

Рождение J/ψ в подходе пересуммирования мягких глюонов и нерелятивистской КХД

Салеев В.А. , Шильяев К.К. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; saleev@samsu.ru (В.А.); kirill.k.shilyaev@gmail.com (К.К.);

Поступила: 11.08.2024

Рассмотрена: 22.10.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В работе изучается рождение J/ψ -мезонов в протон-протонных столкновениях в подходе пересуммирования мягких глюонов (неколлинеарная факторизация), в коллинеарной партонной модели и нерелятивистской квантовой хромодинамике. С использованием экспериментальных данных при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ фиксируются значения октетных непертурбативных матричных элементов. Для описания области промежуточных поперечных импульсов используется метод обратных погрешностей. Сделаны предсказания для сечения рождения и спектра по поперечному импульсу J/ψ -мезонов в кинематике эксперимента SPD NICA.

Ключевые слова: физика высоких энергий; квантовая хромодинамика; коллинеарная партонная модель; неколлинеарная факторизация; подход пересуммирования мягких глюонов; нерелятивистская квантовая хромодинамика; чармоний; SPD NICA.

Введение

Одним из основных пунктов программы экспериментальных исследований коллаборации SPD NICA [1] является измерение сечений рождения и спектров по поперечному импульсу и быстрой чармониев в столкновениях поляризованных и неполяризованных протонов при энергиях от $\sqrt{s} = 5$ ГэВ до $\sqrt{s} = 27$ ГэВ. Основным механизмом рождения связанных состояний $c\bar{c}$ -кварков является глюон-глюонное слияние, поэтому, изучая рождения чармониев, мы имеем возможность получить информацию о глюонных функциях распределения в протоне. Наиболее эффективным сигналом является рождение J/ψ -мезонов, которые детектируются по их распаду в лептонную пару. Рождение возбужденных состояний чармония, $\psi(2S)$ и χ_{cJ} , наблюдается в каскадных распадах через рождение J/ψ : $\psi(2S) \rightarrow J/\psi + X$ и $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$. Сечение рождения основного состояния чармония η_c -мезона по величине соизмеримо с сечением прямого рождения J/ψ -мезона, однако экспериментальное исследование таких процессов представляет серьезные трудности, так как основной канал распада η_c — это распад в легкие мезоны, что не позволяет выделить сигнал о рождении η_c из фона, который по величине на порядки его превышает. Проведенные ранее расчеты для «перспективных» каналов распада $\eta_c \rightarrow p\bar{p}$ и $\eta_c \rightarrow \gamma\gamma$ показали, что отношение сигнал – фон имеет порядок 10^{-3} [2].

В настоящей работе проведен расчет спектров J/ψ -мезонов по поперечному импульсу в области малых значений $p_T \sim 1$ ГэВ, где форма спектра однозначно определяется зависимостью неколлинеарных глюонных функций распределения от поперечного импульса, в рамках подхода пересуммирования мягких глюонов [3; 4]. Для описания спектров J/ψ -мезонов при больших $p_T > M_\psi$ применена стандартная коллинеарная партонная модель (КПМ) [5]. Для описания промежуточной области поперечных импульсов используется метод обратных погрешностей (МОП) [6]. Представлено описание экспериментальных данных по рождению J/ψ -мезонов при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ, и сделаны предсказания для будущего эксперимента SPD NICA при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ.

1. Подход пересуммирования мягких глюонов

За пределами области применимости стандартной коллинеарной партонной модели лежит область малых поперечных импульсов $p_T \ll M$, где M — масса состояния, рождающегося в столкновении адронов. Наиболее общий подход к описанию этой кинематической области носит название TMD-факторизации (Transverse Momentum Dependent) или неколлинеарной партонной модели (НКПМ) и представляет собой описание функций распределения партонов с малыми поперечными импульсами и их эволюции внутри протонов. Этот подход позволяет факторизовать сечение рождения частиц как произведение жесткой пертурбативной части, связанной с партонным глюонным или кварковым подпроцессом, и функций, описывающих распределение начальных партонов по импульсу. В партонных функциях распределения (ПФР) в общем случае не разделяются на распределения по продольной и поперечной компонентам импульса. Эволюция партонных распределений по жесткому масштабу факторизации μ_F и быстротному параметру ζ контролируется уравнением ренормгруппы и системой дифференциальных уравнений Коллинза – Сопера [5]. В нашем анализе мы рассматриваем и используем подход пересуммирования мягких глюонов (ПМГ) как один из вариантов НКПМ [3; 4].

В НКПМ партоны подразумеваются находящимися на массовой поверхности $q_{1,2}^2 = 0$ и их 4-импульсы q_1, q_2 в судаковском разложении записываются следующим образом:

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu + y_1 p_2^\mu + q_{1T}^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu + y_2 p_1^\mu + q_{2T}^\mu,$$

где $p_{1,2} = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \pm 1)$ — импульсы сталкивающихся протонов; x_i и $y_i = \vec{q}_{iT}^2 / (sx_i)$ — доли продольных импульсов; q_{iT} — поперечные компоненты импульсов ($q_{iT}^2 = -\vec{q}_{iT}^2$).

Поправками $\mathcal{O}(\vec{q}_T^2 / M^2)$ далее будем пренебрегать, т. е. в таком приближении $y_{1,2} \rightarrow 0$, а импульсы партонов с малыми поперечными компонентами представляют собой:

$$q_1 \approx \left(\frac{x_1 \sqrt{s}}{2}, \vec{q}_{1T}, \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} \right), \quad q_2 \approx \left(\frac{x_2 \sqrt{s}}{2}, \vec{q}_{2T}, -\frac{x_2 \sqrt{s}}{2} \right). \quad (1.1)$$

Общая для НКПМ теорема описывает рождение конечного состояния как свертку ПФР с сечением рождения в партонном подпроцессе [5]:

$$d\sigma = \int dx_1 dx_2 d^2 q_{1T} d^2 q_{2T} F(x_1, \vec{q}_{1T}, \mu_F, \zeta_1) F(x_2, \vec{q}_{2T}, \mu_F, \zeta_2) d\hat{\sigma}, \quad (1.2)$$

где $d\hat{\sigma}$ — сечение жесткого партонного подпроцесса $2 \rightarrow 1$, в котором рождаются состояния с малыми поперечными импульсами:

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p) \frac{|\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)|^2}{I} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0},$$

здесь $I \approx 2x_1 x_2 s$ — потоковый фактор; $\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)$ — амплитуда партонного подпроцесса, вычисленная методом фейнмановских диаграмм.

Партонные распределения в выражении (1.2) записаны в форме функций поперечного импульса, в которой — по крайней мере в лидирующем приближении — имеют очевидную вероятностную интерпретацию. Учесть эволюцию ПФР представляется возможным только в сопряженном пространстве: уравнения Коллинза — Сопера и ренормгруппы допускают совместное факторизованное решение (то есть такое, что вся «эволюционная» часть выделяется в отдельный множитель) в пространстве прицельного параметра \vec{b}_T , которое является Фурье-сопряженным пространству поперечного импульса [8]:

$$\hat{F}(x_1, b_T, \mu_F, \zeta) \hat{F}(x_2, b_T, \mu_F, \zeta) = e^{-S_P(b_T, \mu_F, \mu_{F0}, \zeta, \zeta_0)} \hat{F}(x_1, b_T, \mu_{F0}, \zeta_0) \hat{F}(x_2, b_T, \mu_{F0}, \zeta_0), \quad (1.3)$$

причем двумерное Фурье-преобразование ПФР:

$$\hat{F}(x, \vec{b}_T, \mu_F, \zeta) = \int d^2 q_T e^{i\vec{q}_T \vec{b}_T} F(x, \vec{q}_T, \mu_F, \zeta).$$

Эволюцию Фурье-образа ПФР с начальных масштабов (μ_{F0}, ζ_0) в конечные (μ_F, ζ) осуществляет судаковский фактор S_P , в лидирующем по константе связи приближении судаковский фактор выражается в виде интеграла [3; 9]:

$$S_P(Q, \mu_b, b_T) = \frac{C_A}{\pi} \int_{\mu_b^2}^{Q^2} \frac{d\mu'^2}{\mu'^2} \alpha_s(\mu') \left[\ln \frac{Q^2}{\mu'^2} - \left(\frac{11 - 2N_f/C_A}{6} + \frac{1}{2} \delta_{c8} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s), \quad (1.4)$$

где N_f — число кварковых ароматов; $C_A = 3$ — собственное значение оператора Казимира присоединенного представления цветовой группы $SU(3)$, δ_{c8} — дельта Кронекера, отличающая пересуммирование для синглетных и октетных состояний кваркония, в качестве конечного масштаба взят жесткий масштаб $Q = \mu_F = \sqrt{\zeta}$, а вместо начального — масштаб $\mu_b = \mu_{F0} = \sqrt{\zeta_0}$, выражение для которого приведено ниже.

Такой выбор связан с минимизацией больших значений логарифмов отношений масштабов $\mu_F/\Lambda_{\text{QCD}}$, μ_F/M [9]. В однопетлевом приближении для константы связи α_s можно получить явное аналитическое выражение для интеграла в S_P . Выражение для судаковского фактора применимо в диапазоне $b_0/Q \leq b_T \leq b_{T,\text{max}}$, где $b_0 = 2e^{-\gamma}$, γ — это постоянная Эйлера — Маскерони. Нижний предел диапазона задается выражением $\mu'_b = Qb_0/(Qb_T + b_0)$, а верхний предел определяется заменой прицельного параметра [7]:

$$b_T \rightarrow b_T^*(b_T) = \frac{b_T}{\sqrt{1 + (b_T/b_{T,\text{max}})^2}},$$

мы использовали наибольшее значение прицельного параметра $b_{T,\text{max}} = 1.5 \text{ ГэВ}^{-1}$. Как в выборе этого параметра, так и в форме ограничений на b_T существует определенная свобода выбора, иные возможные варианты и их обоснования приведены в [9].

Кроме этого, подавление ПФР при больших b_T гарантируется непертурбативным судаковским фактором S_{NP} , выражение для которого, по крайней мере на данном этапе, теоретически последовательно не выводится, поэтому зависимость $S_{NP}(b_T, Q)$ извлекается из эксперимента. В данной работе использовалась параметризация в гауссовой форме, полученная для начальных кварков [10]:

$$S_{NP}(b_T, Q) = \left[g_1 \ln \frac{Q}{2Q_{NP}} + g_2 \left(1 + 2g_3 \ln \frac{10xx_0}{x_0 + x} \right) \right] b_T^2, \quad (1.5)$$

из-за недостатка экспериментальных данных она применяется и для глюонов, но с дополнительным множителем C_A/C_F [9], где C_A, C_F — собственные значения оператора Казимира присоединенного и фундаментального представления группы $SU(3)$ соответственно.

В подходе ПМГ партонные распределения выражаются через коллинеарные, взятые на начальном масштабе μ'_b :

$$\hat{F}(x, b_T) = f(x, \mu'_b) + \mathcal{O}(\alpha_s) + \mathcal{O}(b_T \Lambda_{\text{QCD}}).$$

Теперь можем привести окончательное выражение для дифференциального сечения, где аналитически взяты все возможные интегралы:

$$\frac{d^2\sigma}{dp_T dy} = \frac{\pi p_T |\mathcal{M}(2 \rightarrow 1)|^2}{M^2 s} \int_0^\infty db_T b_T J_0(p_T b_T) e^{-S_P(Q, \mu'_b, b_T^*)} e^{-S_{NP}(b_T, Q)} \hat{F}(x_1, b_T^*) \hat{F}(x_2, b_T^*), \quad (1.6)$$

здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; p_T — поперечный импульс конечного состояния; y — быстрота конечного состояния.

2. Коллинеарная факторизация

В нашей работе мы пытаемся описать рождение чармониев во всем доступном диапазоне поперечных импульсов конечного состояния, поэтому в области $p_T \gg M$ пользуемся стандартным подходом коллинеарной партонной модели (КПМ) в лидирующем по α_s приближении.

В коллинеарной факторизации импульсы партонов, лежащих на массовой поверхности, прямо пропорциональны импульсам сталкивающихся протонов:

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu,$$

где x_1, x_2 — также продольные доли импульсов протонов, и тогда импульсы партонов, пренебрегая массой протонов при достаточно больших энергиях столкновений \sqrt{s} , можно записать следующим образом:

$$q_1 = \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1), \quad q_2 = \frac{x_2 \sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1).$$

В приближении малых поперечных импульсов начальных партонов $q_T \ll \mu_F \equiv Q$ действует теорема о коллинеарной факторизации сечения рождения конечного наблюдаемого состояния:

$$d\sigma = \int dx_1 dx_2 f(x_1, \mu_F) f(x_2, \mu_F) d\hat{\sigma}, \quad (2.1)$$

где $f(x, \mu_F)$ — коллинеарные партонные распределения, эволюция которых по жесткому масштабу μ_F описывается уравнениями ДГЛАП; $d\hat{\sigma}$ — сечение жесткого партонного подпроцесса $2 \rightarrow 2$ (подпроцессы $2 \rightarrow 1$ запрещены кинематикой КПМ), которое выражается в виде

$$d\hat{\sigma} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - p - k) \frac{|\overline{\mathcal{M}}(2 \rightarrow 2)|^2}{I} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0},$$

где p и k — импульсы двух конечных частиц (p — импульс рожденного состояния чармония).

3. Описание области промежуточных поперечных импульсов

Для области промежуточных значений поперечных импульсов $p_T \sim M$ не существует подхода, основанного на пертурбативном разложении сечения в ряд и представления его в виде множителей, отвечающих за различные энергетические и пространственно-временные этапы в адронных процессах, как это сделано в моделях коллинеарной и неколлинеарной факторизаций. Вместо этого вклады двух факторизационных моделей «сшиваются» и описывают промежуточную область p_T как тем или иным образом определенную сумму вкладов КПМ и НКПМ. Мы пользуемся подходом МОП (метод обратных погрешностей, Inverse-Error Weighting, InEW), основанным на более общем статистическом методе обратных дисперсий (inverse-variance weighting) — методе выбора весов для вычисления взвешенной суммы нескольких случайных величин, при котором дисперсия этой суммы оказывается наименьшей [6].

В схеме «сшивания» факторизаций МОП вычисляемое при любом значении p_T сечение $\overline{d\sigma}$ представляется в виде суммы вкладов неколлинеарной \mathcal{W} и коллинеарной \mathcal{Z} факторизаций, взятых с некоторыми весами ω_1 и ω_2 :

$$\overline{d\sigma}(p_T, Q) = \omega_1 \mathcal{W}(p_T, Q) + \omega_2 \mathcal{Z}(p_T, Q). \quad (3.1)$$

В качестве весов берутся нормированные значения обратных квадратов степенных поправок, использованных в теоремах факторизации КПМ и НКПМ:

$$\omega_1 = \frac{\Delta_{\mathcal{W}}^{-2}}{\Delta_{\mathcal{W}}^{-2} + \Delta_{\mathcal{Z}}^{-2}}, \quad \omega_2 = \frac{\Delta_{\mathcal{Z}}^{-2}}{\Delta_{\mathcal{W}}^{-2} + \Delta_{\mathcal{Z}}^{-2}},$$

$$\Delta_{\mathcal{W}} = \left(\frac{p_T}{Q}\right)^2 + \left(\frac{m}{Q}\right)^2, \quad \Delta_{\mathcal{Z}} = \left(\frac{m}{p_T}\right)^2 \left(1 + \ln^2\left(\frac{Q_T}{p_T}\right)\right), \quad (3.2)$$

где m — масса адрона порядка 1 ГэВ, $Q_T = \sqrt{Q^2 + p_T^2}$.

Неопределенность вычисления результирующего сечения, определенного как среднее взвешенное двух вкладов, задается выражением:

$$\Delta \overline{d\sigma} = \frac{\Delta_W \Delta_Z}{\sqrt{\Delta_W^2 + \Delta_Z^2}} \overline{d\sigma}. \quad (3.3)$$

Таким образом, схема МОП позволяет вычислить сечение, которое совпадает с вкладами коллинеарной и неколлинеарной факторизаций в областях применимости соответствующих теорем и которое представляется как средневзвешенная сумма этих вкладов в области, где ни та, ни другая теоремы строго не выполняются. Погрешность итогового сечения оказывается максимальной именно в области промежуточных поперечных импульсов.

4. Нерелятивистская КХД

Нерелятивистская КХД — устоявшийся подход к описанию адронизации тяжелых кварков в наблюдаемые состояния. Достаточно большая масса очарованных кварков m_c позволяет рассматривать их как нерелятивистские ($v^2 \approx 0.3$), благодаря этому вполне надежно разделяются по порядку величины следующие динамические наблюдаемые [11]: масса кваркония, трехмерный импульс, кинетическая энергия и т. д. Оценка величины наблюдаемых, соответствующих квантовым операторам, дает право ввести иерархию фоковских состояний чармония в рождении J/ψ по степеням скорости v [12]:

$$|J/\psi\rangle = \mathcal{O}(v^0) |c\bar{c} [{}^3S_1^{(1)}]\rangle + \mathcal{O}(v^1) |c\bar{c} [{}^3P_J^{(8)}]g\rangle + \mathcal{O}(v^2) |c\bar{c} [{}^3S_1^{(1,8)}]gg\rangle + \mathcal{O}(v^2) |c\bar{c} [{}^1S_0^{(8)}]g\rangle + \dots,$$

лидирующим членом ряда является синглетное фоковское состояние, в котором находятся кварки в составе J/ψ . Если ограничиться им, то такое приближение будет называться моделью цветных синглетов (МЦС) [13], в отдельных случаях даже и его уже может быть достаточно для корректного и полного описания рождения чармония.

В НРКХД сечение рождения состояния чармония факторизуется в произведение сечения рождения кварковой пары в некотором фоковском состоянии и непертурбативного матричного элемента (НМЭ), который можно интерпретировать как описывающий адронизацию кварковой пары в связанное состояние:

$$d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow C + X) = \sum_n d\hat{\sigma}(a + b \rightarrow c\bar{c} [n] + X) \langle \mathcal{O}^c [n] \rangle / (N_{\text{col}} N_{\text{pol}}), \quad (4.1)$$

за кратким обозначением n стоят фоковские состояния, которые учитываются при анализе и расчетах рождения J/ψ , также здесь явно записано усреднение по поляризационным ($N_{\text{pol}} = 2J + 1$, где J — полный момент кварковой пары) и цветовым ($N_{\text{col}} = 2N_c$ для синглетов, $N_{\text{col}} = N_c^2 - 1$ для октетов, где N_c — число цветов) состояниям чармония. Амплитуда рождения кварковой пары в фоковском состоянии вычисляется в необходимом порядке по константе связи α_s с помощью техники фейнмановских диаграмм и последовательности проецирований на состояния с необходимыми значениями квантовых спиновых, орбитальных и цветовых чисел [14].

В подходе ПМГ мы учитываем рождение состояний ${}^1S_0^{(8)}$, ${}^3P_{0,2}^{(8)}$ для J/ψ и ${}^3P_{0,2}^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$ для χ_{cJ} в подпроцессах $2 \rightarrow 1$, в которых рождаются состояния с малыми поперечными импульсами. Матричные элементы данных подпроцессов:

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow C [{}^3P_0^{(1)}])|^2} &= \frac{8\pi^2 \alpha_s^2}{3M^3} \langle \mathcal{O}^c [{}^3P_0^{(1)}] \rangle, & \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow C [{}^3P_2^{(1)}])|^2} &= \frac{32\pi^2 \alpha_s^2}{45M^3} \langle \mathcal{O}^c [{}^3P_2^{(1)}] \rangle, \\ \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow C [{}^3P_0^{(8)}])|^2} &= \frac{5\pi^2 \alpha_s^2}{M^3} \langle \mathcal{O}^c [{}^3P_0^{(8)}] \rangle, & \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow C [{}^3P_2^{(8)}])|^2} &= \frac{4\pi^2 \alpha_s^2}{3M^3} \langle \mathcal{O}^c [{}^3P_2^{(8)}] \rangle, \\ \overline{|\mathcal{M}(g + g \rightarrow C [{}^1S_0^{(8)}])|^2} &= \frac{5\pi^2 \alpha_s^2}{12M} \langle \mathcal{O}^c [{}^1S_0^{(8)}] \rangle, & \overline{|\mathcal{M}(q + \bar{q} \rightarrow C [{}^3S_1^{(8)}])|^2} &= \frac{16\pi^2 \alpha_s^2}{9M} \langle \mathcal{O}^c [{}^3S_1^{(8)}] \rangle. \end{aligned}$$

Чармонии в области коллинеарной факторизации рождаются через состояния ${}^3S_1^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$, ${}^1S_0^{(8)}$ и ${}^3P_J^{(8)}$ для J/ψ , ψ' и через ${}^3P_J^{(1)}$, ${}^3S_1^{(8)}$ для χ_{cJ} . Соответствующие этим состояниям матричные элементы достаточно громоздки, поэтому не приведены здесь, но матричные элементы синглетных состояний можно найти в работе [15], а октетных состояний — в [16].

Все источники значений НМЭ в той или иной степени феноменологичны. Выражения для НМЭ синглетных состояний связаны со значениями волновой функции чармония или ее производной в нуле [17; 18]:

$$\langle \mathcal{O}^c [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1)|\Psi(0)|^2, \quad \langle \mathcal{O}^c [{}^3P_J^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J+1)|\Psi'(0)|^2.$$

Эти значения получают при расчетах в нерелятивистских потенциальных моделях с феноменологическими потенциалами или из экспериментальных данных по распаду чармониев. Октетные же состояния физически ненаблюдаемы, и поэтому наборы октетных НМЭ извлекают фитированием данных чармониев за вычетом синглетных вкладов. Хотя значения НМЭ предполагаются универсальными, результаты фитов НМЭ на разных наборах данных и особенно в различных порядках вычислений по α_s могут достаточно сильно различаться. Поэтому в работе мы приводим свои результаты фитирования данных по рождению J/ψ при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ.

5. Результаты расчетов

Все описанные ниже численные расчеты осуществлялись с помощью библиотеки численного интегрирования CUBA [19] (алгоритм интегрирования Suave) при максимальной относительной погрешности расчетов, равной 1 %. Матричные элементы партонных подпроцессов в НРКХД вычислялись в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica с применением пакетов FeynArts [20] и FeynCalc [21]. Коллинеарные партонные распределения в лидирующем порядке по константе связи были взяты в виде численно заданных распределений MSTW2008LO [22].

Массы состояний чармония, использованные в расчетах [23]: $m_{J/\psi} = 3.096$ ГэВ, $m_{\psi'} = 3.686$ ГэВ, $m_{\chi_{c0}} = 3.415$ ГэВ, $m_{\chi_{c1}} = 3.510$ ГэВ, $m_{\chi_{c2}} = 3.556$ ГэВ. Бранчинги распадов чармониев (относительные вероятности распадов) в нижележащие состояния и в лептонные пары [23]: $\text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.014$, $\text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.343$, $\text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.19$, $\text{Br}(\psi' \rightarrow J/\psi + X) = 0.614$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = 0.05971$, $\text{Br}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.05961$. Для синглетных состояний использовались следующие НМЭ [24]: $\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 1.3$ ГэВ³, $\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 0.65$ ГэВ³, $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{(1)}] \rangle = 0.089$ ГэВ⁵.

Основной вклад в рождение J/ψ вносят подпроцессы с начальными глюонами, оценка для вклада подпроцессов с кварками для полных сечений составляет (в улучшенной модели испарения цвета) около 10 % при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ [25]. В данной работе мы оцениваем доли кварковых вкладов в НРКХД.

Вклад октетных состояний ψ' в рождение J/ψ мы не учитываем из-за их малости по сравнению с вкладами аналогичных состояний J/ψ и практически идентичной с ними зависимости от p_T на доступных нам областях фитирования НМЭ (так как оба вклада описываются одинаковыми матричными элементами). Можно считать малые октетные вклады ψ' эффективно включенными в прямое рождение соответствующих состояний J/ψ .

В качестве масштабов факторизации μ_F и перенормировки μ_R использовалась поперечная масса чармониев $M_T = \sqrt{M^2 + p_T^2}$ в коллинеарной модели и масса чармониев M в подходе ПМГ. Для корректного расчета распадов чармониев $C' \rightarrow C + X$ учитывался эффект отдачи в виде сдвига по поперечному импульсу $p_{TC} \approx (M_C/M_{C'})p_{TC'}$.

Фитирование октетных НМЭ проводилось на наборе экспериментальных данных коллабораций PHENIX [26; 27] и STAR [28; 29] по рождению J/ψ в протон-протонных столкновениях при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ в различных быструх диапазонах, причем совместно в областях применимости ПМГ ($p_T < 1$ ГэВ) и КПМ ($p_T > 5$ ГэВ) в предположении независимости НМЭ от выбора модели факторизации. Одинаковая зависимость от p_T вкладов ${}^1S_0^{(8)}$ и ${}^3P_J^{(8)}$ в прямом

рождении J/ψ не позволяет разделять соответствующие им НМЭ в рамках одной модели факторизации, поэтому их значения находят обычно только в виде линейной комбинации, однако совместный фит в КПМ и ПМГ (куда НМЭ входят в двух разных линейных комбинациях) дает возможность найти оба значения $\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^1S_0^{(8)}] \rangle$ и $\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_0^{(8)}] \rangle$. Кроме того, использовалась связь между НМЭ, обусловленная спиновой симметрией тяжелых кварков в лидирующем по v порядке НРКХД:

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[^3P_J^{(1)}] \rangle = (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[^3P_0^{(1)}] \rangle, \quad \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[^3S_1^{(8)}] \rangle = (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[^3S_1^{(8)}] \rangle,$$

$$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_J^{(8)}] \rangle = (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_0^{(8)}] \rangle.$$

Значения октетных НМЭ, полученные при фитировании экспериментальных данных, расположены в таблице, приведенная погрешность соответствует 1 среднеквадратичному отклонению. Результаты расчетов сечений для кинематики экспериментов PHENIX [26] и STAR [28] помещены на рис. 5.1, 5.2, 5.3 вместе с соответствующими им кривыми спектров (теоретические расчеты для экспериментальных данных 2007 года [27] здесь не приведены, так как они полностью совпадают с представленными на рис. 5.1 и 5.2). Светло-зеленым цветом на графиках показаны неопределенности при «сшивании» факторизаций, вычисленные с помощью выражения (3.3).

Таблица

Результаты фитирования НМЭ при $p_T < 1$ ГэВ (ПМГ) и $p_T > 5$ ГэВ (КПМ)

Table

Result for LDMEs fitting within domains of $p_T < 1$ GeV (SGR) and $p_T > 5$ GeV (CPM)

$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^1S_0^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(9.66 \pm 0.52) \cdot 10^{-2}$
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3P_0^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^5$	$(1.29 \pm 0.19) \cdot 10^{-2}$
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(1.95 \pm 1.59) \cdot 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(8.55 \pm 2.91) \cdot 10^{-3}$
$\chi^2/\text{n.d.f.}$	0.76

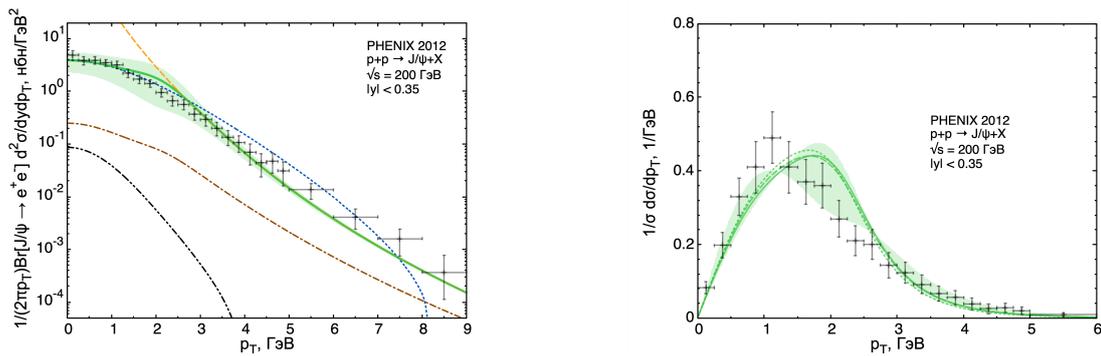


Рис. 5.1. Слева — данные PHENIX [26] и зависимость сечения рождения J/ψ от поперечного импульса: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия, см. онлайн-версию статьи журнала здесь и далее), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «сшитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.1. On the left — differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T : the collinear (orange dashed line, see the online version of the article here and further), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid). Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [26]. On the right — spectrum of J/ψ production

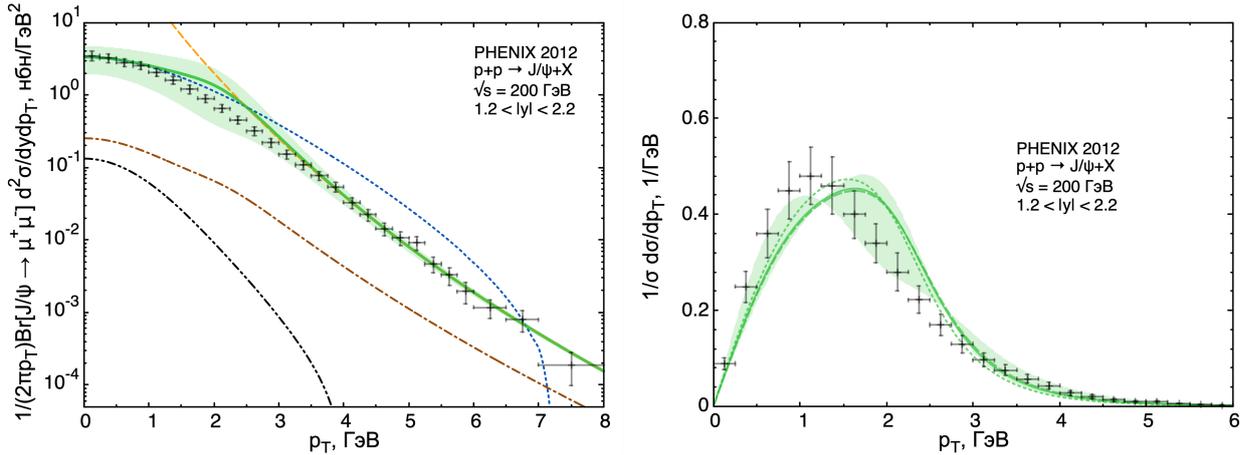


Рис. 5.2. Слева — данные PHENIX [27] и зависимость сечения рождения J/ψ от поперечного импульса: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «шитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.2. On the left — differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T : the collinear (orange dashed line), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid). Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [27]. On the right — spectrum of J/ψ production

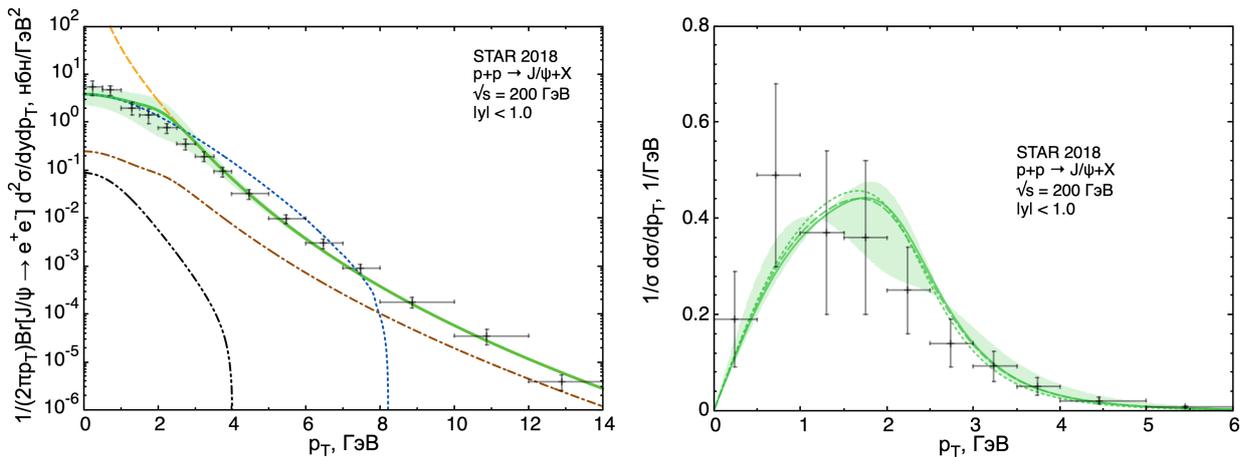


Рис. 5.3. Слева — данные STAR [28] и зависимость сечения рождения J/ψ от поперечного импульса: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «шитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.3. On the left — differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T : the collinear (orange dashed line), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid). Experimental data is taken from the STAR collaboration paper [28]. On the right — spectrum of J/ψ production

Дополнительную неопределенность в предсказания сечений вносят выбор жесткого масштаба и погрешность НМЭ. Однако при вычислении спектров эти неопределенности практически исчезают. На графиках изображены, кроме основных теоретически предсказанных спектров, также кривые, соответствующие минимальной неопределенности при варьировании разных масштабов в 2 раза в большую и меньшую сторону. Погрешность НМЭ влияет на форму кривой спектра крайне слабо, поэтому на графиках ее невозможно увидеть.

Наши расчеты показывают, что вклад подпроцессов с кварками составляет для центральной быстрой области при $\sqrt{s} = 200$ ГэВ около 3 %, а вклад от распадов $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi + \gamma$ ограничен 7 %, при этом экспериментальная оценка для вкладов от распадов χ_{cJ} составляет около 30 % [26].

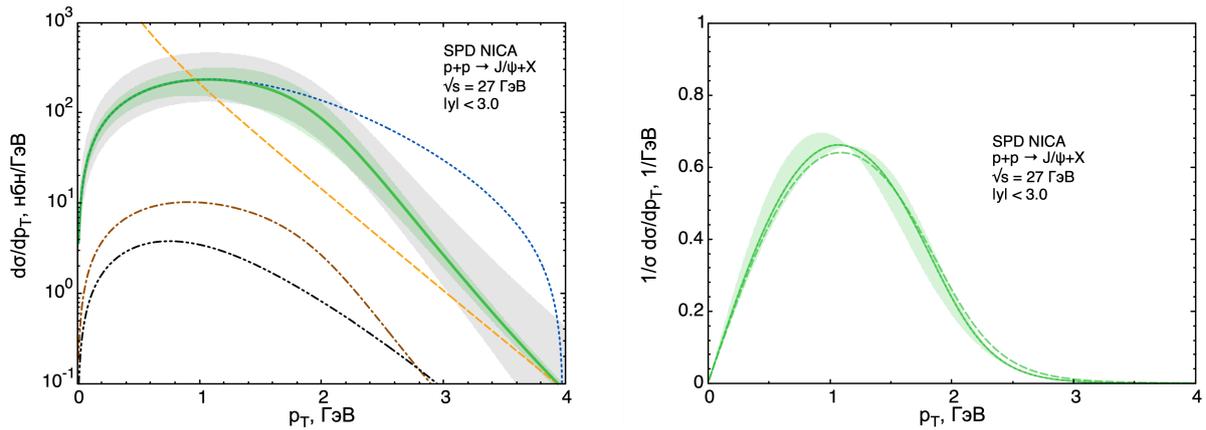


Рис. 5.4. Слева — сечение рождения J/ψ в кинематике SPD NICA: коллинеарный вклад (оранжевая штриховая линия), неколлинеарный (синяя пунктирная), от распадов χ_{cJ} (коричневая штрихпунктирная), от кварковых подпроцессов (черная штрихпунктирная с двумя точками), «сшитое» сечение J/ψ (зеленая сплошная), неопределенность от варьирования жесткого масштаба (серая область). Справа — спектр рождения J/ψ

Fig. 5.4. On the left — prediction for differential cross section of prompt J/ψ production versus transverse momentum p_T at SPD NICA kinematics: the collinear (yellow dashed line), noncollinear (blue dotted), χ_{cJ} decay (brown dash-dotted), quark subprocesses (black dash-dot-dotted) contributions, the matched cross-section (green solid), hard scale variation uncertainty (gray shaded area). On the right — spectrum of J/ψ production

Также мы приводим предсказания рождения J/ψ в кинематике SPD NICA при $\sqrt{s} = 27$ ГэВ с использованием фитированных НМЭ. Как видно на рис. 5.4, с уменьшением энергии \sqrt{s} область перехода из одной факторизации в другую смещается в сторону более малых значений p_T . Оценка вклада кварковых подпроцессов составляет меньше 4 %, доля распадов χ_{cJ} равна около 9 %.

Заключение

Показано, что спектры по поперечному импульсу J/ψ -мезонов в протон-протонных столкновениях хорошо описываются в нерелятивистской квантовой хромодинамике в модели, сочетающей метод пересуммирования мягких глюонов и коллинеарную партонную модель, с использованием метода обратных погрешностей для «сшивки» теоретических расчетов в промежуточной области поперечных импульсов. Используя экспериментальные данные, полученные при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ коллаборацией PHENIX, мы фитировали значения октетных непертурбативных матричных элементов, которые использовались для предсказания сечения рождения и спектра по поперечному импульсу J/ψ -мезонов в кинематике эксперимента SPD NICA при энергии $\sqrt{s} = 27$ ГэВ. Показано, что суммарный вклад от процесса кварк-кварковой аннигиляции и от распада вышележащих по массе состояний чармония в рождение J/ψ -мезонов не превышает 10 %.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант № 24-1-1-16-5, и государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, № FSSS-2024-0027.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Салеев В.А., Шилиев К.К. Рождение J/ψ в подходе пересуммирования мягких глюонов и нерелятивистской КХД // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 133–146.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-133-146.

© Салеев В.А., Шиляев К.К., 2024

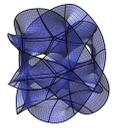
Владимир Анатольевич Салеев (saleev@samsu.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Кирилл Константинович Шиляев (kirill.k.shilyaev@gmail.com) – аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD / A. Arbuzov [et al.] // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2021. Vol. 119. P. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.
- [2] Anufriev A.V., Saleev V.A. High-Energy Production of η_c Mesons in Proton-Proton Collisions // Physics of Particles and Nuclei. 2024. Vol. 55, issue 4. P. 836–840. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377962470031X>.
- [3] Boer D., den Dunnen W.J. TMD evolution and the Higgs transverse momentum distribution // Nuclear Physics B. 2014. Vol. 886. P. 421–435. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.07.006>.
- [4] Sun P., Xiao B.-W., Yuan F. Gluon Distribution Functions and Higgs Boson Production at Moderate Transverse Momentum // Physical Review D. 2011. Vol. 84, issue 9. P. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.094005>.
- [5] Collins J. Foundation of Perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592.020>.
- [6] Echevarria M.G., Kasemets T., Lansberg J.-P., Pisano C., Signori A. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting // Physics Letters. Section B. 2018. Vol. 781. P. 161–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [7] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.F. Transverse Momentum Distribution in Drell-Yan Pair and W and Z Boson Production // Nuclear Physics B. 1985. Vol. 250. P. 199–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90479-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90479-1).
- [8] Collins J.C., Soper D.E. Back-To-Back Jets in QCD // Nuclear Physics B. 1981. Vol. 193, issue 2. P. 381–443. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90339-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90339-4).
- [9] Bor J., Boer D. TMD evolution study of the $\cos 2\phi$ azimuthal asymmetry in unpolarized J/ψ production at EIC // Physical Review D. 2022. Vol. 106, issue 1. P. 014030. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.014030>.
- [10] Aybat S.M., Rogers T.C. TMD Parton Distribution and Fragmentation Functions with QCD Evolution // Physical Review D. 2011. Vol. 83, issue 11. P. 114042. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.114042>.
- [11] Lepage G.P., Magnea L., Nakhleh C. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics // Physical Review D. 1992. Vol. 46. P. 4052–4067. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.4052>.

- [12] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // *Physical Review D*. 1995. Vol. 51. P. 1125–1171. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.5853>.
- [13] Kühn J.H., Kaplan J., Safiani E.G.O. Electromagnetic Annihilation of $e^+ e^-$ Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation // *Nuclear Physics B*. 1979. Vol. 157. P. 125–144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90055-5).
- [14] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production // *Physical Review D*. 1996. Vol. 53. P. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [15] Gastmans R., Troost W., Wu T.T. Cross-Sections for $\text{Gluon}^+ + \text{Gluon} \rightarrow \text{Heavy Quarkonium} + \text{Gluon}$ // *Physics Letters. Section B*. 1987. Vol. 184, issues 2–3. P. 257–260. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90578-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90578-8).
- [16] Cho P., Leibovich A. K. Color-octet quarkonia production. II // *Physical Review D*. 1996. Vol. 53, issue 11. P. 6203–6217. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6203>.
- [17] Lucha W., Schöberl F.F., Gromes D. Bound states of quarks // *Physics Reports*. 1991. Vol. 200, issue 4. P. 127–240. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90001-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90001-3).
- [18] Eichten E.J., Quigg C. Quarkonium wave functions at the origin // *Physical Review D*. 1995. Vol. 52, issue 3. P. 1726–1728. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [19] Hanh T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration // *Computer Physics Communications*. 2005. Vol. 168, issue 2. P. 78–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [20] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 // *Computer Physics Communications*. 2001. Vol. 140, issue 3. P. 418–431. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9).
- [21] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements // *Computer Physics Communications*. 2020. Vol. 256. P. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.
- [22] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S., Watt G. Parton distributions for the LHC // *The European Physical Journal C*. 2009. Vol. 63. P. 189–285. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.
- [23] Review of Particle Physics / P.A. Zyla [et al.] // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2020. Vol. 2020, issue 8. P. 083C01. DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- [24] Braaten E., Kniehl B.A., Lee J. Polarization of prompt J/ψ at the Fermilab Tevatron // *Physical Review D*. 2000. Vol. 62, issue 9. P. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.094005>.
- [25] Chernyshev A.A., Saleev V.A. Single and pair J/ψ production in the improved color evaporation model using the parton Reggeization approach // *Physical Review D*. 2022. Vol. 106, issue 11. P. 114006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.114006>.
- [26] Ground and excited state charmonium production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV / A. Adare [et al.] // *Physical Review D*. 2012. Vol. 85. P. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [27] J/ψ production versus transverse momentum and rapidity in p^+p collisions at $\sqrt{s} = 200$ -GeV / A. Adare [et al.] // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 98. P. 232002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.232002>.



[28] J/ψ production cross section and its dependence on charged-particle multiplicity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV / J. Adam [et al.] // Physics Letters B. 2018. Vol. 786. P. 87–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.029>.

[29] J/ψ production at high transverse momentum in $p + p$ and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV / B.I. Abelev [et al.] // Physical Review C. 2009. Vol. 80, issue 4. P. 041902. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.80.041902>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-133-146

Production of J/ψ within the Soft Gluon Resummation Approach and Nonrelativistic QCD

Saleev V.A. , Shilyaev K.K. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; saleev@samsu.ru (V.A.); kirill.k.shilyaev@gmail.com (K.K.);

Received: 11.08.2024

Revised: 22.10.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. In our study we analyse prompt J/ψ production in proton-proton collisions within the Soft Gluon Resummation approach, collinear parton model and nonrelativistic QCD. We extract a set of long-distance matrix elements for octet color states from experimental data at $\sqrt{s} = 200$ GeV. We use the InEW scheme for matching cross section and description of J/ψ production in a domain of intermediate transverse momenta. We also provide prediction for J/ψ production using fitted matrix elements at the kinematics of SPD NICA.

Key words: high energy physics; quantum chromodynamics; collinear parton model; noncollinear factorisation; soft gluon resummation approach; nonrelativistic quantum chromodynamics; charmonium; SPD NICA.

Funding. The work was supported by the Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS", grant No. 24-1-1-16-5, and the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, No. FSSS-2024-0027.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Saleev V.A., Shilyaev K.K. Production of J/ψ within the Soft Gluon Resummation Approach and Nonrelativistic QCD. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 133–146. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-133-146. (In Russ.)

© Saleev V.A., Shilyaev K.K., 2024

Vladimir A. Saleev (saleev@samsu.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Kirill K. Shilyaev (kirill.k.shilyaev@gmail.com) – postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Arbutov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, vol. 119, p. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.

- [2] Anufriev A.V., Saleev V.A. High-Energy Production of η_c Mesons in Proton-Proton Collisions. *Physics of Particles and Nuclei*, 2024, vol. 55, issue 4, pp. 836–840. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377962470031X>.
- [3] Boer D., den Dunnen W.J. TMD evolution and the Higgs transverse momentum distribution. *Nuclear Physics B*, 2014, vol. 886, pp. 421–435. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2014.07.006>.
- [4] Sun P., Xiao B.-W., Yuan F. Gluon Distribution Functions and Higgs Boson Production at Moderate Transverse Momentum. *Physical Review D*, 2011, vol. 84, issue 9, p. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.094005>.
- [5] Collins J. Foundation of Perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592.020>.
- [6] Echevarria M.G., Kasemets T., Lansberg J.-P., Pisano C., Signori A. Matching factorization theorems with an inverse-error weighting. *Physics Letters. Section B*, 2018, vol. 781, pp. 161–168. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.03.075>.
- [7] Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.F. Transverse Momentum Distribution in Drell-Yan Pair and W and Z Boson Production. *Nuclear Physics B*, 1985, vol. 250, pp. 199–224. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(85\)90479-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90479-1).
- [8] Collins J.C., Soper D.E. Back-To-Back Jets in QCD. *Nuclear Physics B*, 1981, vol. 193, issue 2, pp. 381–443. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(81\)90339-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(81)90339-4).
- [9] Bor J., Boer D. TMD evolution study of the $\cos 2\phi$ azimuthal asymmetry in unpolarized J/ψ production at EIC. *Physical Review D*, 2022, vol. 106, issue 1, p. 014030. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.014030>.
- [10] Aybat S.M., Rogers T.C. TMD Parton Distribution and Fragmentation Functions with QCD Evolution. *Physical Review D*, 2011, vol. 83, issue 11, p. 114042. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.114042>.
- [11] Lepage G.P., Magnea L., Nakhleh C. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics. *Physical Review D*, 1992, vol. 46, pp. 4052–4067. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.4052>.
- [12] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, pp. 1125–1171. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1125>.
- [13] Kühn J.H., Kaplan J., Safiani E.G.O. Electromagnetic Annihilation of $e^+ e^-$ Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation. *Nuclear Physics B*, 1979, vol. 157, pp. 125–144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90055-5).
- [14] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, pp. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [15] Gastmans R., Troost W., Wu T.T. Cross-Sections for Gluon + Gluon \rightarrow Heavy Quarkonium + Gluon. *Physics Letters. Section B*, 1987, vol. 184, issues 2–3, pp. 257–260. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90578-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90578-8).
- [16] Cho P., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production. II. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, issue 11, pp. 6203–6217. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6203>.
- [17] Lucha W., Schöberl F.F., Gromes D. Bound states of quarks. *Physics Reports*, 1991, vol. 200, issue 4, pp. 127–240. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90001-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90001-3).

- [18] Eichten E.J., Quigg C. Quarkonium wave functions at the origin. *Physical Review D*, 1995, vol. 52, issue 3, pp. 1726–1728. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [19] Hanh T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration. *Computer Physics Communications*, 2005, vol. 168, issue 2, pp. 78–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [20] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Computer Physics Communications*, 2001, vol. 140, issue 3, pp. 418–431. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9).
- [21] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *Computer Physics Communications*, 2020, vol. 256, p. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.
- [22] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S., Watt G. Parton distributions for the LHC. *The European Physical Journal C*, 2009, vol. 63, pp. 189–285. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.
- [23] Zyla P.A. [et al.] Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020, vol. 2020, issue 8, p. 083C01. DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- [24] Braaten E., Kniehl B.A., Lee J. Polarization of prompt J/ψ at the Fermilab Tevatron. *Physical Review D*, 2000, vol. 62, issue 9, p. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.094005>.
- [25] Chernyshev A.A., Saleev V.A. Single and pair J/ψ production in the improved color evaporation model using the parton Reggeization approach. *Physical Review D*, 2022, vol. 106, issue 11, p. 114006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.114006>.
- [26] Adare A. [et al.] Ground and excited state charmonium production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, p. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [27] Adare A. [et al.] J/ψ production versus transverse momentum and rapidity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ -GeV. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, p. 232002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.232002>.
- [28] Adam J. [et al.] J/ψ production cross section and its dependence on charged-particle multiplicity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Physics Letters B*, 2018, vol. 786, pp. 87–93. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.09.029>.
- [29] Abelev B.I. [et al.] J/ψ production at high transverse momentum in $p + p$ and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. *Physical Review C*, 2009, vol. 80, issue 4, p. 041902. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.80.041902>.