

Влияние начальной атомной когерентности и прямого взаимодействия на перепутывание кубитов в двухкубитной модели Тависа — Каммингса

Осман А. , Фархутдинова А.Р. , Башикиров Е.К. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; ali.oth@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-8811-2521 (А.); adeky.010k@gmail.com; ORCID: 0009-0006-2391-6320 (А.Р.); bashkirov.ek@ssau.ru; ORCID: 0000-0001-8682-4956 (Е.К.);

Поступила: 11.01.2025

Рассмотрена: 09.02.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. Найдена точная динамика модели, состоящей из двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных переходов, при наличии прямого изинговского взаимодействия кубитов. Точное решение использовано для расчета двухкубитной отрицательности кубитов в случае когерентного начального состояния кубитов и теплового состояния поля резонатора. Показано, что в случае резонансного взаимодействия кубитов с полем начальная атомная когерентность приводит к значительному увеличению максимальной степени перепутывания. Включение прямого изинговского взаимодействия кубитов может существенно усиливать перепутывание кубитов как в случае когерентных, так и некогерентных начальных состояний кубитов. В случае нерезонансного взаимодействия кубитов и поля резонатора расстройка приводит к ослаблению влияния атомной когерентности на динамику перепутывания кубитов.

Ключевые слова: кубиты; когерентное состояние кубитов; резонатор; тепловое поле; расстройка; перепутывание; отрицательность; изинговское взаимодействие.

Введение

Перепутанные состояния играют центральную роль во многих процессах квантовой обработки информации [1–3]. Явление перепутывания составных частей сложной системы неразрывно связано с принципом суперпозиции квантовой механики. Очевидно, что квантовая когерентность атомных систем, также непосредственно вытекающая из принципа квантовой суперпозиции, тесно связана с явлением перепутывания. Это позволяет сделать вывод, что атомная когерентностью может быть использована для усиления перепутывания атомных систем. Работа современных устройств квантовой обработки информации основана на использовании перепутанных состояний естественных или искусственных атомов (кубитов). Для создания и управления перепутанными состояниями кубитов обычно используют электромагнитные поля резонаторов. При теоретическом описании систем кубитов, взаимодействующих с выделенными модами резонаторов, обычно используют модель Джейнса — Каммингса и ее расширения и обобщения [4–6]. При реализации реальных сценариев квантовой обработки информации возникает квантовая декогеренция, которая является следствием неизбежного взаимодействия между квантовой системой и внешним шумом. Наличие внешней среды при описании эволюции систем кубитов в резонаторах во многих случаях можно смоделировать с помощью наличия теплового поля резонатора. При этом, как впервые было показано в работе [7], взаимодействие кубитов с тепловым шумом резонатора может приводить не к разрушению, а к генерации высокой степени перепутывания кубитов. Связь между атомной когерентностью и перепутыванием в рамках модели типа Джейнса — Каммингса была рассмотрена впервые в работе [8].

Авторы показали, что при прохождении трехуровневого атома через двухмодовый тепловой резонатор наличие начальной атомной когерентности между возбужденными состояниями атома может привести к перепутыванию состояний двух тепловых полей. В работе [9] в рамках двухатомной модели Джейнса — Каммингса в тепловом резонаторе было показано, что перепутывание атомов в процессе их эволюции может значительно усиливаться благодаря начальной когерентности атомов по сравнению со случаем, когда атомы изначально готовятся в некогерентных состояниях. При этом было определено, что возможно управление степенью перепутывания кубитов при изменении относительных фаз и амплитуд поляризованных атомов. Впоследствии указанный эффект был предсказан для различных обобщений и расширений двухатомной модели Джейнса — Каммингса [10–12]. В последнее время были разработаны квантовые системы кубитов, между которыми можно организовать сильное взаимодействие, в частности сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами. В ряде теоретических работ исследовалось влияние начальной атомной когерентности на степень перепутывания кубитов при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия в различных двухатомных моделях Джейнса — Каммингса [13; 14]. В нашей работе [15] исследовалась динамика теплового перепутывания в двухатомной модели Джейнса — Каммингса при наличии прямого взаимодействия изинговского типа для сепарабельных некогерентных и перепутанных состояний кубитов. Представляет интерес обобщить результаты работы [15] на случай когерентных начальных состояний кубитов.

В настоящей работе мы исследовали влияние начальной атомной когерентности на динамику перепутывания двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с одномодовым тепловым полем идеального резонатора, при наличии прямого изинговского взаимодействия кубитов. В качестве критерия перепутывания кубитов использовалась отрицательность. В результате показано, что при наличии прямого взаимодействия начальная атомная когерентность кубитов приводит к существенному возрастанию максимальной степени перепутывания в случае резонансного взаимодействия кубитов и поля. При этом в случае нерезонансного взаимодействия имеет место обратный эффект.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим систему, состоящую из двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с одномодовым электромагнитным полем идеального резонатора. Предположим, что между кубитами имеется прямое взаимодействие изинговского типа. Для организации такой связи между, например, сверхпроводящими кубитами используют так называемые пассивные элементы. Под пассивными элементами подразумеваются элементы цепи, для которых резонансная частота намного больше, чем частота перехода между основным и первым уровнями энергии кубитов. В результате при взаимодействии с кубитами пассивные элементы всегда будут оставаться в своем основном состоянии. Для организации различных типов взаимодействий между кубитами в качестве пассивных элементов используют емкости и индуктивности [16–18].

Тогда в системе отсчета, вращающейся с частотой поля резонатора, гамильтониан модели можно записать в виде

$$\Omega H = (1/2) \sum_{j=1}^2 \hbar \Omega \mu_j^z + \sum_{j=1}^2 \hbar \gamma (\mu_j^+ \eta + \mu_j^- \eta^\dagger) + \hbar \Sigma \mu_1^z \mu_2^z, \quad (1)$$

где μ_j^z — оператор инверсии населенностей в i -м кубите ($i = 1, 2$); $\mu_j^+ = |+\rangle_{ii} \langle -|$ и $\mu_j^- = |-\rangle_{ii} \langle +|$ — операторы перехода между возбужденным $|+\rangle_j$ и основным состояниями $|-\rangle_j$ j -го кубита ($j = 1, 2$); $\eta^\dagger$ и η — операторы рождения и уничтожения фотонов поля резонатора; γ — константа кубит-фотонного взаимодействия; Ω — расстройка частоты поля и частоты резонансного перехода в кубите и Σ — константа изинговского взаимодействия кубитов.

Выберем в качестве начального состояния кубитов когерентные сепарабельные состояния, которые представляют собой суперпозиции возбужденного и основного состояния:

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = \cos \theta_1 |+\rangle_1 + \sin \theta_1 |-\rangle_1,$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = \cos \theta_2 |+\rangle_2 + \sin \theta_2 |-\rangle_2, \quad (2)$$

где θ_1 и θ_2 — параметры, определяющие степень начальной когерентности кубитов Q_1 и Q_2 соответственно.

Такие начальные состояния можно получить для кубитов в резонаторе с помощью микроволновых импульсов определенной длительности. Выбирая определенным образом параметры θ_1 и θ_2 , мы можем получить четыре некогерентных сепарабельных начальных состояния кубитов: $|+, +\rangle$, $|+, -\rangle$, $|-, +\rangle$, $|-, -\rangle$. Например, состоянию $|+, -\rangle$ соответствуют параметры $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi/2$.

Начальное состояние поля резонатора выберем в виде теплового состояния с матрицей плотности

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|.$$

Здесь весовые коэффициенты есть

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ — среднее число фотонов в моде

$$\bar{n} = (\exp [\hbar\omega_{cav}/k_B T] - 1)^{-1},$$

k_B — постоянная Больцмана и T — температура резонатора.

Прежде чем рассматривать взаимодействие двух кубитов с тепловым полем, сначала изучим динамику двух кубитов, взаимодействующих с электромагнитным полем резонатора в фоковских состояниях. Для получения точной динамики рассматриваемой модели в данном случае мы используем так называемые "одетые" состояния или собственные функции гамильтониана взаимодействия (1). Предположим, что число возбуждения системы "кубиты + поле" равно n ($n \geq 1$). Тогда эволюция вектора состояния рассматриваемой системы будет происходить в гильбертовом пространстве с базисом

$$|-, -, n+2\rangle, |+, -, n+1\rangle, |-, +, n+1\rangle, |+, +, n\rangle.$$

Тогда, собственные состояния гамильтониана (1) могут быть записаны в виде

$$|\Phi_{in}\rangle = w_{in}(X_{i1n} |-, -, n+2\rangle + X_{i2n} |+, -, n+1\rangle + X_{i3n} |-, +, n+1\rangle + X_{i4n} |+, +, n\rangle) \quad (3)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$w_{in} = 1/\sqrt{|X_{i1n}|^2 + |X_{i2n}|^2 + |X_{i3n}|^2 + |X_{i4n}|^2}$$

$$X_{11,n} = 0, \quad X_{12,n} = -1, \quad X_{13,n} = 1, \quad X_{14,n} = 0,$$

$$X_{i1,n} = -\left(\left(2\sqrt{1+n}\sqrt{2+n}\right) / \left(4 + \zeta^2 + 2n - \zeta\bar{\zeta} - \delta\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i,n}^2\right)\right),$$

$$X_{i2,n} = \left(\sqrt{1+n}(\zeta - \delta - \epsilon_{i,n})\right) / \left(4 + \zeta^2 + 2n - \zeta\bar{\zeta} - \delta\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i,n}^2\right),$$

$$X_{i3,n} = \left(\sqrt{1+n}(\zeta - \delta - \epsilon_{i,n})\right) / \left(4 + \zeta^2 + 2n - \zeta\bar{\zeta} - \delta\epsilon_{i,n} - \epsilon_{i,n}^2\right),$$

$$X_{i4,n} = 1,$$

$$\zeta = \Sigma/\gamma, \quad \bar{\zeta} = \Omega/\gamma.$$

Соответственно, безразмерные значения энергетических уровней есть

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,n} &= E_{1,n}/(\hbar\gamma) = -\zeta, \\ \varepsilon_{2,n} &= E_{2,n}/(\hbar\gamma) = \frac{\zeta}{3} + \operatorname{Re} \left[\frac{-6B_n + 2(\zeta)^2 + 2^{1/3}C_n^{2/3}}{3 \cdot 2^{2/3}C_n^{1/3}} \right], \\ \varepsilon_{3,n} &= E_{3,n}/(\hbar\gamma) = \frac{\zeta}{3} + \operatorname{Re} \left[\frac{(6 + 6i\sqrt{3})B_n + i(2(i - \sqrt{3})(\zeta)^2 + 2^{1/3}(i + \sqrt{3})C_n^{2/3})}{6 \cdot 2^{2/3}C_n} \right], \\ \varepsilon_{4,n} &= E_{4,n}/(\hbar\gamma) = \frac{\zeta}{3} + \operatorname{Re} \left[\frac{(6 - 6i\sqrt{3})B_n + 2i(i + \sqrt{3})(\zeta)^2 + 2^{1/3}(-1 - i\sqrt{3})C_n^{2/3}}{6 \cdot 2^{2/3}C_n^{1/3}} \right],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_n &= -27A_n - 9B_n(\zeta) + 2(\zeta)^3 + \sqrt{27} + \\ &+ \sqrt{27A_n^2 + B_n^2(4B_n - (\zeta)^2) - 2A_n(\zeta)(2(\zeta)^2 - 9B_n)}, \\ A_n &= 6\zeta + \zeta^3 + 4\zeta n + 2\zeta - \zeta\zeta^2, \quad B_n = -6 - \zeta^2 - 4n - \delta^2.\end{aligned}$$

Поставим перед собой задачу найти динамику рассматриваемой модели для начального когерентного состояния кубитов (2) и теплового поля резонатора. В качестве первого шага для решения поставленной задачи как уже было сказано выше, рассмотрим решение уравнения эволюции рассматриваемой системы в случае фоковских начальных состояний электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим полученные результаты на случай теплового состояния поля резонатора.

Предположим, что рассматриваемая система приготовлена изначально в состоянии $|+, -, n+1\rangle$ ($n \geq 0$). В этом случае в момент времени t полная временная волновая функция системы есть

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{12,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{22,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{32,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{42,n}|+, +, n\rangle, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}Z_{i2,n} &= e^{-iE_{1n}t/\hbar} w_{1n} Y_{2in} X_{1in} + e^{-iE_{2n}t/\hbar} w_{2n} Y_{2in} X_{2in} + \\ &+ e^{-iE_{3n}t/\hbar} w_{3n} Y_{2in} X_{3in} + e^{-iE_{4n}t/\hbar} w_{4n} Y_{2in} X_{4in} \quad (i = 1, 2, 3, 4)\end{aligned} \quad (5)$$

и

$$Y_{ijn} = w_{jn} X_{jin}^*.$$

Если начальное состояние системы $|-, +, n+1\rangle$ ($n \geq 0$), то временная волновая функция может быть записана как

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{13,n}|-, -, n+2\rangle + Z_{23,n}|+, -, n+1\rangle + Z_{33,n}|-, +, n+1\rangle + Z_{43,n}|+, +, n\rangle, \quad (6)$$

где коэффициенты $Z_{i3,n}$ могут быть получены из (5) путем замены Y_{2in} на Y_{3in} ($i = 1, 2, 3, 4$).

Для числа фотонов в резонаторе $n = 0$ и начальных состояний кубитов $|+, -\rangle$ и $|-, +\rangle$ временные волновые функции системы есть

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 0} = G_{12}(t)|+, -, 0\rangle + G_{22}(t)|-, +, 0\rangle + G_{32}(t)|-, -, 1\rangle, \quad (7)$$

и

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 0} = G_{13}(t)|+, -, 0\rangle + G_{23}(t)|-, +, 0\rangle + G_{33}(t)|-, -, 1\rangle \quad (8)$$

соответственно. Временные коэффициенты в формулах (7) и (8) есть

$$G_{12} = G_{13} = -\frac{2ie^{\frac{1}{2}it\zeta} \sin \left[\frac{1}{2}t\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right]}{\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}},$$

$$\begin{aligned}
 G_{22} = G_{23} &= \frac{1}{4\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} e^{-\frac{1}{2}it(-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} \times \\
 &\times \left(\left(-1 + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \right) (2\zeta - \delta) + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2e^{\frac{1}{2}it(2\zeta J + 3\alpha - \delta + \sqrt{8 + (-2J + \alpha + \delta)^2})} \sqrt{8 + (-2 + \delta)^2} \right), \\
 G_{32} = G_{33} &= \frac{1}{4\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} e^{-\frac{1}{2}it(-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} \times \\
 &\times \left(\left(-1 + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \right) (2\zeta - \delta) + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - 2e^{\frac{1}{2}it(2\zeta - \delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Для начальных состояний $|+, +, n\rangle$ и $|-, -, n+2\rangle$ ($n \geq 0$) временные волновые функции системы могут быть представлены в следующем виде:

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{11, n} |-, -, n+2\rangle + Z_{21, n} |+, -, n+1\rangle + Z_{31, n} |-, +, n+1\rangle + Z_{41, n} |+, +, n\rangle, \quad (9)$$

и

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, n} = Z_{14, n} |-, -, n+2\rangle + Z_{24, n} |+, -, n+1\rangle + Z_{34, n} |-, +, n+1\rangle + Z_{44, n} |+, +, n\rangle \quad (10)$$

соответственно. Коэффициенты $Z_{i1, n}$ ($Z_{i4, n}$) могут быть получены из (5) путем замены Y_{2in} на Y_{1in} (Y_{4in}) ($i = 1, 2, 3, 4$).

Для начального состояния $|-, -, 1\rangle$ временная волновая функция есть

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 1} = G_{14}^{(t)} |-, -, 1\rangle + G_{24}^{(t)} |+, -, 0\rangle + G_{34}^{(t)} |-, +, 0\rangle, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{14}(t) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}it(-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})} (-2(-1 + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}}) \zeta -}{2\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} - \\
 &- \frac{-\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} + e^{it\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}} (\delta + \sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2})}{2\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}}, \\
 G_{24}(t) &= -\frac{2ie^{\frac{1}{2}it\zeta} \sin \left[\frac{1}{2}t\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right]}{\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}}, \\
 G_{34}(t) &= -\frac{2ie^{\frac{1}{2}it\zeta} \sin \left[\frac{1}{2}t\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2} \right]}{\sqrt{8 + (-2\zeta + \delta)^2}}.
 \end{aligned}$$

Наконец, для начального состояния $|-, -, 0\rangle$ мы имеем

$$|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2, 0} = G_{44}(t) |-, -, 0\rangle, \quad (12)$$

где $G_{44}(t) = 1$.

Используя выражения (3)–(10), мы можем получить временную матрицу плотности для полной системы "два кубита + мода поля" $\rho_{Q_1, Q_2, F}(t)$ в случае теплового состояния поля резонатора и когерентных состояний кубитов (2). Усредняя полную матрицу плотности по переменным поля, мы можем получить редуцированную двухкубитную матрицу плотности

$$\rho_{Q_1, Q_2}(t) = Tr_F \rho_{Q_1, Q_2, F}(t). \quad (13)$$

В двухкубитном базисе

$$|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle$$

матрица плотности (11) имеет вид

$$\rho_{Q_1, Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & \rho_{23}^* & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{14}^* & \rho_{24}^* & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{41,n}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{42,n-1}|^2 + bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{42,n-1} Z_{43,n-1}^* + \\ &+ cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{43,n-1} Z_{42,n-1}^* + |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{43,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{44,n-2}|^2, \\ \rho_{12} &= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{22,n-1}^* + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{23,n-1} + \\ &+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{42,n-1} Z_{24,n-2} + cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{43,n-1} Z_{24,n-2}^* + \\ &+ p_1 (bd^* Z_{42,0} G_{24}^* + cd^* Z_{43,0} G_{24}^*) + p_0 (ab^* Z_{41,0} G_{22}^* + ac^* Z_{41,0} G_{23}^*), \\ \rho_{13} &= ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{32,n-1} + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{41,n} Z_{33,n-1}^* + \\ &+ bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{42,n-1} Z_{34,n-2}^* + cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{43,n-1} Z_{34,n-2} + \\ &+ p_1 (bd^* Z_{42,0} G_{34}^* + cd^* Z_{43,0} G_{34}^*) + p_0 (ab^* Z_{41,0} G_{32}^* + ac^* Z_{41,0} G_{33}^*), \\ \rho_{14} &= ad^* \sum_{n=2} p_n Z_{41,n} Z_{14,n-2}^* + p_1 ad^* Z_{41,1} G_{14}^* + p_0 ad^* Z_{41,0}, \\ \rho_{22} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{21,n}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{24,n-2}|^2 + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{23,n-1}^* + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{22,n-1}^* + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{23,n-1}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{22,n-1}|^2 + \\ &+ p_1 |d|^2 |G_{24}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{22}|^2 + bc^* G_{22} G_{23}^* + p_0 (cb^* G_{23} G_{22}^* |c|^2 |G_{23}|^2)), \\ \rho_{23} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n Z_{21,n} Z_{31,n}^* + |d|^2 \sum_{n=2} p_n Z_{24,n-2} Z_{34,n-2}^* + \\ &+ bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{33,n-1}^* + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{32,n-1} + \\ &+ |c|^2 \sum_{n=1} p_n Z_{23,n-1} Z_{33,n-1}^* + |b|^2 \sum_{n=1} p_n Z_{22,n-1} Z_{32,n-1}^* + \\ &+ p[1] |d|^2 G_{24} G_{23}^* + p[0] (|b|^2 G_{22} G_{32}^* + bc^* G_{22} G_{33}^* + cb^* G_{23} G_{32}^* + |c|^2 G_{23} G_{33}^*), \\ \rho_{33} &= |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{31,n}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{32,n-1}|^2 + bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{32,n-1} Z_{33,n-1}^* + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{33,n-1} Z_{32,n-1}^* + |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{33,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{34,n-2}|^2 + \\
 & + p_1 |d|^2 |G_{34}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{32}|^2 + bc^* G_{32} G_{33}^* + cb^* G_{33} G_{32}^* + |c|^2 |G_{33}|^2, \\
 & \rho_{34} = ab^* \sum_{n=1} p_n Z_{31,n} Z_{12,n-1} + ac^* \sum_{n=1} p_n Z_{31,n} Z_{13,n-1} + \\
 & + bd^* \sum_{n=2} p_n Z_{32,n-1} Z_{14,n-2}^* + cd^* \sum_{n=2} p_n Z_{33,n-1} Z_{14,n-2}^* + \\
 & + p_1 (bd^* Z_{32,0} G_{14}^* + cd^* Z_{33,0} G_{14}^*) + p_0 (ab^* Z_{31,0} G_{12}^* + ac^* Z_{31,0} G_{13}^*) + \\
 & + p_0 (bd^* G_{32} + cd^* G_{33}, \\
 & \rho_{44} = |a|^2 \sum_{n=0} p_n |Z_{11}|^2 + |b|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{12,n-1}|^2 + bc^* \sum_{n=1} p_n Z_{12,n-1} Z_{13,n-1}^* + \\
 & + cb^* \sum_{n=1} p_n Z_{13,n-1} Z_{12,n-1}^* + |c|^2 \sum_{n=1} p_n |Z_{13,n-1}|^2 + |d|^2 \sum_{n=2} p_n |Z_{14,n-2}|^2 + \\
 & + p_1 |d|^2 |G_{14}|^2 + p_0 (|b|^2 |G_{12}|^2 + bc^* G_{12} G_{13}^* + cb^* G_{13} G_{12}^* + |c|^2 |G_{13}|^2 + |d|^2).
 \end{aligned}$$

Здесь $a = \cos \theta_1 \cos \theta_2$, $b = \cos \theta_1 \sin \theta_2$, $c = \sin \theta_1 \cos \theta_2$, $d = \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

Для двухкубитной системы, описываемой редуцированной матрицей плотности (12) в качестве количественной меры перепутывания кубитов, может быть выбран параметр, называемый отрицательностью [19; 20]. Указанный параметр можно представить в виде

$$\varepsilon = -2 \sum_i \chi_i^-, \quad (15)$$

где χ_i – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной матрицы $\rho_{Q_1, Q_2}^{T_1}(t)$.

Для когерентных начальных состояний кубитов рассматриваемая матрица имеет вид

$$\rho_{Q_1, Q_2}^{T_1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}^* & \rho_{23}^* \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{14}^* & \rho_{24}^* \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{34}^* & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Собственные значения матрицы плотности (14) могут быть найдены в аналитическом виде. Однако они имеют настолько громоздкий вид, что в настоящей работе указанные матричные элементы и отрицательность вычислялись посредством численных расчетов.

2. Результаты расчетов

На рис. 2.1 представлена временная зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для случая резонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора, различных значений параметра изинговского взаимодействия кубитов и фиксированного значения среднего числа тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 10$. Сплошные кривые на рисунках соответствуют когерентным начальным состояниям кубитов $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, а штриховые линии – сепарабельным состояниям кубитов вида $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle$. Численное моделирование, показало, что временные зависимости отрицательности $\varepsilon(t)$ для случая ферромагнитного типа связи кубитов ($\zeta < 0$) и антиферромагнитного типа связи кубитов ($\zeta > 0$) полностью совпадают для любых значений параметров модели.

Из рисунка 2.1 хорошо видно, что в случае резонансного взаимодействия максимальная степень перепутывания существенно возрастает при наличии начальной когерентности состояний кубитов. При этом зависимость максимальной степени перепутывания кубитов от безразмерного параметра изинговского взаимодействия кубитов в случае когерентных начальных состояний кубитов носит немонотонный характер. Для малых значений константы изинговского взаимодействия ($0 \leq \zeta < 0.05$) увеличение указанного параметра приводит к быстрому росту максимальной степени перепутывания. В области же значений безразмерного параметра изинговского взаимодействия $\zeta > 0.05$ увеличение интенсивности изинговского взаимодействия практически не влияет на максимальную степень перепутывания кубитов. Указанный параметр существенно влияет на период осцилляций Раби отрицательности.

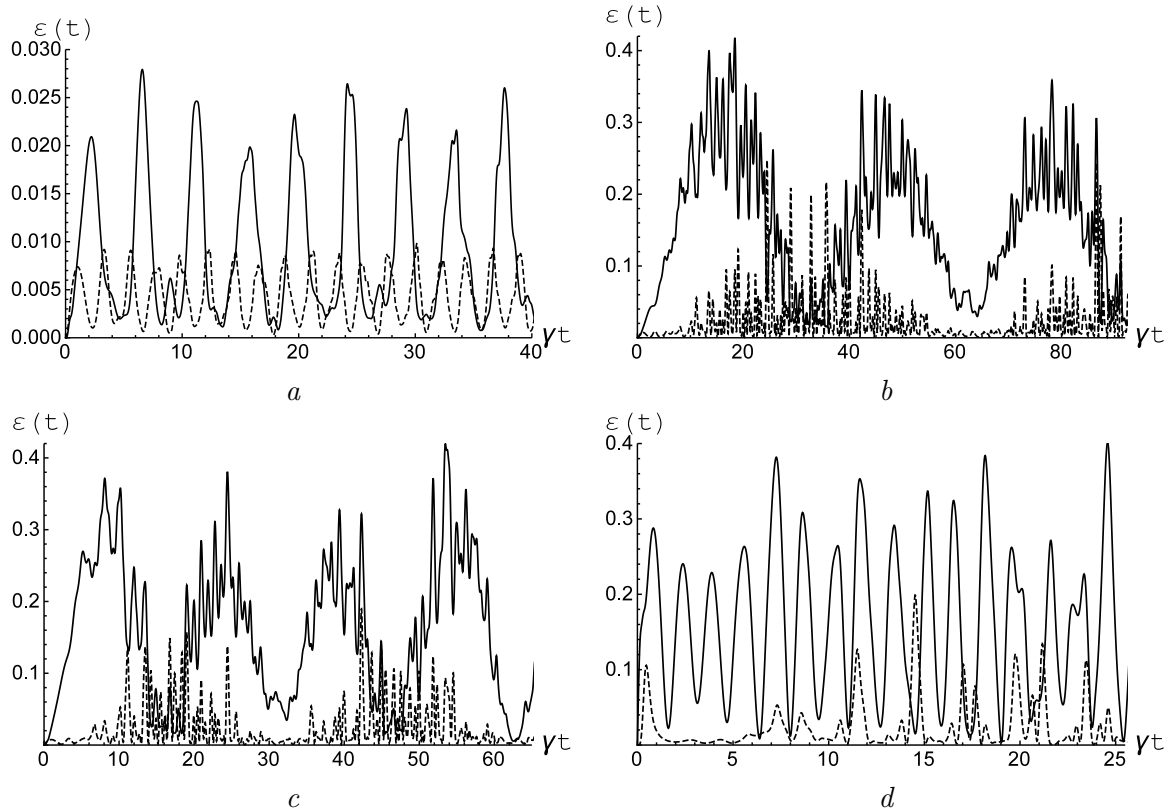


Рис. 2.1. Зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для резонансного взаимодействия кубитов и поля. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 0.01$. Сплошные линии соответствуют когерентному состоянию кубитов вида

$|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, а штриховые линии — сепарабельному состоянию кубитов вида $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle$. Безразмерный параметр изинговского взаимодействия: $\zeta = 0$ (a), $\zeta = 0.05$ (b), $\zeta = 0.1$ (c) и $\zeta = 1$ (d)

Fig. 2.1. The negativity $\varepsilon(t)$ vs scaled time γt for resonance interaction between qubits and field. The mean thermal photon number in the mode $\bar{n} = 0.01$. The solid lines correspond to coherent initial qubits state $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, and the dashed lines correspond to separable qubits state $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle$. The scaled Ising couplings are $\zeta = 0$ (a), $\zeta = 0.05$ (b), $\zeta = 0.1$ (c) and $\zeta = 1$ (d)

На рис. 2.2 представлена временная зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для случая нерезонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора, когерентных начальных состояний кубитов $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$, различных значений безразмерного параметра расстройки ξ и фиксированных значений безразмерной константы изинговского взаимодействия ζ и среднего числа тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 10$. Из рисунка 2.2 хорошо видно, что при увеличении расстройки влияние начальной когерентности кубитов на степень их перепутывания существенно уменьшается.

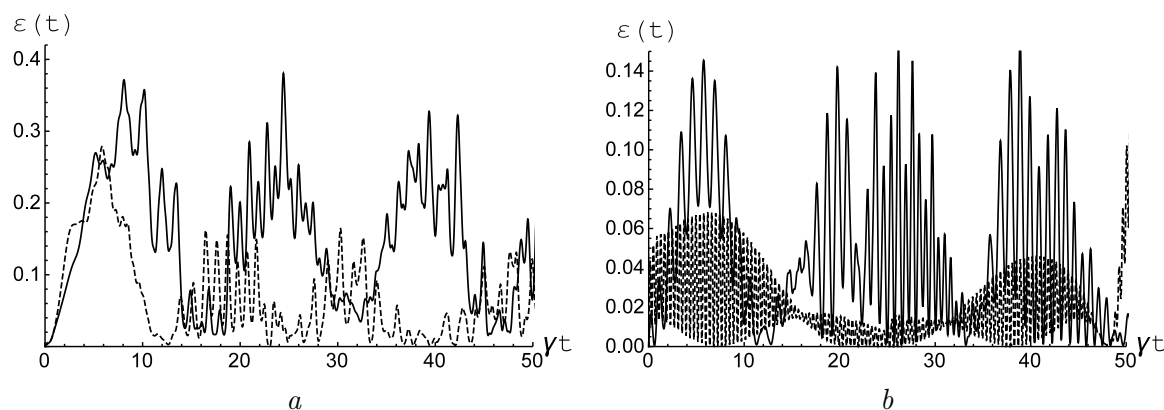


Рис. 2.2. Зависимость отрицательности $\varepsilon(t)$ от безразмерного времени γt для нерезонансного взаимодействия кубитов и поля. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 10$. Безразмерный параметр изинговского взаимодействия $\zeta = 0.1$. Начальное когерентное состояние кубитов $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$. Безразмерный параметр расстройки $\xi = 0$ (сплошная линия) и $\xi = 1$ (штриховая линия) (a), $\xi = 5$ (сплошная линия) и $\xi = 15$ (штриховая линия) (b)

Fig. 2.2. The negativity $\varepsilon(t)$ vs scaled time γt for not-resonance interaction between qubits and field. The mean thermal photon number in the mode $\bar{n} = 10$. The scaled Ising coupling $\zeta = 0.1$. Initial coherent qubits state $|\Psi(0)\rangle_{Q_1} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 + |-\rangle_1)$, $|\Psi(0)\rangle_{Q_2} = 1/\sqrt{2}(|+\rangle_1 - |-\rangle_1)$. Scaled detuning $\xi = 0$ (solid) and $\xi = 1$ (dashed) (a), $\xi = 5$ (solid) and $\xi = 15$ (dashed) (b)

Заключение

В настоящей работе мы нашли точную динамику модели, состоящей из двух идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой теплового поля идеального резонатора, для начальных когерентных состояний кубитов при наличии их прямого взаимодействия изинговского типа. Полученное точное решение для квантового уравнения Лиувилля рассматриваемой модели позволило нам рассчитать временную зависимость параметра перепутывания кубитов — отрицательности для различных параметров модели. Расчеты показали, что в случае резонансного взаимодействия кубитов и поля наличие начальной когерентности кубитов приводит к существенному возрастанию максимальной степени их перепутывания. При этом влияние прямого взаимодействия кубитов на степень их перепутывания имеет важное значение для малых значений параметра прямого взаимодействия $\Sigma < 0.05\gamma$. В случае нерезонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора показано, что при увеличении расстройки влияние начальной когерентности кубитов на степень их перепутывания существенно уменьшается.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Осман А., Фархутдинова А.Р., Башкиров Е.К. Влияние начальной атомной когерентности и прямого взаимодействия на перепутывание кубитов в двухкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 86–98. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-86-98.

© Осман А., Фархутдинова А.Р., Башкиров Е.К., 2025

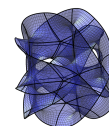
Али Осман (ali.oth@yandex.ru) — аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Адэля Рахимовна Фархутдинова (adely.010k@gmail.com) – студент группы 4401-030302D, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Евгений Константинович Башкиров (bashkirov.ek@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Souza A.M., Sarthour R.S., Oliveira I.S. Entanglement in many body systems // *Physica B: Condensed Matter*. 2023. Vol. 653. Article number 414511. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2022.414511>. EDN: <https://elibrary.ru/aqzkyu>.
- [2] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Reports on Progress in Physics*. 2011. Vol. 74, number 10. Article number 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [3] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Review of Modern Physics*. 2014. Vol. 86, issue 1. P. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [4] Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of Quantum and Semiclassical radiation Theories with Application to the Beam Maser // *Proceedings of the IEEE*. 1963. Vol. 51, issue 1. P. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [5] Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes-Cummings model // *Journal of Modern Optics*. 1995. Vol. 40, issue 7. P. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [6] Larson L., Mavrogordatos T., Parkins S., Vidiella-Barranco A. The Jaynes-Cummings model: 60 years and still counting // *Journal of the Optical Society of America B*. 2024. Vol. 41, issue 8. P. JCM1-JCM4. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.536847>.
- [7] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Physical Review A*. 2002. Vol. 65, issue 4. Article number 040101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [8] Li L.-L., Xiong H., Zubairy M.S. Coherence-induced entanglement // *Physical Review A*. 2005. Vol. 72, issue 1. Article number 010303(R). DOI: [10.1103/PhysRevA.72.010303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.010303).
- [9] Wang X.-Y., Du S.-D., Chen X.-S. Coherence-enhanced and -controlled entanglement of two atoms in a single-mode thermal field // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2006. Vol. 39, number 18. P. 3805–3814. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/18/010>.
- [10] Hu Y.-H., Fang M.-F., Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes // *Chinese Physics*. 2007. Vol. 16, number 8. P. 2407–2414. DOI: <https://doi.org/10.1088/1009-1963/16/8/042>.
- [11] Hu Y.-H., Fang M.-F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field // *Communications in Theoretical Physics*. 2010. Vol. 54, number 3. P. 421–426. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/3/08>.
- [12] Башкиров Е.К., Мастюгин М.С. Влияние атомной когерентности на перепутывание атомов с двухфотонными переходами с учетом динамического штарковского сдвига // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2014. Т. 17, № 2. С. 7–12. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22155446>. EDN: <https://elibrary.ru/sqvnjh>.
- [13] Hu Y.-H., Fang M.-F., Jiang C.-L., Zeng K. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature // *Chinese Physics B*. 2008. Vol. 17, number 5. P. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>.
- [14] Bashkirov E.K., Mastugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions // *Pramana-Journal of Physics*. 2015. Vol. 84. P. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12043-014-0836-0>.



- [15] Башкиров Е.К. Динамика двухкубитной модели Тависа — Каммингса при наличии взаимодействия кубитов изинговского типа // Компьютерная оптика. 2024. Т. 48, № 4. С. 475–482. DOI: <http://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1372>.
- [16] Zagoskin A, Blais A. Superconducting qubits // La Physique au Canada. 2007. Vol. 63. P. 215–227. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0805.0164>.
- [17] Yu G.-D., Li H.-O., Cao G., Xiao M., Jiang H.-W., Guo X.-P. Tunable capacitive coupling between two semiconductor charge qubits // Nanotechnology. 2016. Vol. 27, number 32. Article number 324003. DOI: <http://doi.org/10.1088/0957-4484/27/32/324003>.
- [18] Hita-Perez M., Jauma G., Pino M., Garcia-Ripoll J.J. Ultrastrong capacitive coupling of flux qubits. // Physical Review Applied. 2022. Vol. 17, issue 1. Article number 014028. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.014028>.
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, issue 8. P. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, issues 1–2. P. 1–8. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-86-98

Influence of initial atomic coherence and direct coupling on qubits entanglement in two-qubit Tavis — Cummings model

Othman A. , Farhutdinova A.R. , Bashkirov E.K. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; ali.oth@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-8811-2521 (A.); adely.010k@gmail.com; ORCID: 0009-0006-2391-6320 (A.R.); bashkirov.ek@ssau.ru; ORCID: 0000-0001-8682-4956 (E.K.);

Received: 11.01.2025

Revised: 09.02.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. The exact dynamics of a model consisting of two identical qubits interacting non-resonantly with the electromagnetic field mode of an ideal resonator via single-photon transitions is found in the presence of direct Ising interaction of qubits. The exact solution is used to calculate the two-qubit negativity of qubits in the case of a coherent initial state of qubits and a thermal state of the resonator field. It is shown that in the case of resonant interaction of qubits with the field, the initial atomic coherence leads to a significant increase in the maximum degree of entanglement. The inclusion of direct Ising interaction of qubits can significantly enhance the entanglement of qubits in both coherent and non-coherent initial states of qubits. In the case of non-resonant interaction of qubits and the resonator field, the detuning leads to a weakening of the effect of atomic coherence on the dynamics of qubit entanglement.

Key words: qubits; coherent qubits state; cavity; thermal field; entanglement; negativity; Ising coupling.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Othman A., Farhutdinova A.R., Bashkirov E.K. Influence of initial atomic coherence and direct coupling on qubits entanglement in two-qubit Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 86–98. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-86-98. (In Russ.)

© Othman A., Farhutdinova A.R., Bashkirov E.K., 2025

Ali Othman (ali.oth@yandex.ru) – postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Adelya R. Farhutdinova (adely.010k@gmail.com) – student of the Group 4401-030302D, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov (bashkirov.ek@ssau.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Souza A.M., Sarthour R.S., Oliveira I.S. Entanglement in many body systems. *Physica B: Condensed Matter*, 2023, vol. 653, Article number 414511. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2022.414511>. EDN: <https://elibrary.ru/aqzkyy>.
- [2] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, volume 74, number 10, Article number 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [3] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation. *Review of Modern Physics*, 2014, vol. 88, issue 1, pp. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [4] Jaynes E.T., Cummings F.W. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser. *Proceedings of the IEEE*, 1963, vol. 51, issue 1, pp. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [5] Shore B.W., Knight P.L. On the Jaynes-Cummings Model. *Journal of Modern Optics*, 1995, vol. 40, issue 7, pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [6] Larson L., Mavrogordatos T., Parkins S., Vidiella-Barranco A. The Jaynes-Cummings model: 60 years and still counting. *Journal of the Optical Society of America B.*, 2024, vol. 41, issue 8, pp. JCM1–JCM4. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.536847>.
- [7] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review A.*, 2002, vol. 65, issue 4, Article number 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [8] Li L.-L., Xiong H., Zubairy M.S. Coherence-induced entanglement. *Physical Review A.*, 2005, vol. 72, issue 1, Article number 010303(R). DOI: [10.1103/PhysRevA.72.010303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.010303).
- [9] Wang X.-Y., Du S.-D., Chen X.-S. Coherence-enhanced and -controlled entanglement of two atoms in a single-mode thermal field. *Journal of Physics B.: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2006, vol. 39, number 18, pp. 3805–3814. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/18/010>.
- [10] Hu Y.-H., Fang M.-F., Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes. *Chinese Physics*, 2007, vol. 16 (8), pp. 2407–2414. DOI: <https://doi.org/10.1088/1009-1963/16/8/042>.
- [11] Hu Y.-H., Fang M.-F. Coherence-Enhanced Entanglement Induced by a Two-Mode Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2010, vol. 54, number 3, pp. 421–426. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/3/08>.
- [12] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of atomic coherence on entanglement of atoms with two-photon transitions taking into account the dynamical Stark shift. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 7–12. (In Russ.)
- [13] Hu Y.-H., Fang M.-F., Jiang C.-L., Zeng K. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature. *Chinese Physics B.*, 2008, vol. 17, number 5, pp. 1784–1790. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/5/039>.
- [14] Bashkirov E.K., Mastuyugin M.S. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions. *Pramana-Journal of Physics*, 2015, vol. 84, pp. 127–135. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12043-014-0836-0>.

- [15] Bashkirov E.K. Dynamics of a two-qubit Tavis-Cummings model in the presence of an Ising-type interaction between qubits. *Computer Optics*, 2024, vol. 48, no. 4, pp. 475–482. DOI: <http://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1372>. (In Russ.)
- [16] Zagoskin A., Blais A. Superconducting qubits. *La Physique au Canada*, 2007, vol. 63, pp. 215–227. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.0805.0164>.
- [17] Yu G.-D., Li H.-O., Cao G., Xiao M., Jiang H.-W., Guo X.-P. Tunable capacitive coupling between two semiconductor charge qubits. *Nanotechnology*, 2016, vol. 27, number 32, Article number 324003. DOI: <http://doi.org/10.1088/0957-4484/27/32/324003>.
- [18] Hita-Perez M., Jauma G., Pino M., Garcia-Ripoll J.J. Ultrastrong capacitive coupling of flux qubits. *Physical Review Applied*, 2022, vol. 17, issue 1, Article number 014028. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.17.014028>.
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, pp. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issues 1–2, pp. 1–8. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).