологических явлений. Однако не исключено, что со временем для того же круга явлений будет выработано новое, более точное и полное объяснение или, возможно, даже принципиально иная теория.

Недавние данные свидетельствуют о том, что различные организмы могут использовать некоторые функции, основанные на особенностях квантовой механики, с целью получить биологическое преимущество в процессе эволюционного развития. Важно, что интерес исследователей выходит за рамки тривиальных квантовых эффектов, например, лежащих в основе теории химической связи и объясняющих устойчивость самих биомолекул. Этот интерес направлен на выяснение уникальной, резко контрастирующей с возможным классическим поведением роли квантовых процессов в обеспечении высокой эффективности функциональных свойств организмов.

В какой форме обычно проявляются эти квантовые эффекты? В квантовой информации, возможно, самый важный квантовый эффект заключается в том, что квантовые биты могут существовать в суперпозициях, тогда как классические биты не могут. Аналогично биологическая система, которая использует когерентные, согласованные, суперпозиции состояний для каких-то практических целей, может рассматриваться как самый яркий пример функциональной квантовой биологии.

К настоящему времени исследователями накоплены многочисленные свидетельства тому, что живые организмы используют квантовые явления или даже полагаются на них, поддерживая уровень согласованности внутри своих субструктур, где это необходимо. Следует отдельно отметить, что организмы в целом ведут себя только как классические объекты, что объясняется их макроразмерами и большой массой.

В данном обзоре обсуждены несколько наиболее изученных примеров субструктур – биосистем наномасштабных размеров внутри живого организма, в которых квантовые эффекты дают значительный вклад в протекающие в них биопроцессы. Сюда включены светособирающие биосистемы, осуществляющие фотосинтез у растений и бактерий, магниторецепция мигрирующих птиц с помощью механизма

«химический компас», механизм сенсоров обоняния. Особая обширная тема [35; 36], также требующая рассмотрения в терминах квантовой биологии, — это механизмы переноса заряда в молекуле ДНК, она заслуживает самостоятельного обзора.

В целом ведущие эксперты склоняются к мнению, что описанные выше концепты, использующие идеи квантовой физики для описания биологических функций организмов на атомно-молекулярном уровне, в настоящий момент имеют скорее статус хорошо разработанных гипотез. Продолжающиеся исследования для каждой отдельной системы представляют новые свидетельства как в пользу, так и аргументы против функциональной роли квантовых эффектов в живых организмах.

Литература

- [1] Bohr N. Light and Life // Nature. 1933. V. 131. P. 421–423. DOI: <http://doi.org/10.1038/131421a0>.
- [2] Шредингер Э. Что такое жизнь? Физический аспект живой клетки. Москва: АСТ, 2018. 288 с. ISBN: 978-5-17-110627-0. URL: http://yanko.lib.ru/books/natural/biology/schodinger-what_is_life.htm.
- [3] Паулинг Л. Природа химической связи. Москва–Ленинград: ГНТИ химической литературы, 1947. 438 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=1238081>.
- [4] Quantum biology / N. Lambert [et al.] // Nature Physics. 2013. Vol. 9 (1). P. 10–18. DOI: <http://doi.org/10.1038/nphys2474>.
- [5] Давыдов А.С. Биология и квантовая механика. Киев: Наук. Думка, 1979. 296 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=436532>.
- [6] Arndt M., Juffmann T., Vedral V. Quantum physics meets biology // HFSP Journal. 2009. Vol. 3, No. 6. P. 386–400. DOI: <http://dx.doi.org/10.2976/1.3244985>.
- [7] Quantum Effects in Biology. Edited by Mohseni M., Omar Y., Engel G. and Plenio M.B. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511863189>.
- [8] Иванов М.Г. Как понимать квантовую механику. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. 516 с. URL: <https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/upload/9ab/quant-1-1-arphf9t1u8h.pdf>.
- [9] Cheng Y.-C., Fleming G.R. Dynamics of light harvesting in photosynthesis // Annual Review of Physical Chemistry. 2009. Vol. 60. Pp. 241–262. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev.physchem.040808.090259>.
- [10] Hore P.J., Mouritsen H. The Radical-Pair Mechanism of Magnetoreception // Annual Review of Biophysics. 2016. Vol. 45. P. 299–344. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-biophys-032116-094545>.
- [11] Brookes J.C. Olfaction: The physics of how smell works // Contemporary Physics. 2011. Vol. 52. Issue 5. P. 385–402. DOI: <http://doi.org/10.1080/00107514.2011.597565>.
- [12] Beratan D.N. Why Are DNA and Protein Electron Transfer So Different? // Annual Review of Physical Chemistry. 2019. Vol. 70. P. 71–97. DOI: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-physchem-042018-052353>.
- [13] Гайсинович А.Е. Зарождение и развитие генетики. Москва: Наука, 1988. 423 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=818508>.
- [14] Канке В.А. Философия математики, физики, химии, биологии. Москва: КНОРУС, 2011. 368 с. URL: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=182&ArticleId=504>.
- [15] Философия науки / под ред. А.И. Липкина. Москва: ЭКСМО, 2007. 608 с. URL: <https://bookree.org/reader?file=594657>.
- [16] Wilson J. Biological Individuality: The Identity and Persistence of Living Entities. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 152 p. DOI: <http://doi.org/10.5860/choice.37-3348>.
- [17] Weber M. The Philosophy of Experimental Biology. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 374 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511498596>.
- [18] Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. Москва: Прогресс, 1986. 432 с. URL: http://yanko.lib.ru/books/betweenall/prigogine-stengers_ru.htm.
- [19] Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине / пер. с англ.: И.В. Соловьев, Г.Н. Поваров; под ред. Г.Н. Поварова. Москва: Советское радио, 1968. 328 с. URL: [http://publ.lib.ru/ARCHIVES/V/VINER_Norbert/Viner_N._Kibernetika.\(1968\).pdf-fax.zip](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/V/VINER_Norbert/Viner_N._Kibernetika.(1968).pdf-fax.zip).
- [20] Князева Е.Н. Биосемиотика: истоки междисциплинарного направления // Вопросы философии. 2018. № 11. С. 86–98. DOI: <http://dx.doi.org/10.31857/S004287440001897-1>.
- [21] The future of quantum biology / A. Marais [et al.] // Journal of the Royal Society Interface. 2018. Vol. 15. P. 20180640. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2018.0640>.
- [22] McFadden J., Al-Khalili J. The origins of quantum biology // Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2018. Vol. 474. Issue 2220, P. 20180674. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2018.0674>.

- [23] Huelga S.F., Plenio M.B. Vibrations, quanta and biology // Contemporary Physics. 2013. Vol. 54. Issue 4. P. 181–207. DOI: <http://doi.org/10.1080/00405000.2013.829687>.
- [24] Quantum biology revisited / Cao [et al.] // Science Advances. 2020. Vol. 6. Issue 14. P. eaaz4888. DOI: <http://dx.doi.org/10.1126/sciadv.aaz4888>.
- [25] Stoneham A.M., Turin L., Brookes J.C., Horsfield A.P. Quantum vibrational effects on sense of smell // Quantum Effects in Biology / Ed. M. Mohseni, Y. Omar, G.S. Engel, M.B. Plenio. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. Pp. 264–276. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511863189.014>.
- [26] Turin L. A spectroscopic mechanism for primary olfactory reception // The Chemical Senses. 1996. Vol. 21/6. P. 773–791. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/chemse/21.6.773>.
- [27] Mohseni M., Rebentrost P., Lloyd S., Aspuru-Guzik A. Environment-Assisted Quantum Walks in Photosynthetic Energy Transfer // The Journal of Chemical Physics. 2008. Vol. 129. Issue 17. P. 174106. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3002335>.
- [28] Environment-Assisted Quantum Transport in a 10-qubit Network / C. Maier [et al.] // Physical Review Letters. 2019. Vol. 122. P. 050501. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.050501>.
- [29] Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems / G.S. Engel [et al.] // Nature. 2007. Vol. 446. P. 782–786. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature05678>.
- [30] Long-lived quantum coherence in photosynthetic complexes at physiological temperature / G. Panitchayangkoon [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2010. Vol. 107. № 29. P. 12766–12770. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.1005484107>.
- [31] Anderson P.W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices // Physical Review. 1958. Vol. 109. Issue 5, P. 1492. DOI: <http://doi.org/10.1103/PHYSREV.109.1492>.
- [32] Schulten K., Swenberg C.E., Weller A. A biomagnetic sensory mechanism based on magnetic field modulated coherent electron spin motion // Zeitschrift fur Physikalische Chemie. 1978. Vol. 111, No. 1. P. 1–5. DOI: <http://doi.org/10.1524/zpch.1978.111.1.001>.
- [33] Ritz T., Adem S., Schulten K. A Model for Photoreceptor-Based Magnetoreception in Birds // Biophysical Journal. 2000. Vol. 78. Issue 2. P. 707–718. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495\(00\)76629-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495(00)76629-X).
- [34] Zhang Y., Berman G.P., Kais S. The Radical Pair Mechanism and the Avian Chemical Compass: Quantum Coherence and Entanglement // International Journal of Quantum Chemistry. 2015. Vol. 115, Issue 19. P. 1327–1341. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/qua.24943>.
- [35] Астахова Т.Ю., Лихачев В.Н., Виноградов Г.А. Перенос заряда в биомолекулах // Успехи химии. 2012. Том 81. № 11. С. 994–1010. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18077800>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pfpnbz>.
- [36] Сюракшин А.В., Ляхно В.Д., Юшанхай В.Ю. Перенос заряда в молекуле ДНК в рамках простой модели открытой квантовой системы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 23. С. 1–26. DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2021-23>. EDN: <https://www.elibrary.ru/perpfv>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-74-94

Submitted: 23.03.2022

Revised: 26.04.2022

Accepted: 14.11.2022

A.V. Syurakshin

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: Asyurakshin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4676-3092>

V.A. Saleev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: vasaleev@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

V.Yu. Yushankhai

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research,
Dubna, Russian Federation

E-mail: yushankh@theor.jinr.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4313-4626>

QUANTUM MODELS IN BIOLOGY

ABSTRACT

The penetration of quantum concepts into biological science, which began shortly after the creation of quantum mechanics, over the past two decades has taken shape in a new interdisciplinary scientific

discipline — quantum biology. One of the key questions of quantum biology has been formulated as follows: are there biological systems that use quantum effects to perform a task that cannot be done classically? More broadly, do some kinds of organisms adapt efficient quantum mechanisms in the process of their evolutionary development in order to gain an advantage over their competitors? The range of topical problems of the new discipline discussed in this brief review includes questions of a general, historical and methodological character, and generalizes some theoretical models aimed at describing quantum processes, including bacterial photosynthesis, bird magnetoreception, and the mechanism of olfactory sense in living organisms.

Key words: quantum transport; coherence; interference; photosynthesis; magnetoreception; biosensors.

Citation. Syurakshin A.V., Saleev V.A., Yushankhai V.Yu. Quantum models in biology. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 74–94. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-74-94>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Syurakshin A.V., Saleev V.A., Yushankhai V.Yu., 2022

Anton V. Syurakshin — postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

Vladimir A. Saleev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Victor Y. Yushankhai — leading researcher, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, 6, Zholtso-Kyuri Street, Dubna, 141980, Russian Federation.

References

- [1] Bohr N. Light and Life. *Nature*, 1933, vol. 131, pp. 421–423. DOI: <http://doi.org/10.1038/131457a0>.
- [2] Schrodinger E. What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell. Moscow: AST, 2018, 288 p. Available at: http://yanko.lib.ru/books/natural/biology/schodinger-what_is_life.htm. (In Russ.)
- [3] Pauling L. The nature of chemical bond. Moscow-Leningrad: GNTI khimicheskoi literatury, 1947, 438 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=1238081>. (In Russ.)
- [4] Lambert N., Chen Y. N., Cheng Y. C., Li C. M., Chen G. Y., and Nori F. Quantum biology. *Nature Physics*, 2013, vol. 9 (1), pp. 10–18. DOI: <http://doi.org/10.1038/nphys2474>.
- [5] Davydov A.S. Biology and quantum mechanics. Kyiv: Nauk. Dumka, 1979, 296 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=436532>. (In Russ.)
- [6] Arndt M., Juffmann T., Vedral V. Quantum physics meets biology. *HFSP Journal*, 2009, vol. 3, no. 6, pp. 386–400. DOI: <http://dx.doi.org/10.2976/1.3244985>.
- [7] Quantum Effects in Biology. Edited by Mohseni M., Omar Y., Engel G. and Plenio M.B. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511863189>.
- [8] Ivanov M.G. How to understand quantum mechanics. Moscow–Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2012, 516 p. Available at: <https://mipt.ru/students/organization/mezhpr/upload/9ab/quant-1-1-arphf9t1u8h.pdf>. (In Russ.)
- [9] Cheng Y.-C., Fleming G.R. Dynamics of light harvesting in photosynthesis. *Annual Review of Physical Chemistry*, 2009, vol. 60, pp. 241–262. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev.physchem.040808.090259>.
- [10] Hore P.J., Mouritsen H. The Radical-Pair Mechanism of Magnetoreception. *Annual Review of Biophysics*, 2016, vol. 45, pp. 299–344. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-biophys-032116-094545>.
- [11] Brookes J.C. Olfaction: The physics of how smell works. *Contemporary Physics*, 2011, vol. 52, issue 5, pp. 385–402. DOI: <http://doi.org/10.1080/00107514.2011.597565>.
- [12] Beratan D.N. Why Are DNA and Protein Electron Transfer So Different? *Annual Review of Physical Chemistry*, 2019, vol. 70, pp. 71–97. DOI: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-physchem-042018-052353>.
- [13] Gaysinovich A.E. The origin and development of genetics. Moscow: Nauka, 1988, 423 p. Available at: <https://bookree.org/reader?file=818508>. (In Russ.)
- [14] Kanke V.A. Philosophy of mathematics, physics, chemistry, biology. Moscow: KNORUS, 2011, 368 p. ISBN: 978-5-406-00543-9. Available at: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=182&ArticleId=504>. (In Russ.)

- [15] Lipkin A.E. (Ed.) *Philosophy of science*. Moscow: EKSMO, 2007, 608 p. ISBN 978-5-699-18350-0. Available at: <https://bookree.org/reader?file=594657>. (In Russ.)
- [16] Wilson J. *Biological Individuality: The Identity and Persistence of Living Entities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 152 p. DOI: <http://doi.org/10.5860/choice.37-3348>.
- [17] Weber M. *The Philosophy of Experimental Biology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005, 374 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511498596>.
- [18] Prigogine I., Stengers I. *Order out of chaos. Man's new dialogue with nature*. Moscow: Progress, 1986, 432 p. Available at: http://yanko.lib.ru/books/betweenall/prigogine-stengers_ru.htm. (In Russ.)
- [19] Wiener N. *Cybernetics, or Control and communication in the animal and the machine*. Translation from English by Solovyov I.V., Povarov G.N. Edited by Povarov G.N. Moscow: Sovetskoe radio, 1968, 328 p. Available at: [http://publ.lib.ru/ARCHIVES/V/VINER_Norbert/Viner_N._Kibernetika.\(1968\).pdf-fax.zip](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/V/VINER_Norbert/Viner_N._Kibernetika.(1968).pdf-fax.zip). (In Russ.)
- [20] Knyazeva H.N. *Biosemiotics: The Origins of an Interdisciplinary Movement*. *Voprosy Filosofii*, 2018, vol. 11, pp. 86–98. DOI: <http://dx.doi.org/10.31857/S004287440001897-1>. (In Russ.)
- [21] Marais A. et al. The future of quantum biology. *Journal of the Royal Society Interface*, 2018, vol. 15, p. 20180640. DOI: <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2018.0640>.
- [22] McFadden J., Al-Khalili J. The origins of quantum biology. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2018, vol. 474, issue 2220, p. 20180674. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2018.0674>.
- [23] Huelga S.F., Plenio M.B. Vibrations, quanta and biology. *Contemporary Physics*, 2013, vol. 54, issue 4, pp. 181–207. DOI: <http://doi.org/10.1080/00405000.2013.829687>.
- [24] Cao et al. Quantum biology revisited. *Science Advances*, 2020, vol. 6, issue 14, p. eaaz4888. DOI: <http://dx.doi.org/10.1126/sciadv.aaz4888>.
- [25] Stoneham A.M., Turin L., Brookes J.C., Horsfield A.P. Quantum vibrational effects on sense of smell. In: *Mohseni M., Omar Y., Engel G.S., Plenio M.B. (Eds.) Quantum Effects in Biology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, pp. 264–276. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511863189.014>.
- [26] Turin L. A spectroscopic mechanism for primary olfactory reception. *The Chemical Senses*, 1996, vol. 21/6, pp. 773–791. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/chemse/21.6.773>.
- [27] Mohseni M., Rebentrost P., Lloyd S., Aspuru-Guzik A. Environment-Assisted Quantum Walks in Photosynthetic Energy Transfer. *The Journal of Chemical Physics*, 2008, vol. 129, issue 17, p. 174106. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3002335>.
- [28] Maier C., Brydges T., Jurcevic P., Trautmann N., Hempel C., Lanyon B.P., Hauke P., Blatt R., Roos C.F. Environment-Assisted Quantum Transport in a 10-qubit Network. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, p. 050501. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.050501>.
- [29] Engel G.S., Calhoun T.R., Read E.L., Ahn T.K., Mancal T., Cheng Y.C., Blankenship R.E., Fleming G.R. Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems. *Nature*, 2007, vol. 446, pp. 782–786. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature05678>.
- [30] Panitchayangkoon G., Hayes D., Fransted K.A., Caram J.R., Harel E., Wen J.Z., Blankenship R.E., Engel G.S. Long-lived quantum coherence in photosynthetic complexes at physiological temperature. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2010, vol. 107, no. 29, pp. 12766–12770. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.1005484107>.
- [31] Anderson P.W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*, 1958, vol. 109, issue 5, p. 1492. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492>.
- [32] Schulten K., Swenberg C.E., Weller A. A biomagnetic sensory mechanism based on magnetic field modulated coherent electron spin motion. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 1978. Vol. 111, no. 1, pp. 1–5. DOI: <http://doi.org/10.1524/zpch.1978.111.1.001>.
- [33] Ritz T., Adem S., Schulten K. A Model for Photoreceptor-Based Magnetoreception in Birds. *Biophysical Journal*, 2000, vol. 78, issue 2, pp. 707–718. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495\(00\)76629-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0006-3495(00)76629-X).
- [34] Zhang Y., Berman G.P., Kais S. The Radical Pair Mechanism and the Avian Chemical Compass: Quantum Coherence and Entanglement. *International Journal of Quantum Chemistry*, 2015, vol. 115, issue 19, pp. 1327–1341. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/qua.24943>.
- [35] Astakhova T.Yu., Likhachev V.N., Vinogradov G.A. Long-range charge transfer in biopolymers. *Uspekhi khimii* [Russian Chemical Reviews], 2012, vol. 81, issue 11, pp. 994–1010. DOI: <http://doi.org/10.1070/RC2012v081n11ABEH004308>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rggxuh> (In English; Russian original).
- [36] Syurakshin A.V., Lakhno V.D., Yushankhai V.Y. Charge transfer in a DNA molecule within a simple model of an open quantum system. *Keldysh Institute Preprints*, 2021, no. 23, pp. 1–26. DOI: <http://doi.org/10.20948/prepr-2021-23>. EDN: <https://www.elibrary.ru/perpfv>. (In Russ.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 11.05.2022
после рецензирования: 22.06.2022
принятия статьи: 14.11.2022

А.Р. Багров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ДИНАМИКА ТРЕХКУБИТНОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА

АННОТАЦИЯ

В данной статье исследована динамика перепутывания трех идентичных кубитов (естественных или искусственных двухуровневых атомов), резонансно взаимодействующих с выделенной модой теплового поля микроволнового резонатора без потерь посредством однофотонных переходов. Найдено точное решение квантового временного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы для начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов и фоковского начального состояния резонатора. На основе указанного решения построено точное решение квантового уравнения Лиувилля для полной временной матрицы плотности системы в случае теплового поля резонатора. Точное решение для полной матрицы плотности использовано для вычисления критерия перепутанности пар кубитов — отрицательности. Результаты численного моделирования временной зависимости отрицательности пар кубитов показывают, что с увеличением интенсивности теплового поля резонатора степень перепутывания пар кубитов уменьшается. Также показано, что в рассматриваемой модели для любых начальных состояний кубитов и интенсивностях теплового поля резонатора имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Такое поведение параметра перепутывания пар кубитов в рассматриваемой модели отличается от поведения параметра перепутывания кубитов в двухкубитной модели. Для двухкубитной модели эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место только для начальных перепутанных состояний кубитов и интенсивных тепловых полей резонатора.

Ключевые слова: кубиты; резонансное взаимодействие; резонатор; однофотонные переходы; точное решение квантового уравнения Лиувилля; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Багров А.Р., Башкиров Е.К., 2022

Александр Романович Багров — бакалавр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Многочастичные перепутанные состояния кубитов играют важную роль в квантовой информации. Они нужны для различных квантовых информационных приложений, таких как квантовые вычисления и безопасная связь [1–3]. В последние годы наблюдается существенный прогресс в проектировании квантовых чипов, содержащих большое количество кубитов. В 2019 году [4] представлен квантовый компьютер на 53 сверхпроводящих джозефсоновских кольцах. В 2021 году создан чип для квантового компьютера на 127 сверхпроводящих джозефсоновских кольцах [5]. В последние годы также реализованы многокубитные устройства на ионах в магнитных ловушках, фотонах, квантовых точках, примесных спинах, содержащие более десятка кубитов [6]. Для реализации эффективной работы квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры или квантовые сети, используют перепутанные состояния кубитов [7; 8]. Для количественной меры перепутывания кубитов предложены различные меры. Однако большинство из них требуют выполнения определенных условий, которые можно определить как набор аксиом, таких как обнуление меры для сепарабельных состояний, инвариантность относительно локальных унитарных операций и другие. Сложность расчета этих мер для произвольных состояний лежит в их незамкнутой форме. Простейшая система, для которой в настоящее время определены строгие количественные критерии перепутывания кубитов, — двухкубитная. Критерии Переса — Хороецких (отрицательность) [9; 10] и Вуутерса (согласованность) [11] являются необходимыми условиями сепарабельности двухкубитной матрицы плотности. Для систем с числом кубитов, большим чем два, такие строгие количественные критерии отсутствуют. В этом случае при анализе динамики перепутывания многокубитной системы обычно рассматривают перепутывание различных пар кубитов с использованием отрицательности или согласованности. При этом особое внимание уделялось строгому математическому анализу свойств и динамики перепутанных состояний в трехкубитных системах [12–17].

Для генерации, управления и контроля перепутанными состояниями кубитов обычно используют поля резонаторов. В настоящее время экспериментально получены перепутанные состояния кубитов различной физической природы (сверхпроводящих джозефсоновских колец, примесных спинов, ионов в магнитных ловушках и др.) в резонаторах при различных температурах от милликельвин до комнатных [1–3]. Для теоретического анализа динамики систем кубитов в резонаторах обычно используется модель Тависа-Каммингса [18]. В резонаторах конечной температуры естественно присутствуют тепловые фотоны. Поэтому представляет значительный интерес исследование динамики перепутывания кубитов, индуцированного тепловыми полями резонаторов. Особенности динамики перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем резонатора, для двухкубитных систем впервые были рассмотрены в работе Питера Найта с соавторами [19], а для различных обобщений двухкубитной модели в работах [20–27]. Динамика перепутывания трех кубитов, индуцированного тепловым полем одномодового резонатора, была рассмотрена в работе [13]. В качестве критерия перепутывания пар кубитов была использован параметр Вуутерса или согласованность. Однако авторы ограничились рассмотрением сепарабельных начальных состояний кубитов. Представляет большой интерес изучить особенности перепутывания трех кубитов, взаимодействующих с тепловым полем резонатора, как для сепарабельных, так и для перепутанных начальных состояний кубитов. В настоящей статье мы нашли точное решение квантового уравнения Лиувилля для системы, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с модой теплового квантового электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных состояний. Точное решение использовано для расчета параметра перепутывания кубитов в качестве критерия отрицательности для сепарабельных и перепутанных начальных состояний кубитов.

1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Рассмотрим систему трех идентичных кубитов (двухуровневых атомов), резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального микроволнового резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой системы в дипольном приближении и приближении вращающейся волны есть

$$H = \hbar\gamma \sum_{i=1}^3 (a^+ \sigma_i^- + \sigma_i^+ a), \quad (1)$$

где a^+ (a) — оператор рождения (уничтожения) фотонов резонаторной моды поля, σ_i^+ и σ_i^- — повышающий и понижающий оператор в i -м кубите и γ — константа взаимодействия кубитов с полем резонатора.

Обозначим через $|+\rangle_i$ и $|-\rangle_i$ возбужденное и основное состояние i -го кубита. Выберем в качестве начальных состояний подсистемы кубитов сепарабельные состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = |+, +, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = |+, -, -\rangle, \quad (3)$$

а также состояния, в которых перепутаны второй и третий кубит

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta |+, -, +\rangle \quad (4)$$

или

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \theta |-, +, -\rangle + \sin \theta |-, -, +\rangle. \quad (5)$$

В качестве начального состояния поля резонатора выберем тепловое состояние с матрицей плотности вида one-mode state

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (6)$$

Весовые коэффициенты в (6) есть

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ – среднее число тепловых фотонов

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega_{cav}/k_B T] - 1)^{-1},$$

k_B – постоянная Больцмана и T – температура резонатора.

Найдем вначале временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). А потом обобщим результаты на случай теплового поля резонатора. Введем для нашей системы число возбуждений N , равное $N = n + n$, где n – число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Для чисел возбуждения $N \geq 3$ в работе [12] ранее был найден оператор эволюции, который имеет вид

$$U(n, t) = \begin{pmatrix} U_{11}(n) & \cdots & U_{18}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{81}(n) & \cdots & U_{88}(n) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} U_{11}(n) &= \frac{(7 + 2n + \Omega) \cos(\theta_1 \gamma t) + (-7 - 2n + \Omega) \cos(\theta_2 \gamma t)}{2\Omega}, \\ U_{22}(n) &= \frac{4\Omega \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t) + (-1 - 2n + \Omega) \cos(\theta_1 \gamma t) + (1 + 2n + \Omega) \cos(\theta_2 \gamma t)}{6\Omega}, \\ u_{12}(n) &= -i \frac{(7 + 2n + \Omega) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (-7 - 2n + \Omega) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{6\sqrt{1 + n}\Omega}, \\ U_{15}(n) &= \frac{\sqrt{(1 + n)(2 + n)}(-\cos(\theta_1 \gamma t) + \cos(\theta_2 \gamma t))}{\Omega}, \\ U_{25}(n) &= -i \frac{\sqrt{2 + n} \Omega \sin(\sqrt{2 + n} \gamma t) - (2 + n) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (2 + n) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{3\sqrt{2 + n}\Omega}, \\ U_{58}(n) &= -i \frac{(1 + 2n + \Omega) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (-1 - 2n + \Omega) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{6\sqrt{3 + n}\Omega}, \\ U_{18}(n) &= -i \frac{\sqrt{2 + n}(\sin(\theta_2 \gamma t) \theta_1 - \sin(\theta_1 \gamma t) \theta_2)}{\Omega}, \\ U_{55}(n) &= u_{22}(n) - \frac{1}{\Omega}(\cos(\theta_1 \gamma t) - \cos(\theta_2 \gamma t)), u_{23}(n) = u_{22}(n) - \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t), \\ U_{88}(n) &= u_{11}(n) - \frac{3}{\Omega}(\cos(\theta_1 \gamma t) - \cos(\theta_2 \gamma t)), u_{56}(n) = u_{55}(n) - \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t), \\ U_{27}(n) &= u_{25}(n) + i \sin(\sqrt{2 + n} \gamma t), u_{28}(n) = \sqrt{\frac{n + 3}{n + 1}} u_{15}(n) \\ U_{22} &= U_{33} = U_{44}, U_{55} = U_{66} = U_{77}, U_{12} = U_{13} = U_{14} = U_{21} = U_{31} = U_{41}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{15} = U_{16} = U_{17} = U_{51} = U_{61} = U_{71}, U_{23} = U_{24} = U_{32} = U_{34} = U_{42} = U_{43}, \\ U_{27} = U_{36} = U_{45} = U_{54} = U_{63} = U_{72}, U_{56} = U_{57} = U_{65} = U_{67} = U_{75} = U_{76}, \\ U_{25} = U_{26} = U_{35} = U_{37} = U_{46} = U_{47} = U_{52} = U_{53} = U_{62} = U_{64} = U_{73} = U_{74}, \\ U_{28} = U_{38} = U_{48} = U_{82} = U_{83} = U_{84}, U_{58} = U_{68} = U_{78} = U_{85} = U_{86} = U_{87}, U_{18} = U_{81} \end{aligned}$$

и

$$\Omega_n = \sqrt{9 + 16(n+2)^2}, \theta_1 = \sqrt{5(n+2) - \Omega_n}, \theta_2 = \sqrt{5(n+2) + \Omega_n}.$$

При записи оператора эволюции в матричной форме мы использовали базисные векторы вида

$$\begin{aligned} |+, +, +, n\rangle, |+, +, -, n+1\rangle, |+, -, +, n+1\rangle, |-, +, +, n+1\rangle, \\ |+, -, -, n+2\rangle, |-, +, -, n+2\rangle, |-, -, +, n+2\rangle, |-, -, -, n+3\rangle. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае волновую функцию можно найти как

$$|\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_n = U|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3}|n\rangle. \quad (8)$$

В дальнейшем при обобщении результатов на случай теплового поля резонатора нам потребуются также волновые функции, соответствующие числам возбуждения $N = 2, 1, 0$. Для $N = 2$ базис гильбертова пространства должен быть сужен до набора

$$\begin{aligned} |+, +, -, 0\rangle, |+, -, +, 0\rangle, |-, +, +, 0\rangle, \\ |+, -, -, 1\rangle, |-, +, -, 1\rangle, |-, -, +, 1\rangle, |-, -, -, 2\rangle. \end{aligned}$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$\begin{aligned} |\psi_1(t)\rangle = x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + \\ + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

где коэффициенты $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) есть

$$\begin{aligned} x_1(t) = \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) + 5 \left(2C_1 - C_2 - C_3 \right) \cos t + \left(2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7 \right) \cos \sqrt{10}t - \right. \\ \left. - i \left(5(C_4 + C_5 - 2C_6) \sin t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) - 5(C_1 - 2C_2 + C_3) \cos t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7) \cos \sqrt{10}t - \right. \\ \left. - i \left(5(C_4 - 2C_5 + C_6) \sin t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) - 5(C_1 + C_2 - 2C_3) \cos t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7) \cos \sqrt{10}t + \right. \\ \left. + 5i \left(2C_4 - C_5 - C_6 \right) \sin t - i\sqrt{10} \left(C_4 + C_5 + C_6 \right) \sin \sqrt{10}t \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(t) = \frac{1}{15} \left[5 \left(2C_4 - C_5 - C_6 \right) \cos t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}t - i \left(5(C_1 + C_2 - 2C_3) \sin t + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5(t) = \frac{1}{15} \left[-5(C_4 - 2C_5 + C_6) \cos t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}t - i \left(5(C_1 - 2C_2 + C_3) \sin t + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6(t) = \frac{1}{15} \left[-5(C_4 + C_5 - 2C_6) \cos t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}t + 5i(2C_1 - C_2 - C_3) \sin t - \right. \\ \left. - i\sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}t \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_7(t) = \frac{1}{5} \left[\sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_3 + 2C_7 + \left(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3C_7 \right) \cos \sqrt{10}t - i\sqrt{5}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}t \right]. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $C_i = x_i(0)$.

Для $N = 1$ выбираем базис гильбертова пространства в виде

$$|+, -, -, 0\rangle, |-, +, -, 0\rangle, |-, -, +, 0\rangle, |-, -, -, 1\rangle.$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_2(t)\rangle = y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + y_4(t)|-, -, -, 1\rangle, \quad (10)$$

где коэффициенты $y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) имеют вид

$$y_1(t) = \frac{1}{3} [2F_1 - F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}t],$$

$$y_2(t) = \frac{1}{3} [-F_1 + 2F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}t],$$

$$y_3(t) = \frac{1}{3} [-F_1 - F_2 + 2F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}t],$$

$$y_4(t) = F_4 \cos \sqrt{3}t - \frac{i(F_1 + F_2 + F_3) \sin \sqrt{3}t}{\sqrt{3}}.$$

Здесь использованы обозначения $F_i = y_i(0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Наконец для $N = 0$ базис гильбертова пространства составляет вектор $|-, -, -, 0\rangle$. Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_3(t)\rangle = |-, -, -, 0\rangle. \quad (11)$$

Имея явный вид для временных волновых функций системы (8)–(11), мы можем вычислить временную матрицу плотности полной системы "три кубита+мода поля" в случае теплового состояния поля. Для состояний (2) и (4) временную матрицу плотности можно записать как

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_{n-1} \langle \Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)| + p_0 |\psi_1(t)\rangle \langle \psi_1(t)|. \quad (12)$$

Для состояний (3) и (5) временная матрица плотности есть

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_{n-2} \langle \Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)| + p_1 |\psi_1(t)\rangle \langle \psi_1(t)| + p_0 |\psi_2(t)\rangle \langle \psi_2(t)|. \quad (13)$$

Редуцированную матрицу плотности трех кубитов мы можем вычислить, усредняя выражения (12) или (13) по переменным поля

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) = S p_F \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t). \quad (14)$$

Как уже отмечалось во введении, точные количественные меры перепутывания кубитов в настоящее время разработаны только для двухкубитных систем. настоящей работе в качестве меры перепутывания выбран критерий Переса — Хородецких или отрицательность. Для вычисления отрицательности двух кубитов необходимо вычислить редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Для это необходимо усреднить трехкубитную матрицу плотности (14) по переменным третьего кубита, т. е.

$$\rho_{Q_i Q_j}(t) = S p_{Q_k} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t)(i, j, k = 1, 2, 3 \ i \neq j, j \neq k, i \neq k)$$

2. Вычисление отрицательности и обсуждение результатов

Определим отрицательность для двух кубитов Q_i и Q_j стандартным образом [8]

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l \mu_l^-,$$

где μ_l^- — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита (атома) редуцированной двухкубитной матрицы плотности. Для неперепутанных состояний $\varepsilon = 0$. Для перепутанных состояний $0 < \varepsilon \leq 1$. Максимальной степени перепутывания соответствует значение $\varepsilon = 1$.

Для сепарабельных начальных состояний кубитов (2) и (3) и перепутанных состояний (4) и (5) двухкубитная матрица редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{Q_i Q_j}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матричные элементы (15) для начального состояния (2) и кубитов Q_1 и Q_2 имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{12}(n-1)|^2 + |U_{22}(n-1)|^2) + p_0 |x_1|^2, \\ \rho_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{32}(n-1)|^2 + |U_{52}(n-1)|^2) + p_0 (|x_2|^2 + |x_4|^2), \\ \rho_{33} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{42}(n-1)|^2 + |U_{62}(n-1)|^2) + p_0 (|x_3|^2 + |x_5|^2), \\ \rho_{44} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{72}(n-1)|^2 + |U_{82}(n-1)|^2) + p_0 (|x_6|^2 + |x_7|^2), \\ \rho_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_{32}(n-1)U_{42}^*(n-1) + U_{52}(n-1)U_{62}^*(n-1)) + p_0 (x_4x_5^* + x_2x_3^*), \\ \rho_{32} &= (\rho_{23})^*.\end{aligned}$$

Для того же начального состояния и кубитов Q_2 и Q_3 матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{12}(n-1)|^2 + |U_{42}(n-1)|^2) + p_0 |x_3|^2, \\ \rho_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{22}(n-1)|^2 + |U_{62}(n-1)|^2) + p_0 (|x_1|^2 + |x_5|^2), \\ \rho_{33} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{32}(n-1)|^2 + |U_{72}(n-1)|^2) + p_0 (|x_2|^2 + |x_6|^2), \\ \rho_{44} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{52}(n-1)|^2 + |U_{82}(n-1)|^2) + p_0 (|x_4|^2 + |x_7|^2), \\ \rho_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_{22}(n-1)U_{32}^*(n-1) + U_{62}(n-1)U_{72}^*(n-1)) + p_0 (x_1x_2^* + x_5x_6^*), \\ \rho_{32} &= (\rho_{23})^*.\end{aligned}$$

Явные выражения для матричных элементов в (15) для начальных состояний кубитов (3)–(5) имеют аналогичную структуру и поэтому в настоящей работе не приведены.

Частично транспонированная по переменным одного кубита редуцированная матрица плотности кубитов для (15) может быть представлена в виде

$$\rho_{Q_i Q_j}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{23}^* \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{23} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица (16) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность может быть записана как

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44} - \rho_{11})^2 + 4 \cdot \rho_{23}^2} - \rho_{11} - \rho_{44}.$$

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательностей ε_{12} и ε_{13} для кубитов 1 и 2 и 1 и 3 от приведенного времени γt для начального сепарабельного состояния кубитов, в котором два из них возбуждены, а один находится в основном состоянии, например $|+, +, -\rangle$, и различных значений средних чисел тепловых фотонов в моде представлены на рис. 1. Для выбранного начального состояния кубиты 1 и 2 перепутаны в любой момент времени, в то время как для кубитов 1 и 3 имеет место эффект мгновенной смерти и возрождения перепутывания. Мгновенной смертью перепутывания называется исчезновение перепутывания кубитов на временах меньше времени диссипации энергии, фазы и т. д. Степень перепутывания монотонно уменьшается с увеличением среднего числа фотонов. Поведение отрицательности в случае, когда два кубита изначально находятся в основном состоянии, а один – в возбужденном состоянии, например $|+, -, -\rangle$, представлено на рис. 2. Для указанного начального состояния кубитов поведение отрицательностей ε_{12} и ε_{13} аналогично предыдущему случаю. Заметим, что для двухкубитной модели и начального состояния, в котором один из них возбужден,

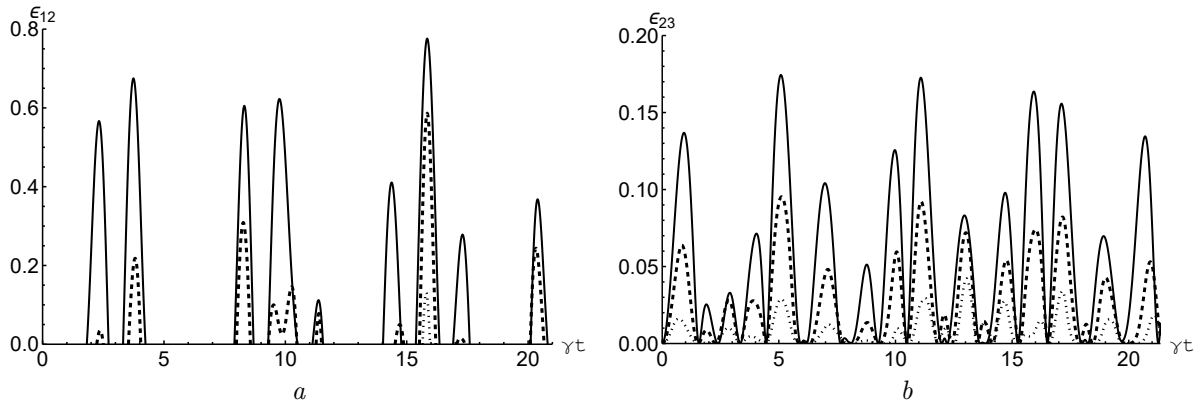


Рис. 1. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $|+, +, -\rangle$. Среднее число тепловых фотонов в режиме $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 4$ (пунктирная линия)

Fig. 1. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for initial qubits state $|+, +, -\rangle$. Mean thermal photon number $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) and $\bar{n} = 4$ (dotted)

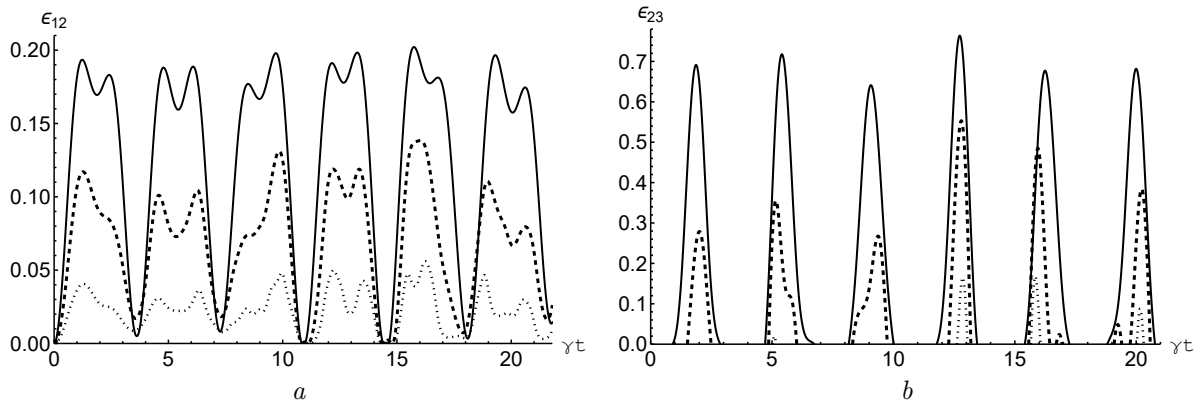


Рис. 2. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $|+, -, -\rangle$. Среднее число тепловых фотонов в режиме $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 4$ (пунктирная линия)

Fig. 2. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for initial qubits state $|+, -, -\rangle$. Mean thermal photon number $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) and $\bar{n} = 4$ (dotted)

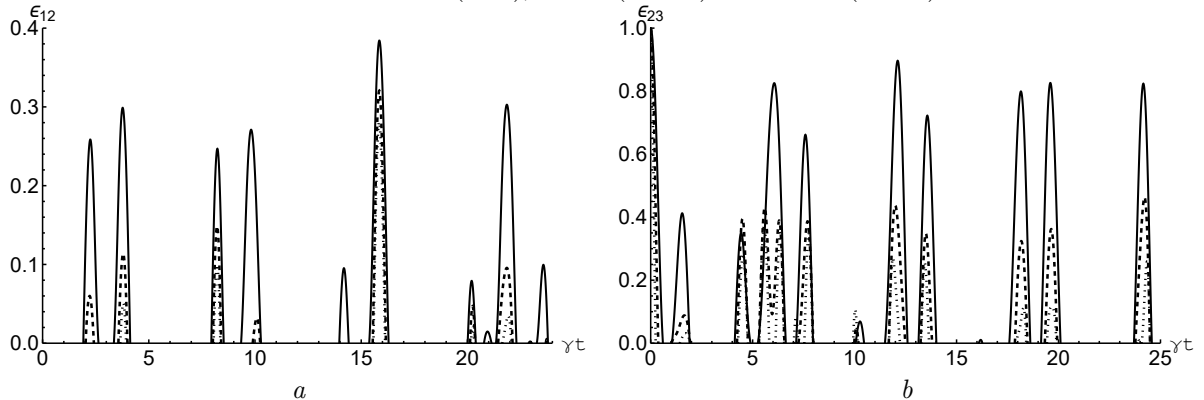


Рис. 3. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального запутанного состояния кубитов (4) при $\theta = \Pi/4$. Среднее число тепловых фотонов в режиме для расчёта ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0.5$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 0.7$ (пунктирная линия). Для ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия)

Fig. 3. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for entangled initial qubits state (4) with $\theta = \Pi/4$. The average number of thermal photons in the mode for calculating ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 0.5$ (dashed) and $\bar{n} = 0.7$ (dotted). For ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) and $\bar{n} = 3$ (dotted)

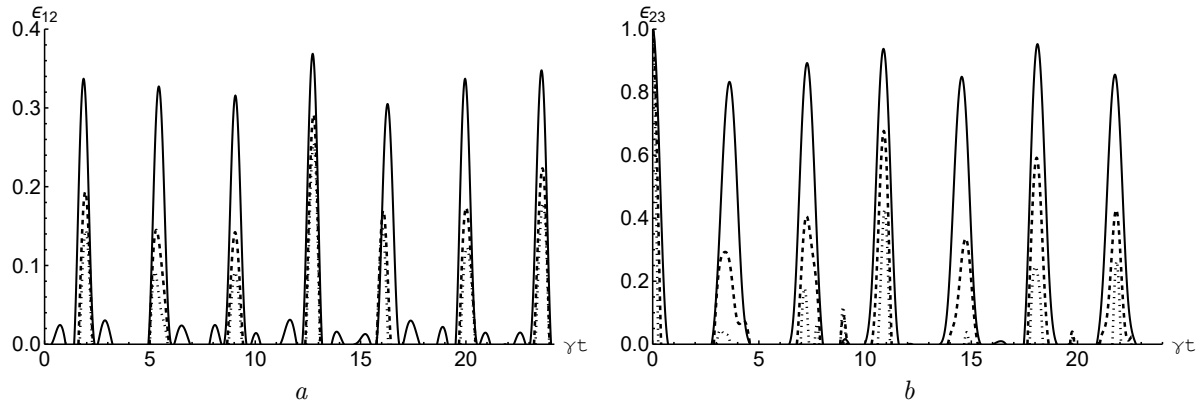


Рис. 4. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального перепутанного состояния кубитов (5) при $\theta = \Pi/4$. Среднее число тепловых фотонов в моде для расчёта ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0.5$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 0.7$ (пунктирная линия). Для ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия)

Fig. 4. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for entangled initial qubits state (5) with $\theta = \Pi/4$. The average number of thermal photons in the mode for calculating ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 0.5$ (dashed) and $\bar{n} = 0.7$ (dotted). For ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) и $\bar{n} = 3$ (dotted)

а второй находится в основном состоянии, эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует для любых интенсивностей теплового поля резонатора [19].

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательностей ε_{12} и ε_{13} для кубитов 1 и 2 и 1 и 3 от приведенного времени γt для начального состояния (4), в котором перепутаны состояния кубитов 2 и 3, а кубит 1 находится в возбужденном состоянии, представлены на рис. 3. Аналогичные зависимости для начального состояния (5), в котором также перепутаны состояния кубитов 2 и 3, а кубит 1 находится в основном состоянии, представлены на рис. 4. Наиболее интересным в поведении отрицательности как для случая начальных сепарабельных, так и перепутанных состояний кубитов, представленных на рис. 3 и 4, является проявление эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов для любых средних чисел тепловых фотонов. Заметим, что для двухкубитной модели и белловских начальных состояний кубитов вида $\cos \theta |+, -\rangle + \sin \theta |-, +\rangle$ эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место только для достаточно интенсивных тепловых полей резонатора $\bar{n} \geq 1$ [26].

Выводы

Таким образом, в данной статье нами была найдена точная динамика системы, состоящей из трех идентичных кубитов, взаимодействующих с модой теплового поля резонатора без потерь. Полученное явное выражение для полной матрицы плотности системы использовано для вычисления критерия перепутывания пар кубитов как для начальных сепарабельных, так и для перепутанных состояний кубитов. Результаты численного моделирования кубитов показывают, что максимальная степень перепутывания пар кубитов быстро уменьшается с увеличением интенсивности теплового поля резонатора. Установлено, что для рассматриваемой системы для любых начальных состояний кубитов и среднего числа тепловых фотонов в моде имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Полученное в настоящей работе точное решение для временной матрицы плотности будет использовано нами для расчета других наблюдаемых подсистемы кубитов и поля: населенностей, дипольных моментов, корреляционных функций, параметра сжатия моды поля и других. Будет рассмотрено также влияние диссипации энергии и фазы на динамику системы. Такие расчеты будут предметом нашей следующей работы.

Литература

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74. Number 10. P. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85, Issue 2. Pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>

- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // *Nature*. 2019. Vol. 574. P. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race. // *Nature*. 2021. Vol. 599. P. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation // *Reviews of Modern Physics*. 2014. Vol. 88. Issue 1. P. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // *Reports on Progress in Physics*. 2017. Vol. 80. Number 10. P. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 77. Issue 8. P. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // *Physics Letters A*. 1996. Vol. 223. Issues 1–2, Pp. 333–339. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80. Issue 10. P. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2012. Vol. 1. No. 6, Pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [12] Liu H.P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis Cummings Model Induced by a Thermal Field // *Communications in Theoretical Physics*. 2005. Vol. 43. Issue 3. P. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // *Physical Review A*. 2000. Vol. 62. Issue 6. P. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // *The European Physical Journal D*. 2008. Vol. 48. Issue 3. P. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2010. Vol. 43. P. 095501. URL: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement // *Journal of Mathematical Physics*. 2017. Vol. 58. Issue 10. P. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2019. Vol. 10, issue 7. P. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Tavis M., Cummings F.W. Exact solution for an n-molecule–radiation-field hamiltonian // *Physical Review*. 1968. Vol. 170. Issue 2. P. 379–384. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.170.379>.
- [19] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Physical Review A*. 2002. Vol. 65. Issue 4. P. 040101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [20] Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2002. Vol. 4. Number 6. Pp. 425–429. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
- [21] Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Physics Letters*. 2006. Vol. 3. P. 145–150. Available at: https://www.researchgate.net/publication/2196323_Entanglement_induced_by_a_two-mode_thermal_field.
- [22] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2005. Vol. 7. Issue 12. P. 769–771. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
- [23] Liao X.-P., Fang M.-F., Cai J.-W., Zheng X.-J. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process // *Chinese Physics B*. 2008. Vol. 17. Number 6. Pp. 2137–2142. DOI: <http://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.
- [24] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Physics*. 2009. Vol. 19. P. 525–530. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [25] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Optics Communications*. 2010. Vol. 283. Issue 23, P. 4676–4679. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [26] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes-Cummings Atom and an Isolated Atom // *International Journal of Theoretical Physics*. 2018. Vol. 57. P. 3761–3771. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [27] Башкиров Е.К. Динамика перепутывания атомов с двухфотонными переходами, индуцированного тепловым полем // *Компьютерная оптика*. 2010. Т. 44, № 2. С. 167–176. DOI: <http://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-595>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105

Submitted: 11.05.2022

Revised: 22.06.2022

Accepted: 14.11.2022

A.R. Bagrov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

DYNAMICS OF THE THREE-QUBITS TAVIS — CUMMINGS MODEL

ABSTRACT

In this article, we have studied the entanglement dynamics of three identical qubits (natural or artificial two-level atoms) resonantly interacting with the one mode of the thermal field of a microwave lossless resonator via one-photon transitions. An exact solution of the quantum time Schrodinger equation is found for the total wave function of the system for the initial separable and entangled states of qubits and the Fock initial state of the resonator. On the basis of this solution, an exact solution of the quantum Liouville equation for the total time-dependent density matrix of the system in the case of a thermal field of the resonator is constructed. The exact solution for the full density matrix is used to calculate the criterion of entanglement of pairs of qubits – negativity. The results of numerical simulation of the time dependence of the negativity of pairs of qubits showed that with an increase in the intensity of the thermal resonator field, the degree of entanglement of pairs of qubits decreases. It is also shown that In the model under consideration, for any initial states of qubits and intensities of the thermal field of the resonator, the effect of sudden death of entanglement takes place. This behavior of the entanglement parameter in the model under consideration differs from that in the two-qubit model. For two-qubit model, the effect of the sudden death of entanglement takes place only for the initial entangled states of qubits and intense thermal fields of the resonator.

Key words: qubits; resonant interaction; cavity; one-photon transitions; exact solution of the quantum Liouville equation; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

Citation. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of the three-qubits Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bagrov A.R., Bashkirov E.K., 2022

Alexander R. Bagrov — undergraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, vol. 74, number 10, p. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 2013, vol. 85, issue 2, pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 2019, vol. 574, pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race. *Nature*, 2021, vol. 599, p. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.

- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, 2014, vol. 88, issue 1, pp. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, pp. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issues 1–2, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 10, pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2012, vol. 1, no. 6, pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [12] Liu P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis — Cummings Model Induced by a Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2005, vol. 43, issue 3, pp. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 2000, vol. 62, issue 6, p. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, issue 3, pp. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, vol. 43, p. 095501. Available at: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 2017, vol. 58, issue 10, p. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups, SU(2) and SU(4). *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Tavis M., Cummings F.W. Exact solution for an n-molecule—radiation-field hamiltonian. *Physical Review*, 1968, vol. 170, issue 2, pp. 379–384. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.170.379>.
- [19] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review A*, 2002, vol. 65, issue 4, p. 040101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [20] Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2002, vol. 4, number 6, pp. 425–429. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
- [21] Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise. *Laser Physics Letters*, 2006, vol. 3, pp. 145–150. Available at: https://www.researchgate.net/publication/2196323_Entanglement_induced_by_a_two-mode_thermal_field.
- [22] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, vol. 7, issue 12, pp. 769–771. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
- [23] Liao X.-P., Fang M.-F., Cai J.-W., Zheng X.-J. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process. *Chinese Physics B*, 2008, vol. 17, number 6, pp. 2137–2142. DOI: <http://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.
- [24] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise. *Laser Physics*, 2009, vol. 19, pp. 525–530. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [25] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Optics Communications*, 2010, vol. 283, issue 23, pp. 4676–4679. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [26] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes-Cummings Atom and an Isolated Atom. *International Journal of Theoretical Physics*, 2018, vol. 57, pp. 3761–3771. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [27] Bashkirov E.K. Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field. *Computer Optics*, 2020, vol. 44, no. 2, pp. 167–176. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-595>. (In Russ.)



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-106-112

Submitted: 23.03.2022

Revised: 26.04.2022

Accepted: 14.11.2022

D.P. Porfiriev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
 Samara branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara,
 Russian Federation

E-mail: ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2203-8133>

I.P. Zavershinskii

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
 E-mail: ipzav63@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2391-1881>

D.V. Agapova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
 Samara branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara,
 Russian Federation

E-mail: agapovadaria2019@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3957-7339>

THE STRUCTURE OF THE SWIRLING FLOW IN THE COUNTERFLOW VORTEX REACTOR¹

ABSTRACT Two promising designs of counterflow vortex reactor were numerically investigated. Such apparatus utilizes reverse flow to withdraw thermal energy and products from interelectrode area. Complex gasdynamic structure of the water-vapor flow was investigated using turbulent three-dimensional simulation employing Reynolds averaged Navier-Stokes equations along with SST $k-\omega$ turbulence model – technique tested in earlier papers. Presented velocity profiles and heat flux reports demonstrate viability of both approaches.

Key words: hydrogen; swirling flows; plasma-vortex generator; computational fluid dynamics; clean energy.

Citation. Porfiriev D.P., Zavershinskii I.P., Agapova D.V. The structure of the swirling flow in the counterflow vortex reactor. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 106–112. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-106-112>.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Porfiriev D.P., Zavershinskii I.P., Agapova D.V., 2022

Denis P. Porfiriev — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation;
 research associate of the Theoretical Department, Samara branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Igor P. Zavershinskii — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

¹The study was supported by the Ministry of Education and Science of Russia by the State assignment under project No. FSSS-2020-0014.

Daria V. Agapova — Master Degree Student of the Physical Department, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation;
 junior researcher of the Theoretical Department, Samara branch of the Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Introduction

The quest for environmentally friendly energy sources continues and requires development of new solutions and apparatuses. In [1], a group from JIHT proposed vortex-based approach and described plasma-vortex reactor (PVR) – the promising technology capable of simultaneous generation of heat and hydrogen. Such machine exploits swirling flow to hold away hot gas from the walls of the system inside the active area. Experimental and theoretical research into PVR provided several insights about performance of device [2–4]. It can be anticipated that the efficiency depends not distinguishably on the parameters of electric discharge or the structure of the swirling flow but on their complex interaction [5; 6]. From the geometrical point of view there are several factors which can crucially affect the final outcome: the configuration of the working mixture input and output and the design of the electrode system. This statement was tested in [7], which confirmed using numerical simulation of the turbulent vortex flow for an experimental setup that formation of recirculation zone, which eventually determines the direction and intensity of the energy stream, strongly depend on the shape of the electrodes and their location relative to the swirler and the outlet.

The key feature of described system is that products from zone of active plasma-chemical reactions are carried away with the direct flow. However, that is not the only possible conception. In present paper, we propose results of numerical investigation into structure of the flow in alternative vortex reactor which utilizes reverse flow to withdraw thermal energy and desired products.

1. Mathematical modelling

1.1. Numerical model geometry and governing equations

The geometries of the principal part of the device (swirler, tube, and electrodes) is sketched in figure 1 for two cases. The common features both variants share are the following. The swirler has 4 tangential inlets (visible ones are colored in blue) of size in axial direction equal to 10 mm. The system of electrodes consists of coaxial cylindrical cathode (colored in light blue) of 85 mm length and 23 mm diameter and anode (yellow surface and orange base) – 112 mm and 12 mm respectively. There are 2 possible outlets. The primary one is the red annular area at the tube face near the swirler with inner diameter equal to 23 mm and outer one to 30 mm. The secondary optional one is the base of anode (orange). The heat source, which emulates heating in the discharge area, is located between electrodes. The length of the whole system is 267 mm and diameter of the tube 56 mm. Uncolored surfaces are the walls. The difference between two realizations lies in presence or absence of additional coaxial tube with inner diameter of 30 mm and wall thickness of 1 mm which contours are depicted in green color.

Standard unsteady Reynolds averaged Navier-Stokes equations along with SST $k - \omega$ turbulence model, which is well suited for similar system [5], were used to describe the water-vapor flow:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} [-\rho \overline{v_i' v_j'}], \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[\nu_i(\rho E + P)]}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\kappa + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} + \nu_i (\tau_{ij})_{eff} \right] + N(\vec{x}), \\ E &= h - \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}, \\ P &= \frac{\rho T}{M} \end{aligned}$$

where $(\tau_{ij})_{eff} = \mu_{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ is the deviatoric stress tensor, $[-\rho \overline{v_i' v_j'}]$ are the Reynolds stresses which must be modeled using chosen turbulence approach to close the set of equations, $\nu_i, v_i', \rho, T, P, E$

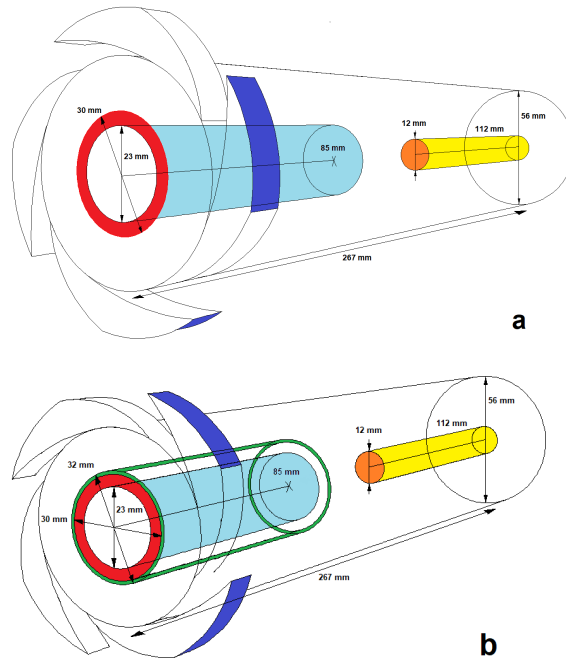


Fig. 1. The geometry of the principal part of the device used for numerical simulation: *a* – without bounding tube, *b* – with bounding tube

Рис. 1. Геометрия главной части устройства, использованная для численного моделирования: *a* – без ограничивающей трубки, *b* – с ограничивающей трубкой

and h are the mean and fluctuating velocity components, density, temperature, pressure, total energy, and enthalpy, respectively; N is the energy source which total power was set to 0 or 500 W, μ, μ_t, μ_{eff} are the molecular, turbulent, and effective viscosity coefficients, respectively; c_p is the molar specific heat capacity at constant pressure; κ is the thermal conductivity coefficient and Pr_t is the turbulent Prandtl number.

The no-slip velocity and fixed temperature boundary conditions were used for solid surfaces. Mass flow rate was set equal to 1 g/sec at every tangential inlet with gas temperature of 300 K. At the outlets, pressure equal to standard atmosphere was set. Temperature at the walls was constant equal to 300 K.

1.2. Numerical procedure

The whole system of equations for the non-stationary 3D turbulent swirling flow was solved using the ANSYS FLUENT 15.0 program package. A second-order upwind scheme was used for spatial discretization of density, momentum, energy and turbulent variables. The higher-order scheme does not provide any considerable change. The diffusion terms are central-differenced and second-order accurate. The pressure values at the faces were interpolated using the PRESTO! scheme developed for the flows of strong swirl behavior.

Transient terms were discretized using the fully implicit scheme of the second-order accuracy. Different pressure-velocity coupling schemes were tested and gave equal results. So, the SIMPLE scheme was chosen as the least resource consuming. The convergence was obtained when the residual reached 10^{-6} for the energy equation and 10^{-4} for the continuity equation, the momentum equation, and the equations for turbulent quantities.

The computational grid consisted of about $2.6 \cdot 10^6$ hexahedral cells. The skewness metric has an average value of 0.15, the minimum value of orthogonal quality metric – 0.10, the mean one – 0.9. The time step was fixed and set equal to $5 \cdot 10^{-5}$ sec in order to achieve convergence at every time step in recommended by ANSYS manufacturer iterations.

2. Results of numerical simulation

Axial velocity profiles of interest are shown in Fig. 2 and 3. Limited velocity ranges are used in order to make pictures more contrast and highlight areas of negative values. For both realizations, with (b) and without (a) additional bounding tube, there is pronounced counterflow which can suck out hot gas and reaction products from the interelectrode zone. However, absolute values of axial velocity in that area when

only primary outlet is open are relatively low which could lead to overheating and exceeding limits or the used model. In the case of open secondary outlet (Fig. 2), there is direct flow sufficient to keep temperatures in computationally allowed range (Fig. 3).

Presence of the bounding tube results in two changes of the flow characteristics. The first one, visible from the axial velocity profiles, is narrowing of the stagnation area between electrodes, which in the case of one outlet leads even to two almost splitted zones. The second one is intensification of reverse flow squeezed between the cathode and the bounding tube. When the secondary outlet is open, it leads to shift of heat flux distribution in favor of primary outlet: from $\sim 42\%$ of thermal energy being carried away through it to $\sim 67\%$. Moreover, there is significant decrease in maximum temperature (Fig. 4) which seems to be result of both aforementioned effects.

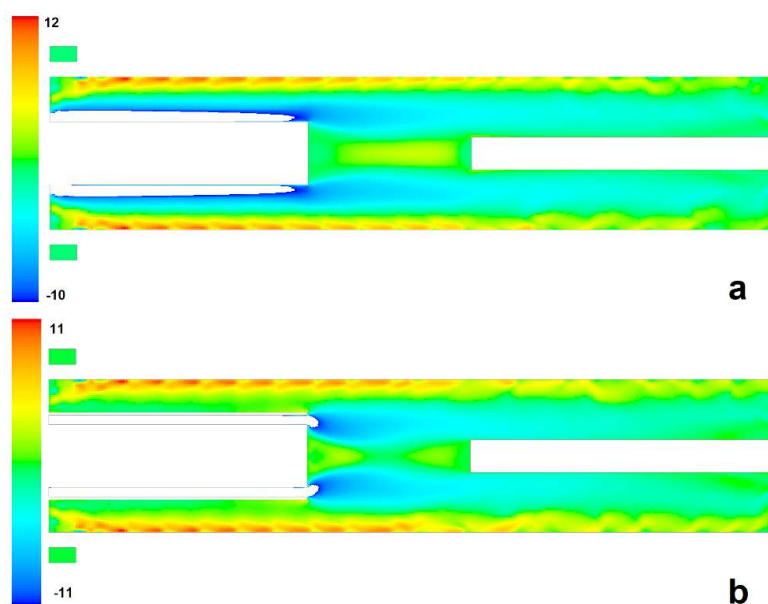


Fig. 2. The axial velocity distributions with (b) and without (a) the bounding tube. The secondary outlet is closed
 Рис. 2. Распределения осевых скоростей с (b) и без (a) ограничивающей трубы. Вторичный выход закрыт

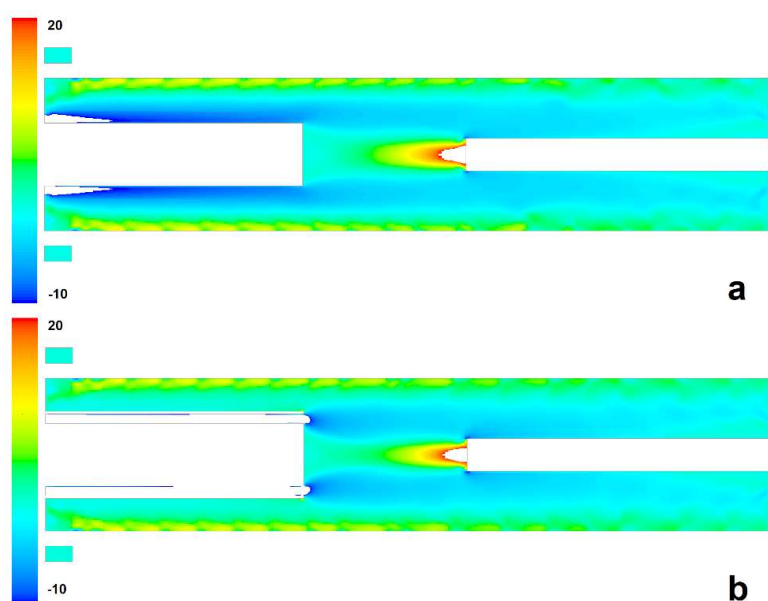


Fig. 3. The axial velocity distributions with (b) and without (a) the bounding tube. The secondary outlet is open
 Рис. 3. Распределения осевых скоростей с (b) и без (a) ограничивающей трубы. Дополнительный выход открыт

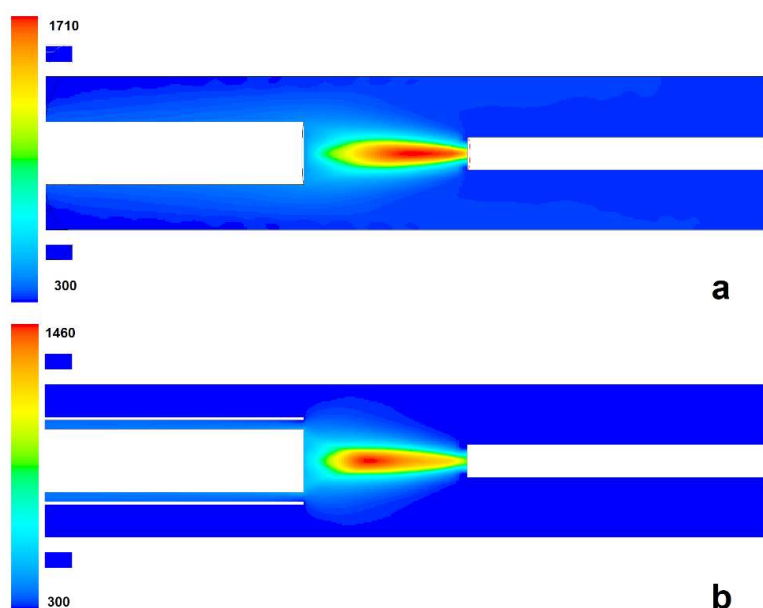


Fig. 4. The temperature distributions with (b) and without (a) the bounding tube. The secondary outlet is open
 Рис. 4. Распределения температуры с (b) и без (a) ограничивающей трубки. Дополнительный выход открыт

Conclusion

Results of modelling demonstrate viability of vortex reactor with reverse flow. Hot gas from interelectrode area is carried away in both examined cases: closed and open outlet at the base of cylindrical anode. Additional coaxial bounding tube which encircles the cathode significantly affects the flow characteristics. Its presence leads to narrower interelectrode stagnation zone, redistribution of energy fluxes in favor of primary outlet in the face of the whole cylindrical system and lower maximum temperature in the active zone between electrodes. Still, there is a room for optimization. Possible parameters to explore include length of both electrodes, radius and length of bounding tube. However, more experimental data are needed to select criteria and range of search.

References

- [1] Klimov A.I. [et al.] Hydrogen Plasma Flow Creation for MHD Power Generation. *42nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference in conjunction with the 18th International Conference on MHD Energy Conversion (ICMHD)*, 2011, p. 3285. DOI: <http://doi.org/10.2514/6.2011-3285>.
- [2] Bityurin V.A., Klimov A.I., Korshunov O.V., Chinnov V.F. Kinetic model of aluminum oxidation by water vapor in heterogeneous plasma: Gas-phase kinetics. *High Temperature*, 2014, vol. 52, no. 5, pp. 621–626. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0018151X14050034>. EDN: <https://elibrary.ru/ufjcmf>. (in English; Russian original).
- [3] Bityurin V.A., Klimov A.I., Korshunov O.V., Chinnov V.F. Kinetic model of Al oxidation by water vapor in heterogeneous plasma: Heterophase kinetics. *High Temperature*, 2015, vol. 53, no. 1, pp. 21–26. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0018151X14060042>. EDN: <https://elibrary.ru/ufcscn>. (in English; Russian original).
- [4] Kazanskiy P.N., Klimov A.I., Molevich N.E., Porfiriev D.P., Zavershinskii I.P. Numerical simulation of an argon swirling flow in the presence of a DC discharge. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 980, no. 1, p. 012010. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/980/1/012010>.
- [5] Gorbunova A., Molevich N., Porfiriev D., Sugak S., Zavershinskii I., Klimov A., Moralev I. Precessing vortex core in a swirling wake with heat release. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2016, vol. 59, pp. 100–108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2016.03.002>. EDN: <https://elibrary.ru/wvzodt>.
- [6] Zavershinskii I.P., Klimov A.I., Makaryan V.G., Molevich N.E., Moralev I.A., Porfir'ev D.P. Structure of RF capacitive discharge in swirl airflow at atmospheric pressure. *Technical Physics Letters*, 2011, vol. 37, no. 12, p. 1120–1123. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063785011120157>.
- [7] Belov N.K., Zavershinskii I.P., Klimov A.I., Molevich N.E., Porfiriev D.P., Tolkunov B.N. High effective heterogeneous plasma vortex reactor for production of heat energy and hydrogen. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 980, no. 1, p. 012040. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/980/1/012040>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-106-112

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 23.03.2022
после рецензирования: 26.04.2022
принятия статьи: 14.11.2022

Д.П. Порфирьев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2203-8133>

И.П. Завершинский

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ipzav63@mail.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2391-1881>

Д.В. Агапова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: agapovadaria2019@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3957-7339>

СТРУКТУРА ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В ПРОТИВОТОЧНОМ ВИХРЕВОМ РЕАКТОРЕ²

АННОТАЦИЯ

Численно исследованы две перспективные конструкции противоточного вихревого реактора. В таком аппарате используется обратный поток для отвода тепловой энергии и продуктов из межэлектродной области. Сложная газодинамическая структура пароводяного потока была исследована с помощью турбулентного трехмерного моделирования с использованием осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса в сочетании с моделью турбулентности SST $k - \omega$ — методики, апробированной в предыдущих работах. Представленные профили скоростей и расчёты тепловых потоков демонстрируют жизнеспособность обоих подходов.

Ключевые слова: водород; закрученные потоки; плазменно-вихревой генератор; вычислительная гидродинамика; чистая энергетика.

Цитирование. Porfiriev D.P, Zavershinskii I.P, Agapova D.V. The structure of the swirling flow in the counterflow vortex reactor // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 106–112. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-106-112>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Порфирьев Д.П., Агапова Д.В., Завершинский И.П., 2022

Денис Петрович Порфирьев — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Научный сотрудник, теоретический сектор, Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Игорь Петрович Завершинский — доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

²Исследование выполнено при поддержке Минобрнауки России по Государственному заданию по проекту ФССС-2020-0014.

Дарья Вадимовна Агапова — магистрант физического факультета, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Младший научный сотрудник, теоретический сектор, Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Литература

- [1] Klimov A.I. [et al.]. Hydrogen Plasma Flow Creation for MHD Power Generation. *42nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference in conjunction with the 18th International Conference on MHD Energy Conversion (ICMHD)*, 2011, p. 3285. DOI: <http://doi.org/10.2514/6.2011-3285>.
- [2] Битюрин В.А., Климов А.И., Коршунов О.В., Чиннов В.Ф. Кинетическая модель окисления AL парами воды в гетерогенной плазме. Газофазная кинетика. *Теплофизика высоких температур*, 2014, Том 52, №. 5, С. 657. DOI: <http://doi.org/10.7868/S0040364414050032>. EDN: <https://elibrary.ru/skiawb>.
- [3] Битюрин В.А., Климов А.И., Коршунов О.В., Чиннов В.Ф. Кинетическая модель окисления AL парами воды в гетерогенной плазме. Гетерофазная кинетика. *Теплофизика высоких температур*, 2015, Том 53, №. 1. С. 23. DOI: <http://doi.org/10.7868/S0040364414060040>. EDN: <https://elibrary.ru/tfvonr>.
- [4] Kazanskiy P.N., Klimov A.I., Molevich N.E., Porfiriev D.P., Zavershinskii I.P. Numerical simulation of an argon swirling flow in the presence of a DC discharge. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 980, no. 1, p. 012010. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/980/1/012010>.
- [5] Gorbunova A., Molevich N., Porfiriev D., Sugak S., Zavershinskii I., Klimov A., Moralev I. Precessing vortex core in a swirling wake with heat release. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2016, vol. 59, pp. 100–108. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2016.03.002>. EDN: <https://elibrary.ru/wvzodt>.
- [6] Zavershinskii I.P., Klimov A.I., Makaryan V.G., Molevich N.E., Moralev I.A., Porfir'ev D.P. Structure of RF capacitive discharge in swirl airflow at atmospheric pressure. *Technical Physics Letters*, 2011, Vol. 37, no. 12, p. 1120–1123. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1063785011120157>.
- [7] Belov N.K., Zavershinskii I.P., Klimov A.I., Molevich N.E., Porfiriev D.P., Tolkunov B.N. High effective heterogeneous plasma vortex reactor for production of heat energy and hydrogen. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 980, no. 1, p. 012040. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/980/1/012040>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-113-119

Submitted: 06.09.2022

Revised: 12.10.2022

Accepted: 14.11.2022

D.S. Riashchikov

Lebedev Physical Institute, Samara, Russian Federation

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: ryashchikovd@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7143-2968>

I.A. Pomelnikov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: vanidzepomelnikov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-5784>

N.E. Molevich

Lebedev Physical Institute, Samara, Russian Federation

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: nonna.molevich@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5950-5394>

GROWTH TIME OF ACOUSTIC PERTURBATIONS IN ISENTROPICALLY UNSTABLE HEAT-RELEASING MEDIUM¹

ABSTRACT

Isentropic instability is a type of thermal instability that leads to the growth of acoustic waves. As a result of wave growth in such media, autowave structures are formed, the parameters of which depend only on the properties of the medium and can be predicted both analytically and numerically. This study aims to answer the question of how quickly these structures can form in an isentropically unstable medium with parameters similar to Orion Bar. It is shown that the growth time depends on the characteristic size of the initial perturbation. The fastest growing structures take 3–6 thousand years to reach half their maximum amplitude. Further growth to the maximum value takes 15–20 thousand years.

Key words: instability; thermal instability; nonlinear waves; shock waves; autowaves; interstellar gas; photodissociation region; Orion Bar.

Citation. Riashchikov D.S., Pomelnikov I.A., Molevich N.E. Growth time of acoustic perturbations in isentropically unstable heat-releasing medium. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 113–119. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-113-119>.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Riashchikov D.S., Pomelnikov I.A., Molevich N.E., 2022

Dmitrii S. Riashchikov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, research associate of the Theoretical Department of Lebedev Physical Institute, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation; senior lecturer of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Ivan A. Pomelnikov — student of the Institute of IT and Cybernetics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Nonna E. Molevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, chief researcher of the Theoretical Department of Lebedev Physical Institute, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation;

¹The work was supported in part by the Ministry of Education and Science (projects FSSS-2020-0014, 0023-2019-0003).

professor of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Introduction

Isentropic instability is a type of thermal instability that leads to the amplification of acoustic waves. It may occur in a medium with heating $\Gamma(\rho, T)$ and cooling $L(\rho, T)$ processes, which powers depend on the density and temperature. In a state of equilibrium ρ_0, T_0 they compensate each other, so $\Gamma(\rho_0, T_0) = L(\rho_0, T_0)$. Acoustic perturbations violate this equilibrium, and heat release may further amplify (instability) or suppress them.

Conditions for isentropic instability may exist in photodissociation regions [1–3]. The instability results in a periodic wave structure, which in the later stages of evolution is a sequence of shock waves with autowave properties [4–6]. Similar structures are found, for example, near RCW120 [7; 8] or Orion nebulae [9; 10].

The fundamentals of the theory of thermal instabilities were thoroughly developed by Field [11]. His and many later studies have focused on the dispersion properties of gasdynamic perturbations in heat-releasing media. This allows us to judge the initial stage of perturbation evolution. Here, it is worth noting the work [12] in which a linear equation is obtained and analytically solved, which allows us to study the behavior of acoustic waves at this stage depending on the parameters of the initial perturbation.

However, linear approach works only for small amplitude waves. A study of the subsequent evolution of the acoustic waves at the nonlinear stage using the nonlinear equation [1; 5] for small amplitude waves and numerical simulations revealed the formation of autowave structures which parameters do not depend on the parameters of the initial perturbation. The parameters of the autowave structures were afterwards analytically evaluated in [6] without any restrictions on the amplitude.

The aforementioned studies allow us to answer the question of what structures can be observed under the known parameters of the medium and the heating and cooling functions, but do not answer the question of how quickly these structures can emerge. The importance of this issue stems from the fact that acoustic waves propagate during amplification, and the size of the medium in which their amplification can occur may be limited. Thus, the acoustic waves may not have time to reach the predicted amplitudes.

In this work, we numerically estimate the growth time of autowave structures that can emerge in photodissociation region Orion Bar using the model of heating and cooling functions from [3].

1. Time of the formation of autowave pulse

Isentropic instability, as mentioned above, leads to the formation of a periodic structure. Ahead of this structure the so-called autowave pulse propagates, which is the final stage of evolution of any small acoustic perturbation in an isentropically unstable medium. The parameters of this pulse depend only on form of heating and cooling functions of the medium from temperature and density. In this section, we estimate the time of formation of the autowave pulse in Orion Bar.

The dynamics of acoustic perturbations in such a medium can be described by the following system of equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P, \\ C_V \frac{dT}{dt} - \frac{k_B T}{m\rho} \frac{d\rho}{dt} = -W(\rho, T), \\ P = \frac{k_B}{m} \rho T, \end{cases} \quad (1.1)$$

where ρ, T, P are density, temperature, and pressure, $\mathbf{v}$ is speed vector, C_V is heat capacity under constant volume, k_B is Boltzmann constant; d/dt is substantial derivative, $W(\rho, T) = L(\rho, T) - \Gamma(\rho, T)$ is generalized heat-loss function.

In the current work, we use the model of heat-loss function $W(\rho, T)$ proposed by [3] for photodissociation regions of the interstellar medium. The following parameters of heat-loss function were used: FUV field $G_0 = 4 \times 10^4$, cooling line opacity $\tau_C = 0.5$, the ratio of visual extinction to reddening $R_V = 5.5$, C abundance per H nucleus in very small grains $b_C = 3 \times 10^{-5}$ [3], the abundances of carbon $\xi_C = 1.2 \times 10^{-4}$ and oxygen $\xi_O = 2.56 \times 10^{-4}$ [13].

Studies show that the maximum growth rate of acoustic waves is expected at temperatures about 1000 K [3] which also lies in the limit of observable temperatures in Orion Bar. So, we use this temperature $T_0 = 1000\text{K}$ as an equilibrium one. Then, using the equilibrium condition $W(\rho_0, T_0) \equiv W(n_0, T_0) = 0$, one can find the corresponding equilibrium number density in Orion Bar as $n_0 = 2.26 \times 10^5 \text{cm}^{-3}$.

Since there is no analytical solution capable of describing the evolution of an arbitrary perturbation in a medium with strong dispersion and nonlinearity, we will investigate the growth time numerically using the Athena MHD code [14] for astrophysical simulations.

The initial condition for numerical simulations is Gaussian perturbation in form

$$\rho = \rho_0 \left(1 + a \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \right), \quad p = p_0 \left(1 + \gamma a \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\} \right), \quad (1.2)$$

where a is the dimensionless amplitude of density perturbation, σ is the characteristic size of perturbation, γ is the adiabatic index which equals 5/3 in Orion Bar. In our simulations, we used initial amplitude $a = 0.01$.

Simulations show the splitting of initial perturbation into two waves propagating in the opposite directions. Then, from any single wave, the periodic wave structure with period determined by heat-loss function appear. Each wave in this structure grows forming several autowave pulses in front of the wave sequence and a series of smaller waves at an earlier stage of evolution behind them (Figure 1.1).

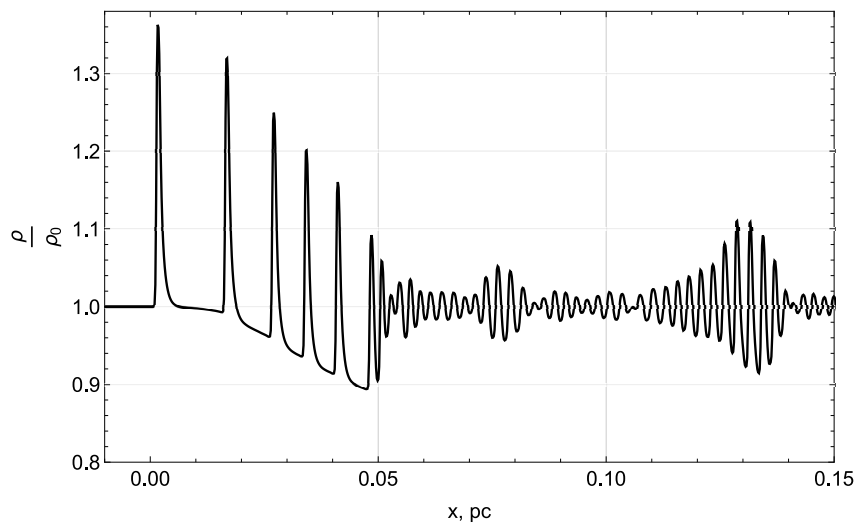


Fig. 1.1. Numerical simulation of autowave pulse formation in isentropically unstable medium
 Рис. 1.1. Численное моделирование формирования автоволнового импульса в изоэнтропически неустойчивой среде

Using numerical simulation, we determine the amplitude of the autowave pulse as a function of time. Since the amplitude of the autowave pulses in front of wave sequence is greater than the amplitude of waves behind them, we take as the pulse amplitude the maximum value of the amplitude of the waves in the sequence.

When conducting numerical simulation, the important issue is to investigate the influence of grid step on the time of the formation of autowave pulses (Figure 1.2). The need for this is due to the fact that the numerical scheme introduces diffusion, much larger than that observed in real media. Decreasing the grid step reduces this effect, but it is impossible to reduce the numerical diffusion to an order of magnitude observed in real media due to limited computational capabilities.

One can see from Figure 1.2 that the finer the grid, the faster the waves grow. Let us note that three plots with a coarser grid have a long interval with almost unchanged amplitude. We suppose this is due to the dispersion properties of the medium and the spectrum of the initial perturbation.

Heating and cooling processes acts at characteristic time τ_Q and its corresponding characteristic length L_Q [5]:

$$\tau_Q = 2\pi \frac{C_V}{W_{T0}} \left(\frac{\gamma}{1 - (\rho_0 W_{\rho_0}) / (T_0 W_{T0})} \right), \quad L_Q = \sqrt{k_B T_0 / m} \tau_Q, \quad (1.3)$$

where $W_{T0} = (\partial W / \partial T)_{T=T_0, \rho=\rho_0}$, $W_{\rho_0} = (\partial W / \partial \rho)_{T=T_0, \rho=\rho_0}$. Estimations of these parameters for the Orion Bar give $\tau_Q = 875$ years and $L_Q = 2.6 \times 10^{-3}$ pc.

In a heat-releasing medium, the high-frequency harmonics of the initial perturbation ($\nu \tau_Q \gg 1$, where ν is the frequency of the wave) have the largest increment, while the low-frequency harmonics ($\nu \tau_Q \ll 1$) have a relatively small one. Scheme diffusion significantly slows down growth of high-frequency harmonics. And if an amplitude of high-frequency harmonics in the initial perturbation is small, then for their growth it is required sufficiently long time, and their contribution to amplitude of structure as a whole will be imperceptible for this time. This effect is clearly seen in Figure 1.3 where the amplitude of perturbations with a large initial

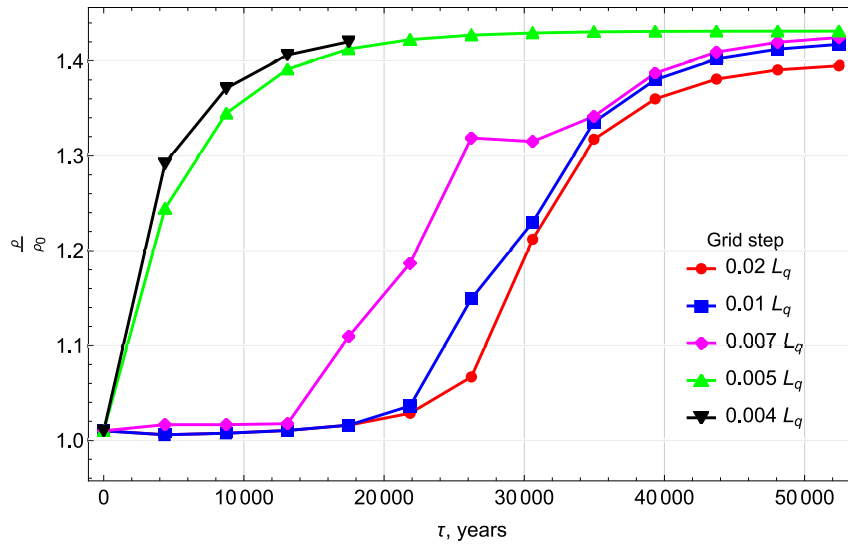


Fig. 1.2. Influence of the grid step on the time of the autowave pulse formation. Characteristic size of initial perturbation $\sigma = 1.0L_Q$

Рис. 1.2. Влияние шага по координате в численном моделировании на время формирования автоволнового импульса. Характерный размер начального возмущения $\sigma = 1.0L_Q$

characteristic size begins to increase later than that of perturbations with a smaller characteristic size, with the same numerical grid parameters for all perturbations.

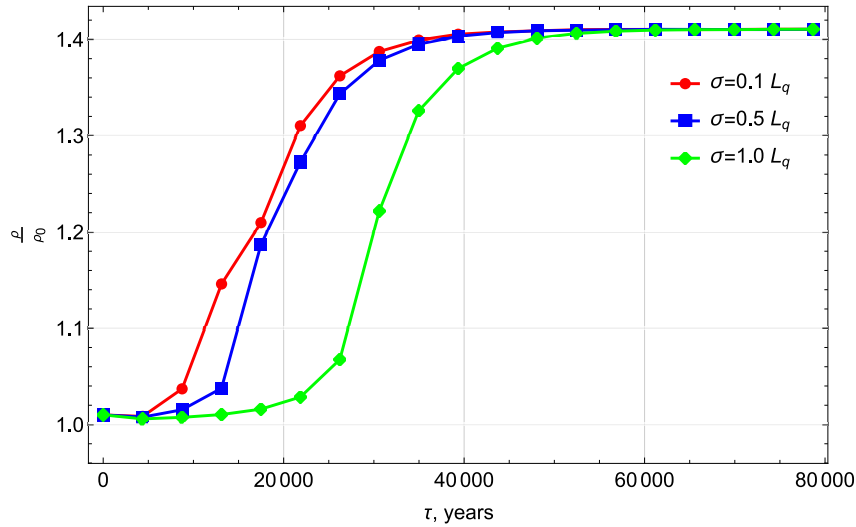


Fig. 1.3. Influence of the characteristic size of initial perturbation on the time of the autowave formation. Grid step $\Delta x = 0.015L_Q$

Рис. 1.3. Влияние характерного размера начального возмущения на время формирования автоволнового импульса. Шаг сетки по координате $\Delta x = 0.015L_Q$

Thus, we believe that as the grid size is further reduced, the growth rate of acoustic waves until the amplitude reaches half of the maximum value will tend to that predicted by Field's theory for inviscid heat-releasing medium [11]. Characteristic time of isentropic instability t_{inst} (the time at which the amplitude of the waves increases by a factor of e) of the high-frequency acoustic waves is determined by expression

$$t_{inst} = \frac{2T_0\gamma C_V}{T_0 W_{T0} - \rho_0 W_{\rho 0} - T_0 \gamma}. \quad (1.4)$$

The estimations of instability time for the chosen parameters of the mediums give $t_{inst} = 1065$ years. Thus, the growth from the half of the amplitude of initial perturbation (since the waves propagate in two opposite directions) to a half of maximum amplitude may take about 4000 years, which agrees well with the results of numerical simulations on the finest grid.

However, the subsequent growth of the waves from half to maximum amplitude takes about 15–20 thousand years with little dependence on grid size and the characteristic size of initial perturbation.

Conclusion

Growth time of acoustic perturbations for parameters of isentropically unstable photodissociation region Orion Bar is estimated. The growth of acoustic waves can be divided into 3 stages. At the first stage, the high-frequency components of the initial perturbation grow without a significant change in the amplitude of the wave packet as a whole. The duration of this stage depends substantially on the characteristic size of the initial perturbation and can occupy fractions of the characteristic instability time t_{inst} for high-frequency perturbations, and take tens of t_{inst} for low-frequency ones, which corresponds to several tens of thousands of years for Orion Bar. In the second stage, there is an explosive growth of the wave amplitude up to half of the maximum value. This process takes several t_{inst} or about 4000 years for Orion Bar for initial perturbation with an amplitude of 0.01 of the equilibrium concentration. In the third stage, there is a smooth increase in the amplitude of the wave up to the maximum value, which takes about 15–20 thousand years.

This work was supported in part by the Ministry of Education and Science (projects FSSS-2020-0014, 0023-2019-0003).

References

- [1] Molevich N.E., Zavershinsky D.I., Galimov R.N., Makaryan V.G. Travelling self-sustained structures in interstellar clouds with the isentropic instability. *Astrophysics and Space Science*, 2011, vol. 334, no. 1, pp. 35–44. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10509-011-0683-0>.
- [2] Krasnobaev K.V., Tagirova R.R., Arafailov S.I., Kotova G.Y. Evolution and saturation of Autowaves in photodissociation regions. *Astronomy Letters*, 2016, vol. 42, no. 7, pp. 460–473. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1063773716070057>.
- [3] Krasnobaev K.V., Tagirova R.R. Isentropic thermal instability in atomic surface layers of photodissociation regions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 469, issue 2, pp. 1403–1413. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stx884>.
- [4] Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S. Formation of quasi-periodic slow magnetoacoustic wave trains by the heating/cooling misbalance. *Physics of Plasmas*, 2019, vol. 26, issue 8, p. 82113. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5115224>.
- [5] Zavershinskii D.I., Molevich N.E., Riashchikov D.S., Belov S.A. Nonlinear magnetoacoustic waves in plasma with isentropic thermal instability. *Physical Review E*, 2020, vol. 101, issue 4, p. 43204. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.043204>.
- [6] Molevich N., Riashchikov D. Shock wave structures in an isentropically unstable heat-releasing gas. *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, issue 7, p. 076110. DOI: <http://doi.org/10.1063/5.0053394>.
- [7] Zavagno A., Pomares G., Deharveng L., Hosokawa T., Russeil D., Caplan J. Triggered star formation on the borders of the Galactic H II region RCW 120. *Astronomy & Astrophysics*, 2007, vol. 472, issue 3, pp. 835–846. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20077474>.
- [8] Deharveng L., Zavagno A., Schuller F., Caplan J., Pomares G., C. De Breuck. Star formation around RCW 120, the perfect bubble. *Astronomy & Astrophysics*, 2009, vol. 496, issue 1, pp. 177–190. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200811337>.
- [9] Goicoechea J.R. [et al.] Compression and ablation of the photo-irradiated molecular cloud the Orion Bar. *Nature*, 2016, vol. 537, issue 7619, pp. 207–209. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature18957>.
- [10] Berne O., Marcelino N., Cernicharo J. Waves on the surface of the Orion molecular cloud. *Nature*, 2010, vol. 466, issue 7309, pp. 947–949. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature09289>.
- [11] Field G.B. Thermal Instability. *The Astrophysical Journal*, 1965, Vol. 142, pp. 531–567.
- [12] Zavershinskii D., Kolotkov D., Riashchikov D., Molevich N. Mixed Properties of Slow Magnetoacoustic and Entropy Waves in a Plasma with Heating/Cooling Misbalance. *Solar Physics*, 2021, vol. 296, issue 6, p. 96. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11207-021-01841-1>.
- [13] Wakelam V., Herbst E. Polycyclic Aromatic Hydrocarbons in Dense Cloud Chemistry. *The Astrophysical Journal*, 2008, vol. 680, issue 1, pp. 371–383. DOI: <http://dx.doi.org/10.1086/587734>.
- [14] Sone J.M., Gardiner T.A., Teben P., Hawley J.F., Simon J.B. Athena: a new code for astrophysical MHD. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2008, vol. 178, issue 1, p. 137. DOI: <http://dx.doi.org/10.1086/588755>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2028-28-1-2-113-119

УДК 534.222.2; 524.5

Дата: поступления статьи: 06.09.2022
после рецензирования: 12.10.2022
принятия статьи: 14.11.2022

Д.С. Рящиков

СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация;
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ryashchikovd@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7143-2968>

И.А., Помельников

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: vanidzepomelnikov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-5784>

Н.Е. Молевич

СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация;
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: nonna.molevich@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5950-5394>

ВРЕМЯ РОСТА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВОЙ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ²

АННОТАЦИЯ

Изоэнтропическая неустойчивость является одним из типов тепловой неустойчивости, которая приводит к росту акустических волн. В результате их роста в таких средах образуются автоволновые структуры, параметры которых зависят только от свойств среды и могут быть предсказаны как аналитически, так и численно. Целью данного исследования является определения времени формирования автоволновых структур в изоэнтропической неустойчивой среде с параметрами, характерными для области фотодиссоциации Орион Бар. Показано, что время роста зависит от характерного размера начального возмущения. Наиболее быстро растущие структуры достигают половины от максимальной амплитуды за 3–6 тысяч лет. Дальнейший рост до максимального значения занимает 15–20 тысяч лет.

Ключевые слова: неустойчивость; тепловая неустойчивость; нелинейные волны; ударные волны; автоволны; межзвездный газ; области фотодиссоциации; Орион Бар.

Цитирование. Riashchikov D.S., Pomelnikov I.A., Molevich N.E. Growth time of acoustic perturbations in isentropically unstable heat-releasing medium // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 113–119. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-113-119>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Рящиков Д.С., Помельников И.А., Молевич Н.Е., 2022

Дмитрий Сергеевич Рящиков — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, теоретический сектор, Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Старший преподаватель кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Иван Александрович Помельников — студент института информатики и кибернетики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

²Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания вузам и научным организациям (проекты FSSS-2020-0014, 0023-2019-0003).

Нонна Евгеньевна Молевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, и.о. зав. теоретическим сектором, Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Профессор кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Molevich N.E., Zavershinsky D.I., Galimov R.N., Makaryan V.G. Travelling self-sustained structures in interstellar clouds with the isentropic instability // *Astrophysics and Space Science*, 2011, Vol. 334, issue 1, pp. 35–44. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10509-011-0683-0>.
- [2] Krasnobaev K.V., Tagirova R.R., Arafailov S.I., Kotova G.Y. Evolution and saturation of Autowaves in photodissociation regions // *Astronomy Letters*, 2016, vol. 42, issue 7, pp. 460–473. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1063773716070057>.
- [3] Krasnobaev K.V., Tagirova R.R. Isentropic thermal instability in atomic surface layers of photodissociation regions // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 469, issue 2, pp. 1403–1413. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stx884>.
- [4] Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S. Formation of quasi-periodic slow magnetoacoustic wave trains by the heating/cooling misbalance // *Physics of Plasmas*, 2019, vol. 26, no. 8, p. 82113. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5115224>.
- [5] Zavershinskii D.I., Molevich N.E., Riashchikov D.S., Belov S.A. Nonlinear magnetoacoustic waves in plasma with isentropic thermal instability // *Physical Review E*, 2020, vol. 101, issue 4, p. 43204. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.043204>.
- [6] Molevich N., Riashchikov D. Shock wave structures in an isentropically unstable heat-releasing gas // *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, issue 7, p. 076110. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0053394>.
- [7] Zavagno A., Pomares G., Deharveng L., Hosokawa T., Russeil D., Caplan J. Triggered star formation on the borders of the Galactic H ii region RCW 120 // *Astronomy & Astrophysics*, 2007, vol. 472, issue 3, pp. 835–846. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20077474>.
- [8] Deharveng L., Zavagno A., Schuller F., Caplan J., Pomares G., C. De Breuck. Star formation around RCW 120, the perfect bubble // *Astronomy & Astrophysics*, 2009, vol. 496, issue 1, pp. 177–190. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200811337>.
- [9] Goicoechea J.R. [et al.] Compression and ablation of the photo-irradiated molecular cloud the Orion Bar // *Nature*, 2016, vol. 537, issue 7619, pp. 207–209. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature18957>.
- [10] Berne O., Marcelino N., Cernicharo J. Waves on the surface of the Orion molecular cloud // *Nature*, 2010, vol. 466, no. 7309, pp. 947–949. DOI: <http://doi.org/10.1038/nature09289>.
- [11] Field G.B. Thermal Instability // *The Astrophysical Journal*, 1965, vol. 142, pp. 531–567.
- [12] Zavershinskii D., Kolotkov D., Riashchikov D., Molevich N. Mixed Properties of Slow Magnetoacoustic and Entropy Waves in a Plasma with Heating/Cooling Misbalance // *Solar Physics*, 2021, Vol. 296, no. 6, p. 96. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11207-021-01841-1>.
- [13] Wakelam V., Herbst E. Polycyclic Aromatic Hydrocarbons in Dense Cloud Chemistry // *The Astrophysical Journal*, 2008, vol. 680, no. 1, pp. 371–383. DOI: <http://dx.doi.org/10.1086/587734>.
- [14] Sone J.M., Gardiner T.A., Teben P., Hawley J.F., Simon J.B. Athena: a new code for astrophysical MHD // *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2008, vol. 178, no. 1, p. 137. DOI: <https://doi.org/10.1086/588755>.

ФИЗИКА PHYSICS



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-120-127

Submitted: 30.08.2022

Revised: 05.10.2022

Accepted: 14.11.2022

D. V. Agapova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
 Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation

E-mail: agapovadaria2019@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3957-7339>

S. A. Belov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
 Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation

E-mail: mr_beloff@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3505-9542>

N. E. Molevich

Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
 Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation

E-mail: nonna.molevich@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5950-5394>

D. I. Zavershinskii

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
 Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation

E-mail: d.zavershinskii@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3746-7064>

FAST AND SLOW MHD WAVES IN THERMALLY ACTIVE PLASMA SLAB¹

ABSTRACT

We considered the combined influence of the thermal activity and the magnetic structuring on properties of the compressional magnetohydrodynamic (MHD) waves. To model MHD waves we use the single magnetic slab geometry. To derive dispersion equations for the symmetric (sausage) and anti-symmetric (kink) waves, we apply the assumption of strong magnetic structuring. In our calculations we use parameters corresponding to the highly magnetized coronal loop. The thermal activity leads to the changes in the phase velocity and in the wave increment/decrement. We show that the spatial scales where the dispersion effects caused by the thermal activity is most pronounced are longer than the geometry dispersion spatial scale. The thermal activity and wave-guide geometry have comparable effect on the slow-waves phase velocity dispersion. However, the main source of the phase velocity dispersion for the fast MHD waves remains the wave-guide geometry. We also show that the damping of slow MHD waves caused by the thermal activity is greater than the damping of fast MHD waves.

Key words: thermal activity; strong magnetic structuring; coronal loop; magnetic slab; MHD waves; symmetric and anti-symmetric waves; dispersion; wave-guide geometry.

Citation. Agapova D.V., Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I. Fast and slow MHD waves in thermally active plasma slab *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 120–127. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-120-127>.

¹The study was supported in part by the Ministry of Education and Science of Russia under State assignment to educational and research institutions under Project No. FSSS-2020-0014 and No. 0023-2019-0003, and by the Russian Foundation for Basic Research, Project No. 20-32-90018.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Agapova D.V., Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I., 2022

Daria V. Agapova — Master degree student of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Engineer of the Theoretical Department, Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Sergey A. Belov — postgraduate student of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Research associate of the Theoretical Department, Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Nonna E. Molevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, chief researcher of the Theoretical Department, Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Professor of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Dmitrii I. Zavershinskii — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Research associate of the Theoretical Department, Samara branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 221, Novo-Sadovaya Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Introduction

The solar atmosphere is the rarified and highly-magnetized plasma. Due to this fact, there are numerous magnetic structures, which exist in the solar corona including coronal loops, prominences, polar plumes and etc. In fact, these magnetic structures play the role of the wave-guides for the compressional and compressional MHD waves, which routinely observed in the solar corona [1; 2]. The geometry of these wave-guides is prescribed by the balance between the gas-dynamic and magnetic forces and lead to the dispersion of the compressional modes.

However, the magnetic structures owe their existence not only to mechanical but also to the thermal balance. The coronal cooling/heating rates are temperature and density dependent. As a consequence, some compressional perturbation can disturb balance between these processes, and can be amplified or damped by the additional impact from the non-adiabatic processes. Thus, there are some feedback between waves and plasma. In other word, the coronal plasma is the thermally active one [3; 4]. Furthermore, the non-adiabatic processes affect propagation speed of the compressional perturbation [5].

Further, we analyze the combined influence of the thermal activity and the magnetic structuring on properties of the compressional magnetohydrodynamic (MHD) waves propagating in the highly magnetized plasma. Most similar studies use strong limitations on the wavelength and the magnitude of the external magnetic field [6; 7]. In our study, we will not use such strong assumption and apply the most general approach.

The paper is organized as follows. In the Section 2, we introduce the initial equations and obtained dispersion relation. In the Section 3, we show calculated dispersion curves. In the Section 4, we discuss the obtained results.

1. Model and dispersion relation

We analyze the waves in the fully ionized optically thin coronal plasma. We neglect the gravitational forces and the effects of viscosity, thermal conductivity and finite magnetic conductivity. The difference of basic equations from equations describing the ideal plasma is in the energy transport equation:

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \frac{D}{Dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = -\rho W(\rho, T) = L(\rho, T) - \Gamma(\rho, T), \quad (1.1)$$

Here, ρ , T , and P are the plasma density, temperature and pressure, respectively. The parameter γ , is for the adiabatic index. In the equation (1) the function $W(\rho, T)$ describes the net heat-loss function which is the difference between radiative cooling $L(\rho, T)$ and some heating $\Gamma(\rho, T)$ processes. These rates balance each other in the case of the stationary conditions $L(\rho_0, T_0) = \Gamma(\rho_0, T_0)$, or $W(\rho_0, T_0) = 0$.

To analyze the properties of the MHD waves we apply the standard methods of the perturbation theory. In other words, we linearize basic equations using substitution of the following form: $a = a_0 + a_1$, $a_1/a_0 \sim \varepsilon \ll 1$, where a is some plasma parameter. We model the coronal wave-guide by the magnetic slab with the magnetic field directed along z -axis as follows:

$$B_0(x) = \begin{cases} B_i, & |x| \leq x_0, \\ B_e, & |x| > x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Here, B_0 and x_0 are the stationary value of magnetic field strength and the slab half-width, respectively. Searching the solution of the linearized equation in the form $a_1 = \tilde{a}_1(x) e^{i(\omega t + k_z z)}$, one may obtain dispersion relation for the set (fast/slow and body/surface) of the sausage/kink magnetoacoustic waves in the magnetic slab as follows:

$$(k_z^2 c_{Ai}^2 - \omega^2) \frac{k_{x_e}}{k_{x_i}} = -\frac{\rho_{0e}}{\rho_{0i}} (k_z^2 c_{Ae}^2 - \omega^2) \begin{pmatrix} \coth(k_{x_i} x_0) \\ \tanh(k_{x_i} x_0) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

The complete derivations steps can be found in our previous study (see [8]). We use the and hyperbolic functions for the kink and sausage modes, respectively. We introduce the following characteristic temporal scale to describe the thermal activity influence:

$$\tau_V = C_V / W_{0T}, \quad \tau_P = C_P T_0 / (W_{0T} T_0 - W_{0\rho} \rho_0), \quad (1.4)$$

where C_V and C_P are the specific heat capacities at constant volume and constant pressure, respectively. We also use the derivatives $W_{0T} = \partial Q / \partial T|_{\rho_0, T_0}$, $W_{0\rho} = \partial Q / \partial \rho|_{\rho_0, T_0}$

Some characteristic speeds of fast and slow MHD waves are shown below:

$$c_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}}, \quad c_S = \sqrt{\gamma \frac{k_B T_0}{m}}, \quad c_{SQ} = \sqrt{\frac{\tau_V}{\tau_P} \gamma \frac{k_B T_0}{m}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{c_S^2 c_A^2}{(c_A^2 + c_S^2)}}, \quad c_{TQ} = \sqrt{\frac{c_A^2 c_{SQ}^2}{(c_A^2 + c_{SQ}^2)}}. \quad (1.5)$$

Here, speed c_A is for the Alfvén speed. The speed c_S is the usual speed of sound for ideal plasma. The so-called tube speed c_T is a result of the pure wave-guide dispersion effect. The speed c_{SQ} is long-wavelength limit value of the slow-wave or acoustic perturbation in the case the thermally active uniform plasma. And the last but not the least is the speed c_{TQ} , which is a result of the both wave-guide and thermal activity dispersion effects.

In the dispersion relation (3) we also use following notations:

$$k_{x_{i,e}}^2 = \frac{(A_{Q_{i,e}}^2 m_{Q_{i,e}}^2 + i\omega \tau_{V_{i,e}} A_{i,e}^2 m_{i,e}^2)}{(A_{Q_{i,e}}^2 + i\omega \tau_{V_{i,e}} A_{i,e}^2)},$$

$$m^2 = \frac{(k_z^2 c_A^2 - \omega^2)(k_z^2 c_S^2 - \omega^2)}{(c_A^2 + c_S^2)(k_z^2 c_T^2 - \omega^2)}, \quad m_Q^2 = \frac{(k_z^2 c_A^2 - \omega^2)(k_z^2 c_{SQ}^2 - \omega^2)}{(c_A^2 + c_{SQ}^2)(k_z^2 c_{TQ}^2 - \omega^2)},$$

$$A^2 = (c_A^2 + c_S^2)(k_z^2 c_T^2 - \omega^2), \quad A_Q^2 = (c_A^2 + c_{SQ}^2)(k_z^2 c_{TQ}^2 - \omega^2).$$

Further, we will use dispersion relation (3) to calculate the dependencies of phase velocities and increment/decrement of MA waves on the wavenumbers in the solar atmosphere conditions.

2. Results

Let us apply the obtained dispersion relation to the coronal conditions. In the current study we will focus on properties of waves in the highly magnetized coronal loop. The magnetic slab parameters corresponding to the mentioned loop are shown in Table.

The parameterization of the radiative cooling function $L(\rho, T) = \chi \rho T^\alpha$, has been calculated using the CHIANTI Version 10.0 database [9]. The heating rate has been modeled as $\Gamma(\rho, T) = h \rho^{0.5} T^{-3.5}$. Such heating scenario has been seismologically proposed by [10] using the observations of the damped slow magnetoacoustic waves in the long-lived coronal plasma structures. The dispersion curves for body fast/slow sausage/kink magnetoacoustic waves are shown in Figures 1, 2.

Table

Slab parameters used for calculations

Таблица

Параметры слоя, используемые для расчетов	
Parameter	Value
Magnetic field strength inside the slab (B_{0i})	100 G
Temperature (T_{0i})	6 MK
Number density inside the slab (n_{0i})	10^{11} cm^{-3}
Density contrast (n_{0i}/n_{0e})	10
Slab width ($2x_0$)	2 Mm

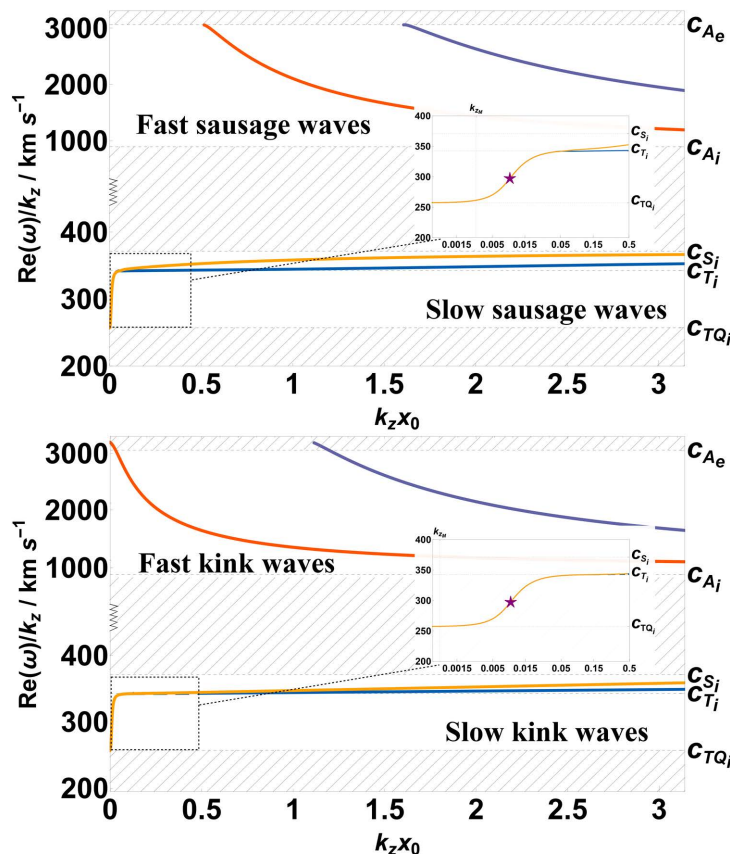


Fig. 2.1. Phase velocities of sausage and kink waves in the highly magnetized coronal plasma (see Table). Fast and slow waves are shown on different spatial scales. The range where the scale is changing is indicated by saw teeth. The top and bottom panels are for the sausage and the kink modes, respectively. We use different colours for different modes. The approximate position where the dispersion effect of the slow waves is the most pronounce is indicated by star. The range of speeds where is no roots corresponding to MHD waves can be found are shown by grey dashing

Рис. 2.1. Фазовые скорости волн перетяжек и изгибных волн в сильно замагниченной корональной плазме (см. таблицу). Быстрые и медленные волны показаны в разных пространственных масштабах. Диапазон изменения шкалы обозначен пилообразным символом. Верхняя и нижняя панели предназначены для волн перетяжек и изгибных волн соответственно. Мы используем разные цвета для разных мод. Приблизительное положение, в котором дисперсионный эффект медленных волн наиболее заметен, обозначено звездой. Серым пунктиром показан диапазон скоростей, в котором не могут быть найдены корни, соответствующие МГД-волнам

It can be easily seen that the slow modes in the thermally active plasma can be found between sound speed c_{Si} and the modified tube speed c_{TQi} . In the ideal plasma case, the long-wavelength limit is c_{Ti} . The fast modes in the plasma with the thermal misbalance range between c_{Ae} and c_{Ai} . The slow waves are highly affected by both thermal activity and wave-guide dispersion. The impact of the thermal activity on the fast-wave dispersion is negligible.

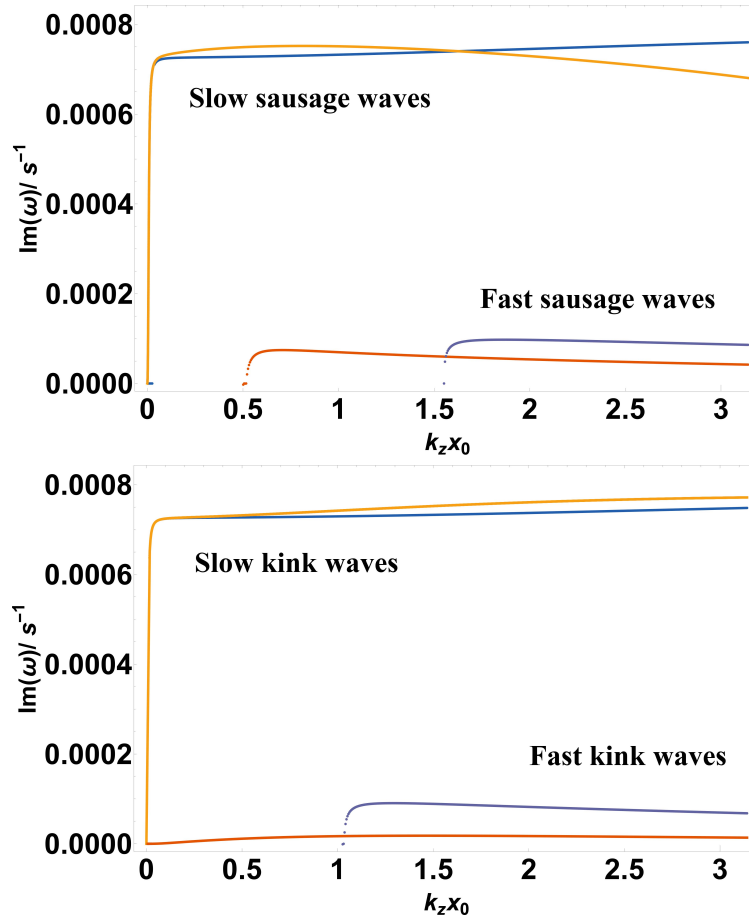


Fig. 2.2. Decrement of sausage and kink waves in the highly magnetized coronal plasma (see Table). The top panel corresponds to the sausage modes. The bottom panel is the for kink modes. Different colours correspond to different modes

Рис. 2.2. Декремент волн перетяжек и изгибных волн в сильно замагниченной корональной плазме (см. таблицу). Верхняя панель соответствует волнам перетяжек. Нижняя панель предназначена для изгибных волн. Разные цвета соответствуют различным модам

One may notice that decrement of both fast sausage and kink modes are lower than decrement of slow waves. This effect is in agreement with result obtained for the uniform plasma [4]. However, the magnetic structuring leads to non-monotonic behavior of wave decrement, with maximum in the long-wavelength part of the spectrum. In uniform plasma behavior was shown to be monotonic [4]. The calculated decrement of rather weak and cannot explain observed fast wave damping. The slow-wave decrement is comparable with the observed decay time. Moreover, in highly magnetic plasma decrement of slow-waves become greater (compare with results obtained for the hot loop in [8]). This is due to the fact that with decrease of plasma beta/increase of magnetic field the slow wave becomes more acoustic than magnetic mode.

3. Discussion and conclusions

In the presented study we analyzed the combined influence of the thermal activity and the magnetic structuring on properties of the compressional magnetohydrodynamic (MHD) waves. Using perturbation theory, assumption of strong magnetic structuring and the slab geometry, we obtain the dispersion relation for the set (fast/slow and body/surface) of the sausage/kink magnetoacoustic waves. We solve the obtained dispersion relation numerically and use to the highly-magnetized solar corona conditions. We showed that slow-waves are highly affected by both thermal activity and wave-guide dispersion. In particular the long-wavelength becomes equal to c_{TQ} , which is defined not only by geometry of the wave-guide but also by the acting non-adiabatic processes. As a result, the usage of the value c_T for the helioseismological needs may cause mistakes. On the contrary, the oscillation of the fundamental modes may be used for phenomenological determination of unknown coronal heating function. We also showed the phase velocity dispersion for the fast MHD waves remains the wave-guide geometry. In the magnetically structured plasma the wave decrement

becomes non-monotonic with maximum in the long-wavelength part of the spectrum. The calculated slow wave decrements are comparable with the observed decay times.

The study was supported in part by the Ministry of Education and Science of Russia by State assignment to educational and research institutions under Project No. FSSS-2020-0014 and No. 0023-2019-0003, and by RFBR, project number 20-32-90018. CHIANTI is a collaborative project involving George Mason University, the University of Michigan (USA), University of Cambridge (UK), and NASA Goddard Space Flight Center (USA).

References

- [1] Nakariakov V.M. [et al.]. Kink Oscillations of Coronal Loops. *Space Science Reviews*, 2021, vol. 217, issue 6, article number: 73. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11214-021-00847-2>.
- [2] Wang T.J. Waves in Solar Coronal Loops. In: *Low-Frequency Waves in Space Plasmas*, 2016, pp. 395–418. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/9781119055006.ch23>.
- [3] Zavershinskii D., Kolotkov D., Riashchikov D., Molevich N. Mixed Properties of Slow Magnetoacoustic and Entropy Waves in a Plasma with Heating/Cooling Misbalance. *Solar Physics*, 2021, vol. 296, no. 6, article number: 96. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-021-01841-1>.
- [4] Zavershinskii D.I., Molevich N.E., Riashchikov D.S., Belov S.A. Nonlinear magnetoacoustic waves in plasma with isentropic thermal instability. *Physical Review E*, 2020, vol. 101, issue 4, p. 43204. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.043204>.
- [5] Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I. Dispersion of Slow Magnetoacoustic Waves in the Active Region Fan Loops Introduced by Thermal Misbalance. *Solar Physics*, 2021, vol. 296, issue 8, article number: 122. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-021-01868-4>.
- [6] Zhugzhda Y.D. Force-free thin flux tubes: Basic equations and stability. *Physics of Plasmas*, 1996, vol. 3, issue 1, pp. 10–21. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.871836>.
- [7] Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S. Formation of quasi-periodic slow magnetoacoustic wave trains by the heating/cooling misbalance. *Physics of Plasmas*, 2019, vol. 26, issue 8, p. 82113. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5115224>.
- [8] Agapova, D.V., Belov, S.A., Molevich, N.E., Zavershinskii, D.I. Dynamics of fast and slow magnetoacoustic waves in plasma slabs with thermal misbalance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2022, vol. 514, issue 4, p. 5941–5951. DOI: <http://doi.org/10.1093/mnras/stac1612>.
- [9] Del Zanna G., Dere K.P., Young P.R., Landi E. CHIANTI - An Atomic Database for Emission Lines. XVI. Version 10, Further Extensions. *The Astrophysical Journal*, 2021, vol. 909, no. 1, p. 38. DOI: <http://doi.org/10.3847/1538-4357/abd8ce>.
- [10] Kolotkov D.Y., Duckenfield T.J., Nakariakov V.M. Seismological constraints on the solar coronal heating function. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, vol. 644, issue 1, p. A33. DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039095>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-120-127

УДК 533.951; 523.9-1/-8

Дата: поступления статьи: 30.08.2022
после рецензирования: 17.02.2021
принятия статьи: 28.02.2021

Д.В. Агапова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация

E-mail: agapovadaria2019@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3957-7339>

С.А. Белов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация

E-mail: mr_beloff@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3505-9542>

Н.Е. Молевич

Самарский национальный исследовательский университет
 имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
 СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация
 E-mail: nonna.molevich@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5950-5394>

Д.И. Завершинский

Самарский национальный исследовательский университет
 имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
 СФ ФИАН, г. Самара, Российская Федерация
 E-mail: d.zavershinskii@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3746-7064>

БЫСТРЫЕ И МЕДЛЕННЫЕ МГД-ВОЛНЫ В ТЕРМИЧЕСКИ АКТИВНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ²

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено совместное влияние тепловой активности и магнитного структурирования на свойства магнитогидродинамических (МГД) волн. Для моделирования МГД-волн мы используем геометрию однородного магнитного слоя. Для вывода дисперсионных уравнений для симметричной (волна перетяжек) и антисимметричной (изгибаемая) волн мы используем предположение о сильном магнитном структурировании среды. В наших расчетах мы используем параметры, соответствующие сильно замагниченной корональной петле. Тепловая активность приводит к изменению фазовой скорости и инкремента/декремента волны. Мы показываем, что пространственные масштабы, в которых эффекты дисперсии, вызванные тепловой активностью, наиболее выражены, длиннее пространственного масштаба геометрической дисперсии. Тепловая активность и геометрия волновода оказывают сравнимое влияние на дисперсию фазовой скорости медленных волн. Однако основным источником дисперсии фазовой скорости для быстрых МГД-волн остается геометрия волновода. Мы также показываем, что затухание медленных МГД-волн, вызванное тепловой активностью, больше, чем затухание быстрых МГД-волн.

Ключевые слова: тепловая активность; сильное магнитное структурирование; корональная петля; магнитный слой; МГД-волны; симметричные и антисимметричные волны; дисперсия; волновод.

Цитирование. Agapova D.V., Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I. Fast and slow MHD waves in thermally active plasma slab // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 120–127. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-120-127>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Агапова Д.В., Белов С.А., Молевич Н.Е., Завершинский Д.И., 2022

Дарья Вадимовна Агапова — магистрант физического факультета, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Инженер, теоретический сектор, Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Сергей Александрович Белов — аспирант кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Научный сотрудник, теоретический сектор, Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Нонна Евгеньевна Молевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Главный научный сотрудник, и.о. зав. теоретическим сектором, Самарский филиал Физического

²Работа выполнена при частичной поддержке Минобрнауки России по государственному заданию образовательным и научным учреждениям по проектам FSSS-2020-0014 и 0023-2019-0003, а также проект РФФИ 20-32-90018.

института имени П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Дмитрий Игоревич Завершинский — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Научный сотрудник, теоретический сектор, Самарский филиал Физического института имени П.Н. Лебедева РАН, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Литература

- [1] Nakariakov V.M. [et al.] Kink Oscillations of Coronal Loops. *Space Science Reviews*, 2021, vol. 217, issue 6, article number: 73. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11214-021-00847-2>.
- [2] Wang T.J. Waves in Solar Coronal Loops. In: *Low-Frequency Waves in Space Plasmas*, 2016, pp. 395–418. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/9781119055006.ch23>.
- [3] Zavershinskii D., Kolotkov D., Riashchikov D., Molevich N. Mixed Properties of Slow Magnetoacoustic and Entropy Waves in a Plasma with Heating/Cooling Misbalance. *Solar Physics*, 2021, vol. 296, issue 6, no. 96. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11207-021-01841-1>.
- [4] Zavershinskii D.I., Molevich N.E., Riashchikov D.S., Belov S.A. Nonlinear magnetoacoustic waves in plasma with isentropic thermal instability. *Physical Review E*, 2020, vol. 101, issue 4, p. 43204. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.043204>.
- [5] Belov S.A., Molevich N.E., Zavershinskii D.I. Dispersion of Slow Magnetoacoustic Waves in the Active Region Fan Loops Introduced by Thermal Misbalance. *Solar Physics*, 2021, vol. 296, issue 8, no. 122. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11207-021-01868-4>.
- [6] Zhugzhda Y.D. Force-free thin flux tubes: Basic equations and stability. *Physics of Plasmas*, 1996, vol. 3, issue 1, p. 10–21. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.871836>.
- [7] Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S. Formation of quasi-periodic slow magnetoacoustic wave trains by the heating/cooling misbalance. *Physics of Plasmas*, 2019, vol. 26, issue 8, p. 82113. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5115224>.
- [8] Agapova D.V., Belov, S.A., Molevich, N.E., Zavershinskii D.I. Dynamics of fast and slow magnetoacoustic waves in plasma slabs with thermal misbalance. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2022, vol. 514, issue 4, pp. 5941–5951. DOI: <http://doi.org/10.1093/mnras/stac1612>.
- [9] Del Zanna G., Dere K.P., Young P.R., Landi E. CHIANTI - An Atomic Database for Emission Lines. XVI. Version 10, Further Extensions. *The Astrophysical Journal*, 2021, vol. 909, no. 1, p. 38. DOI: <http://doi.org/10.3847/1538-4357/abd8ce>.
- [10] Kolotkov D.Y., Duckenfield T.J., Nakariakov V.M. Seismological constraints on the solar coronal heating function. *Astronomy & Astrophysics*, 2020, vol. 644, issue 1, p. A33. DOI: <http://doi.org/10.1051/0004-6361/202039095>.



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-128-136

УДК 629.7.05

Дата: поступления статьи: 06.05.2022
после рецензирования: 22.06.2022
принятия статьи: 14.11.2022**А.В. Ануфриев**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: antonman200@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/000-0002-9155-5348>**В.А. Салеев**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: saleev@samsu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

РОЖДЕНИЕ η_c С РАСПАДОМ В ДВА ФОТОНА В ОБОБЩЕННОЙ ПАРТОННОЙ МОДЕЛИ ПРИ ЭНЕРГИИ КОЛЛАЙДЕРА NICA¹

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается рождение η_c -мезонов с распадом в два фотона при энергии коллайдера NICA, $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, в обобщенной партонной модели и лидирующем порядке теории возмущений квантовой хромодинамики. Адронизация пары $c\bar{c}$ -кварков в η_c описывается в рамках модели цветовых синглетов и в модели испарения цвета. При расчете фонового процесса рождения двух фотонов с инвариантной массой, близкой к массе η_c , учитывается как прямое рождение фотонов, так и фрагментационный механизм их рождения. Результаты расчетов в обобщенной партонной модели сравниваются с предсказаниями коллинеарной партонной модели. Проведен анализ зависимости отношения "сигнал-фон" от различных кинематических переменных.

Ключевые слова: NICA; чармониум; η_c -мезон; модель цветовых синглетов; модель испарения цвета; жесткий процесс; обобщенная партонная модель; квантовая хромодинамика.

Цитирование. Ануфриев А.В., Салеев В.А. Рождение η_c с распадом в два фотона в обобщенной партонной модели при энергии коллайдера NICA // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 128–136. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-128-136>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Ануфриев А.В., Салеев В.А., 2022

Антон Витальевич Ануфриев — магистрант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Владимир Анатольевич Салеев — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

С момента открытия в 1974 году J/ψ -мезона физика тяжелых кваркониев всегда была в центре экспериментального и теоретического внимания. Тяжелый кварконий — это связанное состояние,

¹Работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования России проект FSSS-2020-0014

состоящее из тяжелого кварка и тяжелого антикварка. В зависимости от аромата кварков различают семейство чармониев ($c\bar{c}$) и боттомониев ($b\bar{b}$). Большая масса c или b -кварка определяет величину жесткого масштаба в партонном подпроцессе рождения кварк-антикварковой пары, на котором константа сильного взаимодействия является достаточно малой $\alpha_S = 0.2 \sim 0.3$, что позволяет проводить расчет в рамках теории возмущений квантовой хромодинамики (КХД). Адронизация пары тяжелых кварка и антикварка в конечный кварконий может быть описана в нерелятивистском приближении, когда пренебрегается относительным импульсом кварка и антикварка. В модели цветовых синглетов (МЦС) [1; 2] предполагается, что кварк-антикварк рождаются с квантовыми числами конечного кваркония в синглетном состоянии по цвету. В более общем подходе нерелятивистской КХД (НРКХД), в котором учитываются релятивистские поправки по степеням относительной скорости кварка и антикварка, рождение кваркония может происходить через промежуточные октетные по цвету состояния [3]. В настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных по рождению J/ψ -мезонов в адронных взаимодействиях от энергий $\sqrt{s} = 19$ ГэВ до $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. В гораздо меньшей степени экспериментально изучены P -волновые чармонии, χ_c -мезоны (см. ссылки в работе [4]). Что касается рождения основного состояния η_c -мезона с квантовыми числами $c\bar{c}[^1S_0]$, то в настоящее время проведено только одно измерение сечения рождения η_c коллаборацией LHCb на Большом адронном коллайдере (БАК) в канале распада $\eta_c \rightarrow p\bar{p}$ [5].

В программу экспериментальных исследований коллаборации SPD NICA входит измерение сечений и спектров чармониев в протон-протонных столкновениях при энергиях до $\sqrt{s} = 27$ ГэВ [6]. В настоящей статье мы оцениваем возможность измерения сечения рождения η_c -мезонов при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ в эксперименте SPD NICA в канале распада в два фотона, $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$. Несмотря на малость относительной ширины распада η_c -мезона в два фотона, $Br(\eta_c \rightarrow \gamma\gamma) = 1.8 \cdot 10^{-4}$, этот канал распада может оказаться предпочтительным, т. к. в эксперименте SPD NICA планируется специально исследовать рождение жестких фотонов как в процессах прямого рождения на партонном уровне, так и в распадах короткоживущих адронов [6].

1. Обобщенная партонная модель

Стандартная схема вычислений сечений жестких процессов (процессов с большой передачей импульса) основывается на коллинеарной партонной модели (КПМ) [7]. Формула факторизации КПМ предполагает, что жесткий масштаб процесса μ много больше характерной величины поперечного импульса партонов в протоне $\langle q_T \rangle$, который не превышает 1 ГэВ. Таким образом, при описании процессов рождения частиц с малыми поперечными импульсами $p_T \sim 1$ ГэВ или $p_T \ll \mu$ необходимо учитывать поперечные импульсы партонов в протоне. Для описания таких процессов был разработан подход факторизации, зависящей от поперечного импульса, или TMD-факторизации [8]. Для решения задач нашего исследования будет достаточно использовать так называемую обобщенную партонную модель (ОПМ) [9], основанную на подходе TMD-факторизации. В ОПМ сечение рождения η_c -мезона в лидирующем приближении (ЛП) по константе сильного взаимодействия записывается в виде

$$d\sigma(p + p \rightarrow \eta_c + X) = \int dx_1 \int d^2q_{1T} \int dx_2 \int d^2q_{2T} F_g(x_1, q_{1T}, \mu) F_g(x_2, q_{2T}, \mu) \times \\ \times d\hat{\sigma}(g + g \rightarrow \eta_c), \quad (1.1)$$

где $F_g(x_{1,2}, \mathbf{q}_{1,2T}, \mu)$ – зависящие от поперечных импульсов $\mathbf{q}_{1,2T}$ глюонные функции распределения (ФР) в протонах, $d\hat{\sigma}(g + g \rightarrow \eta_c)$ – сечение партонного подпроцесса слияния двух глюонов в η_c -мезон. Несмотря на наличие у начальных глюонов поперечных импульсов, они остаются на массовой поверхности, что достигается путем введения положительной и отрицательной конусных компонент в 4-импульсы глюонов:

$$q_1^\mu = x_1 P_1^\mu + \tilde{x}_1 P_2^\mu + q_{1T}^\mu, \quad (1.2)$$

$$q_2^\mu = x_2 P_2^\mu + \tilde{x}_2 P_1^\mu + q_{2T}^\mu, \quad (1.3)$$

где $P_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1)$, $P_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1)$, $q_{1,2T} = (0, \mathbf{q}_{1,2T}, 0)$, $\tilde{x}_1 = \mathbf{q}_{1T}^2/Sx_1$, $\tilde{x}_2 = \mathbf{q}_{2T}^2/Sx_2$. В ОПМ зависимость ФР от продольного и поперечного импульса факторизуется таким образом, что

$$F_g(x, \mathbf{q}_T, \mu) = f_g(x, \mu) G(\mathbf{q}_T), \quad (1.4)$$

где $f_g(x, \mu)$ – коллинеарная ФР глюонов в протоне, а зависимость от поперечного импульса аппроксимируется гауссианом

$$G(\mathbf{q}_T) = \frac{e^{-\frac{\mathbf{q}_T^2}{a^2}}}{\pi a^2}, \quad a = \sqrt{\langle \mathbf{q}_T^2 \rangle}. \quad (1.5)$$

Сравнение результатов расчетов в ОПМ для рождения J/ψ -мезонов с экспериментальными данными показывает, что согласие при малых поперечных импульсах достигается при $a \simeq 1$ ГэВ [10], которое мы и будем использовать в наших расчетах. В качестве коллинеарных ФР глюонов и кварков (при расчете сечения рождения двух прямых фотонов) используется параметризация MSTW [11].

Дифференциальное сечение подпроцесса $g + g \rightarrow \eta_c$ связано с квадратом модуля амплитуды $|M(g + g \rightarrow \eta_c)|^2$ стандартным образом:

$$d\hat{\sigma}(gg \rightarrow \eta_c) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p) \frac{|M(g + g \rightarrow \eta_c)|^2}{2x_1 x_2 s} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0}. \quad (1.6)$$

Дифференциальное сечение для процесса рождения η_c -мезона с распадом в 2 фотона имеет вид

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}(g + g \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma + \gamma) &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \frac{|M(g + g \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma + \gamma)|^2}{2x_1 x_2 s} \times \\ &\times \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $k_{1,2}^\mu$ – 4-импульсы конечных фотонов. Аналогичным образом в ОПМ записывается и сечение подпроцесса прямого рождения 2-х фотонов в подпроцессе $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma$ или фотона и кварка в подпроцессе $q + g \rightarrow q + \gamma$.

2. Модели адронизации $c\bar{c} \rightarrow \eta_c$

Впервые экспериментальная информация о рождении в адронных столкновениях η_c -мезонов была получена коллаборацией ЛНСб, изучавшей протон-протонные столкновения [5]. В работе [12] в рамках расчетов в НРКХД было показано, что эти данные хорошо описываются в МЦС, а учет октетного механизма рождения приводит к существенному превышению результатов расчетов над экспериментальными данными, если октетные непертурбативные матричные элементы (НМЭ) извлекаются из описания спектров J/ψ -мезонов. Другим аргументом в пользу использования МЦС вместо модели НРКХД является сравнение результатов расчетов в ОПМ p_T -спектров J/ψ -мезонов с данными коллаборации РХЕНIX при малых p_T [10]. Таким образом, при малых поперечных импульсах вклад октетного механизма является несущественным для всех чармониев, что позволяет не использовать неизвестные октетные НМЭ и более точно предсказать абсолютную величину сечения рождения. Синглетный по цвету НМЭ $\langle \mathcal{O}^{\eta_c}[^1S_0^{(1)}] \rangle$ может быть выражен через волновую функцию η_c -мезона в начале координат

$$\langle \mathcal{O}^{\eta_c}[^1S_0^{(1)}] \rangle = 6|\Psi_{\eta_c}(0)|^2,$$

которая точно вычисляется в потенциальной модели тяжелых кваркониев, или может быть извлечен из формулы для экспериментально известной ширины распада $\eta_c \rightarrow \gamma + \gamma$:

$$\Gamma(\eta_c \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{24}{3} \pi e_q^4 \alpha^2 \langle \mathcal{O}^{\eta_c}[^1S_0^{(1)}] \rangle.$$

Сечение рождения чармония $\mathcal{H}$ в НРКХД через образование $c\bar{c}$ -пары с квантовыми числами $^{2S+1}L_J^{(1,8)}$ связано с сечением рождения состояния $^{2S+1}S_J^{(1,8)}$ в жестком подпроцессе и НМЭ перехода $\langle \mathcal{H}[^{2S+1}L_J^{(1,8)}] \rangle$ таким образом (см. формулы в [3]), что в случае рождения η_c -мезона в МЦС получаем

$$\hat{\sigma}(gg \rightarrow \eta_c) = \hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c}[^1S_0^{(1)}]) \frac{\langle \mathcal{O}^{\eta_c}[^1S_0^{(1)}] \rangle}{2N_c},$$

где $N_c = 3$. Амплитуда процесса рождения $c\bar{c}$ -пары с определенными квантовыми числами строится согласно правилам Фейнмана с применением метода проекционных операторов [3]. В итоге квадрат модуля амплитуды процесса $g + g \rightarrow \eta_c$ в МЦС записывается в виде:

$$|M(gg \rightarrow \eta_c)|^2 = \frac{256\pi^2}{9M^5} \alpha_s^2 \langle \mathcal{O}^{\eta_c}[^1S_0^{(1)}] \rangle, \quad (2.1)$$

где $M = 2.98$ ГэВ – масса η_c -мезона.

Квадрат модуля амплитуды процесса рождения η_c -мезона с последующим распадом в два фотона в формализме НРКХД, с учетом конечной ширины распада η_c -мезона записывается в виде

$$|M(g + g \rightarrow \eta_c \rightarrow \gamma + \gamma)|^2 = \frac{16}{27} \frac{e_q^4 \alpha_s^2 \pi^4}{M^4} \frac{\left(\langle \mathcal{O}^{\eta_c}[^1S_0^{(1)}] \rangle \right)^2}{((\hat{s} - M^2)^2 + M^2 \Gamma_{\eta_c}^2)}, \quad (2.2)$$

где $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2$, $\Gamma_{\eta_c} = 29.7$ MeV – полная ширина распада η_c -мезона [13].

Другая популярная модель адронизации пары $c\bar{c}$ в чармониум – модель испарения цвета (МИЦ) [14; 15]. Актуальный статус МИЦ представлен в работе [16]. В ОПМ начальные партоны имеют поперечный импульс, поэтому описание спектров по поперечному импульсу η_c возможно уже в лидирующем приближении по константе сильного взаимодействия в партонных подпроцессах

$$g + g \rightarrow c + \bar{c} \quad (2.3)$$

и

$$q + \bar{q} \rightarrow c + \bar{c}, \quad (2.4)$$

где $q = u, d, s$. В МИЦ сечение рождения прямых η_c -мезонов связано с сечением рождения $c\bar{c}$ -пары следующим образом:

$$\sigma(p + p \rightarrow \eta_c + X) = \mathcal{F}^{\eta_c} \int_M^{2m_D} \frac{d\sigma(p + p \rightarrow c + \bar{c} + X)}{dM_{c\bar{c}}} dM_{c\bar{c}}, \quad (2.5)$$

где $M_{c\bar{c}}$ – инвариантная масса $c\bar{c}$ -пары с 4-импульсом $p_{c\bar{c}}^\mu = p_c^\mu + p_{\bar{c}}^\mu$, m_D – масса легчайшего D -мезона. Для учета кинематического эффекта, связанного с разницей масс промежуточного состояния и конечного чармония, 4-импульс $c\bar{c}$ -пары и η_c -мезона связаны соотношением $p^\mu = (M/M_{c\bar{c}})p_{c\bar{c}}^\mu$. Универсальный параметр $\mathcal{F}^{\eta_c}$ рассматривается как вероятность превращения $c\bar{c}$ -пары с инвариантной массой $M < M_{c\bar{c}} < 2m_D$ в η_c -мезон.

3. Рождение фотонной пары в ОПМ

Для анализа отношения сигнал/фон необходимо рассчитать с той же точностью, что и для процесса рождения η_c -мезона с последующим распадом в два фотона, сечение рождения пары прямых фотонов в ЛП ОПМ в подпроцессе

$$q(q_1) + \bar{q}(q_2) \rightarrow \gamma(k_1) + \gamma(k_2), \quad (3.1)$$

где при энергиях коллайдера NICA вклад дают процессы только с легкими кварками, т. е. $q = u, d, s$. Квадрат модуля амплитуды этого процесса хорошо известен [17]

$$|\overline{M(q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma)}|^2 = \frac{32}{3} \pi^2 e_q^4 \alpha^2 \left(\frac{\hat{t}}{\hat{u}} + \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right), \quad (3.2)$$

где переменные Мандельштама определены следующим образом: $\hat{s} = (q_1 + q_2)^2$, $\hat{t} = (k_1 - q_1)^2$, $\hat{u} = (k_2 - q_1)^2$, и e_q – электрический заряд кварка сорта q . Наряду с ЛП подпроцессом (3.2) примем во внимание также фрагментационный вклад, который учитывает логарифмически усиленную часть следующей за лидирующей поправки по константе сильного взаимодействия. Если пренебрегать малой вероятностью испускания фотона глюоном, то основным источником фрагментационных фотонов является множество процессов совместного рождения фотона и кварка: $q + g \rightarrow q(\rightarrow \gamma) + \gamma$, $\bar{q} + g \rightarrow \bar{q}(\rightarrow \gamma) + \gamma$ с фрагментацией конечного кварка (антикварка) в фотон. Квадрат модуля амплитуды "комптоновского" процесса рассеяния записывается следующим образом [17]:

$$|\overline{M(qg \rightarrow q\gamma)}|^2 = -\frac{16}{3} \pi^2 \alpha \alpha_s e_q^2 \left(\frac{\hat{u}}{\hat{s}} + \frac{\hat{s}}{\hat{u}} \right). \quad (3.3)$$

Вероятность двойного фрагментационного рождения в процессах типа $q + q \rightarrow q(\rightarrow \gamma) + q(\rightarrow \gamma)$ пренебрежимо мала и не рассматривается. Процесс испускания коллинеарного фотона кварком (антикварком) описывается функцией фрагментации (ФФ) $D_{q \rightarrow \gamma}(z, \mu)$, которая может быть рассчитана по теории возмущений КХД. Зависимость ФФ и ФР от жесткого масштаба μ описывается системой уравнений Докшицера – Грибова – Липатова – Алтаррели – Паризи (ДГЛАП). При расчетах фрагментационного рождения используется параметризация GRV [18], а фрагментационный параметр z связывает 4-импульсы начального кварка и фотона, $k_\gamma^\mu = zk_q^\mu$. Сечение рождения пары из прямого фотона и фрагментационного фотона описывается формулой

$$\begin{aligned} d^{frag} \sigma(pp \rightarrow \gamma\gamma X) &= \sum_{q, \bar{q}} \int dx_1 \int d^2 q_{1T} \int dx_2 \int d^2 q_{2T} F_g(x_1, q_{1T}, \mu) \times \\ &\times F_{q, \bar{q}}(x_2, q_{2T}, \mu) \int dz D_{q, \bar{q} \rightarrow \gamma} d\hat{\sigma}(g + q \rightarrow \gamma + q). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Численные расчеты многомерных интегралов в формулах (1.1) и (3.5) выполняются методом Монте-Карло с помощью программного пакета CUBA [19].

4. Результаты расчетов

Проведен расчет дифференциального сечения рождения в протон-протонных столкновениях η_c -мезона по поперечному импульсу p_T в МЦС как в ОПМ, так и в КПМ. На рис. 4.1 показан спектр η_c -мезонов по поперечному импульсу. Центральные кривые (сплошная и пунктир) получены при выборе жесткого масштаба $\mu = \sqrt{M^2 + p_T^2}$, неопределенности расчетов от вариации жесткого масштаба на фактор 2 ограничены корридорами, закрашенными сером цветом. Полученные результаты согласуются с предсказаниями, полученными ранее в подходе реджезации партонов (ПРП) и МЦС [20]. Хорошее согласие с расчетами в ПРП, в котором эффективно учтены высшие поправки по теории возмущений по константе сильного взаимодействия, подтверждает правильность нашей оценки сечения рождения η_c -мезона в ОПМ. Полное сечение рождения η_c -мезона, умноженное на брэнчинг распада $\eta_c \rightarrow \gamma + \gamma$, составляет $\sigma(p + p \rightarrow \eta_c X) Br(\eta_c \rightarrow \gamma + \gamma) = 0.189$ нбн.

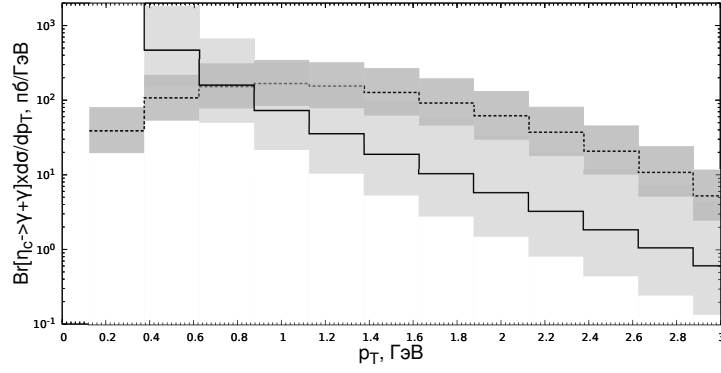


Рис. 4.1. Дифференциальное сечение рождения η_c -мезона как функция поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y| < 3$, $p_T < 3$ ГэВ. Расчет выполнен в МЦС. Сплошная кривая – в ОПМ, пунктирная – в КПМ. Серым выделены области неопределенности расчетов в зависимости от выбора жесткого масштаба

Fig. 4.1. Differential cross section for η_c -meson production as a function of the transverse momentum at the energy $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y| < 3$, $p_T < 3$ GeV. The calculation was made in the CSM. The solid curve is in the GPM, the dotted curve is in CPM. The areas of calculation uncertainty are highlighted in gray, depending on the choice of a hard scale

На рис. 4.2 мы сравниваем спектры по поперечному импульсу η_c -мезонов, полученные в ОПМ в разных моделях адронизации пары $c\bar{c}$ -кварков: в МЦС и МИЦ. С учетом неопределенности расчетов, связанной с выбором жесткого масштаба, наблюдается качественное согласие при выборе параметра адронизации в МИЦ $\mathcal{F}^{\eta_c} = 0.3$ и массы c -кварка $m_c = 1.2$ ГэВ.

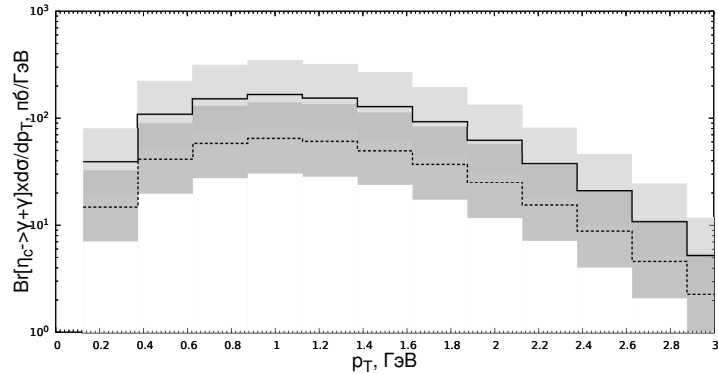


Рис. 4.2. Дифференциальное сечение рождения η_c -мезона как функция поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y| < 3$, $p_T < 3$ ГэВ. Расчет выполнен в ОПМ. Сплошная кривая – в МЦС, пунктирная – в МИЦ. Серым выделены области неопределенности расчетов в зависимости от выбора жесткого масштаба

Fig. 4.2. Differential cross section for η_c -meson production as a function of the transverse momentum at $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y| < 3$, $p_T < 3$ GeV. The calculation was made in the GPM. The solid curve is in the CSM, the dotted curve is in the CEM. The areas of calculation uncertainty are highlighted in gray, depending on the choice of a hard scale

Для анализа отношения "сигнал-фон" на рис. 4.3 и 4.4 представлены спектры по суммарному импульсу фотонных пар с инвариантной массой, близкой к массе η_c -мезона, $2.9 < M_{\gamma\gamma} < 3.1$ ГэВ. При ограничении на поперечные импульсы фотонов $p_T > 1.5$ ГэВ вклад прямого рождения двух фотонов на порядок превышает вклад от вклада фотонов от распадов η_c . Если накладывается более жесткое ограничение, $p_T > 1.8$ ГэВ, то вклады прямого рождения пары фотонов и фотонов от распада η_c -мезонов становятся одного порядка. Однако абсолютная величина сечения рождения таких фотонных пар становится существенно меньше, что оставляет открытым вопрос о возможности экспериментального исследования при энергиях коллайдера NICA.

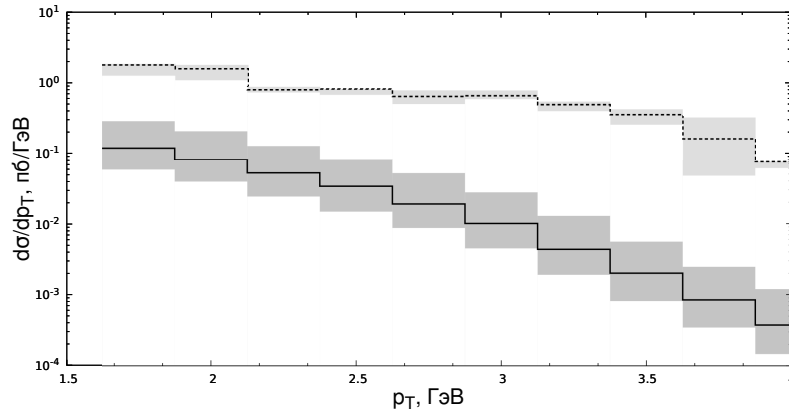


Рис. 4.3. Дифференциальное сечение рождения пары фотонов с инвариантной массой $2.9 < M_{\gamma\gamma} < 3.1$ ГэВ как функция их суммарного поперечного импульса, при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} < 1.5$ ГэВ, расчет выполнен в ОПМ. Пунктирная кривая — вклад прямых фотонов, сплошная кривая — вклад фотонов от распада $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$

Fig. 4.3. The differential cross section for the production of a pair of photons with an invariant mass of $2.9 < M_{\gamma\gamma} < 3.1$ GeV, as a function of their total transverse momentum, at an energy $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} < 1.5$ GeV, the calculation was made in the GPM. The dotted curve is the contribution of direct photons, the solid curve is the contribution of photons from the decay $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$

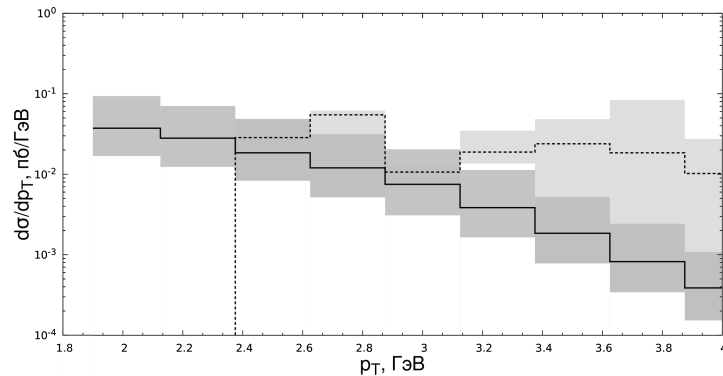


Рис. 4.4. Дифференциальное сечение рождения пары фотонов с инвариантной массой $2.9 < M_{\gamma\gamma} < 3.1$ ГэВ как функция их суммарного поперечного импульса при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} < 1.8$ ГэВ, расчет выполнен в ОПМ. Пунктирная кривая — вклад прямых фотонов, сплошная кривая — вклад фотонов от распада $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$

Fig. 4.4. Differential cross section for the production of a pair of photons with an invariant mass $2.9 < M_{\gamma\gamma} < 3.1$ GeV as a function of their total transverse momentum at the energy $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} < 1.8$ GeV, calculation made in the GPM. The dotted curve is the contribution of direct photons, the solid curve is the contribution of photons from decay $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$

Спектры по инвариантной массе пары фотонов показаны на рис. 4.5 и рис. 4.6, при этом на каждый фотон наложены следующие кинематические ограничения $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} < 1.5$ ГэВ или $|y_\gamma| < 3$, $p_{T\gamma} < 1.8$ ГэВ, соответственно. В первом случае в пике $M_{\gamma\gamma} \simeq M$ сечение рождения η_c с распадом в два фотона на два порядка величины меньше, чем сечение прямого рождения пары фотонов. При $p_{T\gamma} > 1.8$ ГэВ сечения прямого рождения фотонов и фотонов от распада η_c становятся примерно равными, что позволяет надеяться на возможность наблюдения экспериментального сигнала о рождении η_c -мезонов в двухфотонном канале распада.

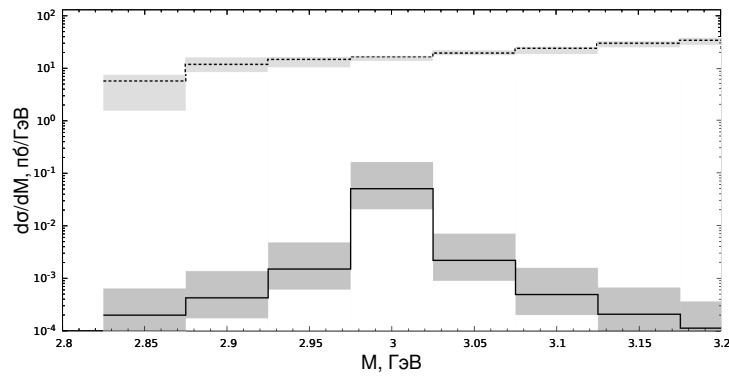


Рис. 4.5. Дифференциальное сечение рождения пары фотонов как функция их инвариантной массы при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\gamma| < 3$, $1.5 < p_{T\gamma} < 5$ ГэВ. Сплошная кривая — вклад от распадов η_c -мезонов, пунктирная — вклад от прямого рождения двух фотонов
 Fig. 4.5. Differential cross section for the production of a pair of photons as a function of their invariant mass at an energy of $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\gamma| < 3$, $1.5 < p_{T\gamma} < 5$ GeV. The solid curve is the contribution from η_c -meson decays, the dotted curve is the contribution from the direct production of two photons

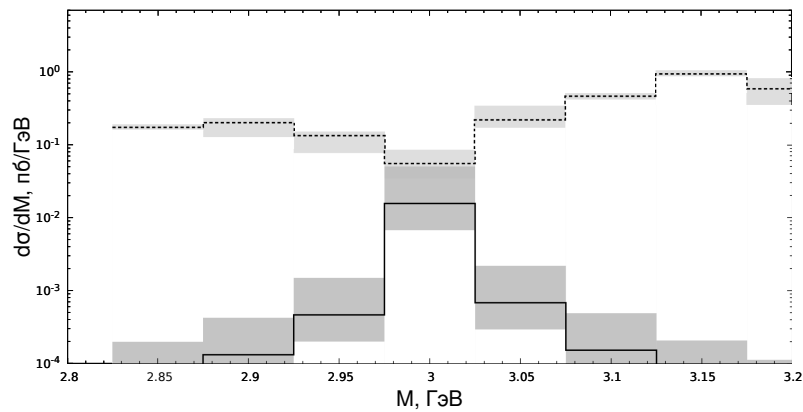


Рис. 4.6. Дифференциальное сечение рождения пары фотонов как функция их инвариантной массы при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ, $|y_\gamma| < 3$, $2 < p_{T\gamma} < 5$ ГэВ. Пунктирная кривая — вклад от распадов η_c -мезонов, пунктирная — вклад от прямого рождения двух фотонов
 Fig. 4.6. The differential cross section for the production of a pair of photons as a function of their invariant mass at energy $\sqrt{s} = 27$ GeV, $|y_\gamma| < 3$, $2 < p_{T\gamma} < 5$ GeV. The dotted curve is the contribution from η_c -meson decays, dotted line is the contribution from the direct production of two photons

Закключение

При энергиях коллайдера NICA в обобщенной партонной модели проведен расчет дифференциальных сечений рождения η_c -мезонов в рамках моделей адронизации МЦС и МИЦ. Также проведен расчет дифференциальных сечений рождения пары жестких фотонов с инвариантной массой, близкой к массе η_c -мезона. При этом учитывался вклад от рождения пары прямых фотонов и вклад от рождения одного прямого и одного фрагментационного фотона. Результаты расчетов для спектров η_c -мезонов по поперечному импульсу сравниваются с предсказаниями коллинеарной партонной модели. Проведен анализ зависимости отношения "сигнал-фон" от ограничений на поперечные импульсы фотонов и инвариантной массы фотонной пары.

Литература / References

- [1] Baier R., Ruckl R. Hadronic Collisions: A Quarkonium Factory. *Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields*, 1983, vol. 19, pp. 251–266. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01572254>.
- [2] Berger E.L., Jones D.L. Inelastic Photoproduction of J/psi and Upsilon by Gluons. *Physical Review D*, 1981, vol. 23, issue 7, pp. 1521–1530. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1521>.

- [3] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G. P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, issue 3, pp. 1125–1171. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [4] Lansber J.P. New Observables in Inclusive Production of Quarkonia. *Physics Reports*, 2020, vol. 889, issue 5, pp. 1–106. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2020.08.007>.
- [5] Aaij R., Abellan Beteta C., Adeva B. [et al.] Measurement of the $\eta_c(1S)$ production cross-section in proton–proton collisions via the decay $\eta_c(1S) \rightarrow p\bar{p}$. *The European Physical Journal C*, 2015. vol. 75, no. 311. DOI: <http://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3502-x>.
- [6] Arbuzov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, vol. 119, p. 103858. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.PPNP.2021.103858>.
- [7] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.F. Factorization of Hard Processes in QCD. *Advanced Series on Directions in High Energy Physics*, 1989, pp. 1–91. DOI: http://dx.doi.org/10.1142/9789814503266_0001.
- [8] Collins J. Foundations of perturbative QCD. In: *Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press. 2011, vol. 32, pp. 1–624. DOI: <http://doi.org/10.1017/CBO9780511975592>.
- [9] Wong Ch.Y., Wang H. Effects of parton intrinsic transverse momentum on photon production in hard-scattering processes. *Physical Review C*, 1998, vol. 58, issue 1, p. 376. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevC.58.376>.
- [10] Karpishkov A., Saleev V., Nefedov M. Estimates for the single-spin asymmetries in the $p\uparrow p \rightarrow J/\psi X$ process at PHENIX RHIC and SPD NICA. *Physical Review D*, 2021, vol. 104, issue 1, p. 016008. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.104.016008>.
- [11] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S. The role of FL(x,Q²) in parton analyses. *Physics Letters B*, 2006, vol. 635, issues 5–6, pp. 305–312. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.03.013>.
- [12] Butenschoen M., He Zhi-Guo, Kniehl B.A. η_c Production at the LHC Challenges Nonrelativistic QCD Factorization. *Physical Review Letters*, 2015, vol. 114, issue 9, p. 092004. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.092004>.
- [13] Workman R.L. et al. Particle Data Group. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022, vol. 2022, issue 8, p. 083C01. DOI: <http://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>.
- [14] Fritzsche H. Producing Heavy Quark Flavors in Hadronic Collisions: A Test of Quantum Chromodynamics. *Physics Letters B*, vol. 67, issue 2, pp. 217–221. DOI: [http://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](http://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [15] Halzen F. Cvc for Gluons and Hadroproduction of Quark Flavors. *Physics Letters B*, 1977, vol. 69, pp. 105–108. DOI: [http://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90144-7](http://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90144-7).
- [16] Ma Y.Q., Vogt R. Quarkonium Production in an Improved Color Evaporation Model. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, issue 11, p. 114029. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.114029>.
- [17] Berger E.L., Braaten E., Field R.D. Large p_T Production of Single and Double Photons in Proton Proton and Pion-Proton Collisions. *Nuclear Physics B*, 1984, vol. 239, issue 1, pp. 52–92. DOI: [http://doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90084-1](http://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90084-1).
- [18] Gluck M., Reya E., Vogt A. Photonic parton distributions. *Physical Review D*, 1992, vol. 46, issue 5, pp. 1973–1979. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.1973>.
- [19] Hahn T. CUBA: a library for multidimensional numerical integration. *Computer Physics Communications*, 2005, vol. 168, issue 2, pp. 78–95. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [20] Saleev V.A., Nefedov M.A., Shipilova A.V. Prompt J/psi production in the Regge limit of QCD: From Tevatron to LHC. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, issue 7, p. 074013. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074013>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-128-136

Submitted: 06.05.2022

Revised: 22.06.2022

Accepted: 14.11.2022

A.V. Anufriev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: antonman200@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/000-0002-9155-5348>

V.A. Saleev

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: saleev@samsu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

PRODUCTION OF η_c WITH TWO-PHOTON DECAY IN THE GPM AT THE ENERGIES OF NICA COLLIDER

ABSTRACT

The article discusses the production of η_c -mesons with decays into the photon pairs at the energy of the NICA collider, $\sqrt{s} = 27$ GeV, in the generalized parton model and the leading order approximation of the perturbation theory of quantum chromodynamics. The hadronization of a $c\bar{c}$ -pair into η_c -meson is described in the color singlet model and in the color evaporation model. In the calculation of the background process of two photon production with invariant mass near the mass of η_c -meson, we take into account direct as well as fragmentation mechanisms of the prompt photon production. The results of calculations are compared with predictions of the collinear parton model. We study the signal/background ratio as a function of the different kinematical variables.

Key words: NICA; charmonium; η_c -meson; color singlet model; color evaporation model; hard process; generalized parton model; quantum chromodynamics.

Citation. Anufriev A.V., Saleev V.A. Production of η_c with two-photon decay in the GPM at the energies of NICA. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 128–136. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-128-136>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Anufriev A.V., Saleev V.A., 2022

Anton V. Anufriev — master of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Vladimir A. Saleev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу <http://vestnik.samsu.ru> <http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est>. Все статьи проходят проверку в программе "Антиплагиат".

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания по профилю базы данных zbMath, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимает редколлегия журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата A4, и электронная (e-mail: nvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы (без формул), список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и его адреса с индексом, адресов электронной почты каждого из них, звания, должности, ORCID на русском и английском языках; аннотацию не менее 100 слов на русском и английском языках, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15–25 страниц, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\text{\LaTeX}$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского государственного университета (адрес указан выше). Использование других реализаций $\text{\TeX}$ крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\text{\LaTeX}$. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("—"), двойной дефис ("=")¹, тройной дефис ("≡")². Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных" фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек ("") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11–15 см по горизонтали и 5–15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны

¹Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--`

²Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой \cite с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию и даты ее принятия. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала