

Многопараметрические представления поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига

Бажарева Ю.Н. 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; bakhareva.yun@ssau.ru;

Поступила: 17.10.2024

Рассмотрена: 23.11.2024

Принята: 25.11.2024

Научная статья



Аннотация. Статья посвящена изучению поля напряжений у вершины трещины продольного сдвига на основе многопараметрического асимптотического представления поля напряжений у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Выполненный асимптотический анализ полей у вершины трещины продольного сдвига является естественным продолжением исследований, проведенных для многопараметрических полей напряжений у вершин трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, а также смешанного нагружения. Несмотря на простоту анализа вклада высших приближений в общее представление поля напряжений у вершины трещины типа III, многокоэффициентные представления поля напряжений вблизи данного типа трещин освещены ранее не были. Показано, что приближения высших порядков должны обязательно учитываться для аккуратного представления поля напряжений и расширения области действия асимптотических разложений. Установлено, что чем больше расстояние от вершины трещины, тем больше слагаемых ряда необходимо сохранять вблизи кончика трещины.

Ключевые слова: трещина продольного (антиплоского сдвига); многопараметрические разложения; линейно-упругий материал; асимптотическое разложение; точное решение; высшие приближения.

Введение. Об асимптотическом представлении полей напряжений у вершины трещины

Уильямс [1] аналитически продемонстрировал существование особенностей в полях напряжений вокруг вершин трещин и углов из нескольких материалов, которые могут быть смоделированы как геометрические и/или материальные неоднородности клиньев из композитного материала. Асимптотическое решение поля напряжений в особой точке получается из основных дифференциальных уравнений упругости в частных производных с использованием метода разделения переменных (разложения по собственным функциям). Решение обычно записывается в виде ряда степенных функций в радиальной координате, исходящей из особой точки. Собственные значения, полученные в результате процедуры решения, определяют показатели степени. Собственные функции описывают угловое изменение напряжений. Собственные значения и функции асимптотического решения для композитного клина зависят от его геометрии и свойств материала. Получены многочисленные аналитические решения порядка сингулярности напряжений и полей напряжений для различных комбинаций материалов и геометрических форм.

В настоящее время в механике хрупкого разрушения сформировалось устойчивое понимание важности и необходимости учета слагаемых в асимптотических разложениях, описывающих поля напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины [2–18].

Целью данной работы является определение коэффициентов сингулярного, T напряжений и следующих слагаемых поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига в линейно-упругом материале. Влияние членов более высокого порядка на поле напряжений в

пластине с трещинами при антиплоском нагружении может быть важным в некоторых инженерных приложениях. Члены более высокого порядка особенно важны для сопоставления экспериментальных результатов, полученных с помощью цифровой корреляции изображений (DIC), с теоретическим ближним полем для определения коэффициентов интенсивности напряжений. Усеченный ряд Вильямса может быть спроецирован непосредственно на измеряемое поле для определения положения вершины трещины и коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Методы теории функции комплексного переменного

Решение краевой задачи об антиплоском сдвиге пространства с полубесконечной трещиной продольного сдвига можно получить с помощью методов теории функции комплексного переменного. Перемещение, как хорошо известно [19], является вещественной частью функции

$$u_3 = \operatorname{Re}[\varphi(z)]. \tag{1}$$

Напряжения в задаче антиплоского сдвига представляются соотношениями

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = \mu\varphi'(z), \tag{2}$$

где голоморфная функция $\varphi'(z)$ определяется равенством

$$\mu\varphi'(z) = -\frac{i}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\tau(x_1)}{z - x_1} \sqrt{a^2 - x_1^2} dx_1. \tag{3}$$

В случае действия постоянной нагрузки τ^∞ последнее соотношение принимает вид

$$\mu\varphi'(z) = \frac{i\tau^\infty}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left\{ \sqrt{z^2 - a^2} - z \right\} = -\frac{iz\tau^\infty}{\sqrt{z^2 - a^2}} + i\tau^\infty. \tag{4}$$

Разложим комплексный потенциал в ряд в окрестности правой вершины $z = a$:

$$\mu\varphi'(z) = -\frac{i\tau^\infty}{\sqrt{z - a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)n!a^{n-1/2}} (z - a)^n + i\tau^\infty, \tag{5}$$

где было использовано разложение [2]:

$$\frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{z}{(z+a)^{1/2}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)n!a^{n-1/2}}. \tag{6}$$

Следует отметить, что (4) – решение вспомогательной задачи о нагружении пластины с центральной трещиной (сдвиговое деформирование касательными напряжениями, приложенными на разрезе):

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = -\tau^\infty \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad |x_1| \leq a. \tag{7}$$

Поэтому решение исходной задачи о сдвиговом деформировании пластины со свободными краями разреза имеет вид

$$\mu\varphi'(z) = -\frac{i\tau^\infty}{\sqrt{z - a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)(n!)^2 a^{n-1/2}} (z - a)^n. \tag{8}$$

Полагая в (8) $z - a = re^{i\theta}$, с помощью соотношений (2) можно получить выражения для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{13} = \tau^\infty \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n-1/2} \sin(n-1/2)\theta, \quad \sigma_{23} = \tau^\infty \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n-1/2} \cos(n-1/2)\theta, \tag{9}$$

где приняты обозначения

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{2^{3n+1/2}(2n-1)(n!)^2 a^{n-1/2}}. \tag{10}$$

2. Анализ вклада высших приближений в общее представление поля напряжений

На следующем этапе построим угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые различным числом слагаемых в рядах (9). На рис. 2.1–2.6 показаны угловые распределения напряжений у вершины трещины, полученные с удержанием различного числа слагаемых. Из графиков отчетливо видно, что высшие приближения играют существенную роль в описании поля напряжений в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига.

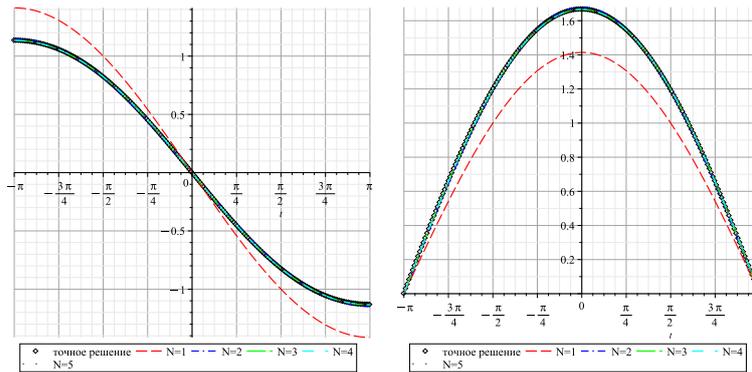


Рис. 2.1. Угловые распределения напряжений (1 — различное число удерживаемых слагаемых, см. рис. здесь и далее) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)

Fig. 2.1. Angular dependences of the stress components (1): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

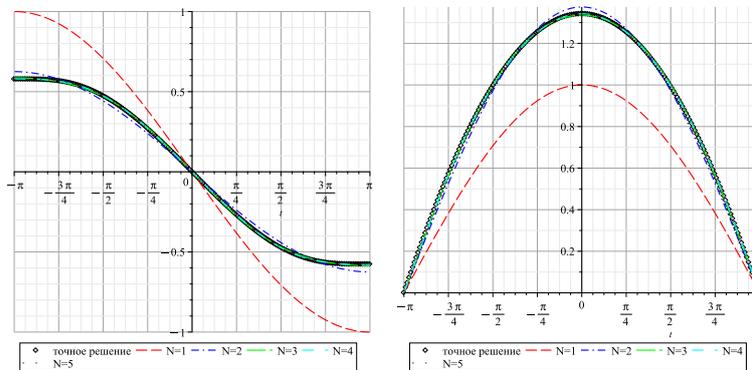


Рис. 2.2. Угловые распределения напряжений (2) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)

Fig. 2.2. Angular dependences of the stress components (2): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

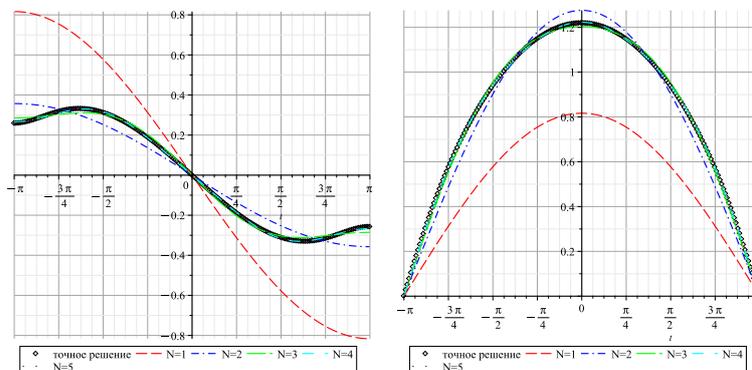


Рис. 2.3. Угловые распределения напряжений (3) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)

Fig. 2.3. Angular dependences of the stress components (3): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

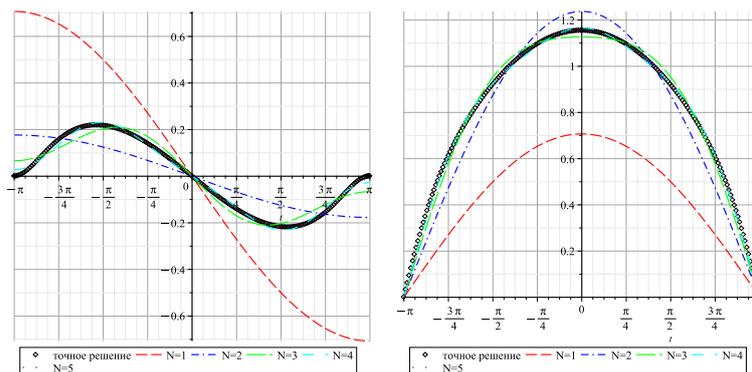


Рис. 2.4. Угловые распределения напряжений (4) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)
 Fig. 2.4. Angular dependences of the stress components (4): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

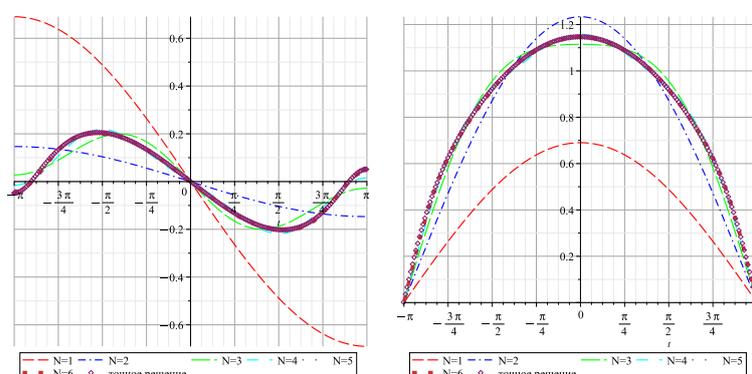


Рис. 2.5. Угловые распределения напряжений (5) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)
 Fig. 2.5. Angular dependences of the stress components (5): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

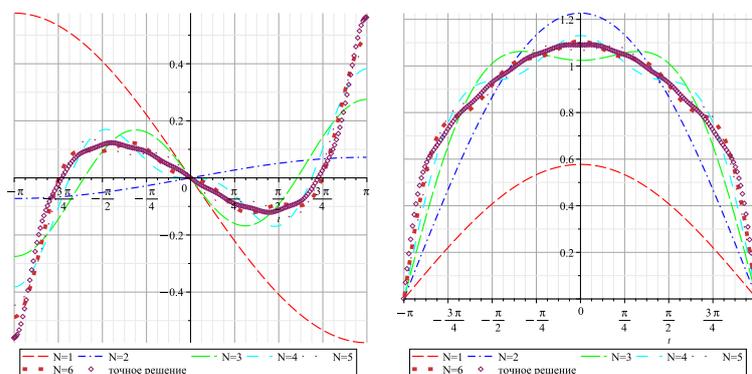


Рис. 2.6. Угловые распределения напряжений (6) у вершины трещины: σ_{13} (слева) и σ_{23} (справа)
 Fig. 2.6. Angular dependences of the stress components (6): σ_{13} (left) и σ_{23} (right)

Выводы

В статье проведен асимптотический анализ вклада высших приближений в рядах, представляющих компоненты тензора напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига. Показано, что высшие приближения необходимо учитывать в описании поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига. Анализируя полученные представления, можно сделать вывод, что при удалении от вершины трещины необходимо удерживать большее количество слагаемых в разложении М. Уильямса. В задаче о трещине антиплоского сдвига для достижения заданного порядка точности требуется меньшее количество слагаемых по сравнению с трещинами нормального отрыва и поперечного сдвига. Так, для трещины антиплоского сдвига, точность 10^{-6}

на расстоянии $0,25a$ достигается при удерживании 6 слагаемых, а на расстоянии $1,25a$ для достижения того же значения точности необходимо удерживать 22 слагаемых, в то же время для трещины нормального отрыва в тех же условиях требуется удерживать 8 и 29 слагаемых соответственно.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Бахарева Ю.Н. Многопараметрические представления поля напряжений у вершины трещины антиплоского сдвига // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 4. С. 18–25. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25.

© Бахарева Ю.Н., 2024

Юлия Николаевна Бахарева (bakhareva.yun@ssau.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24, issue 1. P. 109–114. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011454>.
- [2] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49, issues 3–4. P. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [3] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 144–145. P. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [4] Zhu F., Ji X., He P., Zheng B., Zhang K. On the stress singularity at crack tip in elasticity // Results in Physics. 2019. Vol. 13. P. 102210. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102210>.
- [5] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem // Procedia Structural Integrity. 2018. Vol. 13. P. 1279–1284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2018.12.261>.
- [6] Moazzami M., Ayatollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique // Optic and Laser Technology. 2018. Vol. 107. P. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.
- [7] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21, № 6. С. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919010053>.
- [8] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Materials Science and Engineering: R: Reports. 2014. Vol. 75. P. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>.
- [9] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 143. P. 32–46. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.

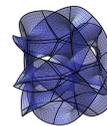
- [10] Malikova L., Vesely V., Seitzl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010>.
- [11] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009. Vol. 50, № 1. P. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9>.
- [12] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 100–101. P. 11–28. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.
- [13] Vesely V., Sobek J., Seitzl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // *International Journal of Fatigue*. 2016. Vol. 89. P. 20–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016>.
- [14] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. Vol. 55, № 5. P. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186>.
- [15] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2015. Vol. 10, № 3. P. 367–393. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367>.
- [16] Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and continuum Ascertainment of The crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 133. P. 104613. DOI: [10.1016/j.tafmec.2024.104613](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613).
- [17] Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Определение коэффициентов асимптотического ряда для полей напряжений на основании молекулярно-динамических вычислений // *Прикладная механика и техническая физика*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415537>. EDN: <https://www.elibrary.ru/juunnu>.
- [18] Анисимов Г.С., Степанова Л.В. Экспериментальное определение полей у вершины трещины: метод голографической интерферометрии и метод корреляции цифровых изображений // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 3. С. 39–56. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.3.03>.
- [19] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука, 1966. 708 с. URL: <https://klex.ru/1fa4?ysclid=m5qsu4dvcj256999603>.

DOI: [10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25](https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25)

Multiparametric presentation of the crack-tip fields in the vicinity of longitudinal shear crack

Bakhareva Yu.N. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; bakhareva.yun@ssau.ru;



Received: 17.10.2024

Revised: 23.11.2024

Accepted: 25.11.2024

Scientific article



Abstract. The article is devoted to the study of the stress field at the tip of a longitudinal shear crack based on a multiparametric asymptotic representation of the stress field at the crack tip in a linearly elastic isotropic material. The performed asymptotic analysis of the fields at the tip of a longitudinal shear crack is a natural continuation of the studies conducted for multiparametric stress fields at the tips of cracks of normal separation and transverse shear, as well as mixed loading. Despite the simplicity of analyzing the contribution of higher approximations to the general representation of the stress field at the tip of a type III crack, multicoefficient representations of the stress field near this type of crack have not been previously studied. It is shown that higher-order approximations must necessarily be taken into account for 1) accurate representation of the stress field and 2) expansion of the range of asymptotic expansions. It has been found that the greater the distance from the crack tip, the more components of the series must be stored near the crack tip.

Key words: longitudinal (antiplane shear) crack; multiparametric expansion; linearly elastic material; asymptotic presentation; exact solution; higher order terms.

Information about the conflict of interests: the author and reviewers declared no conflicts of interest.

Citation. Bakhareva Yu.N. Multiparametric presentation of the crack-tip fields in the vicinity of longitudinal shear crack. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 18–25. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-4-18-25. (In Russ.)

© Bakhareva Yu.N., 2024

Yulia N. Bakhareva (bakhareva.yun@ssau.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, issue 1, pp. 109–114. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011454>.
- [2] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, issues 3–4, pp. 556–566. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.10.024>.
- [3] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanford solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vols. 144–145, pp. 265–275. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [4] Zhu F., Ji X., He P., Zheng B., Zhang K. On the stress singularity at crack tip in elasticity. *Results in Physics*, 2019, vol. 13, p. 102210. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102210>.
- [5] Krepl O., Klusak J. Multi-parameter average strain energy density factor criterion applied on the sharp material inclusion problem. *Procedia Structural Integrity*, 2018, vol. 13, pp. 1279–1284. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2018.12.261>.
- [6] Moazzami M., Ayatollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique. *Optic and Laser Technology*, 2018, vol. 107, pp. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.

- [7] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Asymptotic crack tip fields in linear and nonlinear materials and their role in crack propagation. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, issue 6, pp. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919010053>.
- [8] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 2014, vol. 75, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>.
- [9] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 143, pp. 32–46. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [10] Malikova L., Vesely V., Seitl S. Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 89, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.01.010>.
- [11] Stepanova L.V. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2009, vol. 50, no. 1, pp. 137–146. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0019-9>.
- [12] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, vol. 100–101, pp. 11–28. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.06.032>.
- [13] Vesely V., Sobek J., Seitl S. Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip. *International Journal of Fatigue*, 2016, vol. 89, pp. 20–35. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.02.016>.
- [14] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 885–895. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414050186>.
- [15] Stepanova L.V., Yakovleva E.M. Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2015, vol. 10, no. 3, pp. 367–393. DOI: <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2015.10.367>.
- [16] Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and Continuum Ascertainment of the Crack Tip Stress Fields in Anisotropic Elastic Cubic Media. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 133, p. 104613. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613>.
- [17] Mushankova K.A., Stepanova L.V. Determination of asymptotic series coefficients for stress fields based on molecular dynamics calculations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202415537>. EDN: <https://www.elibrary.ru/juunnu>.
- [18] Anisimov G.S., Stepanova L.V. Experimental determination of crack-tip fields: holographic interferometry method and digital image correlation method. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2024, no. 3, pp. 39–56. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2024.3.03>. (In Russ.)
- [19] Muskhelishvili N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1966, 708 p. Available at: <https://klex.ru/1fa4?ysclid=m5qsu4dvcj256999603>. (In Russ.)