

Об арифметической природе коэффициентов мультипликативных эта-произведений

Воскресенская Г.В. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; galvosk@mail.ru; ORCID: 0000-0002-6288-5372 (Г.В.);

Поступила: 11.12.2024

Рассмотрена: 20.01.2025

Принята: 07.04.2025

Научная статья



Аннотация. В статье изучается арифметическая природа коэффициентов мультипликативных эта-произведений, называемых также функциями МакКея. Для некоторых функций можно установить соответствие Гекке между коэффициентами функций МакКея и гроссен-характерами Гекке мнимых квадратичных полей. Для других функций МакКея такое соответствие невозможно, но их коэффициенты можно представить в виде сумм, содержащих характеры Гекке. Возникающие характеры Гекке выписываются явно. В статье приведены первые десять коэффициентов для всех функций МакКея. Вычисления основаны на пентагональной формуле Эйлера. В статье также рассказано о связи коэффициентов этих функций с суммами Шимуры.

Ключевые слова: модулярные формы; параболические формы; коэффициенты Фурье; квадратичные поля; характеры Гекке; q-ряды; мультипликативные функции; пентагональная формула Эйлера; суммы Шимуры.

1. Функции МакКея

Целью статьи является изучение связей между коэффициентами функций МакКея и гроссен-характерами Гекке мнимых квадратичных полей. Эти функции были впервые описаны в статье [1]. Мы используем факты из теории модулярных форм из монографий [2–4] и статьи [5] и факты теории чисел из книг [6–8]. В таблицах допускается типичное сокращение: вместо функции $\prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z)$ записывается $\prod_{j=1}^s (a_j z)^{t_j}$. Теоремы 1.1.1, 2.2.1 цитируются, все остальные результаты статьи получены автором. В различных задачах полезно знать первые коэффициенты функций МакКея, которые мы полностью приведем в первом параграфе. Далее мы будем использовать утверждения, приведенные в монографии [2].

Теорема 1.1.1.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \text{ и } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n, \quad f(z), g(z) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$$

для любого n ,

$$1 \leq n \leq M, \quad M = \frac{kN}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad a(n) = b(n).$$

Тогда $f(z) = g(z)$.

Для построения таблиц первых коэффициентов мы используем следующие тождества для рядов Фурье мультипликативных эта-произведений веса 1. Эти тождества получаются из пентагональной формулы Эйлера [9]:

$$\begin{aligned}\eta(23z)\eta(z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+23(6l+1)^2}{24}}, & \eta(22z)\eta(2z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+11(6l+1)^2}{12}}, \\ \eta(21z)\eta(3z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+7(6l+1)^2}{8}}, & \eta(20z)\eta(3z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+5(6l+1)^2}{6}}, \\ \eta(18z)\eta(6z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+3(6l+1)^2}{4}}, & \eta(16z)\eta(8z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+2(6l+1)^2}{3}}, \\ \eta^2(12z) &= \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+l} q^{\frac{(6m+1)^2+(6l+1)^2}{2}}.\end{aligned}$$

Это позволит найти коэффициенты функций МакКея веса 1, от форм веса 1 можно переходить к формам более высоких весов. В частности, мы используем следующий факт, доказанный автором в статье [10]: если функция $g(z)$ — мультипликативное η -произведение веса $k \geq 2$,

$$g(z) \neq \eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \quad \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z),$$

тогда существует такое мультипликативное η -произведение $f(z)$ веса $\frac{k}{2}$, что $g((l+1)z) = f(lz)f(z)$, где $l+1 \mid 24$. Используя это, можно построить таблицы 1.1, 1.2, 1.3.

Таблица 1.1

Table 1.1

$a(n)$	$23 \cdot 1$	$22 \cdot 2$	$21 \cdot 3$	$20 \cdot 4$	$18 \cdot 6$	$16 \cdot 8$	$12 \cdot 12$	6^4	$8^2 \cdot 4^2$	$10^2 \cdot 2^2$	$12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$
$a(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a(2)$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(3)$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1
$a(4)$	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(5)$	0	-1	0	-1	0	0	0	0	-2	-1	-2
$a(6)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(7)$	0	0	-1	0	-1	0	0	-4	0	2	0
$a(8)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a(9)$	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-3	1	1
$a(10)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 1.2

Table 1.2

$a(n)$	$15 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$	$14 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1$	$9^2 \cdot 3^2$	$11^2 \cdot 1^2$	$6^3 \cdot 2^3$	4^6	$8^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1^2$	$7^3 \cdot 1^3$	$6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$
$a(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$a(2)$	-1	-1	0	-2	0	0	-2	-3	-2
$a(3)$	-1	-2	0	-1	-3	0	-2	0	-3
$a(4)$	-1	1	-2	2	0	0	4	5	4
$a(5)$	1	0	0	1	0	-6	0	0	6
$a(6)$	1	2	0	2	0	0	4	0	6
$a(7)$	0	1	-1	-2	2	0	0	-7	-16
$a(8)$	3	-1	0	0	0	0	-8	-3	-8
$a(9)$	1	1	0	-2	9	9	-5	9	9
$a(10)$	-1	0	0	-2	0	0	0	0	-12

Таблица 1.3

Table 1.3

$a(n)$	$5^4 \cdot 1^4$	3^8	$4^4 \cdot 2^4$	$4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4$	$3^6 \cdot 1^6$	2^{12}	$2^8 \cdot 1^8 \cdot 2 \cdot 1^2$	1^{24}
$a(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$a(2)$	-4	0	0	-4	-6	0	-8	-24
$a(3)$	2	0	-4	0	9	-12	12	252
$a(4)$	8	-8	0	16	4	0	64	-1472
$a(5)$	-5	0	-2	-14	6	54	-210	4830
$a(6)$	-8	0	0	0	-54	0	-96	-6048
$a(7)$	6	20	24	0	-40	-88	1016	-16744
$a(8)$	0	0	0	-64	168	0	-512	84480
$a(9)$	-23	0	-11	81	81	-99	0	-113643
$a(10)$	20	0	0	56	-36	0	1680	-115920

2. Характеры Гекке

В этом параграфе мы изложим необходимые сведения о характерах Гекке.

2.1. Определение характера Гекке

Сначала необходимо дать несколько предварительных определений.

Пусть $\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля алгебраических чисел, $\mathfrak{M}$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{O}$. Классы вычетов элементов α по модулю $\mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{O}$, $(\alpha, \mathfrak{M}) = 1$, образуют мультипликативную группу $(\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^*$.

Характером Дирихле по модулю $\mathfrak{M}$ называется гомоморфизм $\chi : (\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Унитарным характером $\mathbb{C}^*$ — непрерывный гомоморфизм $\chi_\infty : \mathbb{C}^* \rightarrow S^1$, где $S^1 = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\}$. Такой характер задается формулой: $\chi_\infty(\alpha) = \frac{\alpha^l}{|\alpha|^l}$. Число l — частота характера χ_∞ .

Пусть I — мультипликативная группа ненулевых дробных идеалов, P — подгруппа главных идеалов, $H = I/P$ — группа классов идеалов. Для любого целого идеала $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}$ $I_{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{A} \subset I, (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = 1\} \subset I$, $P_{\mathfrak{M}} = \{(\alpha) \subset P : (\alpha, \mathfrak{M}) = 1\} \subset P$, $I_{\mathfrak{M}}/P_{\mathfrak{M}} \cong I/P \cong H$.

Всякий гомоморфизм из H в S^1 называется характером группы классов. Существует ровно $h = |H|$ характеров группы классов.

Определение.

Характером Гекке ("грессен-характером") по модулю $\mathfrak{M}$ называется непрерывный гомоморфизм $\psi : I_{\mathfrak{M}} \rightarrow S^1$, для которого существуют такие характеры $\chi : (\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^* \rightarrow S^1$, $\chi_\infty : \mathbb{C}^* \rightarrow S^1$, что $\psi((\alpha)) = \chi(\alpha) \cdot \chi_\infty(\alpha)$.

Для любого $\alpha \in \mathfrak{O}$, $(\alpha, \mathfrak{M}) = 1$, $l \equiv \frac{1}{2} \cdot (\chi(-1) - 1) \pmod{2}$. Характеры Гекке по модулю $\mathfrak{M}$ с частотой $l = 0$ — это в точности характеры группы классов.

Кондуктором характера Гекке по модулю $\mathfrak{M}$ считается наименьший из идеалов $\mathfrak{f} : \mathfrak{f} | \mathfrak{M}$, такой, что ψ продолжается до характера Гекке по модулю $\mathfrak{f}$. Если $\mathfrak{f} = \mathfrak{M}$, то характер Гекке называется примитивным.

2.2. Характеры Гекке и модулярные формы

Пусть ψ — примитивный характер Гекке с кондуктором $\mathfrak{M}$ и частотой l . Положим $\psi(\mathfrak{A}) = 0$ при $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \neq 1$. Получим продолжение до мультипликативной функции на множестве ненулевых целых идеалов.

Теорема 2.2.1. [7]

Пусть грессен-характер ψ по модулю $\mathfrak{M}$ имеет частоту $l \geq 0$, H — верхняя комплексная полуплоскость.

Тогда $f : H \rightarrow \mathbb{C}$, заданная формулой

$$f(z) = \sum_{\mathfrak{A}} \psi(\mathfrak{A}) (N\mathfrak{A})^{\frac{l}{2}} e^{2\pi i z N\mathfrak{A}},$$

принадлежит $M_{l+1}(\Gamma_0(N), \tilde{\chi})$, $N = |D| \cdot N\mathfrak{M}$.

Здесь $\tilde{\chi}(n) = \chi_D(n)\psi(n)$, $\chi_D(n)$ — символ Кронекера. Суммирование ведется по всем целым идеалам $\mathfrak{O}_K$, D — дискриминант поля K .

Если $l \geq 0$, то f — параболическая форма. Если $\mathfrak{M} = (1)$, то $N = |D|$, $\tilde{\chi} = \chi_D$.

3. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(i)$

Если $K = \mathbb{Q}(i)$, то $D = -4$, $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[i]$, имеются четыре единицы ± 1 , $\pm i$, число классов равно 1, все идеалы главные.

3.1. Коэффициенты функции $\eta^2(12z)$

Функция $\eta^2(12z) \in S_1(144, (\frac{-1}{d}))$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{M} = (6)$, $N\mathfrak{M} = 36$. Частота $l = 0$.

Мультипликативная группа фактор-кольца $(\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^* \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, так как с точностью до умножения на $\epsilon \in U = \{\pm 1, \pm i\}$ элемент $\alpha \in (\mathfrak{O}/\mathfrak{M})^*$ имеет один из следующих типов α , эквивалентен $a + bi$, где

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 2 \pmod{6} \\ a \equiv 3 \pmod{6}, & b \equiv 2 \pmod{6} \\ a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 4 \pmod{6} \\ a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$$

В других случаях $(\alpha, \mathfrak{M}) \neq 1$.

Пусть $\beta \equiv 1 + 2i \pmod{6}$, если $\epsilon_1 \cdot \alpha \equiv \beta$, то

$$\begin{cases} \epsilon_2 \cdot \alpha^2 \equiv 3 + 2i \pmod{6}, \\ \epsilon_3 \cdot \alpha^3 \equiv 1 + 4i \pmod{6}, \\ \epsilon_4 \cdot \alpha^4 \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

Здесь $\epsilon_j \in U$.

$\chi_\infty(\alpha) = 1$, так как $l = 0$. Из условия согласования единиц $\forall \epsilon \in U \quad \chi(\epsilon) \cdot \chi_\infty(\epsilon) = 1$ получаем $\chi(\epsilon) = 1$, $\psi(\epsilon) = 1$.

Поэтому искомый характер Гекке определяется на идеале $(\alpha) = (a + bi)$, $(\alpha, 6) = 1$, в зависимости от условий на a и b следующим образом:

$$\psi_1((\alpha)) = \begin{cases} i, & a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 2 \pmod{6}, \\ -1, & a \equiv 3 \pmod{6}, & b \equiv 2 \pmod{6}, \\ -i, & a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 4 \pmod{6}, \\ 1, & a \equiv 1 \pmod{6}, & b \equiv 0 \pmod{6}. \end{cases}$$

$|D| = 4$, $N\mathfrak{M} = 36$, $\psi(n) = 1$, $\chi_D(n) = (\frac{-4}{n})$.

Так как $(d, 2) = 1$, то $\tilde{\chi}(d) = \chi_D(d) = (\frac{-1}{n})$. По теореме Гекке $f(z) \in S_1(\Gamma_0(144), (\frac{-1}{n}))$.

Так как размерность этого пространства равна 1 и первый коэффициент построенной формы равен 1, то $f(z) = \eta^2(12z)$. Получаем формулы для модулярной формы и ее коэффициентов:

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ (\alpha, 6) = 1}} \psi_1((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(12z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ (\alpha, 6) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_1((\alpha)).$$

3.2. Коэффициенты функции $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$

Уровень этой формы равен 32, следует найти модуль характера Гекке с нормой 8, частота $l = 1$.

Для любого нечетного целого гауссова числа β существует единственный элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, ассоциированный с β , такой, что $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$ [7].

В качестве модуля характера возьмем модуль $\mathfrak{M} = (1+i)^3 = (2+2i)$, $N\mathfrak{M} = 8$.

Искомый характер определяется на идеале (α) , где образующий элемент выбран с условием $\alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}$, формулой

$$\psi_2((\alpha)) = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Получаем,

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} (N\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi_2((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} \alpha \cdot e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(8z)\eta^2(4z).$$

Коэффициенты $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$ равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \alpha.$$

3.3. Коэффициенты функции $\eta^6(4z)$

Уровень этой формы равен 16, следует найти модуль характера Гекке с нормой 4, частота $l = 2$.

Для любого нечетного целого гауссова числа β существует элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, ассоциированный с β , такой, что $\alpha \equiv 1 \pmod{(2)}$.

В качестве модуля характера возьмем идеал $\mathfrak{M} = (2)$, $N\mathfrak{M} = 4$.

Искомый характер определяется на идеале (α) , где образующий элемент выбран с условием $\alpha \equiv 1 \pmod{(2)}$, формулой

$$\psi_3((\alpha)) = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}.$$

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} N\alpha \cdot \psi_3((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}}} \alpha^2 \cdot e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(8z)\eta^2(4z).$$

Коэффициенты $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$ равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \alpha^2.$$

3.4. Коэффициенты функции $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$

Уровень этой формы равен 4, частота $l = 4$.

В качестве модуля характера возьмем модуль $\mathfrak{M} = (1)$, $N\mathfrak{M} = 1$.

Искомый характер определяется формулой

$$\psi_4((\alpha)) = \frac{\alpha^4}{|\alpha|^4}.$$

Получаем

$$\sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], N\alpha = n} (N\alpha)^2 \cdot \psi_4((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], N\alpha = n} \alpha^4 \cdot e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z).$$

Коэффициенты $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$ равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i] \\ N\alpha = n}} \alpha^4.$$

4. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

Если $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $D = -3$, $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$, где $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, имеется шесть единиц $\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$, число классов равно 1, все идеалы главные, $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2$.

4.1. Коэффициенты функции $\eta(18z)\eta(6z)$

Уровень этой формы равен 108, частота $l = 0$.

В качестве модуля характера возьмем идеал $\mathfrak{M} = (6)$, $N\mathfrak{M} = 36$.

Искомый характер на простом идеале $(\pi) = (a + bi)$, $((\pi), (6)) = 1$, определяется формулой

$$\psi_5((\alpha)) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2}, \\ \omega, & a \equiv 0 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \\ \omega^2, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

На остальных идеалах характер определяется по мультипликативности.

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ (\alpha, 6) = 1}} \psi_5((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(18z)\eta(6z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ (\alpha, 6) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_5((\alpha)).$$

4.2. Коэффициенты функций $\eta^4(6z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^8(3z), \eta^2(9z)\eta^2(3z)$

Для каждой из этих функций мы найдем модуль $\mathfrak{M}$, при этом если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то порождающий элемент α можно выбрать с условием $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}$.

Искомый характер равен

$$\psi_j((\alpha)) = \frac{\alpha^l}{|\alpha|^l}, \quad j = \overline{6, 9}.$$

Получаем

$$f(z) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}}} \psi_j((\alpha))(N\alpha)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}}}} \alpha^l e^{2\pi i N((\alpha))}.$$

Коэффициенты модулярной формы равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}} \\ N\alpha = n}} \psi_j((\alpha))(N\alpha)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\omega], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{M}} \\ N\alpha = n}} \alpha^l.$$

В таблице 4.1 укажем явно l и $\mathfrak{M}$.

Таблица 4.1
Table 4.1

$f(z)$	l	ψ_j	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$
$\eta^4(6z)$	3	ψ_6	$(2\sqrt{-3}) = (2 + 4\omega)$	12
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	2	ψ_7	(2)	4
$\eta^8(3z)$	3	ψ_8	$(\sqrt{-3}) = (1 + 2\omega)$	3
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	1	ψ_9	(3)	9

5. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

Любой элемент из $\mathfrak{O}_K$ имеет вид $\alpha = a + b\sqrt{-2}$, $|D| = 8$, $N\alpha = a^2 + 2b^2$. В $\mathfrak{O}_K$ имеется две единицы ± 1 .

5.1. Коэффициенты функции $\eta(16z)\eta(8z)$

Уровень этой формы равен 128, норма искомого идеала 16.

Возьмем модуль $\mathfrak{M} = (4)$.

Если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то $\alpha \sim a + b\sqrt{-2}$, где a и b удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 0 \pmod{4}, \\ a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 1 \pmod{4}, \\ a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 2 \pmod{4}, \\ a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Искомый характер равен

$$\psi_{10}((\alpha)) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 0 \pmod{4}, \\ i, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 2 \pmod{4}, \\ -i, & a \equiv 1 \pmod{4}, & b \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ (\alpha, 4) = 1.}} \psi_{10}((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(16z)\eta(8z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ (\alpha, 4) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_{10}((\alpha)).$$

5.2. Коэффициенты функции $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$

Уровень этой формы равен 8, $l = 2$. Искомый модуль равен $\mathfrak{M} = (1)$.

Искомый характер определяется формулой

$$\psi_{11}((\alpha)) = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}.$$

Получаем

$$\sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]} \psi_{11}((\alpha)) N((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]} \alpha^2 e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z).$$

Коэффициенты модулярной формы равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ N\alpha = n}} \psi_{11}((\alpha)) N\alpha = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \\ N\alpha = n}} \alpha^2.$$

6. Мультипликативные эта-произведения и грессен-характеры полей $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}), \mathbb{Q}(\sqrt{-7}), \mathbb{Q}(\sqrt{-11}), \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$

6.1. Коэффициенты функций $\eta(21z)\eta(3z), \eta^3(7z)\eta^3(z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$

Все идеалы кольца $\mathfrak{O}_K$ — главные, $\mathfrak{O}_K = \langle 1, \gamma \rangle$, где $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$.

Если $\alpha \in \mathfrak{O}_K$, то $\alpha = a + b\gamma, a, b \in \mathbb{Z}, N\alpha = a^2 - ab + 2b^2, |D| = 7$.

Найдем соответствие Гекке для модулярной формы $\eta(21z)\eta(3z)$.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M} = (3)$.

Уровень этой формы равен 63, частота $l = 0$.

Если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то $\alpha \sim a + b\gamma$, где a и b удовлетворяют одному из следующих четырех типов, характер определяется в зависимости от типа:

$$\psi_{12}((\alpha)) = \begin{cases} i, & a \equiv 1(\text{mod } 3), \quad b \equiv 1(\text{mod } 3), \\ -1, & a \equiv 0(\text{mod } 3), \quad b \equiv 1(\text{mod } 3), \\ -i, & a \equiv 1(\text{mod } 3), \quad b \equiv 2(\text{mod } 3), \\ 1, & a \equiv 1(\text{mod } 3), \quad b \equiv 0(\text{mod } 3). \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 3) = 1.}} \psi_{12}((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(21z)\eta(3z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 3) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_{12}((\alpha)).$$

Найдем соответствие Гекке для модулярной формы $\eta^3(7z)\eta^3(z)$.

Уровень этой формы равен 7, частота $l = 2$.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M} = (1)$.

Искомый характер определяется формулой

$$\psi_{13}((\alpha)) = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}.$$

Получаем

$$\sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma]} \psi_{13}((\alpha)) N((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \sum_{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma]} \alpha^2 e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta^3(7z) \eta^3(z).$$

Коэффициенты модулярной формы равны

$$a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ N\alpha = n}} \psi_{13}((\alpha)) N\alpha = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ N\alpha = n}} \alpha^2.$$

6.2. Коэффициенты функции $\eta(20z)\eta(4z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$

$N = 80, |D| = 5, h_K = 2, l = 0$.

Искомый идеал имеет норму 4. Возьмем идеал $\mathfrak{M} = (2)$.

Искомый характер ψ_{14} на главных идеалах $(\alpha), (\alpha, 2) = 1$, определяется по формуле

$$\psi_{14}((\alpha)) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2}, \\ -1, & a \equiv 0 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, не являющийся главным, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{M}) = 1$.

Тогда $\psi_{14}(\mathfrak{p}) = i, \psi_{14}(\bar{\mathfrak{p}}) = -i$, если $\mathfrak{p}^2 = (a + b\sqrt{-5}), a \equiv 0 \pmod{2}$.

Если $\mathfrak{p}^2 = (a + b\sqrt{-5}), a \equiv 1 \pmod{2}$, то $\psi_{14}(\mathfrak{p}) = -1$.

Получаем

$$\sum_{\substack{(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \\ (\mathfrak{A}, (2)) = 1}} \psi_{14}(\mathfrak{A}) e^{2\pi i N(\mathfrak{A})} = \eta(20z) \eta(4z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \\ (\mathfrak{A}, (2)) = 1, N\mathfrak{A} = n}} \psi_{14}(\mathfrak{A}).$$

6.3. Коэффициенты функций $\eta(22z)\eta(2z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$

Все идеалы кольца $\mathfrak{O}_K$ — главные, $\mathfrak{O}_K = \langle 1, \gamma \rangle$, где $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}$.

Если $\alpha \in \mathfrak{O}_K$, то $\alpha = a + b\gamma, a, b \in \mathbb{Z}, N\alpha = a^2 - ab + 3b^2, |D| = 11$.

Уровень этой формы равен 44, частота $l = 0$.

Рассмотрим модуль $\mathfrak{M} = (2)$.

Уровень этой формы равен 63, частота $l = 0$.

Если $((\alpha), \mathfrak{M}) = 1$, то $\alpha \sim a + b\gamma$, где a и b удовлетворяют одному из следующих типов:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2}, & b \equiv 1 \pmod{2}, \\ a \equiv 0 \pmod{3}, & b \equiv 1 \pmod{2}, \\ a \equiv 1 \pmod{2}, & b \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Искомый характер равен

$$\psi_{15}((\alpha)) = \begin{cases} \zeta_3, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \\ \zeta_3^2, & a \equiv 0 \pmod{3}, \quad b \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1, & a \equiv 1 \pmod{2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 2) = 1.}} \psi_{15}((\alpha)) e^{2\pi i N((\alpha))} = \eta(22z)\eta(2z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ (\alpha, 2) = 1, \\ N\alpha = n}} \psi_{15}((\alpha)).$$

6.4. Коэффициенты функций $\eta(23z)\eta(z)$ и грессен-характеры поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$

Уровень формы равен 23, частота $l = 0$.

$$h_K = 3. \mathfrak{O}_K = \langle 1, \gamma \rangle, \text{ где } \gamma = \frac{-1 + \sqrt{-23}}{2}.$$

Пусть C_1 — класс главных идеалов, C_2, C_3 — другие классы идеалов.

Если идеал $\mathfrak{A} \in C_2$, то $\bar{\mathfrak{A}} \in C_3$.

Модуль характера $\mathfrak{M} = (1)$.

Искомый характер равен

$$\psi_{16}(\mathfrak{A}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{A} \in C_1, \\ \zeta_3, & \mathfrak{A} \in C_2, \\ \zeta_3^2, & \mathfrak{A} \in C_3. \end{cases}$$

Получаем

$$\sum_{(\mathfrak{A}) \in \mathbb{Z}[\gamma],} \psi_{16}((\mathfrak{A})) e^{2\pi i N((\mathfrak{A}))} = \eta(23z)\eta(z), \quad a(n) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[\gamma], \\ N\alpha = n}} \psi_{16}((\mathfrak{A})).$$

7. Коэффициенты мультипликативных эта-произведений и суммы по характерам Гекке

Для оставшихся двенадцати мультипликативных эта-произведений интерпретация прямо по теореме Гекке невозможна, так как должно выполняться условие $a(p) = 0$, если p инертно в $\mathfrak{O}_K$. Но для полей K , которые можно подобрать по уровню формы, это условие нарушается. Для коэффициентов всех остальных функций МакКея, кроме $\eta^{24}(z)$, можно найти формулы, содержащие суммы от характеров Гекке.

Теорема 7.1.1.

Пусть $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i z n}$ — одна из функций МакКея, указанных в таблице 7.1.

Тогда

$$a(n) = \sum_{\substack{j_1 + j_2(m-1) = nm, \\ j_1 \geq 1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{N\mathfrak{A} = j_1, \\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = 1}} \psi_j(\mathfrak{A})(N(\mathfrak{A}))^{\frac{l}{2}} \cdot \sum_{\substack{N\mathfrak{B} = j_2, \\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = 1}} \psi_j(\mathfrak{B})(N(\mathfrak{B}))^{\frac{l}{2}},$$

где характер Гекке описан в параграфах выше и ассоциирован (по соответствию Гекке) с коэффициентами параболической формы $f(z)$. В таблице 7.1 указаны идеалы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$ в кольце целых поля K и параметры m и l .

Доказательство.

Эта формула следует из равенства $g(mz) = f((m-1)z)f(z)$ и найденных выше выражений коэффициентов $f(z)$ через характеры Гекке.

Замечание 1.

Так как одну и ту же параболическую форму можно выразить разными способами, то можно на основании теоремы 7.1.1 получить несколько равенств, содержащих суммы с характерами Гекке. Например, верна следующая формула.

Таблица 7.1

Table 7.1

$g(z)$	$f(z)$	K	$\mathfrak{M}$	m	l	ψ_j
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(6)	6	0	ψ_5
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	$\eta(20z)\eta(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	(2)	4	0	ψ_{14}
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	(4)	8	0	ψ_{10}
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	$\eta(21z)\eta(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	(3)	3	0	ψ_{12}
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	(4)	4	0	ψ_{10}
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(6)	3	0	ψ_5
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	$\eta(22z)\eta(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	(2)	2	0	ψ_{15}
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	$\eta^2(12z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(6)	12	0	ψ_{11}
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$\eta(20z)\eta(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$	(2)	2	0	ψ_{14}
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$\eta^2(12z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(6)	6	0	ψ_1
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(3)	3	1	ψ_9
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$(1+i)^3$	4	1	ψ_2
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	$\eta^4(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$(2\sqrt{-3})$	6	1	ψ_6
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$(1+i)^3$	2	1	ψ_2
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$\eta^4(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$(2\sqrt{-3})$	3	1	ψ_6
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^6(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(2)	4	2	ψ_3
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	(2)	2	2	ψ_7
$\eta^{12}(2z)$	$\eta^6(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	(2)	2	2	ψ_3
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	$\eta^8(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$(\sqrt{-3})$	3	3	ψ_8

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{i_1 + 5i_2 = 6n, \\ i_1 \geq 1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{N\mathfrak{A}_1 = i_1, \\ (\mathfrak{A}_1, (6)) = 1}} \psi_5(\mathfrak{A}_1) \sum_{\substack{N\mathfrak{B}_1 = i_2, \\ (\mathfrak{B}_1, (6)) = 1}} \psi_5(\mathfrak{B}_1) = \\
 & = \sum_{\substack{j_1 + 3j_2 = 4n, \\ j_1 \geq 1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{N\mathfrak{A}_2 = j_1, \\ (\mathfrak{A}_2, (2)) = 1}} \psi_{14}(\mathfrak{A}_2) \sum_{\substack{N\mathfrak{B}_2 = j_2, \\ (\mathfrak{B}_2, (2)) = 1}} \psi_{14}(\mathfrak{B}_2).
 \end{aligned}$$

В первой тройной сумме рассматриваются идеалы в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, а во второй — в кольце целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Эта формула следует из того, что $g(6z) = f_1(5z)$, $g(4z) = f_2(3z)$, где $g(z) = \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$, $f_1(z) = \eta(18z)\eta(6z)$, $f_2(z) = \eta(20z)\eta(4z)$.

Замечание 2.

Используя соотношения между первыми 16 формами, можно получить соотношения между характеристиками Гекке.

Например, пусть $g(z) = \eta^2(8z)\eta^2(4z)$, $f(z) = \eta^2(12z)$.

Из равенства $g(3z) = f(2z)f(z)$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \sqrt{n} \psi_2((\alpha)) = \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ \alpha \equiv 1 \pmod{(1+i)^3}, \\ N\alpha = n}} \alpha = \\ & = \sum_{j_1 + j_2 = 3n} \sum_{\substack{(\alpha) \in \mathbb{Z}[i], \\ ((\alpha), (6)) = 1, \\ N\alpha = j_1}} \psi_1((\alpha)) \sum_{\substack{(\beta) \in \mathbb{Z}[i], \\ ((\beta), (6)) = 1, \\ N\beta = j_2}} \psi_1((\beta)). \end{aligned}$$

8. Мультипликативные эта-произведения и суммы Шимуры

В статье автора [10] находятся арифметические формулы, включающие суммы Шимуры от коэффициентов этих форм.

Определение. Пусть $a(n)$ — арифметическая функция, c — натуральное число.

$\forall m \geq 1$ Сумма Шимуры $Sh(m, a, c)$ определяется формулой

$$Sh(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right).$$

Теорема 8.1.1.

Пусть p — нечетное простое число,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \\ f_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n \end{aligned}$$

— мультипликативные η -произведения, указанные в таблице 8.1, тогда имеют место следующие соотношения для сумм Шимуры для $a(n)$ и $b(n)$.

В этой же статье получены теоремы, связывающие суммы Шимуры с арифметикой квадратичных полей. Например, там приведена следующая теорема.

Теорема 8.1.2.

Пусть

$$f(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(128, \chi).$$

1) Если p расщепляется в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ и в $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, то

$$p = 4Sh^2(p, a, 1) - 2Sh(p^2, a, 1) + 14Sh(p, a, 1) - 5.$$

2) Если p инертно в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, то

$$p = -2Sh(p^2, a, 1) - 1.$$

3) Если p расщепляется в $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ и инертно в $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$, то

$$p = 4Sh^2(p, a, 1) - 2Sh(p^2, a, 1) + 2Sh(p, a, 1) - 1.$$

В статье автора [11] получены теоремы, связывающие коэффициенты мультипликативных эта-произведений $\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$ с арифметикой целых кватернионов Гурвица и порядком в алгебре Кэли, имеющим структуру решетки E_8 .

Таблица 8.1

Table 8.1

$f_1(z)$	$f_2(z)$	Соотношение
$\eta(21z)\eta(3z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$Sh(3p, a, 8) + (\frac{-7}{p}) = Sh(4p, b, 7) + (\frac{-2}{p})$
$\eta(18z)\eta(6z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$Sh(3p, a, 8) + (\frac{-3}{p}) = Sh(2p, b, 3) + (\frac{-2}{p})$
$\eta(20z)\eta(4z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$Sh(2p, a, 3) + (\frac{-5}{p}) = Sh(3p, b, 5) + (\frac{-3}{p})$
$\eta^2(12z)$	$\eta(18z)\eta(6z)$	$Sh(2p, a, 3) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^2(12z)$	$\eta(22z)\eta(2z)$	$Sh(6p, a, 11) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^2(12z)$	$\eta(16z)\eta(8z)$	$Sh(3p, a, 8) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^2(12z)$	$\eta(20z)\eta(4z)$	$Sh(3p, a, 5) + (\frac{-1}{p}) = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^4(6z)$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$Sh(3p, a, 5) + p = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^4(6z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$Sh(3p, a, 8) + p = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^6(4z)$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	$Sh(2p, a, 3) + (\frac{-1}{p})p^2 = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$
$\eta^8(3z)$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$Sh(3p, a, 8) + p^7 = 2Sh(p, b, 1) + b^2(p)$

Выводы

Таким образом, в статье показывается, что коэффициенты мультипликативных эта-произведений имеют интересную арифметическую интерпретацию. Их природа связана с арифметикой мнимых квадратичных полей и арифметикой гиперкомплексных систем.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

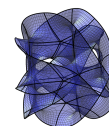
Цитирование. Воскресенская Г.В. Об арифметической природе коэффициентов мультипликативных эта-произведений // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2025. Т. 31, № 1. С. 7–21. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-7-21.

© Воскресенская Г.В., 2025

Галина Валентиновна Воскресенская (galvosk@mail.ru) – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η - functions // Contemporary Mathematics. 1985. Vol. 45. P. 89–98.
- [2] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence: American Mathematical Society, 2004. 216 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/CBMS%2F102>.
- [3] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. Москва: Мир, 1988. 320 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Koblitz.htm>.
- [4] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. Москва: Факториал Пресс, 2004. 488 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Кнэпп.djv>.



- [5] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 136. С. 103–137. URL: <http://mi.mathnet.ru/into201>.
- [6] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. Москва: Мир, 1987. 415 с. URL: <https://djvu.online/file/gtiErm2FnInHw>.
- [7] Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. Москва: МЦНМО, 2014, 712 с. URL: http://i.uran.ru/WEBIRBIS/CGI/irbis64r_11/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=2&I21DBN=KNIGA&P21DBN=KNIGA&Z21ID=GUEST&Image_file_name=KART%2F221881.pdf.
- [8] Боревиц З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. Москва: Наука, 1972. 498 с. URL: [https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/\[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich\]_Teoriya_chisel\(libcats.org\).pdf](https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich]_Teoriya_chisel(libcats.org).pdf).
- [9] Эндрюс Г. Теория разбиений. Москва: Наука, 1982. 255 с. URL: <https://ega-math.narod.ru/Books/Andrews.htm>.
- [10] Воскресенская Г.В. Арифметические свойства сумм Шимур для некоторых модулярных форм // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 7–22. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20285252>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rbxlrz>.
- [11] Воскресенская Г.В. Гиперкомплексные числа, системы корней и модулярные формы // Арифметика и геометрия многообразий: межвузовский сборник научных трудов. Самара: Самарский университет. 1992. С. 48–59.

DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-7-21

On the arithmetic nature of coefficients of multiplicative eta-functions

Voskresenskaya G. V. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; galvosk@mail.ru; ORCID: 0000-0002-6288-5372 (G. V.);

Received: 11.12.2024

Revised: 20.01.2025

Accepted: 07.04.2025

Scientific article



Abstract. In the article we study the arithmetic nature of the coefficients of multiplicative eta-products, also called McKay functions. For some functions it is possible to establish Hecke correspondence between the coefficients of McKay and Hecke grossen-characters of imaginary quadratic fields. For other McKay functions such a correspondence is impossible but their coefficients can be represented as sums containing Hecke characters. The emerging Hecke characters are written out explicitly. In the article we write the first ten coefficients for all McKay functions. Calculations are based on Euler's pentagonal formula. The article also talks about the connection between the coefficients of these functions and Shimura sums.

Key words: modular forms; cusp forms; Fourier coefficients; quadratic fields; Hecke characters; q-series; multiplicative functions; Euler's pentagonal formula; Shimura sums.

Information about the conflict of interests: author and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Voskresenskaya G.V. On the arithmetic nature of coefficients of multiplicative eta-functions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 7–21. DOI: 10.18287/2541-7525-2025-31-1-7-21. (In Russ.)

© Voskresenskaya G.V., 2025

Galina V. Voskresenskaya (galvosk@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η – functions. *Contemporary Mathematics*, 1985, vol. 45, pp. 89–98.
- [2] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence: American Mathematical Society, 2004, 216 p. DOI: <http://doi.org/10.1090/CBMS%2F102>.
- [3] Koblitz N. Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms. Moscow: Mir, 1988, 320 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Koblitz.htm>. (In Russ.)
- [4] Knapp A. Elliptic Curves. Moscow: Faktorial Press, 2004, 488 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Knapp.djv>. (In Russ.)
- [5] Voskresenskaya G.V. Dedekind η -Function in Modern Research. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 235, pp. 788–822. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5>
- [6] Ireland K., Rosen M. A Classical Introduction to Modern Number Theory. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 415 p. Available at: <https://djvu.online/file/gtiErm2FnInHw>. (In Russ.)
- [7] Iwaniec H., Kowalski E. Analytic Number Theory. Moscow: MTsNMO, 2004, 712 p. Available at: http://i.uran.ru/WEBIRBIS/CGI/irbis64r_11/cgiirbis_64.exe?LNG=&C21COM=2&I21DBN=KNIGA&P21DBN=KNIGA&Z21ID=GUEST&Image_file_name=KART%2F221881.pdf. (In Russ.)
- [8] Borevich Z.I., Shavarevich I.R. Number theory. Moscow: Nauka, 1972, 498 p. Available at: [https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/\[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich\]_Teoriya_chisel\(libcats.org\).pdf](https://dl.libcats.org/genesis/131000/c3e8570d7d7e288c26fc4136f4d251aa/_as/[Z.I.Borevich,_I.R.SHafarevich]_Teoriya_chisel(libcats.org).pdf). (In Russ.)
- [9] Andrews G.E. The Theory of Partitions. Moscow: Nauka, 1982, 225 p. Available at: <https://ega-math.narod.ru/Books/Andrews.htm>. (In Russ.)
- [10] Voskresenskaya G.V. Arithmetic properties of Shimura sums related to several modular forms. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 182, issue 4, pp. 444–455. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0748-9>. EDN: <https://www.elibrary.ru/pdnbnj>. (In English; original in Russian.)
- [11] Voskresenskaya G.V. Hypercomplex numbers, root systems and modular forms. In: *Arithmetic and geometry of varieties: interuniversity collection of scientific papers*. Samara: Samarskii universitet, 1992, pp. 48–59. (In Russ.)