

Нелинейные уравнения деформирования гибких пластин

Койфман¹ К.Г. , Лычев² С.А. 

¹ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация; koifman.konstantin@gmail.com (К.Г.);

² Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, Российская Федерация; lychevsa@mail.ru (С.А.);

Поступила: 18.10.2024

Рассмотрена: 23.11.2024

Принята: 25.11.2025

Научная статья



Аннотация. В общих неортогональных координатах сформулированы нелинейные уравнения деформирования гибких пластин с учетом несовместных локальных деформаций. Использовались следующие предположения. 1. Перемещения пластины из отсчетной (самонапряженной) формы ограничены кинематическими гипотезами Кирхгофа — Лява. 2. Элементарные объемы, составляющие отсчетную форму, могут быть локально трансформированы в ненапряженное состояние посредством невырожденного линейного преобразования (гипотеза о локальной разгрузке). 3. Преобразования, обратные локальной разгрузке, — импланты — могут быть найдены из решения эволюционной задачи, моделирующей последовательное нанесение бесконечно тонких слоев на лицевую граничную поверхность пластины. Построены геометрические пространства аффинной связности, моделирующие глобальную отсчетную форму, свободную от напряжений. В качестве частных случаев рассмотрены: пространство Вайденбока (с ненулевым кручением), пространство Римана (с ненулевой кривизной) и пространство Вейля (с ненулевой неметричностью).

Ключевые слова: гиперупругость; гибкие пластины; кинематические гипотезы; нелинейные уравнения; асимптотические разложения; несовместные деформации; материальная связность.

Введение

В настоящее время микроэлектромеханические системы (МЭМС) широко используются в разнообразных электронных и оптических устройствах [1]. Особенность таких систем состоит в их пространственном масштабе, который может составлять порядка нескольких микрон и менее [2; 3]. Деформация упругих элементов в таком масштабе существенно зависит от факторов, которые обычно не учитываются в традиционном проектировании [4]. К ним относятся: несовместные деформации, являющиеся источниками собственных (остаточных) напряжений, поверхностные эффекты, нелинейное взаимное влияние плоского и изгибного напряженных состояний, а также существенные изменения геометрической формы элементов из-за их высокой гибкости [4–7]. Для учета этих факторов необходимо выйти за рамки классической теории упругих пластин и оболочек [8; 9], рассматривая их с позиций нелинейной механики сплошных сред [10] как упругие системы с малым параметром, соответствующим их толщине.

Первые модели, учитывающие геометрическую нелинейность, были предложены Фёпplerом [11], а несколько позже фон Карманом [12]. Несмотря на то что соотношение между напряжениями и деформациями в этих моделях предполагалось линейным, а нелинейные члены, характеризующие связь между плоским напряженным состоянием и изгибом, определялись полуэмпирическим путем, их использование в инженерных расчетах показало результаты, близкие к наблюдаемым в экспериментах [13]. Это, конечно, не решает вопроса об их обосновании, который подробно обсуждается, например, в [14].

Цель настоящей работы — сделать шаг к построению полностью (геометрически и физически) нелинейной теории гибких пластин с несовместными деформациями. Для достижения

цели используются методы геометрической механики континуума [15–21], позволяющие моделировать форму, свободную от напряжений, в рамках единой области, снабженной неевклидовой геометрией. Благодаря такому подходу деформация является, как и в классической механике сплошной среды, гомеоморфизмом отсчетной формы в актуальную. Отличие заключается лишь в том, что теперь отсчетная форма служит неевклидовым пространством, в то время как актуальная форма по-прежнему остается областью физического пространства. Отметим, что геометрический подход позволяет не только учесть несовместные конечные деформации, но также и поверхностные эффекты, благодаря чему удается теоретически объяснить особенности механических свойств сверхтонких элементов МЭМС.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведен обзор основных положений геометрической теории несовместных деформаций, используемых в статье. Отсчетная форма тела с несовместными деформациями определяется в пространстве с неевклидовой связностью, благодаря чему удается сохранить привычную методологию механики сплошной среды и определять деформацию как гомеоморфизм одной формы (неевклидовой глобальной натуральной) в другую (евклидову самонапряженную). Раздел 2 посвящен определению тонкостенной конструкции произвольного вида и ее частного случая — пластины. При этом форма пластины предполагается произвольной и характеризуется произвольными же криволинейными координатами в плоскости осреднения. В соответствии с гипотезами Кирхгофа–Лява используется частичная асимптотика по толщинному параметру. В разделе 3 определяются подходящие меры напряжений и деформаций для пластины. Уравнение равновесия в отсчетном описании преобразуется в соответствии с этим выбором. Дивергентное слагаемое разбивается на два слагаемых — линейную и нелинейную (по перемещениям) части. Последний раздел 4 посвящен учету несовместных деформаций в пластине. Предложен частный вид поля локальных деформаций, и синтезирована отсчетная геометрия, соответствующая этому выбору.

1. Общие представления несовместных деформаций

1.1. Конфигурации и деформации

В соответствии с общей методологией, сплошная среда (далее — тело) формализуется в виде материального многообразия — абстрактного гладкого трехмерного многообразия [22] $\mathfrak{B}$, характеризующего как материальный состав тела, так и его топологические свойства. Элементы материального многообразия — суть метки частиц, формирующих тело, а топология определяет близость между ними, что позволяет в общем виде определять дифференцирование полей, заданных на $\mathfrak{B}$. Хотя структура материального многообразия может быть достаточно произвольной [23], в рамках классической нелинейной механики континуума рассматриваются лишь те из них, которые могут быть вложены в трехмерное евклидово пространство. Этим исключаются, в частности, такие многообразия, как твердотельная бутылка Клейна.

Как отмечалось, материальные многообразия достаточно абстрактны и, по образному выражению М. Эпштейна, населяют «Платонов мир чистых идей» [18]. Вместе с тем их качественные и количественные свойства могут быть определены лишь из наблюдения за формами в физическом пространстве $\mathcal{E}$. В соответствии с постулатами классической физики [24; 25], последнее предполагается наделенным аффинно-евклидовой структурой. В явном виде

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{V}, \text{vec}, g), \quad (1)$$

где E есть континуальное множество мест; $\mathcal{V}$ есть трехмерное вещественное векторное пространство трансляций;

$$\begin{aligned} \text{vec} : E \times E &\rightarrow \mathcal{V}, \\ (a, b) &\mapsto \overrightarrow{ab} \end{aligned}$$

есть отображение, сопоставляющее каждой упорядоченной паре мест соответствующую трансляцию из первого места во второе. Предполагается выполнение следующих аксиом Вейля [26]:

(W₁) $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$ для любых $a, b, c \in E$ (соотношение Шалля),

(W₂) частное отображение

$$\begin{aligned} \text{vec}_a : E &\rightarrow \mathcal{V}, \\ x &\mapsto \vec{ax}, \end{aligned}$$

является биекцией для любой фиксированной точки $a \in E$.

Последний элемент структуры (1) есть скалярное произведение $\mathbf{g}$ — симметричный билинейный положительно определенный функционал на $\mathcal{V}$. Для его действия используется альтернативное обозначение: $uv := \mathbf{g}(u, v)$.

Форма материального многообразия $\mathfrak{B}$ определяется как образ $\mathcal{S} = \kappa(\mathfrak{B})$ вложения $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$, которое, следуя Ноллу [27], будем называть конфигурацией. То обстоятельство, что κ должно быть вложением, вытекает из аксиомы непрерывности и принципа непроницаемости [28]. Далее предполагается, что все соответствующие формы являются ограниченными связными областями $\mathcal{E}$, регулярными в смысле Келлога [29]. Благодаря этому появляется возможность определить интегрирование на границах форм и использовать теорему Стокса для преобразования интегралов по границе, что необходимо для формулировки уравнений баланса.

Несмотря на то что каждая конфигурация κ подчинена свойству непроницаемости (двум различным частицам отвечают различные места), ее образ в общем случае не совпадает со всем множеством E . В этой связи не имеет смысла говорить об обратном отображении κ^{-1} в соответствии с тем, как это принято в анализе. Однако обратные отображения являются необходимыми для построения теории, поскольку они позволяют формализовать деформации. Для исправления ситуации предлагается определить отображение

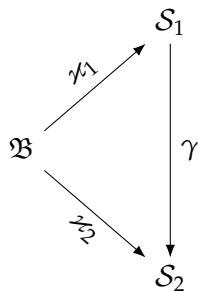
$$\begin{aligned} \hat{\kappa} : \mathfrak{B} &\rightarrow \kappa(\mathfrak{B}), \\ \mathfrak{x} &\mapsto \kappa(\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

полученное сужением области прибытия исходного отображения на образ. Построенное отображение является обратимым, что и требовалось.

Деформация тела определяется как изменение его форм. В явном виде пусть $\kappa_1, \kappa_2 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — произвольные конфигурации материального многообразия, образами которых являются формы $\mathcal{S}_1 = \kappa_1(\mathfrak{B})$ и $\mathcal{S}_2 = \kappa_2(\mathfrak{B})$. Тогда деформация есть композиция

$$\gamma := \hat{\kappa}_2 \circ \hat{\kappa}_1^{-1} : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2.$$

Ее действие иллюстрирует следующая диаграмма:



1.2. Евклидова геометрия форм

Несмотря на кажущуюся первичность структуры (1), в действительности она может считаться производной, полученной исходя из следующих данных [30]: 1) евклидова векторного пространства $\mathcal{V}$, 2) некоторого места o («начала мира») и 3) всевозможных сдвигов из o на

векторы из $\mathcal{V}$. Наряду с этим пространство $\mathcal{V}$ наделяет физическое пространство $\mathcal{E}$ структурой пространства аффинной связности [31; 32]:

$$\mathcal{E}_{\text{geom}} = (E, \mathcal{T}_E, \mathcal{D}_E, \mathbf{g}_E, \nabla_E, dV_E), \quad (2)$$

где E — подлежащее множество мест, такое же, как и в (1), а $\mathcal{T}_E$ и $\mathcal{D}_E$ — евклидова топология и гладкая структура на E . Поле $\mathbf{g}_E$ есть метрический тензор [22], являющийся постоянным полем, значения которого в каждой точке многообразия — суть скалярные произведения $\mathbf{g}$ из структуры (1). В свою очередь метрический тензор определяет евклидову связность [32] ∇_E и форму объема [22] dV_E на E , представленные последними элементами структуры (2).

Многие геометрические аспекты, связанные со структурой (2), и детальное определение составляющих ее полей могут быть найдены в работе [33]. Подчеркнем лишь, что в рамках классической нелинейной механики представление физического пространства в виде многообразия, снабженного метрикой и связностью, находится в тени структуры (1), поскольку все поля заданы на евклидовых формах, соотношения между ними опираются на «школьную» геометрию и необходимости в усложнении привычных представлений нет. Методология изменяется, когда рассматриваются тела с несовместными деформациями, что, в частности, является предметом настоящего исследования. В таком случае возникает необходимость привлекать соображения неевклидовой геометрии, что влечет целесообразность в явном указании структуры (2) и ее дальнейшей модификации.

Геометрия физического пространства индуцируется на каждую из форм. Если $\mathcal{S}$ — некоторая форма материального многообразия $\mathfrak{B}$, то ее можно представить в виде структуры

$$\mathcal{S} = (S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S, \mathbf{g}_E|_S, \nabla_E|_S, dV_E|_S), \quad (3)$$

в которой $S \subset E$ — подлежащее множество мест, а символ вертикальной черты $|_S$ означает сужение соответствующего поля на S .

В соответствии с теоремами, доказываемыми в курсе анализа на многообразиях [22], множество S является открытым в евклидовой топологии физического пространства, а геометрия на нем совпадает с евклидовой, что может быть выражено следующими соотношениями: $\mathfrak{T} = \mathbf{0}$, $\mathfrak{K} = \mathbf{0}$ и $\mathfrak{Q} = \mathbf{0}$, где $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Q}$, соответственно, кручение, кривизна и неметричность аффинной связности $\nabla_E|_S$. Таким образом, в рамках классической нелинейной механики форма (3) является евклидовым многообразием.

В отличие от физического пространства и форм, которые снабжены евклидовыми геометриями, никакой геометрии на материальном многообразии $\mathfrak{B}$ изначально не предполагается. Ему отвечает следующее представление:

$$\mathfrak{B} = (B, \mathcal{T}_B, \mathcal{D}_B), \quad (4)$$

где B — подлежащее множество меток частиц, $\mathcal{T}_B$ — топология на нем, а $\mathcal{D}_B$ — гладкая структура.

Однако возможность вложить $\mathfrak{B}$ в трехмерное евклидово пространство $\mathcal{E}$ накладывает ограничения на $\mathfrak{B}$. В частности, множество B покрывается одной картой, индуцированной с любой из форм, а касательное расслоение $T\mathfrak{B}$ является тривиальным и может быть представлено в виде прямого произведения $T\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \times \mathbb{R}^3$.

В работах по классической механике сплошной среды материальное многообразие часто отождествляется с одной из его форм и далее рассматривается в качестве отсчетной формы. Именно последняя приобретает статус многообразия меток, но рассматриваемого в объемлющем евклидовом пространстве. С формальной точки зрения это означает выбор некоторой конфигурации $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ и расширение структуры (4) до следующего геометрического пространства:

$$\mathfrak{B}_R = (\mathfrak{B}, \varkappa_R^* \mathbf{g}_E, \varkappa_R^* \nabla_E, \varkappa_R^* dV_E), \quad (5)$$

где символ $\varkappa_R^*$ означает операцию обратного образа (pullback [34]), примененную к соответствующему полю [22; 32]. В явном виде

$$\begin{aligned}\varkappa_R^* g_E|_{\mathfrak{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g_E|_{\varkappa_R(\mathfrak{X})}(T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{u}), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{v})), \\ \varkappa_R^* dV_E|_{\mathfrak{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= dV_E|_{\varkappa_R(\mathfrak{X})}(T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{u}), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{v}), T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R(\mathbf{w}))\end{aligned}$$

для любой точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ и любых касательных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$ и

$$(\varkappa_R^* \nabla_E)_u \mathbf{v} = \widehat{\varkappa}_R^* \{(\nabla_E)_{(\widehat{\varkappa}_R)_* u} (\widehat{\varkappa}_R)_* \mathbf{v}\}$$

для любых векторных полей $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ на $\mathfrak{B}$. Здесь $T\varkappa_R : T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathcal{E}$ есть касательное отображение [34] к $\varkappa_R$, а $(\widehat{\varkappa}_R)_* \mathbf{u} = T\varkappa_R \circ \mathbf{u} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1}$ есть прямой образ (pushforward [34]) векторного поля $\mathbf{u}$.

Поскольку поле $(\varkappa_R^* \nabla_E)_u \mathbf{v}$ определено достаточно сложно, дадим необходимые пояснения. Каждое из векторных полей $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ является отображением вида $\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{B}$, в то время как операция ∇_E действует на отображения $\mathcal{E} \rightarrow T\mathcal{E}$. Поэтому в первую очередь поля $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ переносятся на $\mathcal{E}$ с сохранением их свойств. Это осуществляется при помощи прямого образа $(\widehat{\varkappa}_R)_*$. На новые поля уже можно подействовать евклидовой связностью, что приводит к полю $(\nabla_E)_{(\widehat{\varkappa}_R)_* u} (\widehat{\varkappa}_R)_* \mathbf{v}$. Но это — векторное поле на $\mathcal{E}$, поэтому далее оно отображается на $\mathfrak{B}$ при помощи операции обратного образа $\widehat{\varkappa}_R^*$.

Структура (5) является евклидовым многообразием, а форма $\mathcal{S}_R = \varkappa_R(\mathfrak{B})$ — его гомеоморфной копией. Оба пространства $\mathfrak{B}_R$ и $\mathcal{S}_R$ совершенно неотличимы друг от друга, и поэтому в рамках классических рассуждений их отождествляют, полагая $\mathcal{S}_R$ материальным многообразием и называя его отсчетной формой. Все рассуждения проводятся относительно $\mathcal{S}_R$. В настоящей работе мы также опираемся на отсчетную форму. Вместе с тем понятие материального многообразия не отбрасывается, а лишь остается в тени. При рассмотрении несовместных деформаций оно возвращается на арену, будучи снабженным неевклидовой геометрией. С такой геометрией материальное многообразие становится отсчетной формой, а конфигурации приобретают статус обобщенных деформаций. Подробно эти аспекты изложены в работе [35].

1.3. Локальные деформации

В настоящем исследовании рассматриваются лишь гиперупругие тела, материал которых прост [10]. В этой связи движение, вызванное действием внешних полей на тело и отсчитываемое от формы $\mathcal{S}_R$, реализуется в рамках принципа стационарности действия: $\delta \mathcal{A} = 0$, где $\mathcal{A}$ — действие, определенное соотношением

$$\mathcal{A}[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{S}_R} \mathcal{L}(X, t, \gamma(X, t), \dot{\gamma}(X, t), D\gamma(X, t)) dV_R dt. \quad (6)$$

В нем $X \in \mathcal{S}_R$, $t \in \mathbb{R}$, а $\gamma : \mathcal{S}_R \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ есть гладкое отображение, удовлетворяющее условию: для любого значения момента времени t частичное отображение $\gamma_t := \gamma(\cdot, t) : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_t$ есть деформация отсчетной формы $\mathcal{S}_R$ в некоторую форму $\mathcal{S}_t$. Символ $\dot{\gamma} := \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ обозначает поле скорости в отсчетном описании, а $D\gamma := \frac{\partial \gamma}{\partial X}$ при каждом фиксированном t есть градиент по пространственным переменным. Они характеризуют наилучшее линейное приближение отображения γ :

$$\gamma(X + \mathbf{h}, t + \tau) = \gamma(X, t) + D\gamma(X, t)[\mathbf{h}] + \dot{\gamma}(X, t)\tau + o(\|(\mathbf{h}, \tau)\|).$$

Следуя обозначениям, принятым в механике сплошной среды, для градиента $D\gamma$ будем использовать символ $\mathbf{F}$, т. е. $\mathbf{F} = D\gamma$.

В формуле (6) $\mathcal{L}$ есть плотность действия. Будем полагать, что она определяется равенством (в котором зависимость полей от переменных X, t опущена ради экономии места)

$$\mathcal{L}(X, t, \gamma, \dot{\gamma}, \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \rho_R(X) \dot{\gamma}^2 - W(X, \mathbf{F}) - \Phi(\gamma, t),$$

где ρ_R — массовая плотность в отсчетном описании, W — плотность упругой энергии, а Φ есть потенциал внешних массовых сил.

Используя далее стандартную вариационную технику, теперь можно получить уравнения поля и законы сохранения [21]. Однако эти соотношения являются общими, и для их частного применения необходимо знать явную зависимость W от F .

Для дальнейшего уточним, что понимается под представительным объемом: это часть формы $\mathcal{S}_R$, достаточно малая, чтобы считать ее деформации однородными, и достаточно большая, чтобы выполнялась гипотеза о термодинамическом равновесии. Теперь предположим, что некоторый представительный объем — тестовый образец — извлечен из формы, предварительно разгружен и помещен в испытательную машину. Тогда из экспериментов будет получена явная зависимость $W(X_0, F)$ плотности W от градиента деформации F . В ней следует предполагать точку $X_0 \in \mathcal{S}_R$, отвечающую выбранному представительному объему, фиксированной; меняется лишь линейное отображение F . В общем случае, выбирая разные представительные объемы, придем к разным зависимостям для плотности упругой энергии, однако в настоящей работе принимается гипотеза о материальном единообразии [27]: представительные объемы состоят из одного и того же материала.

Будем полагать, что представительный объем тела обладает некоторым привилегированным состоянием, которое назовем натуральным. Состояние, свободное от напряжений, может служить примером. В общем же случае охарактеризуем его значением P_{natural} тензора Пиолы–Кирхгофа 1-го рода. Тогда классическая механика сплошной среды основана на следующей гипотезе о глобальной разгрузке: существует деформация $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$ из отсчетной формы в некоторую форму $\mathcal{S}_0$, удовлетворяющая условию

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=D_Y \gamma_0|_{Y=X}} = P_{\text{natural}}. \quad (7)$$

Таким образом, представительные объемы, составляющие форму $\mathcal{S}_R$, могут быть согласованно переведены в натуральное состояние, что даст новую форму $\mathcal{S}_0$, находящуюся целиком в натуральном состоянии.

Вместе с тем гипотеза о глобальной разгрузке справедлива далеко не всегда [36]. В частности, она неверна, когда тело имеет дефектную структуру (дислокации, дисклинации, метрические аномалии). В таком случае целесообразно принять гипотезу о локальной разгрузке [35]. Предположим, что имеется семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, удовлетворяющее условию

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=D_Y \gamma^{(X)}|_{Y=X}} = P_{\text{natural}}. \quad (8)$$

В отличие от (7), производные $\frac{\partial W(X, F)}{\partial F}$ теперь вычисляются для градиентов от различных элементов семейства деформаций, а не от одной деформации. Это отражает то обстоятельство, что в общем случае представительные объемы, составляющие форму $\mathcal{S}_R$, не могут согласованно перейти в натуральное состояние и образовать некоторую глобальную форму $\mathcal{S}_0$.

Следуя подходу, принятому в континуальной теории дефектов [37], для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ определим тензор

$$H_X := D_Y \gamma^{(X)}|_{Y=X}. \quad (9)$$

Тогда свойство (8) принимает вид

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=H_X} = P_{\text{natural}}. \quad (10)$$

В этой связи тензор H_X характеризует деформацию представительного объема, окружающего точку X , в натуральное состояние. По этой причине будем называть H_X локальной деформацией. Поскольку распределение дефектов предполагается непрерывным, то будем полагать, что поле

$$H : X \mapsto H_X$$

является гладким. Заметим, что это поле получено по некоторому семейству деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. Но можно поступить и иначе, как это принято в теории дефектов: сразу определить поле $\mathbf{H}$, значения которого удовлетворяют (10). С формальной точки зрения оба подхода эквивалентны, поскольку соответствующее семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ можно восстановить. Однако для дальнейших построений подход, связанный с семейством деформаций, представляется нам более предпочтительным.

1.4. Неевклидова отсчетная форма

В терминах поля локальных деформаций $\mathbf{H}$ можно аналитически выразить свойство отсутствия глобальной натуральной формы. Действительно, локальные деформации совместны, если существует глобальная деформация $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$, такая, что $D\gamma_0 = \mathbf{H}$. Здесь $\mathcal{S}_0$ и есть глобально натуральная форма. В противном случае локальные деформации несовместны. В дальнейшем будем считать отсчетную форму $\mathcal{S}_R$ односвязной [38]. Тогда из теории потенциала [29] известно, что тензорное поле второго ранга является градиентом некоторого точечного отображения в том и только в том случае, когда его ротор равен нулю. В этой связи условие совместности локальных деформаций может быть записано в виде равенства $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Нарушение этого равенства означает, что локальные деформации несовместны. Теперь, представляя источник несовместности (в частности, плотность дефектов) в виде тензорного поля второго ранга $\boldsymbol{\eta}$, можно записать соотношение

$$\text{curl } \mathbf{H} = \boldsymbol{\eta}, \quad (11)$$

связывающее поле локальных деформаций с источником $\boldsymbol{\eta}$. Дальнейшие рассуждения должны использовать (11) как одно из уравнений системы, характеризующей напряженно-деформированное состояние тела.

Однако можно поступить иначе. Поскольку в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ тензор $\mathbf{H}_X$ является обратимым линейным преобразованием, приходим к полю

$$\mathbf{H}^{-1} : X \mapsto \mathbf{H}_X^{-1}$$

обратных локальных деформаций. Тогда соотношение (11) эквивалентно соотношению

$$\mathbf{H}^{-1} \text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\eta}.$$

Левая часть полученного соотношения есть не что иное, как свертка $\boldsymbol{\epsilon} : \mathfrak{T}$ тензора Леви-Чивита $\boldsymbol{\epsilon}$ и кручения $\mathfrak{T}$ связности Вайценбока [27; 37; 39; 40]! Таким образом, кинематическое уравнение (11) заменяется геометрическим:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0,$$

и, следовательно, кручение приобретает статус плотности дефектов (дислокаций) [41].

Рассуждения, проведенные выше, неявно предполагали, что дефекты представлены дислокациями. Однако возможны и дисклинации и точечные дефекты [42; 43]. Общая геометрическая идея, таким образом, состоит в следующем [35]. «Сотрем» геометрию с отсчетной формы $\mathcal{S}_R$, представленной структурой

$$\mathcal{S}_R = (\mathcal{S}_R, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathbf{g}_E|_{\mathcal{S}_R}, \nabla_E|_{\mathcal{S}_R}, dV_E|_{\mathcal{S}_R}),$$

и оставим лишь подлежащее многообразие $\mathfrak{S}_R$, т. е.

$$\mathfrak{S}_R = (\mathcal{S}_R, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}_R}).$$

Затем, принимая во внимание структуру дефектов, «синтезируем» подходящую геометрию на многообразии $\mathfrak{S}_R$, что приводит к неевклидову в общем случае пространству аффинной связности:

$$\mathcal{S}_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, \nabla, dV). \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{G}$ — риманова метрика на $\mathfrak{S}_R$, ∇ — аффинная связность на $\mathfrak{S}_R$, а dV — форма объема, порожденная метрикой $\mathbf{G}$.

Инварианты связности — кручение $\mathfrak{T}$, кривизна $\mathfrak{R}$ и неметричность $\mathfrak{Q}$ служат мерами несовместности локальных деформаций и, соответственно, плотностями дефектов. Пространство (12), таким образом, приобретает статус глобальной натуральной формы, наделенной неевклидовой геометрией.

В работе рассматривается лишь частный случай, когда несовместность локальных деформаций полностью характеризуется кривизной связности. Последняя является связностью Леви-Чивита, порожденной метрикой $\mathbf{G}$. Для синтеза метрики используем следующее рассуждение [35]. Пусть $X \in \mathfrak{S}_R$ — произвольная точка, а $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$ — соответствующая деформация из семейства. Форма $\mathcal{S}^{(X)}$ есть структура вида (3),

$$\mathcal{S}^{(X)} = (S^{(X)}, \mathcal{T}_E|_{S^{(X)}}, \mathcal{D}_E|_{S^{(X)}}, \mathbf{g}_E|_{S^{(X)}}, \nabla_E|_{S^{(X)}}, dV_E|_{S^{(X)}}),$$

в которой нас будет интересовать лишь метрика $\mathbf{g}_E|_{S^{(X)}}$. Ее обратный образ обозначим через $\mathbf{G}^{(X)}$, т. е.

$$\mathbf{G}^{(X)} := (\gamma^{(X)})^* \mathbf{g}_E|_{S^{(X)}}.$$

В явном виде

$$\mathbf{G}^{(X)}|_Y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}_E|_{\gamma^{(X)}(Y)}(T_Y \gamma^{(X)}(\mathbf{u}), T_Y \gamma^{(X)}(\mathbf{v})),$$

где $Y \in \mathfrak{S}_R$, а $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_Y \mathfrak{S}_R$. Синтезируем теперь по семейству $\{\mathbf{G}^{(X)}\}_{X \in \mathfrak{S}_R}$ новое поле

$$\mathbf{G} : X \mapsto \mathbf{G}^{(X)}|_X,$$

т. е.

$$\mathbf{G}|_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}_E|_{\gamma^{(X)}(X)}(T_X \gamma^{(X)}(\mathbf{u}), T_X \gamma^{(X)}(\mathbf{v}))$$

для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \mathfrak{S}_R$. Но последнее равенство можно записать в терминах локальных деформаций и скалярного произведения $(\cdot)$:

$$\mathbf{G}|_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{H}_X[\mathbf{u}] \mathbf{H}_X[\mathbf{v}]. \quad (13)$$

Приходим к финальному выражению для метрики. Физический смысл определения (13) состоит в том, что в каждой точке $X \in \mathfrak{S}_R$ метрика $\mathbf{G}$ возвращает длины и углы материальных волокон, находящихся в натуральном состоянии.

Синтезировав метрику (13), мы теперь можем синтезировать связность Леви-Чивита [44]. Ее коэффициенты в координатном репере $(\partial_A)_{A=1}^3$ представлены выражениями:

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{G^{CD}}{2} \left(\frac{\partial G_{DB}}{\partial X^A} + \frac{\partial G_{AD}}{\partial X^B} - \frac{\partial G_{AB}}{\partial X^D} \right), \quad (14)$$

где $[G^{AB}] = [G_{AB}]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице метрических коэффициентов $G_{AB} = \mathbf{G}(\partial_A, \partial_B)$. Таким образом, неевклидова отсчетная форма (12) полностью синтезирована. Она является римановым пространством, геометрия которого характеризуется тензором кривизны Римана $\mathfrak{R}$. Его компоненты в координатном репере связаны с коэффициентами связности формулой

$$\mathfrak{R}^D_{ABC} = \frac{\partial \Gamma^D_{BC}}{\partial X^A} - \frac{\partial \Gamma^D_{AC}}{\partial X^B} + \Gamma^E_{BC} \Gamma^D_{AE} - \Gamma^E_{AC} \Gamma^D_{BE}. \quad (15)$$

Тензорное поле $\mathfrak{R}$, в свою очередь, определяет тензор кривизны Риччи Ric , компоненты которого в координатном репере получаются при помощи свертки компонент кривизны Римана:

$$\text{Ric}_{AB} = \mathfrak{R}^C_{ACB}.$$

Являясь тензорным полем второго ранга, тензор Ric имеет в качестве одного из главных инвариантов след

$$\text{Scal} = G^{AB} \text{Ric}_{AB} \quad (16)$$

— скалярную кривизну.

Подведем итог рассуждениям. Если локальные деформации несовместны, то имеются две возможности. В рамках первой из них мы по-прежнему работаем с формами как с областями, наделенными геометрией евклидова пространства. Но тогда приходится отказаться от идеи глобальной натуральной формы, заменив ее семейством локально натуральных форм. В этой связи соотношения механики сплошной среды теряют свой привычный вид. Однако имеется и вторая возможность, когда требование к геометрии форм ослабляется. Допускается, что форма может быть многообразием неевклидовой связности, инварианты которой характеризуют несовместность деформаций. В таком случае идея глобальной натуральной формы сохраняется и деформацию тела можно по-прежнему рассматривать как отображение одной формы в другую [45]. Однако теперь первая форма является неевклидовым пространством, в то время как вторая, актуальная форма, по-прежнему наделена евклидовой геометрией объемлющего пространства.

2. Кинематика пластин

2.1. Допустимые конфигурации и формы

Следуя методологии, предложенной в разделе 1.1., уточним, что понимается под основным объектом настоящего исследования — пластиной. С интуитивной точки зрения пластина рассматривается как трехмерное тело, одно из измерений которого мало по сравнению с двумя другими. Вместе с тем попытка формализации такого представления наталкивается на следующую трудность: формы одного тела гомеоморфны, а гомеоморфизм нечувствителен к размерам. Образно говоря, если некоторая форма тела подходит под интуитивное описание пластины, то результат ее деформации может привести к форме, равнопротяженной по всем направлениям. Для того чтобы исправить ситуацию, следует ограничить класс возможных форм. Это может быть сделано следующим образом.

Назовем *допустимой* конфигурацию $\mathcal{K}$, если ее образ $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ является ограниченным множеством и удовлетворяет условию: для любой точки формы $\mathcal{S}$ найдется шар с центром в этой точке, который а) полностью лежит в $\mathcal{S}$ и б) радиус этого шара намного меньше минимального радиуса шара, описанного вокруг формы $\mathcal{S}$. Таким образом, отношение максимального радиуса шара, вписанного в форму, к минимальному радиусу шара, описанного вокруг формы, должно быть намного меньше 1. Далее под тонкостенной конструкцией будем подразумевать пару $(\mathfrak{B}, \mathcal{C})$, где $\mathfrak{B}$ — материальное многообразие, а $\mathcal{C}$ — множество всех допустимых конфигураций. Зафиксируем некоторую допустимую конфигурацию $\mathcal{K}_R \in \mathcal{C}$; ее образ $\mathcal{S}_R = \mathcal{K}_R(\mathfrak{B})$ рассматривается в качестве отсчетной формы. Тогда приходим к тонкостенной конструкции с выбранной отсчетной формой $(\mathfrak{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}_R)$.

Поясним теперь, что в настоящей работе понимается под пластиной. Предположим, что граница $\partial\mathcal{S}$ может быть разложена на две части:

$$\partial\mathcal{S}_R = \Pi_1 \cup \Pi_2,$$

так, что выполнены следующие условия:

1. Существует поверхность ω_R такая, что для каждой точки A на Π_2 существует шар, содержащий эту точку, с центром, лежащим на ω ;
2. Радиус этого шара r_A намного меньше радиуса r сферы, описанной вокруг всей формы $\mathcal{S}_R$.

В общем случае мы приходим к формализации оболочки, которая, таким образом, представляема в виде структуры $(\mathfrak{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}_R, \omega_R)$. Предположим дополнительно, что ω_R есть плоскость.

Тогда структура, определенная выше, есть формализация пластины. Именно этот случай и рассматривается в настоящей работе.

Будем называть ω_R плоскостью редукции, объединение частей Π_2 лицевыми поверхностями, а объединение частей Π_1 — боковыми поверхностями. Пересечение плоскости редукции и боковых поверхностей, т. е. $\Gamma = \omega_R \cap \Pi_1$, определяет контур пластины. Отметим, что плоскость редукции служит плоскостью осреднения и в общем случае может целиком или частично лежать вне формы $\mathcal{S}_R$ (пластина с волнообразным профилем может служить примером). Деформация пластины определяется как тот из возможных гомеоморфизмов $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$, образ которого $\mathcal{S}$ является допустимой формой, удовлетворяющей условиям типа 1 и 2 выше.

2.2. Координатные представления полей

Для получения координатных представлений выберем в физическом пространстве $\mathcal{E}$ правую прямоугольную (декартову) систему координат $\{O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})\}$ так, что начало отсчета принадлежит плоскости редукции ω_R , а первые два вектора $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ параллельны ω_R . Это означает, что любая точка $X \in \omega_R$ может быть записана как

$$\overrightarrow{OX} = x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} \quad \text{или} \quad X = O + x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}.$$

Наряду с декартовыми используются и криволинейные координаты (ρ^1, ρ^2) , которые задаются по крайней мере на части $\omega_0 \subset \omega_R$:

$$\forall X \in \omega_0 : X = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j},$$

где $(\rho^1, \rho^2) \in D_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Предполагается, что на D_0 справедливо неравенство

$$\det \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial \rho^\beta} \right] > 0,$$

означающее обратимость формул перехода от одних координат к другим.

Для простоты предположим, что контур Γ полностью лежит в ω_0 , а связные подмножества Π_2 являются поверхностями без самопересечений. Следовательно, форма $\mathcal{S}_R$, как область в $\mathcal{E}$, может быть определена в координатной форме следующим расширением карты (ρ^1, ρ^2) на окрестность ω_0 :

$$\mathcal{S}_R = \left\{ X \in \mathcal{E} : X = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (\rho^1, \rho^2, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (17)$$

Здесь символы $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ обозначают декартовы координаты, связанные с выбранной системой координат в $\mathcal{E}$.

В области ω_0 , которая является открытым подмножеством плоскости редукции ω_R (т. е. подпространства $\mathcal{E}$, натянутого на $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$), можно определить поле локальных (в общем случае косоугольных) базисов $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1}^2$ как

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{j}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Дальнейшие рассуждения наталкиваются на следующую трудность: явные выражения для компонент полей, записанные относительно криволинейных координат, оказываются громоздкими. Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= x_{,\rho}^2 + y_{,\rho}^2, & b &= x_{,\rho} x_{,\theta} + y_{,\rho} y_{,\theta}, & c &= x_{,\theta}^2 + y_{,\theta}^2, & \omega &= x_{,\rho} y_{,\theta} - y_{,\rho} x_{,\theta}, \\ d &= x_{,\rho\rho} y_{,\theta} - y_{,\rho\rho} x_{,\theta}, & e &= x_{,\rho\theta} y_{,\theta} - y_{,\rho\theta} x_{,\theta}, & f &= x_{,\theta\theta} y_{,\theta} - x_{,\theta} y_{,\theta\theta}, \\ g &= x_{,\rho} y_{,\rho\rho} - y_{,\rho} x_{,\rho\rho}, & h &= x_{,\rho} y_{,\rho\theta} - y_{,\rho} x_{,\rho\theta}, & j &= x_{,\rho} y_{,\theta\theta} - y_{,\rho} x_{,\theta\theta}. \end{aligned}$$

Здесь $\rho = \rho^1$, $\theta = \rho^2$, $\zeta = z$, а запятая означает взятие частной производной по соответствующему аргументу. В рамках новых обозначений формулы (18) принимают вид

$$\mathbf{e}_\rho = x_{,\rho} \mathbf{i} + y_{,\rho} \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = x_{,\theta} \mathbf{i} - y_{,\theta} \mathbf{j}.$$

Поле взаимных базисов $(\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha=1}^2$, в свою очередь, определяется из решения системы линейных неоднородных уравнений $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta = 1, 2$. В явном виде

$$\mathbf{e}^\rho = -\frac{y_{,\theta}}{\omega} \mathbf{i} + \frac{x_{,\theta}}{\omega} \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}^\theta = \frac{y_{,\rho}}{\omega} \mathbf{i} - \frac{x_{,\rho}}{\omega} \mathbf{j}.$$

Поле базисов $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1}^2$ и соответствующее ему поле $(\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha=1}^2$ дуальных базисов можно расширить на все пространство $\mathcal{V}$, присоединив к ним третий вектор $\mathbf{k}$. Это приводит к полям базисов $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k})$ и $(\mathbf{e}^\rho, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^\zeta) = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{k})$.

Исходным и расширенным полям базисов соответствуют плоские и пространственные операторы Гамильтона в ω_0 и $\mathcal{S}_R$. Они имеют следующие представления:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega &:= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial \rho^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial \rho^2}, \\ \nabla &:= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial \rho^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_\omega + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь и далее мы, следуя [10], определяем оператор градиента как транспонирование формального диадного произведения соответствующего оператора Гамильтона и поля $\mathbf{u}$, т. е.

$$\text{grad } \mathbf{u} := (\nabla \otimes \mathbf{u})^T.$$

Для краткости обозначим $\text{grad } \mathbf{u}$ как $\nabla \mathbf{u}$ (без знака диадного произведения). Итак, $\nabla \mathbf{u} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^T$, и, следовательно, если $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{k}$ является векторным полем, то:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha} \otimes (u^\beta \mathbf{e}_\beta + w \mathbf{k}) \right)^T = \\ &= \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial \rho^\alpha} + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}^\alpha + \frac{\partial w}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}^\alpha, \\ \nabla \mathbf{u} &= \left(\left(\mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes (u^\beta \mathbf{e}_\beta + w \mathbf{k}) \right)^T = \\ &= \nabla_\omega \mathbf{u} + \frac{\partial u^\beta}{\partial z} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{k} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где функции

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \mathbf{e}^\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial \rho^\alpha} = \frac{\partial \rho^\beta}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \rho^\gamma \partial \rho^\alpha} + \frac{\partial \rho^\beta}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \rho^\gamma \partial \rho^\alpha}$$

являются символами Кристоффеля, связанными с криволинейными координатами на ω_0 . В явном виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\rho}^\rho &= \frac{d}{\omega}, \quad \Gamma_{\rho\rho}^\theta = \frac{g}{\omega}, \quad \Gamma_{\theta\rho}^\rho = \Gamma_{\rho\theta}^\rho = \frac{e}{\omega}, \\ \Gamma_{\theta\rho}^\theta &= \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \frac{h}{\omega}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\rho = \frac{f}{\omega}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{j}{\omega}. \end{aligned} \tag{19}$$

В последующих соотношениях будут использоваться компоненты метрического тензора $\mathbf{g}_0 = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ на плоскости редукции ω_R . В рамках обозначений, введенных выше, они представлены выражениями:

$$\begin{aligned} g_{\rho\rho} &= a, \quad g_{\rho\theta} = g_{\theta\rho} = b, \quad g_{\theta\theta} = c, \\ g^{\rho\rho} &= \frac{b}{\omega^2}, \quad g^{\rho\theta} = g^{\theta\rho} = -\frac{c}{\omega^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{a}{\omega^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1}$.

2.3. Деформации и кинематические гипотезы

Деформация определяется как гомеоморфизм γ , который отображает допустимую отсчетную область $\mathcal{S}_R$ на допустимую искаженную область $\mathcal{S}$, т. е.

$$\begin{aligned}\gamma : \mathcal{S}_R &\rightarrow \mathcal{S}, \\ X &\mapsto x = \gamma(X).\end{aligned}$$

При этом с отсчетной областью ассоциирована плоскость редукции ω_R , которая может лежать как целиком внутри нее, так и выходить за ее пределы, хотя бы частично. Предположим вначале, что плоскость редукции ω_R содержится внутри $\mathcal{S}_R$. Тогда отображение γ индуцирует деформацию γ_0 плоскости редукции ω_R как ограничение γ на ω_R :

$$\begin{aligned}\gamma_0 : \omega_0 &\rightarrow \Omega, \\ \gamma_0 &:= \gamma|_{\omega_R}.\end{aligned}$$

Здесь $\Omega := \gamma(\omega_R)$ обозначает образ плоскости редукции, который можно назвать поверхностью редукции.

Предположим теперь, что плоскость редукции ω_R , хотя бы некоторой своей частью, выходит за пределы отсчетной формы $\mathcal{S}_R$. Тогда примем следующее допущение: плоскость редукции находится в малой окрестности $\mathcal{U}_R$ множества $\mathcal{S}_R$. В таком случае можно ожидать, что деформация γ продолжается до некоторого гомеоморфизма $\bar{\gamma} : \mathcal{U}_R \rightarrow \mathcal{U}$ этой окрестности на окрестность $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{S}$. Образ $\Omega = \bar{\gamma}(\omega_R)$ плоскости редукции и тогда определяет поверхность редукции. Соответствующую деформацию обозначим как $\bar{\gamma}_0 : \omega_R \rightarrow \Omega$.

Поскольку физическое пространство $\mathcal{E}$ обладает аффинно-евклидовой структурой (1), можно определить векторное поле перемещений:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} : \mathcal{S}_R &\rightarrow \mathcal{V}, \\ X &\mapsto \text{vec}(X, \gamma(X)).\end{aligned}\tag{21}$$

Его градиент $\nabla \mathbf{u}$ есть линейное отображение $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, обеспечивающее наилучшее линейное приближение $\mathbf{u}$ в окрестности каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$:

$$\mathbf{u}(X + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(X) + \nabla \mathbf{u}(X)[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|).$$

В поле базисов $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta)$ градиент $\nabla \mathbf{u}$ представлен в виде разложения

$$\nabla \mathbf{u} = \left(u_{,\alpha}^\beta + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right) g^{\alpha\delta} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\delta + w_{,\alpha} g^{\alpha\delta} \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}_\delta + u_{,\zeta}^\beta \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{k} + w_{,\zeta} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

по диадному базису $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)_{i,k=1}^3$. Здесь $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{k}$. Приняв во внимание формулы (19) и (20), компоненты полученного разложения можно записать в виде матрицы

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{c}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} + \frac{ev}{\omega} + u_{,\rho} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{eu}{\omega} + \frac{fv}{\omega} + u_{,\theta} \right) & \frac{a}{\omega^2} \left(\frac{eu}{\omega} + \frac{fv}{\omega} + u_{,\theta} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} + \frac{ev}{\omega} + u_{,\rho} \right) & u_\zeta \\ \frac{c}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} + \frac{hv}{\omega} + v_{,\rho} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{hu}{\omega} + \frac{jv}{\omega} + v_{,\theta} \right) & \frac{a}{\omega^2} \left(\frac{hu}{\omega} + \frac{jv}{\omega} + v_{,\theta} \right) - \frac{b}{\omega^2} \left(\frac{du}{\omega} - \frac{hv}{\omega} + v_{,\rho} \right) & v_\zeta \\ \frac{cw_{,\rho}}{\omega^2} - \frac{bw_{,\theta}}{\omega^2} & \frac{aw_{,\theta}}{\omega^2} - \frac{bw_{,\rho}}{\omega^2} & w_\zeta \end{bmatrix},$$

в которой используются обозначения $u = u^1$, $v = u^2$.

Деформации плоскости редукции отвечает векторное поле перемещений $\mathbf{u}_0 : \omega \rightarrow \mathcal{V}$, которое определяется, соответственно, как

$$\mathbf{u}_0(X) := \text{vec}(X, \gamma_0(X)) \quad \text{или} \quad \mathbf{u}_0(X) := \text{vec}(X, \bar{\gamma}_0(X)).$$

Кроме того, используя координатное представление (17) отсчетной формы, мы можем построить разложение поля перемещений (21) по малому параметру z , связанному с толщиной¹:

$$\mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{u}_n(\rho^1, \rho^2),$$

где коэффициенты могут быть, при известных аналитических предположениях, определены как производные $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}_n(\rho^1, \rho^2) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) \Big|_{z=0}.$$

Будем далее полагать, что нулевые термы разложения $\mathbf{u}_0$ совпадают со смещениями точек плоскости редукции. Таким образом, вместо трехмерной задачи относительно $\mathbf{u}$ можно рассмотреть двумерную задачу относительно последовательности неизвестных $\mathbf{u}_n$, которая намного проще первой. В этом случае градиент деформации можно выразить в терминах $\mathbf{u}_n$:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k} \\ &= \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} (z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k}). \end{aligned}$$

При наличии лишь конечного числа элементов мы приходим к асимптотическому представлению. Если же учесть элементы степени не выше единицы, то формально:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z \mathbf{u}_1 + o(z), \quad \nabla \mathbf{u} = \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z (\nabla_{\omega} \mathbf{u}_1 + 2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{k}) + o(z). \quad (22)$$

Появление $\mathbf{u}_2$ в выражении для градиента деформации асимптотически согласовано, но приводит к расхождению со стандартным подходом в теории оболочек. Чтобы избежать этого расхождения, мы можем либо пренебречь этим членом, либо изменить подход к деформации, рассматривая (22) как точное выражение для деформации двумерного континуума Коссера. В настоящей работе мы используем последний подход. Таким образом, в соответствии с идеями, восходящими к работам Фойгта и братьев Коссера [46; 47], будем полагать, что пластина является двумерным плоским континуумом, каждая частица которого — микроконтинуум (по терминологии Миндлина [48]) — движется подобно абсолютно твердому телу. С формальной точки зрения в таком случае пластина рассматривается как упорядоченная пара $(\omega_R, \mathbf{D})$, где $\mathbf{D}$ — векторное поле на ω_R (по терминологии [49] — поле директоров), которое при деформировании пластины может лишь менять направление, но не длину. Формулы (22) теперь записываются следующим образом:

$$\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} + z \mathbf{u}_1, \quad \nabla \mathbf{u} = \nabla_{\omega} \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_1,$$

без термов порядка $o(z)$. Здесь $\overset{\circ}{\mathbf{u}}$ — поле смещений точек ω_R , а $\mathbf{u}_1$ — некоторое поле, обусловленное наличием дополнительных степеней свободы у частиц пластины.

Имея в виду записать явное выражение для поля $\mathbf{u}_1$, примем во внимание, что в соответствии с теоремами Эйлера² и Шаля³ [25], движение каждой частицы пластины является композицией

¹ Отметим, что в работе используются два типа отображений. Один из них — это отображения, заданные в точках физического пространства $\mathcal{E}$, а другой — отображения, заданные в точках арифметического пространства $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$, где принимают значения криволинейные координаты. Поэтому если $\mathbf{u}$ — поле смещений, рассматриваемое как отображение первого типа, а $\tilde{\mathbf{u}}$ — его аналог, рассматриваемый как функция координат, то имеет место связь $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \circ Q$, где $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{E}$ — картирующее отображение. В настоящей работе мы не делаем различия между полями $\tilde{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}$; оно ясно из контекста.

² «Всякое перемещение тела с одной закрепленной точкой O представляет собой вращение» (с. 104).

³ «Любое перемещение тела может быть осуществлено путем поступательного перемещения вдоль некоторого направления и вращения около этого направления» (с. 109).

перемещения точки ω_R и поворота линейных элементов, которые трансверсальны к ω_R . В этой связи мы в действительности имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \|\mathbf{D}\| \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|} \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{u}} + z \mathbf{u}_1, \end{aligned}$$

и поля z , $\mathbf{u}_1$ определяются выражениями:

$$z := \|\mathbf{D}\|, \quad \mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{D}}{\|\mathbf{D}\|},$$

где $\mathbf{R}$ — собственный ортогональный тензор ($\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$, $|\mathbf{R}| = 1$).

В трехмерном пространстве вращение твердого тела производится вокруг некоторой прямой, содержащейся в теле, на определенный угол⁴. В этой связи явное выражение для тензора $\mathbf{R}$ может быть получено на основании формулы Родрига [25]:

$$\mathbf{R}\mathbf{D} = \gamma \mathbf{D} + (1 - \gamma)(\mathbf{n}\mathbf{D})\mathbf{n} + \sigma \mathbf{n} \times \mathbf{D}, \quad (23)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения, а числа γ и σ определены равенствами $\gamma = \cos \alpha$ и $\sigma = \sin \alpha$, в которых α — угол поворота.

Считая угол α малым, можно заменить формулу (23) ее линейным приближением, полагая $\gamma \approx 1$ и $\sigma \approx \alpha$:

$$\mathbf{R}\mathbf{D} \approx \mathbf{D} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{D},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — антисимметричный тензор, определенный равенством $\boldsymbol{\omega} = \alpha \mathbf{n}_{\times}$, в котором $\mathbf{n}_{\times}$ — Гиббсов крест вектора.

Таким образом, мы приходим к представлению типа Уфлянда–Миндлина. Однако можно пойти еще дальше и предположить, следуя Кирхгофу и Ляву [50], что значения поля директоров $\mathbf{D}$ нормальны к плоскости редукции и после деформации значения измененного поля также нормальны к поверхности осреднения. В таком случае повороты относительно плоскости редукции могут быть охарактеризованы в терминах одной скалярной функции $\overset{\circ}{w}$, и мы приходим к выражениям, представляющим кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява:

$$\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} - \zeta \nabla \overset{\circ}{w} = \left(\overset{\circ}{u}^{\alpha} - \zeta g^{\alpha\beta} \overset{\circ}{w}_{,\beta} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \overset{\circ}{w} \mathbf{k},$$

или в компонентах:

$$\mathbf{u} = \left(\overset{\circ}{u} - \frac{\zeta}{\omega^2} \left(c \overset{\circ}{w}_{,\rho} - b \overset{\circ}{w}_{,\theta} \right) \right) \mathbf{e}_{\rho} + \left(\overset{\circ}{v} - \frac{\zeta}{\omega^2} \left(a \overset{\circ}{w}_{,\theta} - b \overset{\circ}{w}_{,\rho} \right) \right) \mathbf{e}_{\theta} + \overset{\circ}{w} \mathbf{k}.$$

⁴ Это свойство доказывается в классических руководствах по геометрии [26] и аналитической динамики [25]. Вместе с тем для полноты изложения мы приведем здесь его краткое доказательство. Действительно, утверждение эквивалентно существованию вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, являющегося неподвижной точкой отображения $\mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Для установления последнего свойства рассмотрим характеристический многочлен $f_{\mathbf{R}}(\lambda) = \det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I})$ при $\lambda = 1$. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, то можно записать равенство $f_{\mathbf{R}}(1) = \det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})$. С другой стороны,

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{R} = -(\mathbf{R} - \mathbf{I}),$$

и, в терминах определителей,

$$\det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = \det[\mathbf{R}(\mathbf{R}^T - \mathbf{I})] = (-1)^3 \det(\mathbf{R} - \mathbf{I}),$$

поэтому

$$f_{\mathbf{R}}(1) = \det(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{R} - \mathbf{I}) = -f_{\mathbf{R}}(1),$$

что влечет равенство $f_{\mathbf{R}}(1) = 0$. Таким образом, $\lambda = 1$ есть собственное значение $\mathbf{R}$ и ему отвечает собственный вектор, который и является искомым. Заметим, что в доказательстве использовано: 1) трехмерность пространства $\mathcal{V}$ и 2) то, что ортогональный тензор $\mathbf{R}$ является собственным.

В таком случае градиент перемещений $\beta := \nabla \mathbf{u}$ может быть представлен в виде следующего диадного разложения:

$$\beta = \left[(\overset{\circ}{u}^\beta - \zeta g^{\beta\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma})_{,\alpha} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\alpha} \overset{\circ}{w}_{,\alpha}) \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right] g^{\alpha\delta} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\delta + \overset{\circ}{w}_{,\alpha} g^{\alpha\delta} \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}_\delta - g^{\beta\gamma} \overset{\circ}{w}_{,\gamma} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{k}. \quad (24)$$

Тензорному полю градиента перемещений β соответствует поле градиента деформации F , которое вычисляется по формуле

$$F = I + \beta. \quad (25)$$

Здесь I – единичный тензор, который в диадном разложении представляется единичной матрицей:

$$I = \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}^\rho + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}.$$

3. Меры напряжений и деформаций

3.1. О координатах в отсчетном описании

В классической теории пластин координатные представления полей и дифференциальных операторов рассматриваются относительно натуральной отсчетной формы $\mathcal{S}_R$, поскольку ее геометрия предполагается известной, а отклик имеет наиболее простой вид. Вместе с тем если в теле присутствуют непрерывно распределенные дефекты, то, как это обсуждалось в разделе 1.4., натуральная форма существует вне рамок евклидова пространства $\mathcal{E}$. В этой связи наблюдению и измерению доступна лишь актуальная форма $\mathcal{S}$, и потому только на ней можно явным образом ввести координатную сеть. Поскольку настоящая работа по-прежнему апеллирует к отсчетной методологии, следует указать способы явного определения отсчетных координат и пересчета полей из актуальных координат в отсчетные. Этому посвящен настоящий раздел.

Предположим, что выбрана некоторая форма $\mathcal{S}_R$, которая в общем случае самонапряжена и подвержена воздействию дополнительных внешних полей, за счет которых можно по-прежнему считать форму допустимой и выделить в ней плоскость редукции. Область $\mathcal{S}_R$ рассматривается в качестве отправной точки для построения неевклидовой отсчетной формы; по этой причине назовем ее промежуточной формой. Стирая геометрию с пространства $\mathcal{S}_R$, индуцированную геометрией евклидова объемлющего пространства, приходим к многообразию $\mathfrak{S}_R$, которое будет носителем новой неевклидовой геометрии. Откладывая на потом реализацию процедуры синтеза геометрии, уточним способ введения координат на $\mathfrak{S}_R$.

Пусть $\mathcal{S}$ — актуальная форма, непосредственно наблюдаемая в эксперименте или технологическом процессе. Хотя она по-прежнему принадлежит множеству допустимых форм, ей соответствует поверхность осреднения Ω , которая в общем случае не является плоскостью. Однако картирование этой формы осуществляется по аналогии с (17):

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{E} : x = O + x^1(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2)\mathbf{i} + x^2(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Здесь $(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2)$ — внутренние координаты на поверхности Ω , а z — трансверсальная координата.

Предполагается, что форма $\mathcal{S}$ столь тонка, что содержится в малой окрестности Ω [9]. Тогда деформация актуальной формы $\mathcal{S}$ в промежуточную форму $\mathcal{S}_R$ представлена гомеоморфизмом

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{S} &\rightarrow \mathfrak{S}_R, \\ x &\mapsto X. \end{aligned}$$

Отметим, что его область определения рассматривается как пространство аффинной связности, хотя и с тривиальной евклидовой геометрией, в то время как область прибытия есть многообразие, лишенное какой-либо геометрии. Выбор такого представления не случаен и соответствует методологии работы с самонапряженными телами; деформацию γ будем называть обратной деформацией (аллюзия к работе Шилдта [51]).

Охарактеризуем теперь способ переноса координат с формы $\mathcal{S}$ на многообразие $\mathfrak{S}_R$. Пусть $(\tilde{U}, \tilde{Q})$ — карта на $\mathcal{S}$, порожденная координатами $(\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, z)$. Здесь $\tilde{U} \subset \mathcal{S}$ — открытое множество, которое в общем случае не совпадает с формой $\mathcal{S}$, а

$$\begin{aligned}\tilde{Q} : \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ x &\mapsto (\tilde{\rho}^1, \tilde{\rho}^2, z)\end{aligned}$$

— картирующее отображение. Тогда пара $(\gamma(\tilde{U}), \tilde{Q} \circ \gamma^{-1}|_{\gamma(\tilde{U})})$ есть карта на $\mathfrak{S}_R$. Следовательно, семейство карт $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}} = \{(\tilde{U}_i, \tilde{Q}_i)\}_{i \in I}$, покрывающее актуальную форму $\mathcal{S}$, переходит в семейство карт $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R} = \{(\gamma(\tilde{U}_i), \tilde{Q}_i \circ \gamma^{-1}|_{\gamma(\tilde{U}_i)})\}_{i \in I}$, покрывающее $\mathfrak{S}_R$. Тем самым координаты на отсчетной форме введены. Карты из набора $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R}$ могут быть непосредственно использованы для координатного описания деформации:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{Q}_i \circ \gamma \circ (\tilde{Q}_i \circ \gamma^{-1})^{-1} = \text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

и мы приходим к представлению, используемому в монографии [52]. Наряду с этим карты из $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R}$ могут быть использованы для тестирования других карт на принадлежность к гладкой структуре многообразия $\mathfrak{S}_R$. В явном виде, если (U, Q) — некоторая карта на $\mathfrak{S}_R$, то она допустима лишь в том случае, когда для всех $i \in I$, при которых $\tilde{U}_i \cap U \neq \emptyset$, функция замены координат

$$\tilde{Q}_i \circ Q^{-1} : Q(\tilde{U}_i \cap U) \rightarrow \tilde{Q}_i(\tilde{U}_i \cap U)$$

является диффеоморфизмом. Таким образом, хотя мы не обязаны использовать именно набор карт $\mathcal{A}_{\mathfrak{S}_R}$, другие карты могут быть с ним сопоставлены.

Поля, заданные на актуальной форме $\mathcal{S}$, могут быть пересчитаны на многообразии $\mathfrak{S}_R$ посредством операции прямого образа [21; 34]. В частности, если $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярное поле на актуальной форме (например, поле температуры или плотность упругой энергии), то его образ на промежуточной форме определяется как

$$f_* := f \circ \gamma^{-1} : \mathfrak{S}_R \rightarrow \mathbb{R}. \quad (26)$$

Если $\mathbf{u} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$ — векторное поле (в частности, поле перемещений или скорости), то его удобно интерпретировать как отображение $\mathbf{u} : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$, т. е. сечение касательного расслоения $T\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Тогда перенос поля $\mathbf{u}$ на $\mathfrak{S}_R$ определяется как

$$\mathbf{u}_* := T\gamma \circ \mathbf{u} \circ \gamma^{-1} : \mathfrak{S}_R \rightarrow T\mathfrak{S}_R. \quad (27)$$

Заметим, что здесь недостаточно изменить область определения $\mathbf{u}$; необходимо также подправить область прибытия, для чего используется касательное отображение $T\gamma : T\mathcal{S} \rightarrow T\mathfrak{S}_R$. Другой пример — перенос тензорного поля $\mathbf{g} : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S} \otimes T\mathcal{S}$ (например, метрического тензора) на $\mathfrak{S}_R$, что дает поле $\mathbf{g}_* : \mathfrak{S}_R \rightarrow T\mathfrak{S}_R \otimes T\mathfrak{S}_R$, определенное соотношением

$$\forall X \in \mathfrak{S}_R \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \mathfrak{S}_R : \mathbf{g}_*|_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}|_{\gamma^{-1}(X)}(T_X \gamma^{-1}(\mathbf{u}), T_X \gamma^{-1}(\mathbf{v})). \quad (28)$$

Остальные примеры переноса полей, в частности полей напряжений, могут быть найдены в [21].

В формулах (26), (27) и (28) используется градиент обратной деформации γ . Поэтому, в частности, при переносе полей, определяющих геометрию на форме $\mathcal{S}$, мы получим геометрию на многообразии $\mathfrak{S}_R$, ничем не отличающуюся от евклидовой. Однако можно сделать следующий шаг и заменить градиент $T\gamma$ на поле $\mathfrak{K}$ невырожденных линейных преобразований, не порожденное единой деформацией. Тогда придем к формулам, аналогичным тем, что написаны выше, и эти формулы также определяют перенос полей. Вместе с тем в этот перенос будет заложена дополнительная информация, связанная с несовместностью $\mathfrak{K}$. Поэтому при переносе евклидовой геометрии с формы $\mathcal{S}$ на многообразие $\mathfrak{S}_R$ мы получим новую геометрию, отличающуюся от евклидовой.

В последующих рассуждениях мы будем предполагать, что геометрия на $\mathfrak{S}_R$ перенесена из $\mathcal{S}$ посредством обратной деформации γ . Роль полученной геометрии исключительно вспомогательная; она нужна для того, чтобы продолжать использовать евклидовы представления дифференциальных операторов для формулировки уравнений поля. Но за это упрощение придется заплатить модификацией уравнения состояния, добавив туда в явном виде локальные деформации. Отметим, что возможен иной подход, не предполагающий вспомогательной евклидовой геометрии, а напрямую апеллирующий к неевклидовой геометрии натуральной формы. Но тогда в рамках него мы будем вынуждены использовать формализм ковекторнозначных дифференциальных форм и оператор Картана. Более подробно эти вопросы обсуждаются в статье [53].

3.2. Энергетически сопряженные пары полей

Механика сплошной среды оперирует различными тензорами напряжений, среди которых тензоры напряжений Коши $\mathbf{T}$, Пиолы – Кирхгофа первого рода $\mathbf{P}$ и Пиолы – Кирхгофа второго рода $\mathbf{S}$. Формула преобразования элементарных площадей (формула Нансона) в отсчетном и актуальном состоянии приводит к преобразованию Пиолы [54]:

$$\mathbf{P} = J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T},$$

связывающей напряжения Коши и Пиолы – Кирхгофа первого рода; здесь $J = \det \mathbf{F}$. Более простым является соотношение между двумя тензорами Пиолы – Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (29)$$

В настоящей работе мы используем отсчетное описание, поэтому выбор должен быть сделан в пользу одного из тензоров Пиолы – Кирхгофа. Но любому такому выбору должен отвечать некоторый выбор меры деформации, допустимой с точки зрения принципа материальной индифферентности [10]. Будем выбирать меру деформации в соответствии с энергетической сопряженностью: каждый из термов в цепочке равенств

$$\mathbf{T}:\mathbf{D} = J^{-1}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}} = J^{-1}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}$$

— мощности, развиваемые соответствующими тензорами напряжений, характеризует энергетически сопряженную пару [54]. Здесь $\mathbf{D}$ — симметричная часть градиента скорости, $\mathbf{F}$ — градиент деформации, а $\mathbf{E}$ — тензор Грина – Сен-Венана:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \right). \quad (30)$$

В настоящей работе выбор сделан в пользу пары $(\mathbf{S}, \mathbf{E})$. При таком выборе: 1) мы имеем дело с симметричным тензором напряжений, преобразующим отсчетную нормаль в отсчетный вектор напряжений, и 2) удастся выбрать потенциал, приводящий к закону состояния, внешне похожему на закон Гука.

3.3. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия в отсчетном описании могут быть записаны в следующем виде:

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

где div_R — оператор дивергенции в отсчетных координатах, $\mathbf{f}$ — плотность объемных сил, $\mathbf{P}$ — тензор напряжений Пиола – Кирхгофа первого рода.

В настоящей работе дивергенция тензорного поля определяется в соответствии с [54]:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{V} : \mathbf{a} \operatorname{div}_R \mathbf{P} = \operatorname{div}_R (\mathbf{P}^T \mathbf{a}),$$

где справа — дивергенция векторного поля. Таким образом, в терминах оператора Гамильтона, $\operatorname{div}_R \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \nabla$, что влечет разложение

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} = \left([\mathbf{P}]_{,j}^{ij} + [\mathbf{P}]^{sj} \Gamma_{sj}^i + [\mathbf{P}]^{is} \Gamma_{sj}^j \right) \mathbf{e}_i,$$

или, если явно выделить третий элемент базиса $\mathbf{k}$,

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} = \left([\mathbf{P}]_{,\beta}^{\alpha\beta} + [\mathbf{P}]_{,3}^{\alpha 3} + [\mathbf{P}]^{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + [\mathbf{P}]^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma} \right) \mathbf{e}_{\alpha} + \left([\mathbf{P}]_{,\beta}^{3\beta} + [\mathbf{P}]^{3\beta} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma} + [\mathbf{P}]_{,3}^{33} \right) \mathbf{k}.$$

Принимая во внимание формулы (19), приходим к следующим выражениям для компонент дивергенции:

$$\operatorname{div}_R \mathbf{P} = [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\rho} \mathbf{e}_{\rho} + [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\zeta} \mathbf{e}_{\zeta},$$

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\rho} &= [\mathbf{P}]^{\rho\theta}_{,\theta} + [\mathbf{P}]^{\rho\zeta}_{,\zeta} + [\mathbf{P}]^{\rho\rho}_{,\rho} + \frac{2d+h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\rho} + \frac{2e+j}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\theta} + \\ &\quad + \frac{e}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\rho} + \frac{f}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\theta}, \\ [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\theta} &= [\mathbf{P}]^{\theta\theta}_{,\theta} + [\mathbf{P}]^{\theta\zeta}_{,\zeta} + [\mathbf{P}]^{\theta\rho}_{,\rho} + \frac{d+2h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\rho} + \frac{e+2j}{\omega} [\mathbf{P}]^{\theta\theta} + \\ &\quad + \frac{g}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\rho} + \frac{h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\rho\theta}, \\ [\operatorname{div}_R \mathbf{P}]^{\zeta} &= [\mathbf{P}]^{\zeta\theta}_{,\theta} + [\mathbf{P}]^{\zeta\zeta}_{,\zeta} + [\mathbf{P}]^{\zeta\rho}_{,\rho} + \frac{d+h}{\omega} [\mathbf{P}]^{\zeta\rho} + \frac{e+j}{\omega} [\mathbf{P}]^{\zeta\theta}. \end{aligned}$$

С целью выделить нелинейную часть отдельным слагаемым, запишем уравнение баланса (31) в терминах тензора напряжений Пиола – Кирхгофа второго рода $\mathbf{S}$, который связан с полем $\mathbf{P}$ соотношением (29). При этом уравнение (31) примет вид

$$\mathcal{L} \mathbf{S} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (32)$$

где $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор, действующий на поле $\mathbf{S}$ по закону

$$\mathcal{L} \mathbf{S} = \operatorname{div}_R (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}).$$

Далее, согласно равенству (25) и линейности операции дивергенции, справедлива следующая выкладка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \mathbf{S} &= \operatorname{div}_R ((\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}) \\ &= \operatorname{div}_R \mathbf{S} + \operatorname{div}_R (\nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \\ &= \operatorname{div}_R \mathbf{S} + \mathcal{A} \mathbf{S}, \end{aligned}$$

где полагаем

$$\mathcal{A} \mathbf{S} := \operatorname{div}_R (\nabla \mathbf{u} \mathbf{S}). \quad (33)$$

Операторы div_R и $\mathcal{A}$ линейны относительно компонент тензора Пиола – Кирхгофа второго рода. Вместе с тем если принять во внимание, что напряжения в действительности зависят от перемещений, то, поскольку коэффициенты остатка $\mathcal{A}$ также зависят от перемещений, оператор $\mathcal{A}$ относительно последних оказываются нелинейным. Условно можно сказать, что (33) характеризует «геометрическую нелинейность» упругой системы. Он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \mathbf{S} &= \left[([\mathbf{S}]_{,\beta}^{\omega\beta} + [\mathbf{S}]_{,3}^{\omega 3}) [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha\sigma} g_{\sigma\omega} + ([\mathbf{S}]_{,\beta}^{\omega 3} + [\mathbf{S}]_{,3}^{33}) [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha 3} + [\mathbf{S}]^{\omega\beta} (([\boldsymbol{\beta}]^{\alpha\sigma} g_{\sigma\omega})_{,\beta} + \right. \\ &\quad + [\boldsymbol{\beta}]^{\gamma\sigma} g_{\sigma\omega} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha\sigma} g_{\sigma\omega} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma}) + [\mathbf{S}]^{\omega 3} ([\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{\alpha 3} + g_{\sigma\omega} [\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{\alpha\sigma} + [\boldsymbol{\beta}]^{\gamma 3} \Gamma_{\gamma\omega}^{\alpha} + [\boldsymbol{\beta}]^{\alpha 3} \Gamma_{\omega\gamma}^{\gamma}) + \\ &\quad + [\mathbf{S}]^{33} [\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{\alpha 3} \mathbf{e}_{\alpha} + \left. [\mathbf{S}]^{\omega\beta} (([\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} g_{\sigma\omega})_{,\beta} + [\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} g_{\sigma\omega} \Gamma_{\beta\gamma}^{\gamma}) + [\mathbf{S}]^{\omega 3} g_{\sigma\omega} [\boldsymbol{\beta}]_{,3}^{3\sigma} + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{S}]_{,\beta}^{\omega\beta} [\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} g_{\sigma\omega} + [\mathbf{S}]_{,3}^{\omega 3} g_{\sigma\omega} [\boldsymbol{\beta}]^{3\sigma} \right] \mathbf{k}. \quad (34) \end{aligned}$$

3.4. Меры деформаций

Принимая во внимание рассуждения раздела 3.2., в качестве меры деформаций пластины выберем тензор Грина – Сен-Венана (30). В силу соотношения (25) между градиентом деформации и градиентом перемещений удобно представить меру деформаций в виде разложения на линейную (относительно градиента перемещений β) и нелинейную части:

$$\mathbb{E} = \varepsilon + \epsilon,$$

где ε — тензор малых деформаций, определенный равенством

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\beta + \beta^T),$$

а ϵ — нелинейная добавка:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \beta^T \beta.$$

Выбор такой аддитивной декомпозиции тензора Грина – Сен-Венана влечет декомпозицию дивергентной части уравнения равновесия на терм, линейный по перемещениям, и нелинейный терм, что позволит сформулировать соответствующий итерационный алгоритм для решения краевой задачи.

В компонентах тензор малых деформаций имеет разложение

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[(\overset{\circ}{u}^\beta - \zeta g^{\beta\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa})_{,\alpha} g^{\alpha\delta} + (\overset{\circ}{u}^\delta - \zeta g^{\delta\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa})_{,\alpha} g^{\alpha\beta} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa}) (\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta g^{\alpha\delta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta g^{\alpha\beta}) \right] e_\beta \otimes e_\delta.$$

Далее, раскрывая определение операции транспонирования, приходим к следующей формуле для нелинейного термина:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[([\beta]^{\alpha\beta} [\beta]^{\mu\eta} g_{\alpha\mu} + [\beta]^{3\beta} [\beta]^{3\eta}) e_\beta \otimes e_\eta + [\beta]^{\alpha\beta} [\beta]^{\mu 3} g_{\alpha\mu} (e_\beta \otimes k + k \otimes e_\beta) + \right. \\ \left. + [\beta]^{\alpha 3} [\beta]^{\mu 3} g_{\alpha\mu} k \otimes k \right].$$

Наконец, в силу (24) получаем

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left\{ \left[(\overset{\circ}{u}^\alpha - \zeta g^{\alpha\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa})_{,\sigma} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa}) \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \right] g^{\sigma\beta} \times \right. \\ \times \left[(\overset{\circ}{u}^\mu - \zeta g^{\mu\omega} \overset{\circ}{w}_{,\omega})_{,\pi} + (\overset{\circ}{u}^\xi - \zeta g^{\xi\omega} \overset{\circ}{w}_{,\omega}) \Gamma_{\xi\pi}^\mu \right] g^{\pi\eta} g_{\alpha\mu} + \overset{\circ}{w}_{,\gamma} g^{\gamma\beta} \overset{\circ}{w}_{,\alpha} g^{\alpha\eta} \Big\} e_\beta \otimes e_\eta - \\ - \left[(\overset{\circ}{u}^\alpha - \zeta g^{\alpha\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa})_{,\sigma} + (\overset{\circ}{u}^\gamma - \zeta g^{\gamma\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\kappa}) \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \right] g^{\sigma\beta} \overset{\circ}{w}_{,\alpha} (e_\beta \otimes k + k \otimes e_\beta) + \\ + \overset{\circ}{w}_{,\kappa} \overset{\circ}{w}_{,\alpha} g^{\alpha\kappa} k \otimes k \Big\}. \quad (35)$$

Полученные разложения для ε и ϵ в совокупности определяют диадное разложение для поля $\mathbb{E}$.

3.5. Закон состояния

В настоящей работе материал пластины предполагается простым и гиперупругим. Будем использовать потенциал Сен-Венана – Кирхгофа, определяемый выражением

$$W = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \mathbb{E})^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbb{E}, \quad (36)$$

в котором λ и μ — материальные константы, аналогичные константам Ламе, применяемым в линейной теории упругости для изотропного тела. Потенциалу (36) в силу формулы Дойля – Эриксона [10] соответствует закон состояния, линейно связывающий тензор деформации $\mathbb{E}$ с вторым тензором напряжений Пиола – Кирхгофа $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbb{E} + 2\mu \mathbb{E}. \quad (37)$$

Именно линейность закона состояния и служила мотивацией для выбора тензора Пиола – Кирхгофа второго рода в качестве меры напряженного состояния.

3.6. Осреднение уравнений баланса

Для получения двумерных уравнений равновесия, которые чаще всего используются при моделировании полей в пластинах и оболочках, следует произвести осреднение уравнений равновесия (32) по толщине пластины, что сводится к вычислению моментов (в математическом смысле) левых и правых частей этих уравнений по переменной ζ в пределах (h_-, h_+) . Интегрирование (32) с весом 1 приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}]^{\rho\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{T}]^{\rho\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{T}]^{\rho\rho}_{,\rho} + \frac{2d+h}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\rho\rho} + \frac{2e+j}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\rho\theta} + \frac{e}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\theta\rho} + \frac{f}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\theta\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\rho + [\mathfrak{D}]^\rho = 0, \\ [\mathfrak{T}]^{\theta\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{T}]^{\theta\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{T}]^{\theta\rho}_{,\rho} + \frac{d+2h}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\theta\rho} + \frac{e+2j}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\theta\theta} + \frac{g}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\rho\rho} + \frac{h}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\rho\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\theta + [\mathfrak{D}]^\theta = 0, \\ [\mathfrak{T}]^{\zeta\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{T}]^{\zeta\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{T}]^{\zeta\rho}_{,\rho} + \frac{d+h}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\zeta\rho} + \frac{e+j}{\omega}[\mathfrak{T}]^{\zeta\theta} + \mathfrak{E}^\zeta + [\mathfrak{D}]^\zeta = 0, \end{aligned}$$

а интегрирование первых двух уравнений (32) с весом ζ дает

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}]^{\rho\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{M}]^{\rho\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{M}]^{\rho\rho}_{,\rho} + \frac{2d+h}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\rho\rho} + \frac{2e+j}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\rho\theta} + \frac{e}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\theta\rho} + \frac{f}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\theta\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\rho + [\mathfrak{D}]^\rho = 0, \\ [\mathfrak{T}]^{\theta\theta}_{,\theta} + [\mathfrak{M}]^{\theta\zeta}_{,\zeta} + [\mathfrak{M}]^{\theta\rho}_{,\rho} + \frac{d+2h}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\theta\rho} + \frac{e+2j}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\theta\theta} + \frac{g}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\rho\rho} + \frac{h}{\omega}[\mathfrak{M}]^{\rho\theta} + \\ + \mathfrak{E}^\theta + [\mathfrak{D}]^\theta = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathfrak{T} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{s} d\zeta, \quad \mathfrak{M} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{s} \zeta d\zeta, \quad \mathfrak{D} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{f} d\zeta, \quad \mathfrak{Q} = \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{f} \zeta d\zeta,$$

а $\mathfrak{E}^\rho$, $\mathfrak{E}^\theta$, $\mathfrak{E}^\zeta$, $\mathfrak{E}^\theta$ — соответствующие интегралы от выражений, определяемых оператором $\mathcal{A}$ (34) (характеризующим «геометрическую нелинейность») и слагаемыми, входящими в закон состояния с «физически нелинейным» термом ϵ (35).

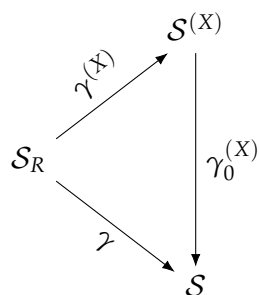
4. Несовместные деформации в пластине

4.1. Мультипликативная декомпозиция

До сих пор ничего не утверждалось о несовместности локальных деформаций в пластине, и все рассуждения, связанные с формулировкой уравнений баланса, в равной степени применимы как к случаю, когда форма $\mathcal{S}_R$ является натуральной, так и к случаю, когда она самонапряжена. Вместе с тем в последнем случае соображения раздела 3.5. должны быть подвергнуты корректировке, поскольку упругий потенциал W (36) отсчитывается от натурального состояния. В соответствии с общими положениями континуальной теории дефектов, эту корректировку можно произвести следующим образом. Пусть $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ — семейство локально натуральных деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, для которого выполнено свойство (8) (см. раздел 1.3.). Если $\mathcal{S}$ — некоторая актуальная форма, а $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — соответствующая деформация, то приходим к композиции

$$\gamma_0^{(X)} := \gamma \circ (\gamma^{(X)})^{-1} : \mathcal{S}^{(X)} \rightarrow \mathcal{S}, \quad (38)$$

которая является деформацией, переводящей инфинитезимальную окрестность точки X из натурального состояния в актуальное. Действие деформации $\gamma_0^{(X)}$ иллюстрируется следующей диаграммой:



В инфинитезимальном приближении равенству (38) отвечает соотношение между градиентами:

$$D_Y \gamma_0^{(X)} := D_Y \gamma \circ D_Y (\gamma^{(X)})^{-1},$$

рассматриваемое в точке $Y \in \mathcal{S}_R$. Вводя теперь локальную деформацию $\mathbf{H}_X$ в соответствии с формулой (9) и полную локальную дисторсию $\mathbf{F}_X^*$ как

$$\mathbf{F}_X^* := D_Y \gamma_0^{(X)}|_{Y=X},$$

приходим к равенству

$$\mathbf{F}_X^* = \mathbf{F}_X \mathbf{H}_X^{-1},$$

которое удобно представить в ином виде:

$$\mathbf{F}_X^* = \mathbf{F}_X \mathfrak{K}_X.$$

Здесь $\mathfrak{K}_X$ — (по терминологии Епштейна & Мажена [18; 55]) имплант в точке X , определяемый как $\mathfrak{K}_X := \mathbf{H}_X^{-1}$. В итоге приходим к соотношению между полями:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathfrak{K}. \quad (39)$$

В нем поле $\mathbf{F}$ совместно, т. е. $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, в то время как поля локальных деформаций и полной дисторсии несовместны:

$$\text{curl } \mathbf{H} \neq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \text{curl } \mathbf{F}^* \neq \mathbf{0}.$$

Таким образом, соотношение (39) есть в точности мультипликативная декомпозиция, предложенная Ли [56].

Принимая во внимание высказанные соображения, заменим в выражении для тензора деформаций Грина – Сен-Венана (30) поле $\mathbf{F}$ на поле $\mathbf{F}^*$:

$$\mathbb{E}^* = \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}^*)^T \mathbf{F}^* - \mathbf{I} \right).$$

В соответствии с (39), приходим тогда к равенству

$$\mathbb{E}^* = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{K}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathfrak{K} - \mathbf{I} \right). \quad (40)$$

Уточненному тензору Грина – Сен-Венана отвечает потенциал Сен-Венана – Кирхгофа (36) в виде

$$W^* = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \mathbb{E}^*)^2 + \mu \mathbb{E}^* : \mathbb{E}^*.$$

Заметим, что коэффициенты λ и μ здесь по-прежнему являются постоянными, поскольку потенциал определяется, как и в эксперименте, относительно натурального состояния. Единственное отличие состоит в том, что теперь это натуральное состояние определено лишь локально и при переходе от одного к другому приходится перебирать элементы семейства $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$.

4.2. Локальные деформации частного вида

С целью проиллюстрировать влияние несовместных деформаций на выражения для упругого потенциала и тензора напряжений, рассмотрим модельный случай. Предположим, что поле локальных деформаций является шаровым тензором:

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{I}, \quad (41)$$

где $\nu = \nu(\rho, \theta, \zeta) > 0$ — скалярное поле. С физической точки зрения последнее может быть ассоциировано с объемной усадкой материала или неоднородной температурной деформацией. Соответственно, имплант имеет вид

$$\mathbf{\mathfrak{K}} = \sqrt{\delta} \mathbf{I},$$

где для упрощения дальнейших формул мы взяли $\delta = \nu^{-2}$. В таком случае полная дисторсия (39) есть поле

$$\mathbf{F}^* = \sqrt{\delta} \mathbf{F},$$

и модифицированный тензор (40) принимает вид

$$\mathbf{E}^* = \delta \mathbf{E} + \frac{\delta - 1}{2} \mathbf{I}.$$

Здесь поле $\mathbf{E}$ соответствует тензору Грина–Сен-Венана, определенному по градиенту $\mathbf{F}$. В рассматриваемом частном случае упругий потенциал представлен равенством

$$W^* = \left(\frac{\lambda \delta}{2} + \mu(\delta - 1) \right) \mathbf{I} : \mathbf{E} + \mu \delta^2 \mathbf{E} : \mathbf{E} + \frac{3}{2} \mu (\delta - 1)^2,$$

а поле напряжений Пиола–Кирхгофа второго рода имеет вид

$$\mathbf{S}^* = \delta (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}) + \frac{\delta}{2} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{I}.$$

Полученное выражение отличается от (37). В частности, аналоги материальных констант теперь являются скалярными функциями координат. Но так и должно быть, поскольку закон состояния (37) определен относительно натуральной (хотя бы локально) отсчетной формы, в то время как полученный закон состояния записан относительно самонапряженной промежуточной формы. Тело приобрело фиктивную неоднородность.

4.3. Идея эволюционной задачи

Заметим, что скалярное поле δ (или ν) в общем случае неизвестно и для своего определения требует решения эволюционной задачи [21; 57]. Хотя ее полная формулировка выходит за рамки настоящей работы, мы приведем основные идеи, которые могли бы способствовать постановке такой задачи. Прежде всего введем эволюционный параметр α , который характеризует течение эволюционного процесса. Будем полагать, что процесс эволюции связан с непрерывным присоединением инфинитезимально тонких слоев в трансверсальном направлении (вдоль толщины) к фиксированной подложке. Тогда, представляя форму $\mathcal{S}_R$ как конечный результат такого присоединения, определим функцию $\zeta_{\text{growth}} = \zeta_{\text{growth}}(\alpha)$ — границу роста, определяющую текущее значение максимальной трансверсальной координаты. Следовательно, эволюционный процесс моделируется как движение поверхности вдоль промежуточной формы, где поверхность отделяет множество точек, между которыми установлены связи, от множества точек, не связанных между собой.

Получаем семейство самонапряженных форм⁵ $\{\mathcal{S}_{R,\alpha}\}_{\alpha \in [0,1]}$, вложенных в $\mathcal{S}_R$, которые определены как

⁵ Значение $\alpha = 0$ соответствует началу процесса, а значение $\alpha = 1$ — окончанию процесса.

$$\mathcal{S}_{R,\alpha} = \left\{ X \in \mathcal{E} : X = O + x^1(\rho^1, \rho^2)\mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2)\mathbf{j} + zk, \right. \\ \left. (\rho^1, \rho^2, z) \in D_0 \times [-H, \zeta_{\text{growth}}(\alpha)] \subset \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Каждой форме $\mathcal{S}_{R,\alpha}$ отвечает свое поле локальных деформаций $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\alpha)$, и мы будем предполагать, что выполнено условие отсутствия эволюции неоднородности [58]:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{H}(\rho, \theta, \zeta, \alpha) = \mathbf{0}.$$

Наконец, должно быть сформулировано условие, которое определяет характер возникновения структурной неоднородности:

$$\mathcal{F}(\mathbf{H}(\alpha), \zeta_{\text{growth}}(\alpha)) = 0. \quad (42)$$

Пример такого условия можно найти в работе [59]. Уравнения баланса, классические краевые условия и соотношение типа (42) в совокупности составляют эволюционную задачу для растущей по толщине пластины.

4.4. Отсчетная геометрия

В завершение статьи синтезируем риманову геометрию на подлежащем многообразии $\mathfrak{S}_R$, используя общие формулы из раздела 1.4. и частный вид (41) поля локальных деформаций. Материальная метрика $\mathbf{G}$ определяется в соответствии с формулой (13), и ее компоненты имеют вид

$$G_{IJ} = \nu^2 g_{IJ}, \quad (43)$$

где g_{ij} — компоненты евклидова метрического тензора, полученного сужением исходной евклидовой метрики пространства $\mathcal{E}$ на многообразие $\mathfrak{S}_R$. Коэффициенты связности Леви-Чивита — символы Кристоффеля — определяются согласно формулам (14). Однако по их выражениям ничего нельзя сказать об отличии геометрии от евклидовой. Это можно сделать, лишь вычислив кривизну по формуле (15). В частности, один из ее скалярных инвариантов — скалярная кривизна (16) — представлен выражением

$$\text{Scal} = 2 \frac{\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right)}{\nu^4},$$

отличным от нуля. В произвольных координатах выражения получаются довольно громоздкими, поэтому скалярная кривизна записана относительно прямоугольных координат, индуцированных на многообразии $\mathfrak{S}_R$.

Полученная геометрия Римана эквивалентна геометрии Вейля [60; 61]. Действительно, поскольку $\nu > 0$, существует скалярное поле $f : \mathfrak{S}_R \rightarrow \mathbb{R}$, которое удовлетворяет условию: $\nu^2 = e^f$. Тогда равенство (43) принимает вид

$$G_{IJ} = e^f g_{IJ},$$

и вычисление символов Кристоффеля по формуле (14) приводит к выражению

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{g^{CD}}{2} (\partial_A g_{DB} + \partial_B g_{AD} - \partial_D g_{AB}) - \frac{1}{2} \left(\delta_B^C \partial_A f + \delta_A^C \partial_B f - g_{AB} G^{CD} \partial_D f \right).$$

Но это есть не что иное, как коэффициенты связности Вейля, построенной по евклидову метрическому тензору $\mathbf{g}$ и 1-форме $\vartheta = df$. Можно, таким образом, сделать следующие выводы. Во-первых, даже если индуцированные координаты декартовы, коэффициенты связности отличны от нуля. Во-вторых, связность Вейля обычно возникает в ситуациях, когда рассматриваются точечные дефекты или неоднородные температурные деформации. Но именно этот случай мы рассматриваем в данной работе.

Заключение

Резюмируем результаты настоящей работы:

1. Сформулированы нелинейные уравнения деформирования гибких пластин в общих неортогональных координатах. В рамках вывода предполагались справедливыми гипотезы Кирхгофа – Лява.
2. Подробно рассмотрены аспекты, связанные с моделированием несовместных деформаций в рамках геометрического подхода. В частности, сформулирована гипотеза о локальной разгрузке и определено мультипликативное разложение полной дисторсии. В работе рассматривался случай геометрии Римана.
3. На примере импланта, представленного шаровым тензором, синтезирована материальная геометрия и показано, что она совпадает с геометрией Вейля.
4. Показано, как можно сформулировать эволюционную задачу для определения объемной усадки.

Финансирование. Работа была выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00866).

Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Койфман К.Г., Лычев С.А. Нелинейные уравнения деформирования гибких пластин // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 53–83. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-53-83.

© Койфман К.Г., Лычев С.А., 2024

Константин Георгиевич Койфман (koifman.konstantin@gmail.com) – ассистент кафедры высшей математики, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, 5.

Сергей Александрович Лычев (lychevsa@mail.ru) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории «Механика технологических процессов», Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Литература

- [1] De Teresa J.M. (ed.) Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Bristol, UK: IOP Publishing, 2020. 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
- [2] Bhushan B. Mechanical Properties of Nanostructures // Springer Handbook of Nanotechnology. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2005. P. 1305–1338. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_41.
- [3] Corigliano A., Ardito R., Comi C., Frangi A., Ghisi A., Mariani S. Mechanics of Microsystems. Wiley, 2018. 424 p. Available at: <https://avidreaders.ru/book/mechanics-of-microsystems.html?ysclid=m5wcp7r7qa165607938>.
- [4] Lychev S., Digilov A., Demin G., Gusev E., Kushnarev I., Djuzhev N., Bepalov V. Deformations of single-crystal silicon circular plate: Theory and experiment // Symmetry. 2024. Vol. 16, issue 2. P. 137. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym16020137>.
- [5] Eremeyev V.A., Altenbach H., Morozov N.F. The influence of surface tension on the effective stiffness of nanosize plates // Doklady Physics. 2009. Vol. 54, issue 2. P. 98–100. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833580902013X>.

- [6] Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects // *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 227, issue 1. P. 29–42. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1427-y>.
- [7] Dedkova A.A., Glagolev P.Y., Gusev E.E., Djuzhev N.A., Kireev V.Y., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Peculiarities of Deformation of Round Thin-Film Membranes and Experimental Determination of Their Effective Characteristics // *Technical Physics*. 2024. Vol. 69, issue 2. P. 201–212. DOI: <http://doi.org/10.1134/s1063784224010109>.
- [8] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Либроком, 2009. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m5wesnio3v852550962>.
- [9] Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. *Tensor Analysis with Applications in Mechanics*. Singapore: World Scientific, 2010. 363 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/7826>.
- [10] Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [11] Föppl A. *Vorlesungen über technische Mechanik*. Vol. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907. 408 p. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgoog/mode/2up>.
- [12] Kármán T. *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910. P. 311–385. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5.
- [13] Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва: Гостехиздат, 1956. 422 с. URL: <https://ru.djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m5xk1o2hn3747950990>.
- [14] Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1980. Vol. 73, issue 4. P. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [15] Marsden J.E., Hughes T.J.R. *Mathematical Foundations of Elasticity*. New York: Dover Publications, 1994. 576 p. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/records/s9jhh-sn323>.
- [16] Rakotomanana L. *A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua*. Birkhäuser Boston, MA, 2004. 265 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8132-6>.
- [17] Epstein M., Elzanowski M. *Material Inhomogeneities and their Evolution. A Geometric Approach*. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [18] Epstein M. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [19] Steinmann P. *Geometrical Foundations of Continuum Mechanics: An Application to First- and Second-Order Elasticity and Elasto-Plasticity*. Springer Berlin, Heidelberg, 2015. 517 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46460-1>.
- [20] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. Uniform configurations // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. 2016. Vol. 7, issue 3. P. 177–233. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [21] Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. Walter de Gruyter GmbH, 2018. 370 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [22] Lee J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer New York, 2012. 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [23] Терстон У. *Трёхмерная геометрия и топология*. Москва: МЦНМО, 2001. 159 с. URL: <https://djvu.online/file/d9kTToZY4xSoe?ysclid=m5xo4p5xsk264956559>.
- [24] Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Москва: Наука, 1989. 706 с. URL: <https://djvu.online/file/wCBIIIGHJY68zQ?ysclid=m5xq46subf880076048>.
- [25] Парс Л.А. *Аналитическая динамика*. Москва: Наука, 1971. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/gE3s7zpUFWIti?ysclid=m5xqeo60cm741093621>.
- [26] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия*. Москва: Наука, 1979. 336 с. URL: <https://djvu.online/file/xZDfmLpebumCj?ysclid=m5xqn6y67s772754531>.
- [27] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27, issue 1. P. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.

- [28] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // Flügge S. (eds.) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2/3/1. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1960. P. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [29] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1967. 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-90850-7>.
- [30] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite incompatible deformations in elastic solids: Relativistic approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, issue 7. P. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [31] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. Singapore: World Scientific Publishing, 1999. 356 p. URL: https://books.google.ru/books?id=Mvk7DQAAQBAJ&redir_esc=y.
- [32] Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds. Springer Cham, 2018. 437 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.
- [33] Lychev S.A., Koifman K.G., Pivovarov N.A. Incompatible deformations in relativistic elasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, issue 6. P. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [34] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. 2nd edition. Springer Science & Business Media, 1988. 656 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0>.
- [35] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of material connection in growing solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, issue 8. P. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [36] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. 1948. Vol. 73, issue 4. P. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/physrev.73.373>.
- [37] Kröner E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1959. Vol. 4, issue 1. P. 273–334. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281393>.
- [38] Lee J.M. Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer New York, 2011. 433 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7>.
- [39] Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1955. Vol. 231, issue 1185. P. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [40] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2012. Vol. 205, issue 1. P. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [41] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Vol. 35, number 7. P. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [42] Anthony K.H. Die theorie der disklationen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1970. Vol. 39, issue 1. P. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [43] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1971. Vol. 40, issue 1. P. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [44] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1916. Vol. 42, issue 1. P. 173–204. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [45] Goodbrake C., Goriely A., Yavari A. The mathematical foundations of anelasticity: existence of smooth global intermediate configurations // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2021. Vol. 477, issue 2245. P. 20200462. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0462>.
- [46] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II // Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 1887. Vol. 34. P. 53–100.
- [47] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p. URL: <https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp79796>.

- [48] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16, issue 1. P. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [49] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1, issue 1. P. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [50] Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [51] Schield R.T. Inverse deformation results in finite elasticity // Journal of Applied Mathematics and Physics. 1967. Vol. 18. P. 490–500. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01601719>.
- [52] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. 259 с. URL: <https://djvu.online/file/jUBUyrRG4xLui?ysclid=m5z7v8g7k9959065018>.
- [53] Kanso E., Arroyo M., Tong Y., Yavari A., Marsden J.E., Desbrun M. On the geometric character of stress in continuum mechanics // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2007. Vol. 58. P. 843–856. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-007-6141-8>.
- [54] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [55] Maugin G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity. New York: Chapman & Hall, 1993. 292 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [56] Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36, issue 1. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564580>.
- [57] Lychev S.A. Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Vol. 94, issue 1–2. P. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [58] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, № 4. С. 585–604. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20181632>. EDN: <https://elibrary.ru/qzqmwld>.
- [59] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell // Acta Mechanica, 2019. Vol. 230, issue 11. P. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [60] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2012. Vol. 468, issue 2148. P. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [61] Dhas B., Srinivasa A.R., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-53-83

Nonlinear equations of flexible plates deformations

Koifman¹ K.G.^{id}, Lychev² S.A.^{id}

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation; koifman.konstantin@gmail.com (K.G.);

² Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; lychevsa@mail.ru (S.A.);

Received: 18.10.2024

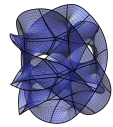
Revised: 23.11.2024

Accepted: 25.11.2025

Scientific article



Abstract. Nonlinear equations of deformation of flexible plates are formulated in general nonorthogonal coordinates with taking into account incompatible local deformations. The following assumptions are used. 1. Displacements of the plate from the reference (self-stressed) shape are restricted by the kinematic hypotheses of Kirchhoff — Love. 2. Elementary volumes constituting the reference shape can be locally transformed into an unstressed state by means of a nondegenerate linear transformation (hypothesis of local discharging). 3. Transformations inverse to local unloading, referred to as implants, can be found from the solution of the evolutionary problem simulating the successive deposition of infinitely thin layers on the front boundary surface of the plate. Geometric spaces of affine connection that model the global stress-free reference shape are constructed. The following special cases are considered: Weitzenböck space (with non-zero torsion), Riemann space (with non-zero curvature) and Weyl space (with non-zero non-metricity).



Key words: hyperelasticity; flexible plates; kinematic hypothesis; nonlinear equations; asymptotic expansion; incompatible deformations; material connection.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23-19-00866).

Information about the conflict of interests: the authors declared no conflict of interest.

Citation. Koifman K.G., Lychev S.A. Nonlinear equations of flexible plates deformations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 53–83. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-53-83. (In Russ.)

© Koifman K.G., Lychev S.A., 2024

Konstantin G. Koifman (koifman.konstantin@gmail.com) – assistant professor at the Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

Sergey A. Lychev (lychevsa@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

References

- [1] J.M. De Teresa (ed.) Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Bristol, UK: IOP Publishing, 2020, 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
- [2] Bhushan B. Mechanical Properties of Nanostructures. In: *Springer Handbook of Nanotechnology*. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 1305–1338. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_41.
- [3] Corigliano A., Ardito R., Comi C., Frangi A., Ghisi A., Mariani S. Mechanics of Microsystems. Wiley, 2018, 424 p. Available at: <https://avidreaders.ru/book/mechanics-of-microsystems.html?ysclid=m5wcp7r7qa165607938>.
- [4] Lychev S., Digilov A., Demin G., Gusev E., Kushnarev I., Djuzhev N., Besspalov V. Deformations of single-crystal silicon circular plate: Theory and experiment. *Symmetry*, 2024, vol. 16, issue 2, p. 137. DOI: <http://doi.org/10.3390/sym16020137>.
- [5] Eremeyev V.A., Altenbach H., Morozov N.F. The influence of surface tension on the effective stiffness of nanosize plates. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, issue 2, pp. 98–100. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833580902013X>.
- [6] Eremeyev V.A. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mechanica*, 2015, vol. 227, issue 1, pp. 29–42. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1427-y>.
- [7] Dedkova A.A., Glagolev P.Y., Gusev E.E., Djuzhev N.A., Kireev V.Y., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Peculiarities of Deformation of Round Thin-Film Membranes and Experimental Determination of Their Effective Characteristics. *Technical Physics*, 2024, vol. 69, issue 2, pp. 201–212. DOI: <http://doi.org/10.1134/s1063784224010109>.
- [8] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1959, 636 p. Available at: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m5wesnio3v852550962>. (In Russ.)
- [9] Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. Tensor Analysis with Applications in Mechanics. Singapore: World Scientific, 2010, 363 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/7826>.
- [10] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 2004, 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [11] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907, 408 p. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgooq/mode/2up>.

- [12] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910, pp. 311–385. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5.
- [13] Volmir A.S. Flexible plates and shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 422 p. Available at: <https://ru.djvu.online/file/UDisSs9cFCGHw?ysclid=m5xk1o2hn3747950990>. (In Russ.)
- [14] Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1980, vol. 73, issue 4, pp. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [15] Marsden J.E., Hughes T.J.R. Mathematical Foundations of Elasticity. New York: Dover Publications, 1994, 576 p. Available at: <https://authors.library.caltech.edu/records/s9jhk-sn323>.
- [16] Rakotomanana L. A Geometric Approach to Thermomechanics of Dissipating Continua. Birkhäuser Boston, MA, 2004, 265 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8132-6>.
- [17] Epstein M., Elzanowski M. Material Inhomogeneities and their Evolution. A Geometric Approach. Springer Berlin, Heidelberg, 2007, 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [18] Epstein M. The geometrical language of continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [19] Steinmann P. Geometrical Foundations of Continuum Mechanics: An Application to First- and Second-Order Elasticity and Elasto-Plasticity. Springer Berlin, Heidelberg, 2015, 517 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46460-1>.
- [20] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. Uniform configurations. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2016, vol. 7, issue 3, pp. 177–233. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [21] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Walter de Gruyter GmbH, 2018, 370 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [22] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer New York, 2012, 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [23] Thurston W.P. Three-Dimensional Geometry and Topology. Vol. 1. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1997, 159 p. Available at: <https://djvu.online/file/d9kTToZY4xSoe?ysclid=m5xo4p5xsk264956559>. (In Russ.)
- [24] Newton I. The Mathematical Principles of Natural Philosophy. Moscow: Nauka, 1989, 706 p. Available at: <https://djvu.online/file/wCBIIIGHJY68zQ?ysclid=m5xq46subf880076048>. (In Russ.)
- [25] Pars L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. Moscow: Nauka, 1971, 636 p. Available at: <https://djvu.online/file/gE3s7zpUFwIti?ysclid=m5xqeo60cm741093621>. (In Russ.)
- [26] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester I. Analytic geometry. Moscow: Nauka, 1979, 336 p. Available at: <https://djvu.online/file/xZDfmLpe6umCj?ysclid=m5xqn6y67s772754531>. (In Russ.)
- [27] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, issue 1, pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [28] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: *Flügge S. (eds.) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2/3/1*. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1960, pp. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [29] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin; Heidelberg: Springer Berlin, Heidelberg, 1967, 384 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-90850-7>.
- [30] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite incompatible deformations in elastic solids: Relativistic approach. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, issue 7, pp. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [31] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. Singapore: World Scientific Publishing, 1999, 356 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=Mvk7DQAAQBAJ&redir_esc=y.
- [32] Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds. Springer Cham, 2018, 437 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.

- [33] Lychev S.A., Koifman K.G., Pivovarov N.A. Incompatible deformations in relativistic elasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, issue 6, pp. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [34] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. 2nd edition. Springer Science & Business Media, 1988, 656 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1029-0>.
- [35] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of material connection in growing solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, issue 8, pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [36] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, issue 4, pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/physrev.73.373>.
- [37] Kröner E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, issue 1, pp. 273–334. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281393>.
- [38] Lee J.M. Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer New York, 2011, 433 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7940-7>.
- [39] Bilby B.A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [40] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear dislocation mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, issue 1, pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [41] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, vol. 35, number 7, pp. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [42] Anthony K.H. Die theorie der disklationen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1970, vol. 39, issue 1, pp. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [43] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, vol. 40, issue 1, pp. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [44] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una variet'a qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1916, vol. 42, issue 1, pp. 173–204. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [45] Goodbrake C., Goriely A., Yavari A. The mathematical foundations of anelasticity: existence of smooth global intermediate configurations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2021, vol. 477, issue 2245, p. 20200462. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0462>.
- [46] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 1887, vol. 34, pp. 53–100.
- [47] Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Paris: A. Hermann et fils, 1909, 226 p. URL: <https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp79796>.
- [48] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, issue 1, pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [49] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, vol. 1, issue 1, pp. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [50] Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2006, 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [51] Schield R.T. Inverse deformation results in finite elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1967, vol. 18, pp. 490–500. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01601719>.
- [52] Lurie A.I. Non-Linear Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1980, 259 p. Available at: <https://djvu.online/file/jUBUyrRG4xLui?ysclid=m5z7v8g7k9959065018>. (In Russ.)
- [53] Kanso E., Arroyo M., Tong Y., Yavari A., Marsden J.E., Desbrun M. On the geometric character of stress in continuum mechanics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2007, vol. 58, pp. 843–856. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-007-6141-8>.

- [54] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [55] Maugin G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity. New York: Chapman & Hall, 1993, 292 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [56] Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 1969, vol. 36, issue 1, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3564580>.
- [57] Lychev S.A. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, issue 1–2, pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [58] Lychev S.A., Manzhurov A.V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 4, pp. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011>. EDN: <https://elibrary.ru/wqyump>. (In English; original in Russian)
- [59] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, issue 11, pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [60] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 468, issue 2148, pp. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [61] Dhas B., Srinivasa A.R., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. DOI: <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.