DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33

УДК 517.956

Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения

Пулькина Л.С.*, *Смирнова А.Н.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; louise@samdiff.ru; ORCID: 0000-0001-7947-6121 (Л.С.); Na5anya@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-2925-1646 (А.Н.);

Поступила: *17.02.2025*
Рассмотрена: *25.03.2025*
Принята: *07.04.2025*

Научная статья

Аннотация. В статье рассматривается нелокальная задача для гиперболического уравнения в характеристической области. В качестве дополнительных условий заданы значения интегралов от искомого решения, что делает невозможным применение классических методов доказательства разрешимости задачи. Предложенный в статье подход позволяет найти условия, выполнение которых гарантирует существование не более одного решения задачи, а в частном случае — получить явный вид решения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение; задача Гурса; нелокальные условия.

Введение

Задачи с нелокальными условиями, одной из которых посвящена статья, активно изучаются в настоящее время. Причин интереса к таким задачам по крайней мере две: исследование разрешимости нелокальных задач требует разработки новых методов, к тому же, как стало ясно в последнее время, математические модели, основанные на нелокальных задачах для дифференциальных уравнений, точнее описывают некоторые процессы и явления, изучаемые современным естествознанием [1; 2]. Одним из удобных способов задания нелокальных условий является представление их в виде интегралов от искомого решения. Именно такие условия заданы в задаче, рассматриваемой в статье. Так как область, в которой ищется решение, представляет собой характеристический прямоугольник, то такую задачу принято называть интегральным аналогом задачи Гурса.

Отметим некоторые статьи, посвященные близким вопросам [3–11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $\Omega = (0,\alpha) \times (0,\beta)$ уравнение

$$u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu = f(x,y) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\int\limits_0^\beta u(x,y)dy = \varphi(x), \quad \int\limits_0^\alpha u(x,y)dx = \psi(y). \tag{2}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения, его правая часть, а также функции $\phi(x), \psi(x)$ достаточно гладкие.

Исследование разрешимости задачи (1)–(2) начнем с вывода условий на данные, обеспечивающие существование не более одного решения.

2. Единственность решения задачи (1)–(2)

Теорема 1. Если $A_y, B_x, C_{xy} \in C(\overline{\Omega}), C_{xy} \geq 0$ и для любого вектора (p_1, p_2) выполняется неравенство $A_y p_1^2 - 2Cp_1p_2 + B_x p_2^2 \geq 0,$ то существует не более одного решения задачи (1)–(2). Эта теорема доказана в [4], но для дальнейшего нам удобно привести вкратце ее доказательство.

Доказательство.

Пусть $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — два различных решения. Тогда u удовлетворяет уравнению (1) с $f = 0$ и

$$\int\limits_0^\beta u(x,y)dy = 0, \quad \int\limits_0^\alpha u(x,y)dx = 0. \tag{2°}$$

Умножим равенство (1) на $\int\limits_0^y\int\limits_0^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha \Big(u_{xy} + (Au)_x + (Bu)_y + Cu\Big)\int\limits_0^y\int\limits_0^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta dxdy = 0.$$

Интегрируя по частям, получим, учитывая (2°):

$$\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha \Big[u^2 + \frac{1}{2}A_y\Big(\int\limits_0^y u d\eta\Big)^2 + \frac{1}{2}B_x\Big(\int\limits_0^x u d\xi\Big)^2 -$$

$$-C\int\limits_0^y u d\eta\int\limits_0^x u d\xi + \frac{1}{2}C_{xy}\Big(\int\limits_0^y\int\limits_0^x u d\xi d\eta\Big)^2\Big]dxdy = 0, \tag{3}$$

откуда и следует, что $u = 0$, тем самым утверждение доказано. Заметим, что условие единственности решения уравнения (1) в случае, если $A_y = 0, B_x = 0$, приводит к требованию $C = 0$. Действительно, если нет дополнительных условий, например ограничений на размер или конфигурацию области Ω, то нет и гарантии единственности решения для произвольной $C(x,y)$, что показывает пример в статье [4]. Найдем условия, при выполнении которых и в этом случае задача имеет не более одного решения.

Теорема 2. Если $\max\limits_{\overline{\Omega}} C(x,y) < \frac{2}{\alpha^2+\beta^2}$, то существует не более одного решения задачи (1)–(2).

Доказательство.

Рассмотрим теперь (3) в том случае, когда $A_y = B_x = 0$.

$$\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha \Big[u^2 - C(x,y)\int\limits_0^y u d\eta\int\limits_0^x u d\xi + \frac{1}{2}C_{xy}\Big(\int\limits_0^y\int\limits_0^x u d\xi d\eta\Big)^2\Big]dxdy = 0. \tag{4}$$

Из (4) при условии $C_{xy} \geq 0$ вытекает неравенство

$$\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha \Big[u^2 + \frac{1}{2}C_{xy}\Big(\int\limits_0^y\int\limits_0^x u d\xi d\eta\Big)^2\Big]dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha |C(x,y)|\Big|\int\limits_0^y u d\eta\Big|\Big|\int\limits_0^x u d\xi\Big|dxdy \tag{5}$$

или

$$\int_0^\beta\int_0^\alpha u^2dxdy \leqslant \int_0^\beta\int_0^\alpha \frac{1}{2}|C_{xy}|\Big(\int_0^y\int_0^x ud\xi d\eta\Big)^2\Big]dxdy+$$

$$+\int_0^\beta\int_0^\alpha |C(x,y)|\Big|\int_0^y ud\eta\Big|\Big|\int_0^x ud\xi\Big|dxdy, \tag{6}$$

если условие $C_{xy}\geq 0$ не выполнено. Займемся сначала неравенством (5).

В силу условия теоремы 1 найдется число $C_0>0$ такое, что $\max\limits_{\overline{\Omega}}|C(x,y)|\leqslant C_0$. Применим неравенство Коши:

$$\Big|\int_0^y ud\eta\Big|\Big|\int_0^x ud\xi\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\int_0^y ud\eta\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\int_0^x ud\xi\Big)^2,$$

а затем неравенство Коши — Буняковского к каждому слагаемому правой части. Получим

$$\frac{1}{2}\Big(\int_0^y ud\eta\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\int_0^x ud\xi\Big)^2 \leqslant \frac{\beta}{2}\int_0^\beta u^2d\eta+\frac{\alpha}{2}\int_0^\alpha u^2d\xi.$$

Тогда (5) принимает вид:

$$\int_0^\beta\int_0^\alpha\Big[u^2+\frac{1}{2}C_{xy}\Big(\int_0^y\int_0^x ud\xi d\eta\Big)^2\Big]dxdy \leqslant \int_0^\beta\int_0^\alpha\frac{C_0}{2}(\alpha^2+\beta^2)u^2d\xi d\eta,$$

и, следовательно, если

$$\gamma = 1-\frac{C_0}{2}(\alpha^2+\beta^2)>0,$$

то $u=0$ и единственность установлена.

Таким образом, если $A_y=B_x=0$ и $C_{xy}\geq 0$, то не может существовать более одного решения, если

$$C_0<\frac{2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Если неравенство $C_{xy}\geq 0$ не гарантировано, то рассмотрим неравенство (6).

Последнее слагаемое правой части мы оценили выше. Рассмотрим первое слагаемое. Если $C_{xy}\in C(\overline{\Omega})$, то найдется число $C_1>0$, такое, что $\max\limits_{\overline{\Omega}}|C_{xy}|\leqslant C_1$. К интегралу

$$\Big(\int_0^y\int_0^x ud\xi d\eta\Big)^2$$

применим неравенство Коши — Буняковского несколько раз:

$$\Big(\int_0^y\int_0^x ud\xi d\eta\Big)^2 \leq \int_0^y d\eta\int_0^y\Big(\int_0^x ud\xi\Big)^2d\eta \leq$$

$$\leq \int_0^y d\eta\int_0^y x\int_0^x u^2d\xi d\eta \leq \alpha\beta\int_0^\beta\int_0^\alpha u^2dxdy.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^\beta\int_0^\alpha|C_{xy}|\Big(\int_0^y\int_0^x ud\xi d\eta\Big)^2dxdy \leq C_1\frac{\alpha^2\beta^2}{2}\int_0^\beta\int_0^\alpha u^2dxdy.$$

Учитывая второе слагаемое в (6) и его оценку, получим

$$\int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dxdy \leq \left[\frac{1}{2}C_0(\alpha^2+\beta^2)+\frac{\alpha^2\beta^2}{2}C_1\right]\int_0^\beta \int_0^\alpha u^2 dxdy.$$

Поэтому в этом случае единственность решения будет гарантирована, если выполнено неравенство

$$1-\frac{1}{2}C_0(\alpha^2+\beta^2)-\frac{\alpha^2\beta^2}{2}C_1>0.$$

3. Существование решения задачи (1)–(2)

Существование решения задачи Гурса с интегральными условиями для уравнения (1) в весьма общем случае доказано в [4]. Здесь же мы рассмотрим частный случай (1) и получим формулу решения.

Рассмотрим в качестве частного случая уравнение

$$u_{xy}(x,y)+A(y)u_x+B(x)u_y+A(y)B(x)u=F(x,y), \tag{7}$$

а интегральные условия останутся прежними.

Пользуясь видом коэффициентов, запишем (7) так:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_y+A(y)u)+B(x)(u_y+A(y)u)=F(x,y).$$

Введем функцию

$$u_y+A(y)u=V(x,y).$$

Тогда имеем два уравнения:

$$V_x+B(x)V=F(x,y),$$

$$u_y+A(y)u=V(x,y).$$

Рассматривая каждое из них как обыкновенное дифференциальное уравнение, получим решения:

$$V(x,y)=\Big(C_1(y)+\int_0^x F(\xi,y)e^{\int_0^\xi B(\xi')d\xi'}d\xi\Big)e^{-\int_0^x B(\xi)d\xi}, \tag{8}$$

$$u(x,y)=\Big(C_2(x)+\int_0^y V(x,\eta)e^{\int_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\eta\Big)e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta}, \tag{9}$$

где $C_1(y), C_2(x)$ — произвольные функции. Преобразуем (9) с учетом (8). Приведем некоторые вычисления:

$$u(x,y)=\Big(C_2(x)+\int_0^y\Big[C_1(\eta)+\int_0^x F(\xi,\eta)e^{\int_0^\xi B(\xi')d\xi'}d\xi\Big]e^{\int_0^\eta A(\eta')d\eta'-\int_0^x B(\xi)d\xi}d\eta\Big)\times$$

$$\times\, e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta}=C_2(x)e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta}+e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta-\int_0^x B(\xi)d\xi}\int_0^y C_1(\eta)e^{\int_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\eta+$$

$$+\,e^{-\int_0^y A(\eta)d\eta-\int_0^x B(\xi)d\xi}\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)e^{\int_0^\xi B(\xi')d\xi'+\int_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\xi d\eta=$$

$$
= e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi - \int\limits_0^y A(\eta)d\eta}\Big(C_2(x)e^{\int\limits_0^x B(\xi)d\xi} + \int\limits_0^y C_1(\eta)e^{\int\limits_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\eta\Big) +
$$

$$
+ e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta - \int\limits_0^x B(\xi)d\xi}\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)e^{\int\limits_0^\xi B(\xi')d\xi' + \int\limits_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\xi d\eta.
$$

Обозначим

$$
C_2(x)e^{\int\limits_0^x B(\xi)d\xi} = f(x),
$$

$$
\int\limits_0^y C_1(\eta)e^{\int\limits_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\eta = g(y).
$$

Тогда

$$
u(x,y) = \Big(f(x) + g(y)\Big)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi - \int\limits_0^y A(\eta)d\eta} +
$$

$$
+ e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta - \int\limits_0^x B(\xi)d\xi}\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)e^{\int\limits_0^\xi B(\xi')d\xi' + \int\limits_0^\eta A(\eta')d\eta'}d\xi d\eta. \tag{10}
$$

Второе слагаемое правой части (10) известно. Обозначим его $R(x,y)$. Формула приобретает вид

$$
u(x,y) = \Big(f(x) + g(y)\Big)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi - \int\limits_0^y A(\eta)d\eta} + R(x,y). \tag{11}
$$

Найдем $f(x)$ и $g(y)$ из условий (2), применив их к (11):

$$
e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx + e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}g(y)\int\limits_0^\alpha e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx +
$$

$$
+ \int\limits_0^\alpha R(x,y)dx = \psi(y),
$$

$$
e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}f(x)\int\limits_0^\beta e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy + e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy +
$$

$$
+ \int\limits_0^\beta R(x,y)dy = \phi(x),
$$

откуда, обозначив

$$
a = \int\limits_0^\alpha e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx, \quad b = \int\limits_0^\beta e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy,
$$

$$
S_\alpha(y) = \Big(\psi(y) - \int\limits_0^\alpha R(x,y)dx\Big)e^{\int\limits_0^y A(\eta)d\eta},
$$

$$
S_\beta(x) = \Big(\phi(x) - \int\limits_0^\beta R(x,y)dy\Big)e^{\int\limits_0^x B(\xi)d\xi},
$$

получим

$$f(x) = \frac{1}{b}S_\beta(x) - \frac{1}{b}\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy,$$

$$g(y) = \frac{1}{a}S_\alpha(y) - \frac{1}{a}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx. \tag{12}$$

Очевидный путь нахождения $f(x)$ и $g(y)$ — сведение (12) к интегральному уравнению относительно одной из функций. Но мы пойдем другим путем, заметив, что после подстановки (12) в (11) получим соотношение

$$u(x,y) = \Big[\frac{1}{b}S_\beta(x) + \frac{1}{a}S_\alpha(y) - \frac{1}{b}\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy-$$

$$-\frac{1}{a}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx\Big]e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta} + R(x,y), \tag{13}$$

где присутствуют интегралы, содержащие произвольные функции $f(x)$ и $g(y)$. Определим сумму этих интегралов из (12). Умножим первое равенство (12) на $e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}$, второе на $e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}$ и проинтегрируем, соответственно, по $x \in [0,\alpha]$ и $y \in [0,\beta]$:

$$\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx = \frac{1}{b}\int\limits_0^\alpha e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}S_\beta(x)dx - \frac{1}{b}\int\limits_0^\alpha e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy,$$

$$\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy = \frac{1}{a}\int\limits_0^\beta e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}S_\alpha(y)dy - \frac{1}{a}\int\limits_0^\beta e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx.$$

Учитывая введенные обозначения и умножив, соответственно, на $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{b}$, будем иметь

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx = \frac{1}{ab}\int\limits_0^\alpha e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}S_\beta(x)dx - \frac{1}{b}\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy,$$

$$\frac{1}{b}\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy = \frac{1}{ab}\int\limits_0^\beta e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}S_\alpha(y)dy - \frac{1}{a}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^\alpha f(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx + \frac{1}{b}\int\limits_0^\beta g(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy =$$

$$= \frac{1}{2ab}\int\limits_0^\beta e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}S_\alpha(y)dy + \frac{1}{2ab}\int\limits_0^\alpha e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}S_\beta(x)dx. \tag{14}$$

Теперь, подставив (14) в (13), получим решение задачи:

$$u(x,y) = \Big(\frac{1}{b}S_\beta(x) - \frac{1}{2ab}\int\limits_0^\beta S_\alpha(y)e^{-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}dy + \frac{1}{a}S_\alpha(y) \ -$$

$$-\frac{1}{2ab}\int\limits_0^{\alpha} S_\beta(x)e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi}dx\Big)\times e^{-\int\limits_0^x B(\xi)d\xi-\int\limits_0^y A(\eta)d\eta}+R(x,y).$$

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть $A=B=0$, в этом случае задача (1)–(2) имеет не более одного решения, если

$$\frac{C_0}{2}(1+\alpha^2\beta^2)<1,\quad C_0=\max_{\overline{\Omega}}|C(x,y)|.$$

Действительно, предполагая существование двух различных решений u_1,u_2 для их разности получим

$$u_{xy}+C(x,y)u=0, \tag{15}$$

$$\int\limits_0^{\beta} u(x,y)dy=0,\quad \int\limits_0^{\alpha} u(x,y)dx=0.$$

Умножение равенства (15) на $\int\limits_0^y\int\limits_0^x u(\xi,\eta)d\xi d\eta$ и интегрирование по области Ω приводит к

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}\Big[u^2+Cu\int\limits_0^y\int\limits_0^x ud\xi d\eta\Big]dxdy=0,$$

из которого следует неравенство

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha} u^2dxdy\le\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}|C||u|\Big|\int\limits_0^y\int\limits_0^x ud\xi d\eta\Big|.$$

Рассмотрим правую часть этого неравенства и оценим его:

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}|C||u|\Big|\int\limits_0^y\int\limits_0^x ud\xi d\eta\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_0}{2}\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}u^2dxdy+\frac{C_0}{2}\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}\Big(\int\limits_0^y\int\limits_0^x ud\xi d\eta\Big)^2dxdy.$$

Применив неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}\Big(\int\limits_0^y\int\limits_0^x ud\xi d\eta\Big)^2dxdy\le\alpha^2\beta^2\int\limits_0^{\beta}\int\limits_0^{\alpha}u^2dxdy.$$

Следовательно, если

$$\frac{C_0}{2}(1+\alpha^2\beta^2)<1,$$

то $u=0$.

Пусть это условие выполнено. Покажем, что решение задачи (1)–(2) в этом случае существует. Уравнение (1) запишем в этом частном случае:

$$u_{xy}=F(x,y)-C(x,y)u.$$

Тогда, если существует его решение, то имеет место соотношение

$$u(x,y)=f(x)+g(y)+\int\limits_0^y\int\limits_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^y\int\limits_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Применим условия (2) для определения $f(x)$ и $g(y)$:

$$\int_0^\alpha f(x)dx+\alpha g(y)+\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dx-\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dx=\psi(y),$$

$$\beta f(x)+\int_0^\beta g(y)dy+\int_0^\beta\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy-\int_0^\beta\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dy=\phi(x).$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\beta}\Big[\phi(x)-\int_0^\beta g(y)dy-\int_0^\beta\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+\int_0^\beta\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dy\Big],$$

$$g(y)=\frac{1}{\alpha}\Big[\psi(y)-\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dx+\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dx\Big].$$

Проведя некоторые преобразования, получим

$$u(x,y)=-\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\beta\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dxdy+\frac{1}{\beta}\int_0^\beta\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dx-\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta+G(x,y), \tag{16}$$

где

$$G(x,y)=\frac{1}{\beta}\phi(x)-\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\beta\psi(y)dy+\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\beta\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dxdy-$$

$$-\frac{1}{\beta}\int_0^\beta\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dy+\frac{1}{\alpha}\psi(y)-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta dx+\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Преобразуем первые три интеграла из (16)

$$\int_0^\alpha\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta dx=\int_0^y\int_0^\alpha\int_\xi^\alpha C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)dxd\xi d\eta=\int_0^y\int_0^\alpha(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Аналогично поступим с двумя другими интегралами и получим

$$u(x,y)=-\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^\beta\int_0^\alpha(\beta-\eta)(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta+\frac{1}{\alpha}\int_0^y\int_0^\alpha(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{\beta}\int_0^x\int_0^\beta(\beta-\eta)C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi-\int_0^y\int_0^x C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta+G(x,y). \tag{17}$$

Таким образом, мы показали, что если $u(x,y)$ — решение задачи (1)–(2) в случае $A=B=0$, то она удовлетворяет и уравнению (17). Пусть теперь $u(x,y)$ — решение уравнения (17) и имеет производные, входящие в уравнение (1). Тогда, дифференцируя равенство (17) и учитывая введенные обозначения, придем к (1)–(2). Тем самым мы показали, что задача (1)–(2) для случая $A = B = 0$ и операторное уравнение (17) эквивалентны.

Запишем (17) в виде

$$u - Tu = G.$$

Нетрудно убедиться в том, что оператор T вполне непрерывен. Действительно, пусть $\max\limits_{\bar{\Omega}} |u(x,y)| \leq M,\ \ u(x,y)$ — любая функция из $C(\bar{\Omega})$. Так как по условию теоремы коэффициент $C(x,y)$ непрерывен в $\bar{\Omega}$, то найдется $c_0 > 0$, такое, что $\max\limits_{\bar{\Omega}} |C(x,y)| \leq c_0$. Рассмотрим множество функций $\omega(x,y) = Tu$ и покажем, что выполнены все условия теоремы Арцела. Действительно, легко видеть, что

$$|\omega(x,y)| \leq \frac{1}{\alpha\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^\alpha(\beta-\eta)(\alpha-\xi)|C(\xi,\eta)||u(\xi,\eta)|d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta\int\limits_0^x(\beta-\eta)|C(\xi,\eta)||u(\xi,\eta)|d\xi d\eta + \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^y\int\limits_0^\alpha(\alpha-\xi)|C(\xi,\eta)||u(\xi,\eta)|d\xi d\eta +$$

$$+\int\limits_0^y\int\limits_0^x|C(\xi,\eta)||u(\xi,\eta)|d\xi d\eta \leq 4\alpha\beta c_0 M.$$

Это означает, что функции $\omega(x,y)$ равномерно ограничены.

Далее рассмотрим

$$\omega(x_2,y_2) - \omega(x_1,y_1) = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_0^\alpha(\alpha-\xi)C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\beta}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_0^\beta(\beta-\eta)C(\xi,\eta)C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_0^{x_2}C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta - \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_0^{y_1}C(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta d\xi,$$

откуда

$$|\omega(x_2,y_2) - \omega(x_1,y_1)| \leq 2c_0 M(\alpha|y_2-y_1| + \beta|x_2-x_1|)$$

и при $|x_2 - x_1| < \frac{\delta}{2},\ |y_2 - y_1| < \frac{\delta}{2}\ |\omega(x_2,y_2) - \omega(x_1,y_1)| \leq \varepsilon$, где δ выбрано так, что при $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} < \delta \quad 2qc_0M\delta < \varepsilon$. Полученные оценки и проведенные рассуждения приводят к утверждению, что оператор T является вполне непрерывным.

Заключение

Заметим теперь, что однородная задача (1)–(2) описанным выше образом сводится к однородному операторному уравнению $u - Tu = 0$, которое в силу доказанной единственности решения задачи (1)–(2) может иметь только нулевое решение. Это означает, что в силу теоремы Фредгольма операторное уравнение (16) разрешимо, причем существует единственное его решение. Но тогда в силу эквивалентности разрешима и задача (1)–(2), так как легко видеть, что решение операторного уравнения, функция $u(x,y)$, имеет производную u_{xy}.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Пулькина Л.С., Смирнова А.Н. Разрешимость характеристической задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 22–33. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33.

Людмила Степановна Пулькина (louise@samdiff.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Анастасия Николаевна Смирнова (Na5anya@yandex.ru) – студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

[1] Самарский А.А. О некоторых задачах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. URL: https://samarskii.ru/articles/1980/1980_009ocr.pdf.

[2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek,Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, no. 11. P. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).

[3] Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Казанский университет, 2014. 385 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=35064403. EDN: https://elibrary.ru/xpwdjb.

[4] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 279—280. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=48156083. EDN: https://elibrary.ru/vokdva.

[5] Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. // Вестник Российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 139. С. 214–230. DOI: https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. EDN: https://elibrary.ru/ahjfou.

[6] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с. URL: https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl.

[7] Гилев А.В., Кечина О.М., Пулькина Л.С. Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 14–21. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21.

[8] Гилев А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной // Вестник Самарского университета. Естественнаучнная серия. 2020. Т. 26, № 4. С. 25—35. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35.

[9] Кечина О.М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка // Вестник Самарского университета. Естественнаучная серия. 2017. Т. 23, № 1. С. 15–20. URL: https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142.

[10] Gilev A.V., Pulkina L.S. Two Problems for Fourth Order Equations with Nonlocal Conditions in Characteristic Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 270. 547–555 p. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06365-6.

[11] Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22 (1). P. 171–174. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de5770.

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33

On solvability of a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in characteristic domain

Pulkina L.S.*, *Smirnova A.N.

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; louise@samdiff.ru; ORCID: 0000-0001-7947-6121 (L.S.); Na5anya@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-2925-1646 (A.N.);

Received: *17.02.2025*
Revised: *25.03.2025*
Accepted: *07.04.2025*

Scientific article

Abstract. In this article, we study a nonlocal problem for hyperbolic equation in characteristic domain. Additional information on desired solution is given in the form of integrals. This implies that classical methods to justify existence and uniqueness of the solution do not apply. We suggest a slightly different approach. This method enable to find the conditions on data under which the nonlocal problem has at most one solution. We also demonstrate a way to prove the existence of the solution. Moreover, the explicit form of the solution is obtained for certain special case of the equation under consideration.

Key words: hyperbolic equation; Goursat problem; nonlocal conditions.

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Pulkina L.S., Smirnova A.N. On solvability of a nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation in characteristic domain. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 22–33. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-22-33. (In Russ.)

Ludmila S. Pulkina (louise@samdiff.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Anastasia N. Smirnova (Na5anya@yandex.ru) – student, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Samarskii A.A. On certain problems in modern thory of differential equations. *Differential Equations*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: https://samarskii.ru/articles/1980/1980_009ocr.pdf. (In Russ.)

[2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, no. 11, pp. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).

[3] Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A. Equations with dominant partial derivative. Kazan: Kazanskii universitet, 2014, 385 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=35064403. EDN: https://elibrary.ru/xpwdjb. (In Russ.)

[4] Pul'kina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 316–318. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754219. EDN: https://elibrary.ru/lfvpfh. (In English; original in Russian).

[5] Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. DOI: https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. EDN: https://elibrary.ru/ahjfou.

[6] Nakhushev A.M. Loaded equations and their application. Moscow: Nauka, 2012, 232 p. Available at: https://djvu.online/file/GKTM9Py0MW2jl. (In Russ.)

[7] Gilev A.V., Kechina O.M., Pulkina L.S. Characteristic problem for a fourth-order equation with a dominant derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 14–21. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21. (In Russ.)

[8] Gilev A.V. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 25—35. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35. (In Russ.)

[9] Ketchina O.M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 15–20. Available at: https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142. (In Russ.)

[10] Gilev A.V., Pulkina L.S. Two Problems for Fourth Order Equations with Nonlocal Conditions in Characteristic Domain. In: *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 270 (2023), pp. 547–555. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06365-6.

[11] Nahusheva Z.A. A nonlocal problem for partial differential equations. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 171—174. URL: http://mi.mathnet.ru/eng/de5770. (In Russ.)