

Решение уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин

Дигилов А.В. , Лычев С.А. 

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлунского РАН, г. Москва, Российская Федерация;
digilov@ipmnet.ru (А.В.); lychevs@mail.ru (С.А.);

Поступила: 10.10.2024

Рассмотрена: 20.11.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. В статье развит подход к построению решений уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин, основанный на прямой алгебраизации краевой задачи. Решение получено в виде разложения по базису в пространстве квадратно-интегрируемых функций. Для задания такого базиса использована система собственных функций линейного самосопряженного оператора. Коэффициенты разложения определяются методом редукции из бесконечномерной системы кубических уравнений. Это позволяет рассматривать предложенное решение как нелинейное обобщение классического метода Галеркина.

Ключевые слова: квадратные пластины; уравнения Фешля – фон Кармана; конечные деформации; нелинейные уравнения.

Введение

В настоящее время для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) гибких пластин широко используют нелинейные уравнения Фешля – фон Кармана, полученные для мембран Августом Фешлем в 1907 году [1] и обобщенные на случай конечной изгибной жесткости Теодором фон Карманом [2]:

$$D\nabla^2\nabla^2w - hL(w, \phi) = p, \quad \nabla^2\nabla^2\phi + \frac{E}{2}L(w, w) = 0. \quad (1)$$

Здесь h – толщина пластины; E – модуль Юнга ее материала; $p(x, y)$ – функция трансверсальной нагрузки, приложенной к поверхности пластины; D – цилиндрическая жесткость пластины, определяемая через h , E и коэффициент Пуассона ν :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Символы $\nabla^2\nabla^2$ и L обозначают, соответственно, бигармонический оператор и оператор типа Монжа – Ампера:

$$\nabla^2\nabla^2f = \frac{\partial^4f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4f}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4f}{\partial y^4}, \quad L(f, g) = \frac{\partial^2f}{\partial x^2}\frac{\partial^2g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2f}{\partial y^2}\frac{\partial^2g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2g}{\partial x\partial y}. \quad (2)$$

Искомая функция $w(x, y)$ характеризует прогиб срединной плоскости пластины, а $\phi(x, y)$ – функция напряжений Эри, связанная с компонентами тензора напряжений следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}. \quad (3)$$

В работе предлагается обобщение метода решения уравнений (1), развитого в статье [3], на случай приложения к квадратной пластине нагрузки, симметричной относительно средних линий пластины, но не ее диагоналей, т. е. такой, что:

$$p(x, y) = p(-x, y), \quad p(x, y) = p(x, -y), \quad p(x, y) \neq p(y, x).$$

Рассматриваемая задача является связующим звеном между задачами об изгибе квадратной и прямоугольной пластин и позволяет продемонстрировать основные принципы расчета пластин для неполовностью симметричного случая, не вводя в рассмотрение параметр, связанный с соотношением сторон пластины.

Подробный литературный обзор, посвященный решениям уравнений Фешля–фон Кармана для круглых и прямоугольных пластин, можно найти в статьях [3–8]; здесь же упомянем лишь некоторые работы, связанные с применением метода Галеркина.

По-видимому, первая попытка решения уравнений Фешля–фон Кармана методом Галеркина была предпринята Д.Ю. Пановым [9]. Ямаки [10] получил решение динамического аналога уравнений Фешля–фон Кармана для прямоугольной пластины с помощью одночленного метода Галеркина. В работе [11] уравнения Фешля–фон Кармана для прямоугольной пластины сводились к одному кубическому уравнению с помощью биортогональных разложений по функциям Крылова–Дункана. Для каждого набора краевых условий рассматривались две возможности: все края свободны от напряжений или все края неподвижны. Этот метод наиболее близок к методу, развиваемому в [3] и в настоящей статье. Аналогичный метод алгебраизации системы уравнений Фешля–фон Кармана был представлен в статьях [12; 13]. В работе [14] этот метод был дополнен явным выражением для матрицы, обратной к матрице Галеркина, что позволило получить решение более эффективно. В последнее время активно развивается метод вейвлет-Галеркина [15; 16], основанный на разложении искомых функций по базису вейвлетов.

1. Постановка задачи

Рассматривается изгиб тонкой пластины с толщиной h , выполненной из линейно-упругого материала с модулями E и ν , под действием поля нормальных сил с интенсивностью $p(x, y)$. Пластина занимает квадратную область

$$\Omega = (-a, a) \times (-a, a) \subset \mathbb{R}^2$$

с границей

$$\partial\Omega = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2,$$

где $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ соответствуют двум парам противоположащих сторон:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= (\{-a\} \times [-a, a]) \cup (\{a\} \times [-a, a]), \\ \mathcal{E}_2 &= ([-a, a] \times \{-a\}) \cup ([-a, a] \times \{a\}). \end{aligned}$$

Для того чтобы сформулировать краевую задачу, необходимо дополнить уравнения конечного изгиба пластины (1) подходящими краевыми условиями на границах $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Краевые условия для гибких пластин обычно разделяют на два набора, ассоциированные с изгибом пластины и плоским НДС. В качестве первого набора в настоящей статье выбраны условия жесткого защемления всего граничного контура пластины:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad w \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

а в качестве второго – условия скользящей заделки:

$$u \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad v \Big|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – функции перемещений точек пластины в ее плоскости. Они не входят в уравнения (1) в явном виде, поэтому для решения краевой задачи (1), (4), (5) необходимо выразить их через искомые функции w, ϕ . Это можно сделать с помощью формулы Чезаро, связывающей векторы перемещений \mathbf{u} и поворотов $\boldsymbol{\omega}$ с тензором малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ [17]:

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \int_{M_0}^M [\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})] d\mathbf{x}. \tag{6}$$

Здесь вектор перемещений \mathbf{u} , как это принято в теории Кармана, определен с учетом кинематических гипотез Кирхгофа:

$$\mathbf{u} = \left(u - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(v - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \mathbf{j} + w \mathbf{k}.$$

Таким образом, для того чтобы связать вектор перемещений \mathbf{u} с функцией Эри ϕ , необходимо выразить тензор малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ через тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Особенность теории Кармана состоит в наличии нескольких упрощающих гипотез, которые позволяют использовать лишь закон состояния Сен-Венана–Кирхгофа [18; 19]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E}^* + \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\text{tr} \mathbf{E}^*) \mathbf{I}, \quad (7)$$

где \mathbf{E}^* – редуцированный тензор деформаций Грина–Сен-Венана:

$$\mathbf{E}^* = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} (\nabla w) \otimes (\nabla w) = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla w) \otimes (\nabla w) \right]. \quad (8)$$

Подставляя соотношение (8) в формулу Чезаро (6), можно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_M = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \\ + \int_{M_0}^M \left\{ \mathbf{E}^* - \frac{1}{2} (\nabla w) \otimes (\nabla w) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \times \left[\nabla \times \left(\mathbf{E}^* - \frac{1}{2} (\nabla w) \otimes (\nabla w) \right) \right] \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Эта формула может быть значительно упрощена, если выбрать подходящий путь интегрирования. Учитывая, что перемещения и повороты всей пластины определяются с точностью до аддитивной постоянной, любая ее точка может быть зафиксирована. Кроме того, если функция трансверсальной нагрузки четная или нечетная по обеим координатам, то центр пластины будет смещаться вертикально, не сдвигаясь в плоскости пластины. Далее для простоты будем считать, что функция нагрузки p и, как следствие, искомые функции w , ϕ четные по обеим координатам (остальные случаи симметрии рассматриваются аналогично):

$$\{w, \phi, p\} \subset \mathcal{F}_s = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f(x, y) = f(-x, y), f(x, y) = f(x, -y)\}. \quad (10)$$

Кроме того, ограничим класс рассматриваемых функций p , w , ϕ только лишь квадратично-интегрируемыми. Это позволит разложить их по ортонормированной системе функций и свести краевую задачу к системе кубических уравнений.

С учетом четности функции поперечной нагрузки (10) перемещения u на границе \mathcal{E}_1 могут быть вычислены следующим образом:

$$u|_{x=\pm a} = \int_0^{\pm a} \left(E_{xx}^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx.$$

Подстановка соотношений (7) и (3) в эту формулу приводит к искомому равенству

$$u|_{x=\pm a} = \int_0^{\pm a} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0. \quad (11)$$

Выражение для перемещений v на границе \mathcal{E}_2 может быть записано аналогично, если заменить в (11) переменную x на y и функцию u на v .

Теперь можно перейти к окончательной формулировке краевой задачи. Но прежде удобно ввести безразмерные переменные:

$$\tilde{x} := \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} := \frac{y}{a}, \quad \tilde{z} := \frac{z}{h}, \quad \tilde{w} := \frac{w}{h}, \quad \tilde{\phi} := \frac{\phi h}{D}, \quad \tilde{p} := \frac{pa^4}{Dh}.$$

В новых переменных уравнения Фепля – фон Кармана (1) и соответствующие краевые условия могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} - \tilde{L}(\tilde{w}, \tilde{\phi}) = \tilde{p}, \quad \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\phi} + \kappa \tilde{L}(\tilde{w}, \tilde{w}) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad \tilde{w} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \tag{14}$$

$$\int_0^{\pm 1} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \kappa \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right] d\tilde{x} = 0, \quad \int_0^{\pm 1} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \kappa \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] d\tilde{y} = 0, \tag{15}$$

где $\kappa := 6(1 - \nu^2)$, $\tilde{\nabla}^2 := a^2 \nabla^2$, $\tilde{L}(\cdot, \cdot) := a^4 L(\cdot, \cdot)$. Далее для краткости в обозначениях дифференциальных операторов будем опускать знак тильды

2. Решение краевой задачи

2.1. Построение базиса

Решение нелинейной краевой задачи (12)–(15) будем искать в виде разложения по некоторому базису в $\mathcal{L}^2(\Omega)$, порожденному линейным самосопряженным оператором. Согласно спектральной теореме фон Неймана [20], система собственных функций самосопряженного дифференциального оператора образует базис в $\mathcal{L}^2(\Omega)$, однако бигармонический оператор имеет довольно сложную систему собственных функций даже с однородными краевыми условиями, поэтому удобнее использовать другой самосопряженный оператор, например

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^4}{\partial \tilde{y}^4}.$$

Система собственных функций этого оператора может быть получена как комбинация решений вспомогательной задачи Штурма – Лиувилля:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial v^4} - \eta^4 f = 0, \quad f \Big|_{v=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=\pm 1} = 0.$$

Фундаментальная система решений этого уравнения хорошо известна:

$$\Psi = \{ \sin(\eta v), \cos(\eta v), \sinh(\eta v), \cosh(\eta v) \}.$$

Подставив линейную комбинацию этих функций в граничные условия, можно получить спектральное уравнение относительно собственных значений η :

$$[\sinh(\eta) \cos(\eta) - \sin(\eta) \cosh(\eta)] [\sinh(\eta) \cos(\eta) + \sin(\eta) \cosh(\eta)] = 0.$$

Таким образом, спектр оператора \mathcal{L} состоит из двух серий собственных значений:

$$\{ \eta_m \}_{m=1}^{\infty} = \{ \lambda_m \}_{m=1}^{\infty} \cup \{ \mu_m \}_{m=1}^{\infty},$$

которые определяются как корни трансцендентных уравнений:

$$\tanh(\lambda_m) + \tan(\lambda_m) = 0, \quad \tanh(\mu_m) - \tan(\mu_m) = 0.$$

Эти корни могут быть найдены численно с любой заданной точностью, но для достаточно больших значений m довольно точные приближения могут быть получены из асимптотических формул:

$$\lambda_m = \pi m - \frac{\pi}{4}, \quad \mu_m = \pi m + \frac{\pi}{4}. \tag{16}$$

Таблица 1

Собственные значения λ

Table 1

Eigenvalues λ

Номер	Точное значение	Приближенное значение	Погрешность
1	2.36502	2.35619	0.00372
2	5.49780	5.49779	$3.05126 \cdot 10^{-6}$
3	8.63938	8.63938	$3.62616 \cdot 10^{-6}$
4	11.7810	11.7810	$4.96600 \cdot 10^{-12}$
5	14.9226	14.9226	$7.38037 \cdot 10^{-15}$

Таблица 2

Собственные значения μ

Table 2

Eigenvalues μ

Номер	Точное значение	Приближенное значение	Погрешность
1	3.92660	3.92699	0.00010
2	7.06858	7.06858	$1.02559 \cdot 10^{-7}$
3	10.2102	10.2102	$1.32593 \cdot 10^{-10}$
4	13.3518	13.3518	$1.89320 \cdot 10^{-13}$
5	16.4934	16.4934	$2.15403 \cdot 10^{-16}$

Приведенный расчет (таблицы 1 и 2) показывает, что для стандартной машинной точности достаточно уточнить только пять первых значений, а все остальные можно вычислить непосредственно по формулам (16).

Каждая последовательность собственных чисел ассоциирована с семейством собственных функций:

$$\begin{aligned} u_m(v) &= \cos(\lambda_m v) \cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m v), \\ v_m(v) &= \sin(\mu_m v) \cosh(\mu_m) - \cos(\mu_m) \sinh(\mu_m v). \end{aligned} \quad (17)$$

Такие последовательности функций удобны для теоретических построений, поскольку имеют компактный вид, однако для вычислений удобнее использовать нормализованные функции:

$$\tilde{u}_m(v) = \frac{u_m}{\sqrt{\cosh(\lambda_m)^2 + \cos(\lambda_m)^2}}, \quad \tilde{v}_m(v) = \frac{v_m}{\sqrt{\cosh(\mu_m)^2 - \cos(\mu_m)^2}}.$$

Очевидно, что каждая парная комбинация функций (17) представляет собой собственную функцию двумерного оператора \mathcal{L} . Таким образом, система собственных функций этого оператора состоит из четырех последовательностей:

$$\{\tilde{u}_i(\tilde{x}) \tilde{u}_j(\tilde{y}), \tilde{u}_i(\tilde{x}) \tilde{v}_j(\tilde{y}), \tilde{v}_i(\tilde{x}) \tilde{u}_j(\tilde{y}), \tilde{v}_i(\tilde{x}) \tilde{v}_j(\tilde{y})\}. \quad (18)$$

Хотя каждый член этих последовательностей имеет два индекса, предпочтительнее использовать одноиндексную систему нумерации. Такая система может быть порождена любой биекцией $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$. В случае если задача симметрична по двум координатам, т. е. необходимо учитывать одинаковое количество членов разложения по каждой из координат, то удобно использовать функцию Кантора для целых положительных чисел, которая была предложена им в статье [21]:

$$k = \frac{N(N-1)}{2} + i, \quad N = i + j - 1. \quad (19)$$

Это функция реализует отображение пары (i, j) в число k , нумеруя ячейки таблицы $i \times j$ по диагоналям. Наглядная схема нумерации приведена на рисунке 1, а.

В случае когда задача существенно асимметрична, удобнее использовать обобщение функции Кантора, в которой нумерация производится не по диагоналям, а по ступенькам. Например, для ширины ступеньки, равной 2, эта функция будет иметь вид

$$k = N(N - 1) + i, \quad N = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + j - 1, \quad (20)$$

где скобками $\lceil \dots \rceil$ обозначена операция округления до целого вверх. Диаграмма функции Кантора со ступенькой приведена на рисунке 1, *b*.

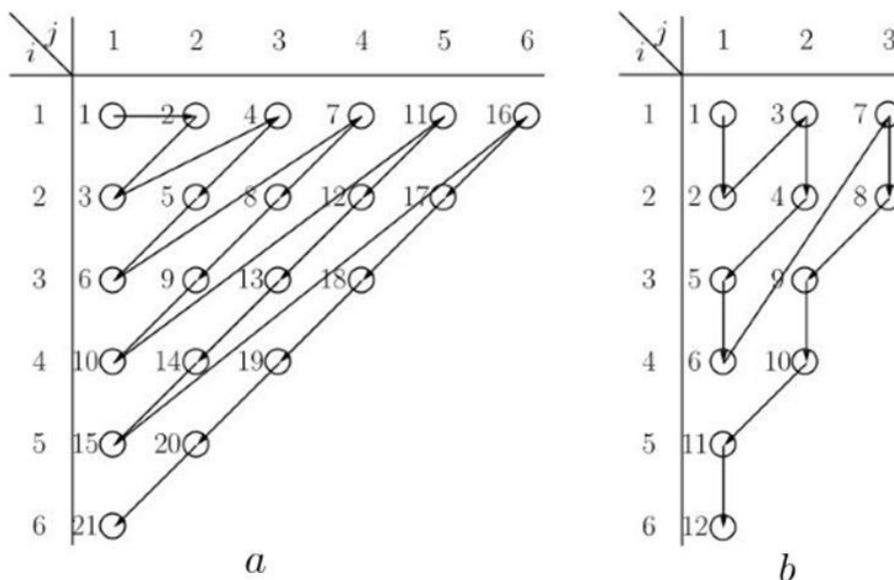


Рис. 1. Функция Кантора
 Fig. 1. Cantor function

Таким образом двухиндексная система базисных функций (18) может быть заменена одноиндексной:

$$\{\tilde{f}_{1k}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_{2k}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_{3k}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{f}_{4k}(\tilde{x}, \tilde{y})\}. \quad (21)$$

Возврат к исходной нумерации можно осуществить с помощью функций обратных к (19), (20). Для построения обратных функций необходимо связать текущий номер k с номером соответствующей диагонали (или ступеньки) N .

В случае функции (19) номер диагонали может быть найден по формуле

$$N = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - 1)}}{2} \right\rceil,$$

где скобки $\lceil \dots \rceil$ обозначают операцию взятия целой части. Отсюда легко получить обратную функцию

$$i = k - \frac{N(N - 1)}{2} =: S(k), \quad j = N + 1 - i =: C(k).$$

Здесь и далее S и C – краткие обозначения компонентов обратной функции.

Аналогичные соотношения можно получить и для функции (20):

$$N = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4(k - 1)}}{2} \right\rceil,$$

$$i = k - N(N - 1) =: S(k), \quad j = N + 1 - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil =: C(k).$$

Замечание. Мы используем одинаковые обозначения для обратных функций, чтобы подчеркнуть тот факт, что все дальнейшие выражения не зависят от выбора системы нумерации.

В силу условия (10) разложения всех функций, используемых в дальнейшем, по базису (21) будут содержать ненулевые коэффициенты только при четных по обеим координатам функциях \tilde{f}_{1k} . Поэтому далее для краткости мы будем опускать первый индекс и примем следующие обозначения:

$$f_k := f_{1k}, \quad \tilde{f}_k := \tilde{f}_{1k}. \quad (22)$$

2.2. Вспомогательная краевая задача

Главное преимущество базиса (21) заключается в том, что, раскладывая функции \tilde{w} и $\tilde{\phi}$ по нему, удастся автоматически выполнить краевые условия (13) и (14). Для того чтобы удовлетворить оставшимся краевым условиям (15) можно дополнить функцию напряжений решением вспомогательной краевой задачи:

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\phi} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = \psi_1(\tilde{x}), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = \psi_2(\tilde{y}), \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=1} = -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=-1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=1} = -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{x}=-1} = 0,$$

где ψ_1, ψ_2 – произвольные квадратично-интегрируемые функции. Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 + \tilde{\phi}^*, \quad (25)$$

в которой терм $\tilde{\phi}^*$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (24), но не удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению (23). Другое слагаемое $\tilde{\phi}_0$, удовлетворяет однородным краевым условиям и неоднородному бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\phi}_0 = -\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\phi}^*.$$

Учитывая условие четности (10), можно ограничить произвол в выборе функций ψ_1, ψ_2 и рассматривать только четные функции. В этом случае функция $\tilde{\phi}^*$ может быть представлена следующим образом:

$$\tilde{\phi}^* = \alpha_0 \frac{\tilde{x}^2}{4} + \beta_0 \frac{\tilde{y}^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} [\alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}) + \beta_k \cos(\pi k \tilde{y})]. \quad (26)$$

Такой вид функции позволяет автоматически удовлетворить краевым условиям для смешанных производных. Кроме того, подстановка этой функции в (24) приводит к выражениям, которые являются не чем иным, как разложением функций ψ_1, ψ_2 в ряды Фурье:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = \psi_1 = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = \psi_2 = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos(\pi k \tilde{y}),$$

что позволяет удовлетворить любым граничным условиям, вычислив соответствующие коэффициенты разложений.

Теперь необходимо определить функцию $\tilde{\phi}_0$ таким образом, чтобы полное решение (25) удовлетворяло однородному бигармоническому уравнению. Для этой цели можно представить функцию $\tilde{\phi}_0$ в виде разложения по базисным функциям \tilde{f}_k :

$$\tilde{\phi}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \tilde{f}_k.$$

Подстановка этого выражения и граничного решения (26) в бигармоническое уравнение приводит к следующему соотношению:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \nabla^2 \nabla^2 \tilde{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 [\alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}) + \beta_k \cos(\pi k \tilde{y})]. \quad (27)$$

Полученное дифференциальное уравнение можно преобразовать к бесконечномерной системе алгебраических уравнений относительно ζ_k, α_k и β_k с помощью оператора проецирования:

$$\mathcal{P}_q(F(\tilde{x}, \tilde{y})) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad q = 1, \dots, \infty. \tag{28}$$

Действие этого оператора на (27) приводит к следующей системе¹:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \left(\zeta_k \delta_{qk} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \frac{\partial^4 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha_k \cos(\pi k \tilde{x}) + \beta_k \cos(\pi k \tilde{y})] \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y}, \end{aligned}$$

в которой ζ_k — собственные числа оператора \mathcal{L} , соответствующие четным собственным функциям

$$\zeta_k = \lambda_{S(k)}^4 + \lambda_{C(k)}^4.$$

Полученную бесконечномерную систему можно свести к конечной с помощью метода редукции [22; 23]:

$$\zeta = \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}\beta), \tag{29}$$

где ζ, α, β — векторы соответствующих коэффициентов Фурье; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}$ — вспомогательные матрицы.

Матрица \mathbf{G} называется матрицей Галеркина, выражение для ее компонент можно компактно представить с помощью вспомогательного интеграла I_G^2 :

$$G_{qk} = \zeta_q \delta_{qk} + \frac{2\lambda_{S(k)}^2 \lambda_{C(k)}^2}{\|f_k\| \|f_q\|} I_G(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}) I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}), \tag{30}$$

где $\|f_k\|$ — нормы базисных функций:

$$\|f_k\| = \sqrt{\cosh^2(\lambda_{S(k)}) + \cos^2(\lambda_{S(k)})} \sqrt{\cosh^2(\lambda_{C(k)}) + \cos^2(\lambda_{C(k)})}.$$

Компоненты матриц \mathbf{A}, \mathbf{B} кратко выражаются через соответствующие вспомогательные интегралы $I_0(\dots), I_4(\dots), I_5(\dots)$:

$$\begin{aligned} A_{qk} &= \frac{\pi^2 k^2}{\|f_q\|} \left[I_4(\lambda_{S(q)}, k) - I_5(\lambda_{S(q)}, k) \right] I_0(\lambda_{C(q)}), \\ B_{qk} &= \frac{\pi^2 k^2}{\|f_q\|} \left[I_4(\lambda_{C(q)}, k) - I_5(\lambda_{C(q)}, k) \right] I_0(\lambda_{S(q)}). \end{aligned}$$

Таким образом, решение (25) полностью определено. Далее для сокращения письма мы будем использовать следующие обозначения:

$$\tilde{\phi}_{\alpha k}^* := -\frac{1}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k \tilde{x}), \quad \tilde{\phi}_{\beta k}^* := -\frac{1}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k \tilde{y}).$$

В них решение (26) принимает вид

$$\tilde{\phi}^* = \alpha_0 \frac{\tilde{x}^2}{4} + \beta_0 \frac{\tilde{y}^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \tilde{\phi}_{\alpha k}^* + \beta_k \tilde{\phi}_{\beta k}^*).$$

¹ Здесь δ_{qk} — дельта Кронекера.

² Вспомогательные интегралы приведены в Приложении.

2.3. Переход к системе кубических уравнений

После построения вспомогательного решения вернемся к краевой задаче (12)–(15). Будем искать решение \tilde{w} , $\tilde{\phi}$ в виде разложений по базисным функциям (22):

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \tilde{f}_k, \quad \tilde{\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} (s_k + \zeta_k) \tilde{f}_k + \tilde{\phi}^*. \quad (31)$$

Для этого необходимо подставить разложения в уравнения (12):

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \nabla^2 \nabla^2 \tilde{f}_k - \frac{\alpha_0}{2} \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\beta_0}{2} \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2} - \sum_{r=1}^{\infty} \left[(s_r + \zeta_r) L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) + \alpha_r L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\alpha r}^*) + \beta_r L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\beta r}^*) \right] \right\} = \tilde{p}, \quad (32)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_k \nabla^2 \nabla^2 \tilde{f}_k + \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) \right\} = 0, \quad (33)$$

и граничные условия (13)–(15). Так как искомые функции четные по обеим координатам, то для выполнения четырех условий (15) достаточно, чтобы выполнялись следующие два:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} (s_k \tilde{f}_k + \zeta_k \tilde{f}_k + \beta_k \tilde{\phi}_{\beta k}^*) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{x}} \right] d\tilde{x} \right\} + \frac{\beta_0}{2} - \nu \frac{\alpha_0}{2} = 0, \quad (34)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (s_k \tilde{f}_k + \zeta_k \tilde{f}_k + \alpha_k \tilde{\phi}_{\alpha k}^*) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{y}} \right] d\tilde{y} \right\} + \frac{\alpha_0}{2} - \nu \frac{\beta_0}{2} = 0 \quad (35)$$

Остальные граничные условия (13), (14) выполняются автоматически благодаря соответствующему выбору базисных функций.

На соотношения (32)–(35) можно подействовать операторами проецирования и свести их к бесконечномерной системе алгебраических уравнений. Именно для уравнений (32), (33) можно использовать оператор (28):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \zeta_k \delta_{qk} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \frac{\partial^4 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} - \frac{\alpha_0}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} - \frac{\beta_0}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} - \right. \\ & - \sum_{r=1}^{\infty} \left[(s_r + \zeta_r) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} + \alpha_r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\alpha r}^*) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} + \right. \\ & \left. \left. + \beta_r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{\phi}_{\beta r}^*) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right] \right\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y}, \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_k \left[\zeta_k \delta_{qk} + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2 \frac{\partial^4 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right] + \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L(\tilde{f}_k, \tilde{f}_r) \tilde{f}_q d\tilde{x} d\tilde{y} \right\} = 0. \end{aligned}$$

На краевые условия (34), (35) следует подействовать одномерным проектором. Поскольку вспомогательная часть функции Эри представлена через косинусы, удобно использовать проекторы с ядром косинусов:

$$\mathcal{F}_0(F(v)) = \int_{-1}^1 F dv, \quad \mathcal{F}_q^c(F(v)) = \int_{-1}^1 F \cos(\pi qv) dv, \quad q = 1 \dots \infty.$$

Действие этих операторов на краевые условия приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 & -\kappa \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^1 g_k g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{x}} d\tilde{x} d\tilde{y} + \beta_0 - \nu \alpha_0 = 0, \\
 & -\kappa \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^1 g_k g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} d\tilde{x} + \alpha_0 - \nu \beta_0 = 0, \\
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[(s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}^2} \cos(\pi q \tilde{y}) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{x}} \cos(\pi q \tilde{y}) \right] d\tilde{x} d\tilde{y} + \beta_k \delta_{qk} \right\} = 0, \\
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[(s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 \tilde{f}_k}{\partial \tilde{x}^2} \cos(\pi q \tilde{x}) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{f}_r}{\partial \tilde{y}} \cos(\pi q \tilde{x}) \right] d\tilde{y} d\tilde{x} + \alpha_k \delta_{qk} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Для решения полученной системы необходимо свести ее к конечной системе. Применение метода редукции к бесконечной системе линейных уравнений подтверждается хорошо развитой теорией, восходящей к ранним работам Кояловича [22; 23]. Однако в настоящее время нет строгих оснований для ее применения к нелинейным системам. Несмотря на это, метод редукции широко используется [11; 14; 24] и дает результаты хорошо согласующиеся с практикой.

Таким образом, применяя метод редукции, можно преобразовать полученные уравнения к следующей системе:

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{G} - \frac{\alpha_0}{2} \mathbf{M}^{\alpha_0} - \frac{\beta_0}{2} \mathbf{M}^{\beta_0} - \mathbf{M}(s + \zeta) - \mathbf{M}^{\alpha} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{M}^{\beta} \boldsymbol{\beta} \right] \mathbf{g} = \mathbf{b}, \\
 & \mathbf{G} \mathbf{s} + \kappa (\mathbf{M} \mathbf{g}) \mathbf{g} = \mathbf{0}, \\
 & -\kappa (\mathbf{U}^{w0} \mathbf{g}) \mathbf{g} + \beta_0 - \nu \alpha_0 = 0, \quad \mathbf{U}(s + \zeta) + \mathbf{E} \boldsymbol{\beta} - \kappa (\mathbf{U}^w \mathbf{g}) \mathbf{g} = \mathbf{0}, \\
 & -\kappa (\mathbf{V}^{w0} \mathbf{g}) \mathbf{g} + \alpha_0 - \nu \beta_0 = 0, \quad \mathbf{V}(s + \zeta) + \mathbf{E} \boldsymbol{\alpha} - \kappa (\mathbf{V}^w \mathbf{g}) \mathbf{g} = \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{36}$$

где $\mathbf{M}^{\alpha_0}, \mathbf{M}^{\beta_0}, \mathbf{U}^{w0}, \mathbf{V}^{w0}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ – матрицы $n \times n$, а $\mathbf{M}^{\alpha}, \mathbf{M}^{\beta}, \mathbf{U}^w, \mathbf{V}^w, \mathbf{M}$ – кубические матрицы $n \times n \times n$. В таблице 3 представлены выражения для компонент некоторых матриц, записанные через вспомогательные интегралы. Компоненты матриц $\mathbf{M}^{\beta_0}, \mathbf{V}^{w0}, \mathbf{V}, \mathbf{M}^{\beta}, \mathbf{V}^w$ могут быть получены из выражений для компонент $\mathbf{M}^{\alpha_0}, \mathbf{U}^{w0}, \mathbf{U}, \mathbf{M}^{\alpha}, \mathbf{U}^w$ путем замены собственных чисел $\lambda_{S(\cdot)}$ на $\lambda_{C(\cdot)}$ соответственно и наоборот.

Из трех уравнений системы (36) можно сразу выразить вектор \mathbf{s} и константы α_0, β_0 :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{s} = -\kappa (\mathbf{G}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{g}) \mathbf{g}, \\
 & \alpha_0 = \frac{\kappa}{1 - \nu^2} [(\nu \mathbf{U}^{w0} + \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g}, \quad \beta_0 = \frac{\kappa}{1 - \nu^2} [(\mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g}.
 \end{aligned}$$

Используя соотношение (29), из оставшихся уравнений можно выразить векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}
 & \boldsymbol{\alpha} = \kappa (\mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{g}) \mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\beta} = \kappa (\mathbf{R}_{\beta} \mathbf{g}) \mathbf{g} \\
 & \mathbf{R}_{\alpha} = \left[\mathbf{U} \mathbf{V}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{G} \mathbf{V}^{-1}) \right]^{-1} \left[\mathbf{B}^{-1} \mathbf{M} + (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{U}) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^w - \mathbf{U}^w \right], \\
 & \mathbf{R}_{\beta} = \left[\mathbf{V} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} + \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1}) \right]^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1} \mathbf{M} + (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{V}) \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^w - \mathbf{V}^w \right].
 \end{aligned}$$

Наконец, подставляя полученные выражения в первое уравнение (36), можно получить систему кубических уравнений относительно \mathbf{g} :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{G} \mathbf{g} - \kappa (\mathbf{S} \mathbf{g}) \mathbf{g} + \\
 & + \frac{1}{2(1 - \nu^2)} \left\{ [(\nu \mathbf{U}^{w0} + \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g} \mathbf{M}^{\alpha_0} + [(\mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}) \mathbf{g}] \mathbf{g} \mathbf{M}^{\beta_0} \right\} = \mathbf{b},
 \end{aligned}$$

Таблица 3

Компоненты вспомогательных матриц

Table 3

Components of auxiliary matrices

Матрицы	Выражение для компонент
Матрица $\mathbf{M}^{\alpha 0}$	$M_{qk}^{\alpha 0} = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\ f_k\ \ f_q\ } \left(\cos^2(\lambda_{S(k)}) + \cosh^2(\lambda_{S(k)}) \right) \delta_{S(q)S(k)}$
Матрица \mathbf{U}^{w0}	$U_{qk}^{w0} = \frac{\lambda_{S(k)} \lambda_{S(q)} I_U(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)})}{2\ f_k\ \ f_q\ } \left(\cos^2(\lambda_{C(k)}) + \cosh^2(\lambda_{C(k)}) \right) \delta_{C(q)C(k)}$
Матрица \mathbf{U}	$U_{qk} = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 \left(I_4(\lambda_{C(k)}, q) + I_5(\lambda_{C(k)}, q) \right) I_0(\lambda_{S(k)})}{2\ f_k\ }$
Кубическая матрица \mathbf{M}	$M_{qkr} = \frac{I_M(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)}, \lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)})}{\ f_k\ \ f_r\ \ f_q\ }$
Кубическая матрица \mathbf{M}^α	$M_{qkr}^\alpha = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 I_{M3}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \pi r) I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\ f_k\ \ f_q\ \cosh(\pi r)}$
Кубическая матрица \mathbf{U}^w	$U_{qkr}^w = \frac{\lambda_{S(k)} \lambda_{S(r)} I_{M3}(\lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)}, \pi q) I_U(\lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)})}{2\ f_k\ \ f_r\ \cosh(\pi q)}$

где \mathbf{S} — матрица четвертого порядка:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{M}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{M} + \left[\left(\mathbf{M}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{M}^\alpha \right) \mathbf{R}_\alpha + \left(\mathbf{M}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{M}^\beta \right) \mathbf{R}_\beta \right].$$

В случае если функция нагрузки \tilde{p} удовлетворяет более сильному, чем (10), условию:

$$\{w, \phi, p\} \subset \mathcal{F}_s = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f(x, y) = f(-x, y), f(x, y) = f(y, x)\},$$

полученная система (36) может быть существенно упрощена:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{G} - \frac{\alpha_0}{2} \left(\mathbf{M}^{\alpha 0} + \mathbf{M}^{\beta 0} \right) - \mathbf{M}(\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) - \left(\mathbf{M}^\alpha + \mathbf{M}^\beta \right) \boldsymbol{\alpha} \right] \mathbf{g} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{G}\mathbf{s} + \kappa(\mathbf{M}\mathbf{g}) &= \mathbf{0}, \\ -\kappa(\mathbf{U}^{w0}\mathbf{g}) + \alpha_0(1 - \nu) &= 0, \quad \mathbf{U}(\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} - \kappa(\mathbf{U}^w\mathbf{g}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

причем выражение для вспомогательного вектора $\boldsymbol{\zeta}$ также упрощается:

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\alpha}.$$

3. Модельные расчеты

Для иллюстрации полученного решения были проведены модельные расчеты для трех случаев (коэффициент Пуассона принят равным 0.3):

$$\tilde{p} = 25, \quad \tilde{p} = 25(1 - \tilde{x}^2)^2(1 - \tilde{y}^2)^2, \quad \tilde{p} = 25(1 - \tilde{y}^2)^2.$$

Цель этих вычислений — показать, как скорость сходимости последовательности частичных сумм \tilde{w}_n зависит от гладкости функции нагрузки и ее принадлежности к области дифференциального оператора.

Результаты первых двух расчетов представлены на рисунках 2 и 3. На подрисунках (а) показаны формы деформированной поверхности пластины. На подрисунках (b) представлены функции напряжений Эри. Подрисунки (c) показывают трансверсальные перемещения края пластины, полученные из частичных сумм. На последних подрисунках (d) приведены зависимости интегральной оценки невязки первого уравнения (12) от числа слагаемых, входящих в частичные суммы $\tilde{w}_n, \tilde{\phi}_n$:

$$\epsilon_n = \left| 1 - \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla^2 \nabla^2 \tilde{w}_n - L(\tilde{w}_n, \tilde{\phi}_n) d\tilde{x} d\tilde{y}}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p} d\tilde{x} d\tilde{y}} \right|.$$

На этих подрисунках оранжевые точки соответствуют суммам, которые симметричны по обоим индексам, т. е. вместе с любым термом $g_k \tilde{f}_k = g_k \tilde{u}_i(\tilde{x}) \tilde{u}_j(\tilde{y})$ они содержат симметричный терм $g_q \tilde{u}_j(\tilde{x}) \tilde{u}_i(\tilde{y})$.

Как и ожидалось, в случае гладкой функции нагрузки скорость сходимости резко увеличивается. Поэтому в случае когда $\tilde{p} = 25(1 - \tilde{y}^2)^2$ целесообразно учитывать больше членов разложения по координате \tilde{x} . Для этого можно воспользоваться нумерацией со ступенькой (20). Результаты расчета приведены на рисунке 4.

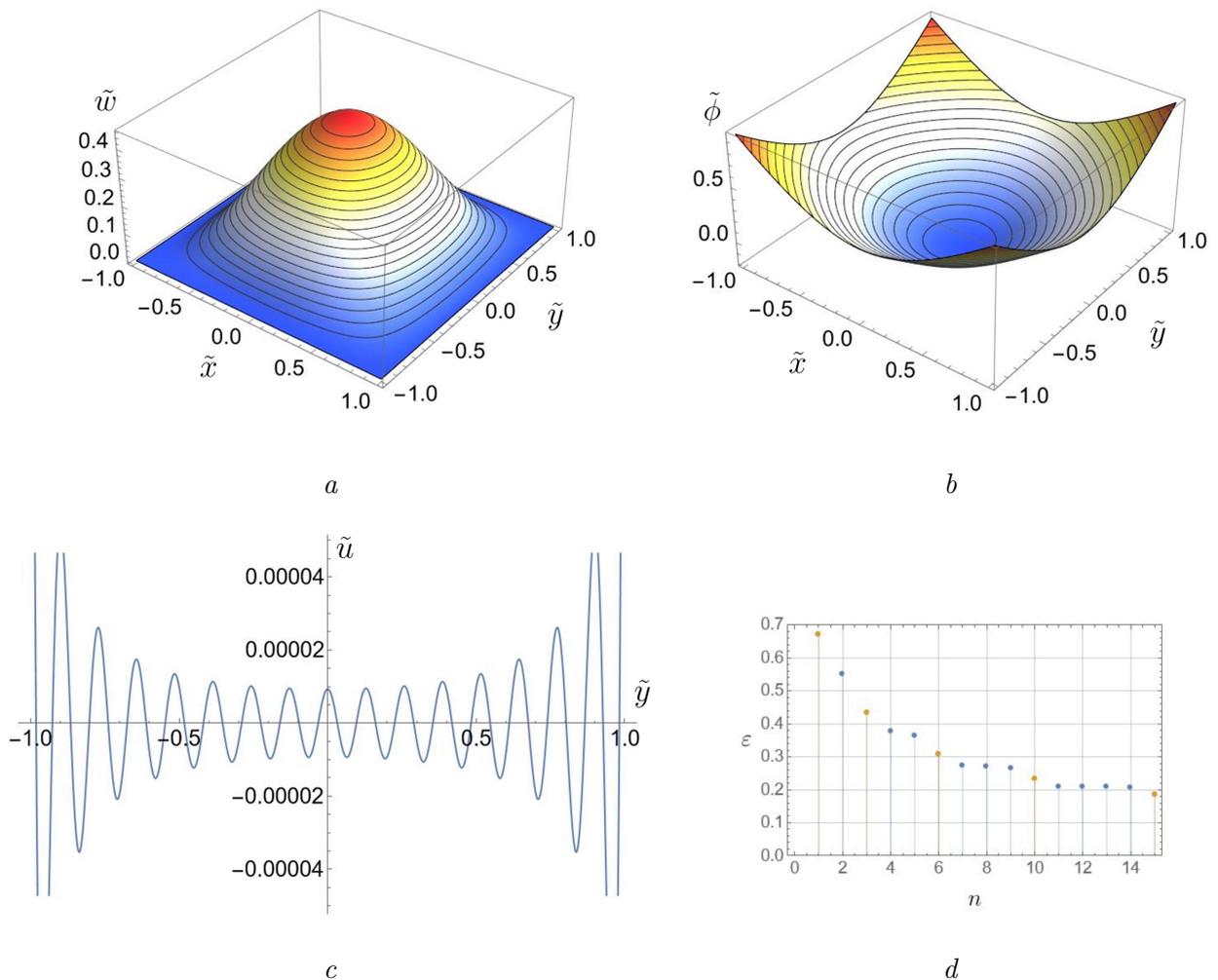


Рис. 2. Результаты расчетов для случая равномерной нагрузки
 Fig. 2. Computational results. Uniform load case

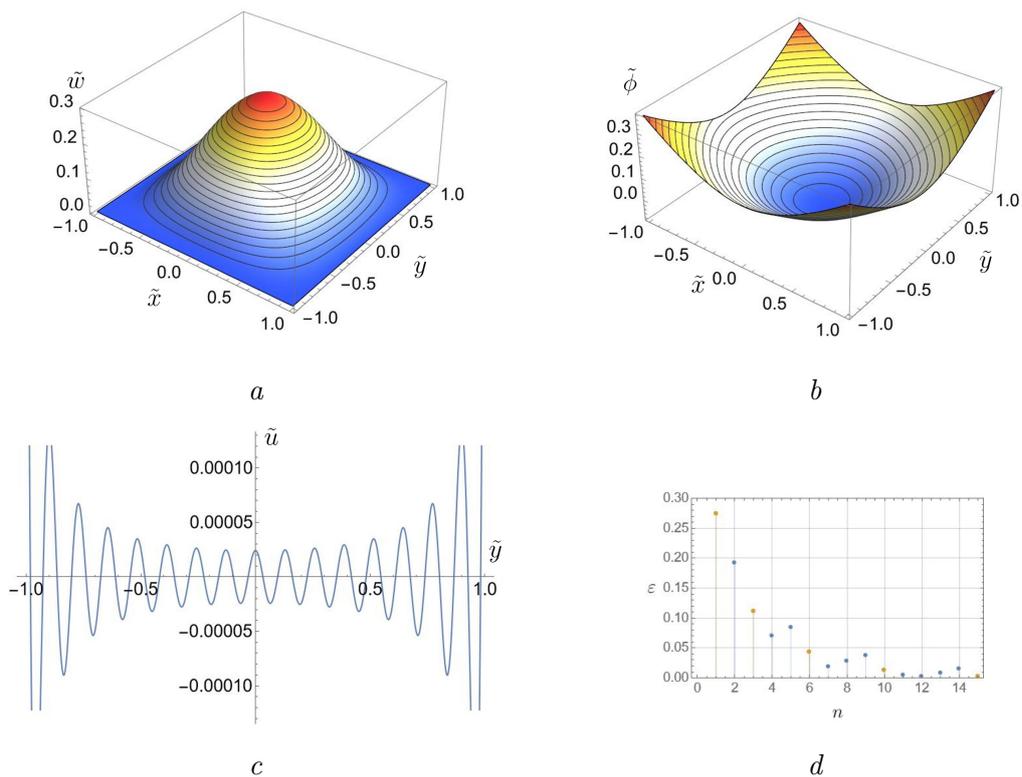


Рис. 3. Результаты расчетов для случая полиномиальной нагрузки
 Fig. 3. Computational results. Polynomial load case

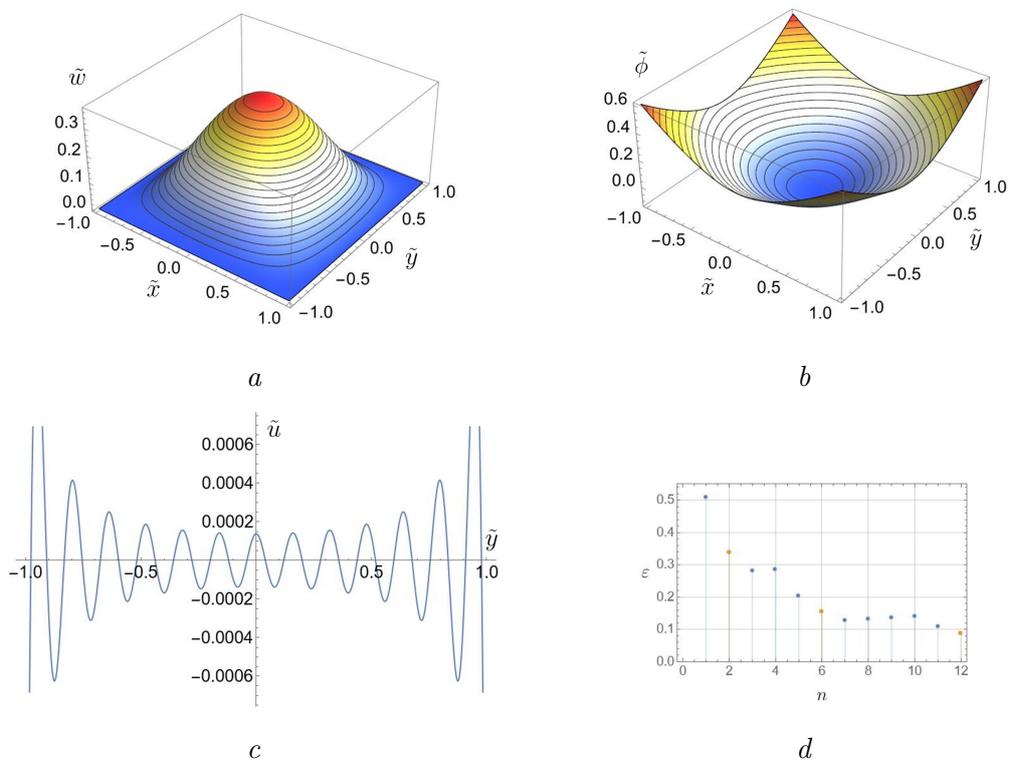


Рис. 4. Результаты расчетов для случая несимметричной нагрузки
 Fig. 4. Computational results. Nonsymmetry load case

Заключение

Резюмируем результаты статьи:

1. Развита метод построения решения уравнений Фешля – фон Кармана на основе метода Галеркина. В явном виде осуществлена алгебраизация краевой задачи для случая нагрузки, несимметричной относительно диагоналей пластины.
2. Представлены оценки сходимости полученного решения для трех вариантов функции поперечной нагрузки. Показано, что использование функции Кантора со ступенькой для нумерации слагаемых частичных сумм позволяет добиться удовлетворительной скорости сходимости для случая несимметричной нагрузки.

Финансирование. Работа была выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00866).

Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Дигилов А.В., Лычев С.А. Решение уравнений Фешля – фон Кармана для квадратных пластин // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 26–45. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-26-45.

© Дигилов А.В., Лычев С.А., 2024

Александр Вячеславович Дигилов (digilov@ipmnet.ru) – младший научный сотрудник лаборатории «Моделирование в механике деформируемого твердого тела», Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Сергей Александрович Лычев (lychevsa@mail.ru) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механика технологических процессов, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Литература

- [1] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1907. 497 p. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenbert26fpgooq/mode/2up>.
- [2] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1910.
- [3] Lychev S., Digilov A., Djuzhev N. Galerkin-Type Solution of the Föppl – von Kármán Equations for Square Plates // Symmetry. 2025. Vol. 17, issue 1. P. 32. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/sym17010032>.
- [4] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Либроком, 2009. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m60p0jwao912220652>.
- [5] Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва: Гостехиздат, 1956. 422 с. URL: <https://djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m60pax8mr9205429504>.
- [6] Саченков А.В., Нехотяев В.В. Большие прогибы тонких упругих пластин // Исследования по теории пластин и оболочек. 1972. № 8. С. 42–76. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo437>.
- [7] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 2016. Vol. 59. Article number 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [8] Кхоа Д.Н. Расчет гибких прямоугольных пластин по методу последовательных аппроксимаций: дис. ... канд. техн. наук. Москва: Московский государственный строительный университет, 2023. 150 с. URL: https://mgso.ru/science/Dissoveti/Zashita_dissert/dao-ngokkkhoa/Dissertatsiya_DaoNK.pdf.

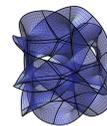
- [9] Panov D.Iu. Application of Acad. B.G. Galerkin’s method to certain nonlinear problems of the theory of elasticity // *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1939. Vol. 3, issue 2.
- [10] Yamaki N. Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Elastic Plates // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1961. Vol. 41, issue 12. P. 501–510. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19610411204>.
- [11] Sundara Raja Iyengar K.T., Matin Naqvi M. Large deflection of rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1966. Vol. 1, issue 2. P. 109–122. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(66\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(66)90024-2).
- [12] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Analysis of Elastic Large Deflections of Plates under Combined Loads: A Scalar Homotopy Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations // *Computers, Materials and Continua*. 2011. Vol. 23, № 1. P. 69–100. DOI: <https://doi.org/10.3970/cmc.2011.023.069>.
- [13] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Solution of von Karman Nonlinear Plate Equations: An Optimal & Faster Iterative Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations $f(x) = 0$, using $x = \lambda[\alpha F + (1 - \alpha)bt f]$ // *Computers, Materials and Continua*. 2011. Vol. 23, № 2. P. 155–186. DOI: <http://dx.doi.org/10.3970/cmc.2011.023.155>.
- [14] Dai H., Yue X., Atluri S.N. Solutions of the von Kármán plate equations by a Galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2014. Vol. 9, no. 2. P. 195–226. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2014.9.195>.
- [15] Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection // *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2015. Vol. 28, issue 1. P. 83–90. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(15\)60018-0](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(15)60018-0).
- [16] Zhang L., Wang J., Zhou Y.H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates // *Archive of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 85. P. 355–365. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0960-9>.
- [17] Lurie A.I. Theory of elasticity. Berlin; Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2010. 1050 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>.
- [18] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity, vol. 1: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Elsevier, 1988. 452 p.
- [19] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity: Theory of Plates. Elsevier, 1997.
- [20] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory real analysis. New York: Courier Corporation, 1975. 403 p. URL: <https://archive.org/details/IntroductoryRealAnalysis>.
- [21] Cantor G. Ein beitrage zur mannigfaltigkeitslehre // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1878. Vol. 1878, issue 84. P. 242–258. DOI: <https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413>.
- [22] Koyalovich B.M. A study of infinite systems of linear algebraic equations // *Izv. Fiz.-Mat. Inst.* 1930. Vol. 3. P. 41–167.
- [23] Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate methods of higher analysis. New York: Dover Publications, 2018.
- [24] Levy S. Bending of Rectangular Plates with Large Deflections // *NACA Technical Notes*. 1942. 19 p. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc59995>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-26-45

Solution of the Föppl–von Kármán equations for square plates

Digilov A.V. , Lychev S.A. 

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation;
digilov@ipmnet.ru (A.V.); lychevsa@mail.ru (S.A.);



Received: 10.10.2024

Revised: 20.11.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The present paper develops an approach to obtaining solutions of the Föppl–von Kármán equations for square plates, which are based on direct algebraisation of the boundary-value problem. The solution is obtained in term of expansion into basis of the space of square-integrable function. The system of eigenfunction of a linear self-adjointed operator is used as the basis. The expansion coefficients are defined by the reduction method from an infinite-dimensional system of cubic equations. It allows one to consider the proposed solution as non-linear generalisation of classic Galerkin method.

Key words: square plates; Föppl–von Kármán equations; Finite deformations; nonlinear equations.

Funding. The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 23-19-00866).

Information about the conflict of interests: the authors declared no conflict of interest.

Citation. Digilov A.V., Lychev S.A. Solution of the Föppl–von Kármán equations for square plates. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 26–45. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-26-45. (In Russ.)

© Digilov A.V., Lychev S.A., 2024

Alexander V. Digilov (digilov@ipmnet.ru) – Junior researcher of Laboratory of Modelling in Solid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

Sergey A. Lychev (lychevsa@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

References

- [1] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1907, 497 p. Available at: <https://archive.org/details/vorlesungenbert26fpgooq/mode/2up>.
- [2] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1910.
- [3] Lychev S., Digilov A., Djuzhev N. Galerkin-Type Solution of the Föppl – von Kármán Equations for Square Plates. *Symmetry*, 2025, vol. 17, issue 1, p. 32. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/sym17010032>.
- [4] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1959, 656 p. Available at: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=m60p0jwao912220652>. (In Russ.)
- [5] Volmir A.S. Flexible plates and shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 422 p. Available at: <https://djvu.online/file/UDisSs9cFCGHW?ysclid=m60pax8mr9205429504>. (In Russ.)
- [6] Nekhotyaev V.V., Sachenkov A.V. Large deflections of thin elastic plates. *Issledovaniya po Teorii Plastin i Obolochek*, 1972, no. 8, pp. 42–76. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo437>. (In Russ.)
- [7] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2016, vol. 59, Article number 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [8] Khoa D.N. Calculation of flexible rectangular plates using the method of successive approximation: Candidate's of Engineering Sciences thesis. Moscow: Moskovskii gosudarstvennyi stroitel'nyi universitet, 2023, 150 p. Available at: https://mgsu.ru/science/Dissoveti/Zashita_dissert/dao-ngokkhoa/Dissertatsiya_DaoNK.pdf. (In Russ.)
- [9] Panov D.Iu. Application of Acad. B.G. Galerkin's method to certain nonlinear problems of the theory of elasticity. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1939, vol. 3, issue 2.

- [10] Yamaki N. Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Elastic Plates. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1961, vol. 41, issue 12, pp. 501–510. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19610411204>.
- [11] Sundara Raja Iyengar K.T., Matin Naqvi M. Large deflection of rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1966, vol. 1, issue 2, pp. 109–122. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(66\)90024-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(66)90024-2).
- [12] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Analysis of Elastic Large Deflections of Plates under Combined Loads: A Scalar Homotopy Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations. *Computers, Materials and Continua*, 2011, vol. 23, no. 1, pp. 69–100. DOI: <https://doi.org/10.3970/cmc.2011.023.069>.
- [13] Dai H.H., Paik J.K., Atluri S.N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Solution of von Karman Nonlinear Plate Equations: An Optimal & Faster Iterative Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations $f(x) = 0$, using $x = \lambda[\alpha F + (1 - \alpha)bt f]$. *Computers, Materials and Continua*, 2011, vol. 23, no. 2, pp. 155–186. DOI: <http://dx.doi.org/10.3970/cmc.2011.023.155>.
- [14] Dai H., Yue X., Atluri S.N. Solutions of the von Kármán plate equations by a Galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 195–226. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2014.9.195>.
- [15] Wang X., Liu X., Wang J., Zhou Y. A wavelet method for bending of circular plate with large deflection. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, vol. 28, issue 1, pp. 83–90. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(15\)60018-0](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(15)60018-0).
- [16] Zhang L., Wang J., Zhou Y.H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, vol. 85, pp. 355–365. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0960-9>.
- [17] Lurie A.I. Theory of elasticity. Berlin; Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2010, 1050 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2>.
- [18] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity: Three-dimensional elasticity. Elsevier, 1988.
- [19] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity, vol. 1: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Elsevier, 1988, 452 p.
- [20] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory real analysis. New York: Courier Corporation, 1975, 403 p. URL: <https://archive.org/details/IntroductoryRealAnalysis>.
- [21] Cantor G. Ein beitrage zur mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1878, vol. 1878, issue 84, pp. 242–258. DOI: <https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413>.
- [22] Koyalovich B.M. A study of infinite systems of linear algebraic equations. *Izv. Fiz.-Mat. Inst.*, 1930, vol. 3, pp. 41–167.
- [23] Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate methods of higher analysis. New York: Dover Publications, 2018.
- [24] Levy S. Bending of Rectangular Plates with Large Deflections // NACA Technical Notes, 1942. 19 p. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc59995>.

Приложение

Ниже приведены выражения для вспомогательных интегралов, используемых в статье (здесь k – целое число, а ρ, ν, ζ – корни трансцендентного уравнения $\tan(\cdot) + \tanh(\cdot) = 0$):

$$I_0(\rho) = \int_{-1}^1 (\cos(\rho v) \cosh(\rho) - \cos(\rho) \cosh(\rho v)) dv = \frac{4 \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho}$$

$$I_1(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cos(\nu) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) dv =$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sin(\rho) \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) \cos(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cos^2(\rho) - \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_2(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\nu v) dv =$$

$$= \frac{2 \cos(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sinh(\rho) \cos(\nu) + \nu \sin(\nu) \cosh(\rho))}{\nu^2 + \rho^2}$$

$$I_3(\rho, \nu) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\nu v) dv =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sin(\rho) \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) \cos(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cosh^2(\rho) + \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_4(\rho, k) = \cosh(\rho) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\pi k v) dv = \frac{2(-1)^k \rho \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho^2 - \pi^2 k^2}$$

$$I_5(\rho, k) = \cos(\rho) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\pi k v) dv = -\frac{2(-1)^k \rho \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho^2 + \pi^2 k^2}$$

$$I_6(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cos(\nu) \int_{-1}^1 \sinh(\rho v) \sinh(\nu v) dv =$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) - \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ -\frac{\rho \cos^2(\rho) + \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_7(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \sinh(\rho v) \sin(\nu v) dv =$$

$$= \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) + \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 + \rho^2}$$

$$I_8(\rho, \nu) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \sin(\rho v) \sin(\nu v) dv =$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) - \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cosh^2(\rho) - \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 I_9(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\nu v) \cos(\xi v) dv = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\quad \times \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{10}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\nu v) \cos(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2) (\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
 &\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) + \rho \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \right. \\
 &\quad \left. - \nu \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) - \xi \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) \cos(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 - \nu^2)^2 + \xi^2 (2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times \\
 &\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) + \rho \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (-\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \xi \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) \cosh(\xi v) dv = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sinh(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\quad \times \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{13}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \sin(\nu v) \sin(\xi v) dv = \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} - \frac{\sin(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\quad \times \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{14}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \sin(\nu v) \sin(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2) (\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
 &\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) + \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) + \xi \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{15}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \sinh(\nu v) \sin(\xi v) dv = \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + \nu^2)^2 + \xi^2 (-2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[2\rho\nu\zeta \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) + \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 - \zeta^2) - \right. \\ \left. - \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) - \zeta \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\zeta) (-\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) \right]$$

$$I_{16}(\rho, \nu, \zeta) = \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\zeta) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sin(\zeta\nu) d\nu = \\ = -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\zeta)}{(\rho^2 - \nu^2)^2 + \zeta^2 (2\rho^2 + 2\nu^2 + \zeta^2)} \times \\ \times \left[2\rho\nu\zeta \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) - \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 - \nu^2 + \zeta^2) - \right. \\ \left. - \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\zeta) (-\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) - \zeta \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) \right]$$

$$I_{17}(\rho, \nu, \zeta) = \cosh(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) \int_{-1}^1 \cos(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sinh(\zeta\nu) d\nu = \\ = -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\zeta)}{(\rho^2 + (\nu - \zeta)^2) (\rho^2 + (\nu + \zeta)^2)} \times \\ \times \left[2\rho\nu\zeta \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) - \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 + \zeta^2) + \right. \\ \left. + \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\zeta) (\rho^2 + \nu^2 - \zeta^2) + \zeta \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\zeta) (\rho^2 - \nu^2 + \zeta^2) \right]$$

$$I_{18}(\rho, \nu, \zeta) = \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sinh(\zeta\nu) d\nu = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\rho - \nu - \zeta)}{\rho - \nu - \zeta} - \frac{\sinh(\rho + \nu - \zeta)}{\rho + \nu - \zeta} - \frac{\sinh(\rho - \nu + \zeta)}{\rho - \nu + \zeta} + \frac{\sinh(\rho + \nu + \zeta)}{\rho + \nu + \zeta} \right] \times \\ \times \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\zeta)$$

$$I_G(\rho, \nu) = I_3(\rho, \nu) - I_2(\rho, \nu) + I_2(\nu, \rho) - I_1(\rho, \nu)$$

$$I_U(\rho, \nu) = I_6(\rho, \nu) + I_7(\rho, \nu) + I_7(\nu, \rho) + I_8(\rho, \nu)$$

$$I_{M1}(\rho, \nu, \zeta) = I_9(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\rho, \nu, \zeta) + I_{10}(\nu, \rho, \zeta) - I_{10}(\zeta, \rho, \nu) - \\ - I_{11}(\rho, \nu, \zeta) + I_{11}(\rho, \zeta, \nu) - I_{11}(\nu, \zeta, \rho) + I_{12}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M2}(\rho, \nu, \zeta) = -I_{13}(\rho, \nu, \zeta) + I_{14}(\rho, \nu, \zeta) - I_{15}(\rho, \nu, \zeta) - I_{15}(\rho, \zeta, \nu) + \\ + I_{16}(\rho, \nu, \zeta) + I_{16}(\rho, \zeta, \nu) - I_{17}(\rho, \nu, \zeta) + I_{18}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M3}(\rho, \nu, \zeta) = I_9(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\nu, \rho, \zeta) + I_{11}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M4}(\rho, \nu, \zeta) = I_9(\rho, \nu, \zeta) - I_{10}(\rho, \nu, \zeta) + I_{10}(\nu, \rho, \zeta) - I_{11}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_{M5}(\rho, \nu, \zeta) = I_{13}(\rho, \nu, \zeta) - I_{14}(\rho, \nu, \zeta) + I_{15}(\rho, \nu, \zeta) - I_{16}(\rho, \nu, \zeta)$$

$$I_M(\rho_1, \nu_1, \zeta_1, \rho_2, \nu_2, \zeta_2) = \nu_1^2 \nu_2^2 I_{M1}(\rho_1, \nu_1, \zeta_1) I_{M1}(\rho_2, \nu_2, \zeta_2) - \\ - 2\nu_1 \nu_2 \zeta_1 \zeta_2 I_{M2}(\rho_1, \nu_1, \zeta_1) I_{M2}(\rho_2, \nu_2, \zeta_2) + \\ + \zeta_1^2 \zeta_2^2 I_{M1}(\rho_1, \zeta_1, \nu_1) I_{M1}(\rho_2, \zeta_2, \nu_2)$$