

Динамика перепутывания атомов в трехкубитной модели Тависа — Каммингса с диполь-дипольным взаимодействием

Багров А.Р.^{ID}, Башкиров Е.К.^{ID}

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара,
Российская Федерация; alexander.bagrov00@mail.ru (А.Р.); bashkirov.ek@ssau.ru (Е.К.);

Поступила: 19.07.2024

Рассмотрена: 23.08.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



Аннотация. В статье изучена динамика попарного перепутывания трех кубитов, два из которых захвачены в резонаторе и взаимодействуют с однофотонным идеальным резонатором посредством однофотонных переходов, а третий кубит находится вне резонатора. При этом учитывается диполь-дипольная связь между изолированным кубитом и кубитом в резонаторе. Нами найдено решение квантового нестационарного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы для начальных сепарабельных и бисепарабельных состояний кубитов и теплового начального состояния поля резонатора. С помощью указанных решений вычисляется критерий перепутанности пар кубитов — отрицательность. Результаты численного моделирования критерия отрицательности показали, что включение небольшой диполь-дипольной связи между изолированным и одним из захваченных кубитов может привести к существенному перепутыванию пар кубитов для всех начальных состояний. Наблюдается переход перепутанности от одной пары атомов к другим парам атомов в процессе эволюции системы. Показано также, что для некоторых сепарабельных и бисепарабельных состояний диполь-дипольное взаимодействие может подавить эффект мгновенной смерти перепутывания.

Ключевые слова: кубиты; копланарный резонатор; диполь-дипольное взаимодействие; перепутывание; мгновенная смерть перепутывания; отрицательность; однофотонные переходы; тепловое поле.

Введение

Многокубитные перепутанные состояния играют одну из ключевых ролей в квантовой информации. Они используются для различных квантовых приложений, таких как квантовые вычисления и безопасная связь [1–3]. За последние годы виден значительный прогресс в создании квантовых чипов, содержащих большое количество кубитов. В 2019 году [4] был продемонстрирован квантовый компьютер с 53 сверхпроводящими джозефсоновскими кольцами. В 2021 году был создан чип для квантового компьютера на основе 127 сверхпроводящих джозефсоновских колец [5]. На сегодняшний момент также были реализованы многокубитные устройства на ионах в магнитных ловушках, квантовых точках, содержащие более десятка кубитов [6]. Для эффективного использования квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры и квантовые сети, используют перепутанные состояния кубитов [7]. В качестве количественной меры перепутывания кубитов предложены различные меры. Однако большая часть из них требует выполнения определенных условий, которые можно определить как набор аксиом, таких как обнуление меры для сепарабельных состояний, инвариантность относительно локальных унитарных операций и другие. Сложность расчета этих мер для произвольных состояний лежит в их незамкнутой форме. Простейшей системой, для которой на данный момент времени определены строгие количественные критерии перепутывания кубитов, является двухкубитная. Критерии Переса — Хородецких (отрицательность) [8; 9] и согласованность Вуутерса [10] являются необходимыми условиями для сепарабельности двухкубитной матрицы плотности. Для систем с большим числом кубитов такие строгие критерии отсутствуют.

В случае многокубитной системы для анализа динамики перепутывания рассматривают запутывание отдельных пар кубитов с использованием отрицательности или согласованности. При этом особое внимание уделялось строгому математическому анализу свойств и динамики перепутанных состояний в трехкубитных системах [11–17].

В некоторых работах было доказано, что диполь-дипольное взаимодействие играет существенную роль в эволюции квантовых корреляций [18–20], а также в динамике перепутанности [21]. Влияние диполь-дипольного взаимодействия на характер перепутанности между двумя идентичными двухуровневыми атомами в двухмодовом поле резонатора было исследовано в работе [22]. Результаты показали, что диполь-дипольное взаимодействие может привести к большей перепутанности между атомами, и эффект внезапной смерти также может быть ослаблен. Следует подчеркнуть, что диполь-дипольным взаимодействием атомов нельзя пренебрегать, когда расстояние между атомами меньше длины волны в резонаторе. В нашей предыдущей работе мы детально исследовали динамику перепутывания системы трех кубитов, два из которых резонансно взаимодействуют с модой квантового электромагнитного поля в резонаторе без потерь, а третий находится вне резонатора [23]. Представляет большой интерес обобщить полученные результаты на случай, когда между изолированным и захваченным кубитами присутствует диполь-дипольное взаимодействие.

В данной статье нами была исследована динамика системы, состоящей из трех идентичных кубитов, два из которых резонансно взаимодействуют с модой квантового электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных переходов, а третий кубит перемещается вне резонатора. Между изолированным и захваченным кубитами учитывается диполь-дипольное взаимодействие. Полученные решения нестационарного уравнения Шредингера были использованы для расчета параметра перепутывания пар кубитов. Для оценки количественной меры перепутывания пар кубитов нами использовался параметр Переса — Хордецких.

1. Модель и решение нестационарного уравнения Шредингера

Опишем интересующую нас модель. Мы рассматриваем систему из трех идентичных кубитов A , B и C . Два кубита B и C заперты в резонаторе и резонансно взаимодействуют с его квантованным электромагнитным полем, а третий кубит A перемещается вне резонатора. Будем учитывать прямое диполь-дипольное взаимодействие между кубитами A и B . Тогда гамильтониан взаимодействия описанной системы в приближении вращающейся волны можно записать в виде:

$$\hat{H}_{Int} = \hbar\gamma \sum_{i=B,C} (\hat{\sigma}_i^+ \hat{a} + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}^\dagger) + \hbar J (\hat{\sigma}_A^+ \hat{\sigma}_B^- + \hat{\sigma}_A^- \hat{\sigma}_B^+), \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$ и $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_i \langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в i -м кубите, $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ — оператор уничтожения (рождения) фотона в моде резонатора, γ — константа, характеризующая кубит-фотонную связь, J — константа диполь-дипольного взаимодействия. Важно отметить, что для сверхпроводящих кубитов константа диполь-дипольного взаимодействия может превосходить константу кубит-фотонной связи. При записи гамильтониана (1) мы предположили, что кубиты B и C имеют одинаковые константы взаимодействия с резонатором.

Мы будем полагать, что кубиты в начальный момент времени приготовлены в одном из следующих сепарабельных состояний

$$|\psi_1(0)\rangle_{ABC} = |+, +, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\psi_2(0)\rangle_{ABC} = |+, -, -\rangle \quad (3)$$

или в одном из бисепарабельных состояний

$$|\psi_3(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta |+, -, +\rangle, \quad (4)$$

$$|\psi_4(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |-, +, -\rangle + \sin \theta |-, -, +\rangle, \quad (5)$$

где θ — параметр, определяющий начальную перепутанность кубитов.

Мы предполагаем, что поле резонатора в начальный момент времени находится в тепловом однофотонном состоянии с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|, \quad (6)$$

где p_n — статистический вес, который задается следующей формулой:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}, \quad \bar{n} = \left(\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1 \right)^{-1}.$$

Здесь $\bar{n}$ — среднее число тепловых фотонов, k_B — постоянная Больцмана, T — температура резонатора.

Для описания динамики изучаемой модели нам нужно найти волновую функцию в последующие моменты времени для фоковских состояний поля n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и затем обобщить полученное решение для волновой функции на случай теплового поля резонатора.

Запишем явный вид волновой функции для начального сепарабельного состояния (2) в случае фотонов в моде $n = 0$

$$|\phi(t)_{ABCF}\rangle_1 = x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + \\ + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle, \quad (7)$$

и в случае $n \geq 1$

$$|\psi(t)_{ABCF}\rangle_1 = B_1(t)|+, +, +, n-1\rangle + B_2(t)|+, +, -, n\rangle + B_3(t)|+, -, +, n\rangle + \\ + B_4(t)|-, +, +, n\rangle + B_5(t)|+, -, -, n+1\rangle + B_6(t)|-, +, -, n+1\rangle + \\ + B_7(t)|-, -, +, n+1\rangle + B_8(t)|-, -, -, n+2\rangle. \quad (8)$$

Теперь, подставляя гамильтониан взаимодействия (1) и волновые функции (7), (8) в нестационарное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{Int} |\Psi(t)\rangle, \quad (9)$$

можно получить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{x}_1(t) = \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_2(t) = Jx_3(t) + \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_3(t) = Jx_2(t) + \gamma (x_5(t) + x_6(t)), \\ i\dot{x}_4(t) = Jx_5(t) + \gamma (x_1(t) + x_2(t)), \\ i\dot{x}_5(t) = Jx_4(t) + \gamma (x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_6(t) = \gamma (x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_7(t) = \sqrt{2}\gamma (x_5(t) + x_6(t)) \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\begin{cases} i\dot{B}_1(t) = \gamma\sqrt{n} (B_2(t) + B_3(t)), \\ i\dot{B}_2(t) = \gamma (\sqrt{n}B_1(t) + \sqrt{n+1}B_5(t)), \\ i\dot{B}_3(t) = \gamma (\sqrt{n}B_1(t) + \sqrt{n+1}B_5(t)) + JB_4(t), \\ i\dot{B}_4(t) = \gamma\sqrt{n+1} (B_6(t) + B_7(t)) + JB_3(t), \\ i\dot{B}_5(t) = \gamma\sqrt{n+1} (B_2(t) + B_3(t)) + JB_6(t), \\ i\dot{B}_6(t) = \gamma (\sqrt{n+1}B_4(t) + \sqrt{n+2}B_8(t)) + JB_5(t), \\ i\dot{B}_7(t) = \gamma (\sqrt{n+1}B_4(t) + \sqrt{n+2}B_8(t)), \\ i\dot{B}_8(t) = \gamma\sqrt{n+2} (B_6(t) + B_7(t)) \end{cases} \quad (11)$$

с начальными условиями: $x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = x_7(0) = 0$ и $B_2(0) = 1, B_1(0) = B_3(0) = B_4(0) = B_5(0) = B_6(0) = B_7(0) = B_8(0) = 0$. Аналогичные системы

дифференциальных уравнений можно получить и для начального бисепарабельного состояния (4), но с другими начальными условиями: $x_1(0) = \cos \theta$, $x_2(0) = \sin \theta$, $x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = x_7(0) = 0$ и $B_2(0) = \cos \theta$, $B_3(0) = \sin \theta$, $B_1(0) = B_4(0) = B_5(0) = B_6(0) = B_7(0) = B_8(0)$. Теперь запишем явный вид волновой функции в последующие моменты времени для начального сепарабельного состояния (3) в случае фотонов в моде $n = 0$

$$|\mu(t)_{ABCF}\rangle = y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + y_4(t)|-, -, -, 1\rangle, \quad (12)$$

в случае фотонов в моде $n = 1$

$$|\phi(t)_{ABCF}\rangle_2 = x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle, \quad (13)$$

и в случае фотонов в моде $n \geq 2$ волновая функция запишется в виде

$$|\psi(t)_{ABCF}\rangle_2 = B_1(t)|+, +, +, n-2\rangle + B_2(t)|+, +, -, n-1\rangle + B_3(t)|+, -, +, n-1\rangle + B_4(t)|-, +, +, n-1\rangle + B_5(t)|+, -, -, n\rangle + B_6(t)|-, +, -, n\rangle + B_7(t)|-, -, +, n\rangle + B_8(t)|-, -, -, n+1\rangle. \quad (14)$$

Подставив волновые функции (12)–(14) и гамильтониан системы (1) в нестационарное уравнение Шредингера (9), можно получить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{y}_1(t) = Jy_2(t), \\ i\dot{y}_2(t) = Jy_1(t) + \gamma y_4(t), \\ i\dot{y}_3(t) = \gamma y_4(t), \\ i\dot{y}_4(t) = \gamma (y_2(t) + y_3(t)), \end{cases} \begin{cases} i\dot{x}_1(t) = \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_2(t) = Jx_3(t) + \gamma x_4(t), \\ i\dot{x}_3(t) = Jx_2(t) + \gamma (x_5(t) + x_6(t)), \\ i\dot{x}_4(t) = Jx_5(t) + \gamma (x_1(t) + x_2(t)), \\ i\dot{x}_5(t) = Jx_4(t) + \gamma (x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_6(t) = \gamma (x_3(t) + \sqrt{2}x_7(t)), \\ i\dot{x}_7(t) = \sqrt{2}\gamma (x_5(t) + x_6(t)) \end{cases} \quad (15)$$

и

$$\begin{cases} i\dot{B}_1(t) = \gamma\sqrt{n-1} (B_2(t) + B_3(t)), \\ i\dot{B}_2(t) = \gamma (\sqrt{n}B_5(t) + \sqrt{n-1}B_1(t)), \\ i\dot{B}_3(t) = \gamma (\sqrt{n}B_5(t) + \sqrt{n-1}B_1(t)) + JB_4(t), \\ i\dot{B}_4(t) = \gamma\sqrt{n} (B_6(t) + B_7(t)) + JB_3(t), \\ i\dot{B}_5(t) = \gamma\sqrt{n} (B_2(t) + B_3(t)) + JB_6(t), \\ i\dot{B}_6(t) = \gamma (\sqrt{n}B_4(t) + \sqrt{n+1}B_8(t)) + JB_5(t), \\ i\dot{B}_7(t) = \gamma (\sqrt{n}B_4(t) + \sqrt{n+1}B_8(t)), \\ i\dot{B}_8(t) = \gamma\sqrt{n+1} (B_6(t) + B_7(t)) \end{cases} \quad (16)$$

с начальными условиями: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0$; $x_4(0) = 1$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_5(0) = x_6(0) = x_7(0) = 0$ и $B_5(0) = 1$, $B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = B_4(0) = B_6(0) = B_7(0) = B_8(0) = 0$. Для начального бисепарабельного состояния (5) получаются аналогичные системы, но со следующими начальными условиями: $y_2(0) = \cos \theta$, $y_3(0) = \sin \theta$, $y_1(0) = y_4(0) = 0$; $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_7(0) = 0$, $x_5(0) = \cos \theta$, $x_6(0) = \sin \theta$ и $B_6(0) = \cos \theta$, $B_7(0) = \sin \theta$, $B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = B_4(0) = B_5(0) = B_8(0) = 0$.

Для модели, изучаемой в настоящей статье, решения систем дифференциальных уравнений (10), (11) и (15), (16) имеют чрезмерно громоздкий вид. Поэтому в данной работе мы ограничимся численным решением указанных уравнений. Зная явный вид волновых функций (7), (8) и (12)–(14), мы можем вычислить временную матрицу плотности для полной системы, состоящей из трех кубитов и моды поля, по следующей формуле:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|, \quad (17)$$

которая для начальных состояний (2) и (4) преобразуется в следующее выражение:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\psi(t)_{ABCF}\rangle_{11} \langle \psi(t)_{ABCF}| + p_0 |\phi(t)_{ABCF}\rangle_{11} \langle \phi(t)_{ABCF}|,$$

а для состояний (3) и (5) получаем следующую формулу:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |\psi(t)_{ABCF}\rangle_{22} \langle \psi(t)_{ABCF}| + p_1 |\phi(t)_{ABCF}\rangle_{22} \langle \phi(t)_{ABCF}| + p_0 |\mu(t)_{ABCF}\rangle \langle \mu(t)_{ABCF}|.$$

На данный момент в квантовой оптике количественные критерии запутывания определены только для двухкубитных систем. К ним, например, относят отрицательность [8; 9] и согласованность [10]. В данной статье мы будем вычислять критерий отрицательности пар кубитов.

Для вычисления критерия отрицательности пары кубитов i и j нужно найти двухкубитную матрицу плотности $\rho_{ij}(t)$, которая вычисляется следующим образом:

$$\rho_{ij}(t) = \text{Tr}_k \text{Tr}_F \rho_{ABCF} \quad (i, j, k = A, B, C; i \neq j \neq k). \quad (18)$$

2. Вычисление параметра перепутывания и обсуждение результатов

Мы используем стандартную формулировку критерия отрицательности

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l (\mu_{ij})_l^-, \quad (19)$$

где μ_{ij} — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\rho_{ij}^T(t)$, которая для начальных состояний (2)–(5) имеет следующий вид:

$$\rho_{ij}^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{ij} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{ij})^* \\ 0 & \rho_{22}^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{ij} & 0 \\ \rho_{23}^{ij} & 0 & 0 & \rho_{44}^{ij} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тогда выражение (19) для критерия отрицательности примет следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44}^{ij} - \rho_{11}^{ij})^2 + 4|\rho_{23}^{ij}|^2} - \rho_{11}^{ij} - \rho_{44}^{ij}. \quad (21)$$

Для начальных состояний (2), (4) и кубитов A и B элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_2(t)|^2] + p_0 |x_1(t)|^2, \\ \rho_{22}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_0 [|x_2(t)|^2 + |x_4(t)|^2], \\ \rho_{33}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_0 [|x_3(t)|^2 + |x_5(t)|^2], \\ \rho_{44}^{AB}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_7(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_0 [|x_6(t)|^2 + |x_7(t)|^2], \end{aligned}$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_5(t)B_6^*(t) + B_3(t)B_4^*(t)] + p_0 [x_2(t)x_3^*(t) + x_4(t)x_5^*(t)].$$

Для начальных состояний (2), (4) и кубитов A и C элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_3(t)|^2] + p_0 |x_2(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_0 [|x_1(t)|^2 + |x_4(t)|^2],$$

$$\rho_{33}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_0 [|x_3(t)|^2 + |x_6(t)|^2],$$

$$\rho_{44}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_6(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_0 [|x_5(t)|^2 + |x_7(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{AC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_2(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_7^*(t)] + p_0 [x_1(t)x_3^*(t) + x_4(t)x_6^*(t)].$$

Для начальных состояний (2), (4) и кубитов B и C элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_4(t)|^2] + p_0 |x_3(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_0 [|x_1(t)|^2 + |x_5(t)|^2],$$

$$\rho_{33}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_0 [|x_2(t)|^2 + |x_6(t)|^2],$$

$$\rho_{44}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_5(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_0 [|x_4(t)|^2 + |x_7(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_2(t)B_3^*(t) + B_6(t)B_7^*(t)] + p_0 [x_1(t)x_2^*(t) + x_5(t)x_6^*(t)].$$

Для начальных состояний (3), (5) и кубитов A и B элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_2(t)|^2] + p_1 |x_1(t)|^2,$$

,

$$\rho_{22}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_1 [|x_2(t)|^2 + |x_4(t)|^2] + p_0 |y_1(t)|^2,$$

$$\rho_{33}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_1 [|x_3(t)|^2 + |x_5(t)|^2] + p_0 |y_2(t)|^2,$$

$$\rho_{44}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_7(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_1 [|x_6(t)|^2 + |x_7(t)|^2] + p_0 [|y_3(t)|^2 + |y_4(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_3(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_6^*(t)] + p_1 [x_4(t)x_5^*(t) + x_2(t)x_3^*(t)] + p_0 y_1(t)y_2^*(t).$$

Для начальных состояний (3), (5) и кубитов A и C элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho_{11}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_3(t)|^2] + p_1 |x_2(t)|^2, \\ \rho_{22}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_5(t)|^2] + p_1 [|x_1(t)|^2 + |x_4(t)|^2] + p_0 |y_1(t)|^2, \\ \rho_{33}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_4(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_1 [|x_3(t)|^2 + |x_6(t)|^2] + p_0 |y_3(t)|^2, \\ \rho_{44}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_6(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_1 [|x_5(t)|^2 + |x_7(t)|^2] + p_0 [|y_2(t)|^2 + |y_4(t)|^2], \\ \rho_{23}^{AC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_2(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_7^*(t)] + p_1 [x_4(t)x_6^*(t) + x_1(t)x_3^*(t)] + p_0 y_1(t)y_3^*(t).\end{aligned}$$

Для начальных состояний (3), (5) и кубитов B и C элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho_{11}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(t)|^2 + |B_4(t)|^2] + p_1 |x_3(t)|^2, \\ \rho_{22}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_2(t)|^2 + |B_6(t)|^2] + p_1 [|x_1(t)|^2 + |x_5(t)|^2] + p_0 |y_2(t)|^2, \\ \rho_{33}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_3(t)|^2 + |B_7(t)|^2] + p_1 [|x_2(t)|^2 + |x_6(t)|^2] + p_0 |y_3(t)|^2, \\ \rho_{44}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_5(t)|^2 + |B_8(t)|^2] + p_1 [|x_4(t)|^2 + |x_7(t)|^2] + p_0 [|y_1(t)|^2 + |y_4(t)|^2], \\ \rho_{23}^{BC}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_2(t)B_3^*(t) + B_6(t)B_7^*(t)] + p_1 [x_5(t)x_6^*(t) + x_1(t)x_2^*(t)] + p_0 y_2(t)y_3^*(t).\end{aligned}$$

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости критерия отрицательности ε_{ij} от приведенного времени γt для начального сепарабельного состояния (2) и различных значений константы диполь-дипольного взаимодействия изображены на рис. 1. Среднее число тепловых фотонов выбрано равным $\bar{n} = 0.1$. Важно отметить, что для данной модели в случае отсутствия диполь-дипольного взаимодействия перепутывание между кубитами A и B (и A и C) не появляется в процессе эволюции для всех начальных состояний кубитов (2)–(5). Однако учет даже небольшого значения константы диполь-дипольного взаимодействия приводит к существенному перепутыванию между кубитами A и B (и A и C) в последующие моменты времени. Из всех графиков хорошо видно, что влияние диполь-дипольного взаимодействия не монотонно. Также наблюдается переход перепутанности от одной пары атомов к другим парам атомов в процессе эволюции. Включение диполь-дипольной связи между кубитами A и B не исключает эффект мгновенной смерти перепутывания для всех возможных пар кубитов. Мгновенной смертью перепутывания называется исчезновение перепутывания кубитов на временах меньше времени диссипации энергии, фазы и т. д. На рис. 2 мы строим аналогичные временные зависимости критерия отрицательности ε_{ij} от приведенного времени γt , но для начального сепарабельного состояния (3) при среднем числе тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$. Все выводы, описанные в предыдущем случае, справедливы и для начального сепарабельного состояния (3). Однако есть существенное различие в поведении динамики перепутывания между кубитами A и B . Из рис. 2, а хорошо видно, что включение диполь-дипольной связи приводит к полному подавлению эффекта мгновенной смерти перепутывания. На рис. 3 показаны временные зависимости отрицательности ε_{ij} от приведенного времени γt для начального

бисепарабельного состояния (4) при начальном параметре $\theta = \pi/4$ и среднем числе тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$. Из графиков хорошо видно, что относительно небольшое значение диполь-дипольного взаимодействия $J = 0.2$ приводит к перепутыванию кубитов A и B (и B и C) и не приводит к существенным изменениям в динамике перепутывания кубитов, находящихся внутри резонатора, в отличие от сепарабельных состояний кубитов (2) и (3). Последующее увеличение диполь-дипольной связи приводит к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов A и B (и B и C) и к подавлению перепутанности между кубитами B и C . Также видно, что включение диполь-дипольного взаимодействия не приводит к подавлению эффекта мгновенной смерти перепутывания для кубитов A и B . На рис. 4 мы показываем аналогичные зависимости, но для начального бисепарабельного состояния кубитов (5). В принципе поведение отрицательности для состояния (5) аналогично поведению отрицательности для состояния (4). Различия заключаются в следующем: во-первых, для попарного перепутывания кубитов A и B диполь-дипольное взаимодействие может полностью исключить эффект внезапной смерти перепутывания. Во-вторых, перепутывание между кубитами A и B (и A и C) не возникает при слабом диполь-дипольном взаимодействии в отличие от начального бисепарабельного состояния (4), у которого перепутывание пар кубитов возникает и при $J = 0.2$.

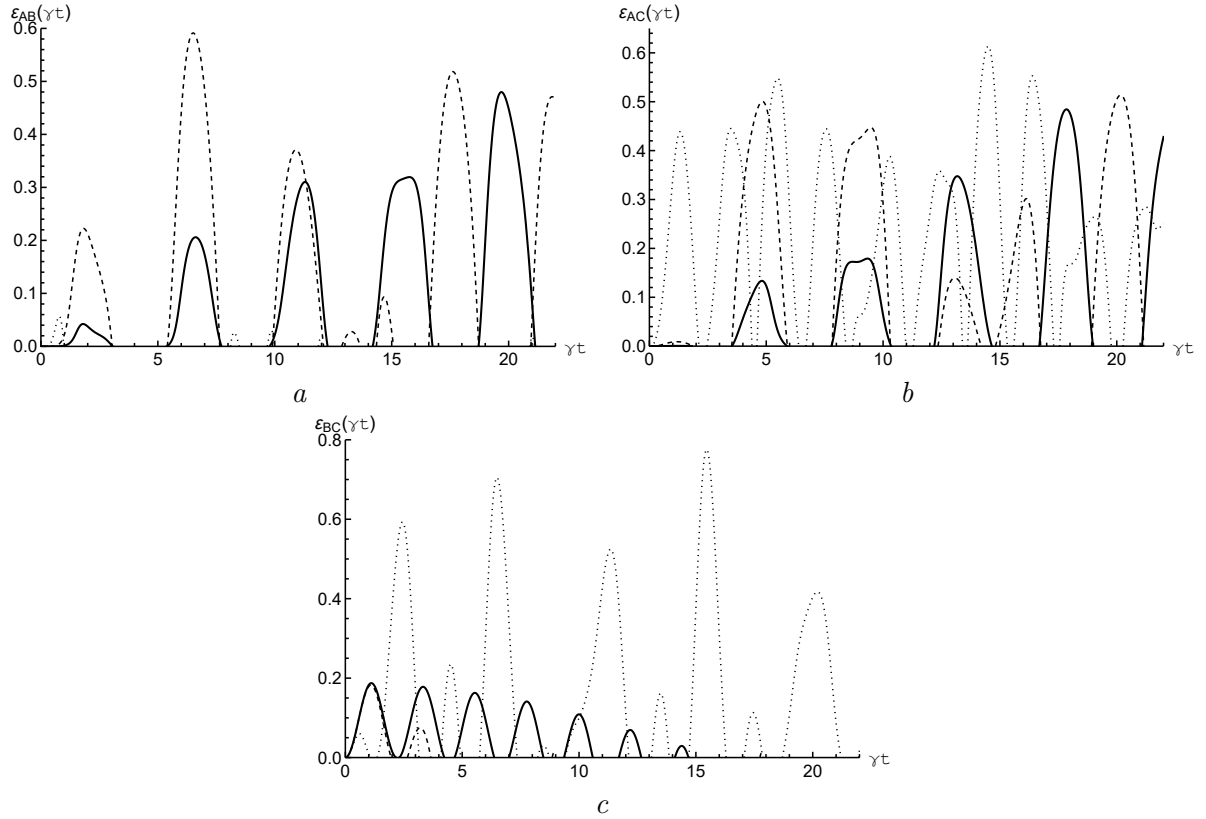


Рис 1. Критерий отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) и $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) построен как функция приведенного времени γt для начального сепарабельного состояния вида (2). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$. Константа диполь-дипольного взаимодействия J : $J = 0.05$ (черная сплошная линия), $J = 0.2$ (красная пунктирная линия), $J = 2$ (синяя точечная линия)

Fig 1. Negativity criterion $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) and $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) are plotted as a function of the scaled time γt for the initial separable state of the form (2). The mean number of thermal photons $\bar{n} = 0.1$. The constant of the dipole-dipole interaction J : $J = 0.05$ (black solid line), $J = 0.2$ (red dashed line), $J = 2$ (blue dotted line)

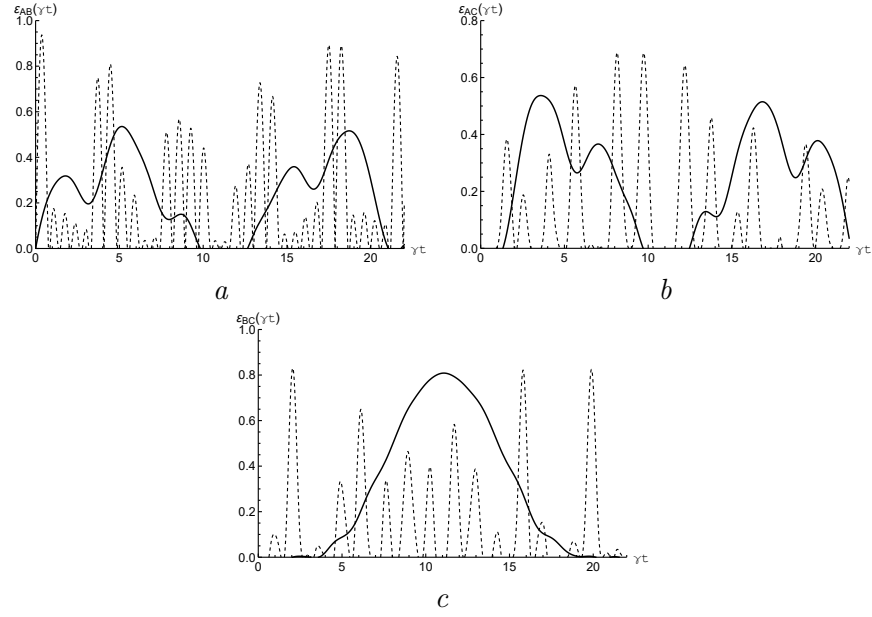


Рис 2. Критерий отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) и $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) построен как функция приведенного времени γt для начального сепарабельного состояния вида (3). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$. Константа диполь-дипольного взаимодействия J : $J = 0.2$ (черная сплошная линия), $J = 2$ (красная пунктирная линия)

Fig 2. Negativity criterion $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) and $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) are plotted as a function of the scaled time γt for the initial separable state of the form (3). The mean number of thermal photons $\bar{n} = 0.1$. The constant of the dipole-dipole interaction J : $J = 0.2$ (black solid line), $J = 2$ (red dashed line)

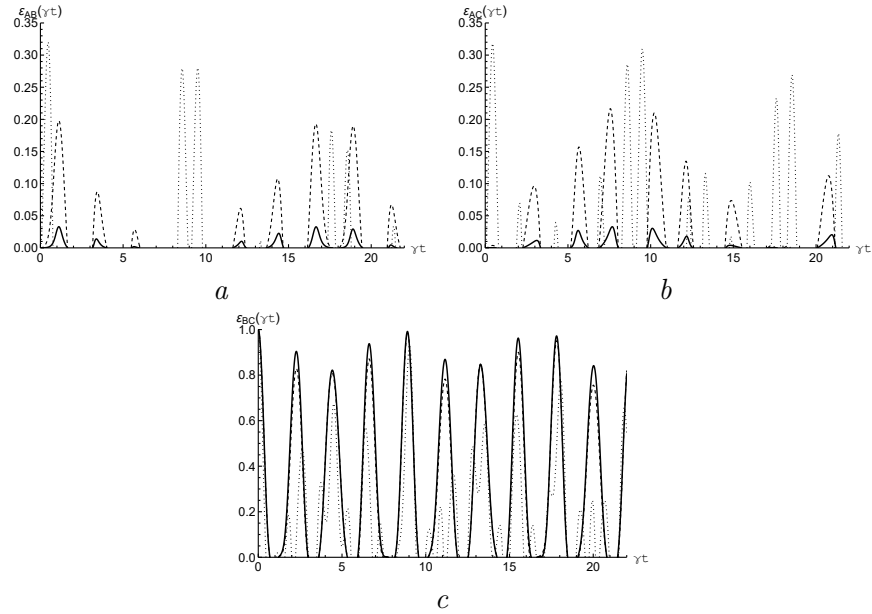


Рис 3. Критерий отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) и $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) построен как функция приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния вида (4). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$. Константа диполь-дипольного взаимодействия J : $J = 0.05$ (черная сплошная линия), $J = 0.2$ (красная пунктирная линия), $J = 2$ (синяя точечная линия)

Fig 3. Negativity criterion $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) and $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) are plotted as a function of the scaled time γt for the initial biseparable state of the form (4). The mean number of thermal photons $\bar{n} = 0.1$. The constant of the dipole-dipole interaction J : $J = 0.05$ (black solid line), $J = 0.2$ (red dashed line), $J = 2$ (blue dotted line)

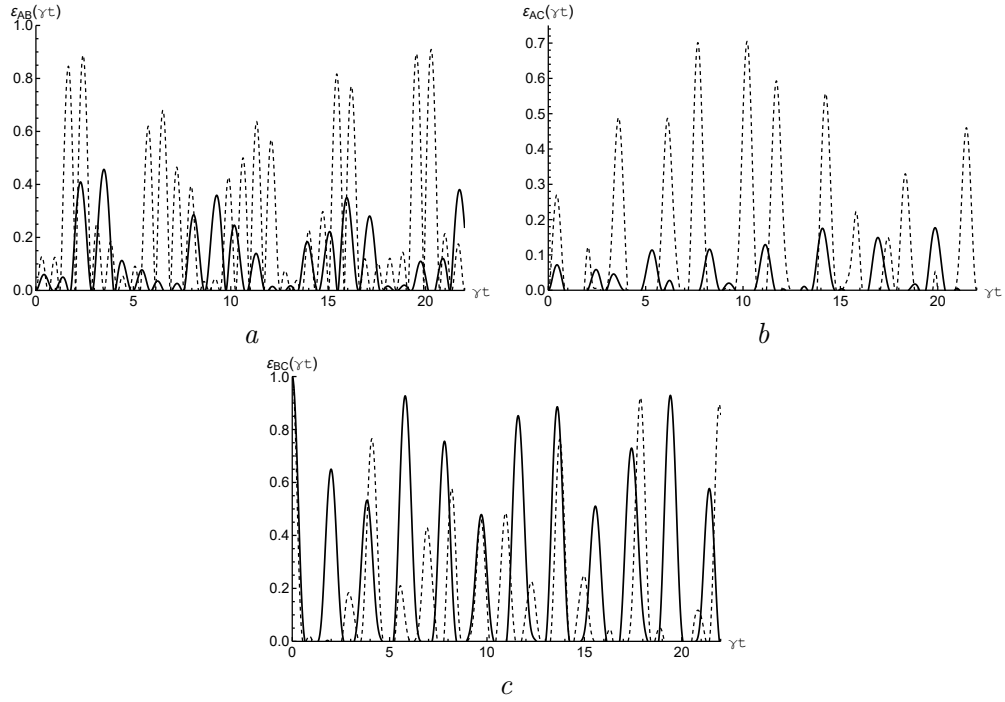


Рис 4. Критерий отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) и $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) построен как функция приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния вида (5). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0.1$. Константа диполь-дипольного взаимодействия J : $J = 1$ (черная сплошная линия), $J = 2$ (красная пунктирная линия).

Fig 4. Negativity criterion $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a), $\varepsilon_{AC}(\gamma t)$ (b) and $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (c) are plotted as a function of the scaled time γt for the initial biseparable state of the form (5). The mean number of thermal photons $\bar{n} = 0.1$. The constant of the dipole-dipole interaction J : $J = 1$ (black solid line), $J = 2$ (red dashed line).

Выводы

В данной статье мы исследовали динамику системы трех идентичных кубитов, один из которых находится вне резонатора, а два других захвачены в резонаторе и резонансно взаимодействуют с модой теплового поля этого резонатора. Предполагается, что между изолированным кубитом и захваченным кубитом в резонаторе есть диполь-дипольная связь. В центре нашего внимания были два различных типа начальных состояний кубитов: сепарабельные и бисепарабельные. Результаты компьютерного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что даже небольшое значение диполь-дипольного взаимодействия может индуцировать перепутывание кубитов для пар, состоящих из изолированного и захваченного кубитов, для всех начальных состояний. В случае отсутствия диполь-дипольной связи перепутывания между парами кубитов не возникает для выбранных состояний. Для некоторых начальных состояний диполь-дипольное взаимодействие приводит к полному подавлению эффекта мгновенной смерти перепутывания. Таким образом, диполь-дипольное взаимодействие между кубитами может рассматриваться как эффективный механизм контроля и управления перепутывания кубитов в резонаторах.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика перепутывания атомов в трехкубитной модели Тависа — Каммингса с диполь-дипольным взаимодействием // Вестник Самар-

ского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 89–103. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-89-103.

© Багров А.Р., Башкиров Е.К., 2024

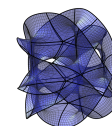
Багров Александр Романович (alexander.bagrov00@mail.ru) – магистр, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Башкиров Евгений Константинович (bashkirov.ek@ssau.ru) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74, number 10. P. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85, issue 2. P. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // Nature. 2019. Vol. 574. P. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race // Nature. 2021. Vol. 599. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation // Reviews of Modern Physics. 2014. Vol. 86, issue 1. P. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80, number 10. P. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, issue 8. P. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, issues 1–2, P. 333–339. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, issue 10. P. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2012. Vol. 01, no. 06. P. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.

- [12] Liu H.P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis Cummings Model Induced by a Thermal Field // Communications in Theoretical Physics. 2005. Vol. 43, issue 3. P. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // Physical Review A. 2000. Vol. 62, issue 6. P. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // The European Physical Journal D. 2008. Vol. 48, issue 3. P. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2010. Vol. 43. P. 095501. URL: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement // Journal of Mathematical Physics. 2017. Vol. 58, issue 10. P. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups, SU(2) and SU(4) // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2019. Vol. 10, issue 7. P. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2005. Vol. 39, number 11. P. 2619. DOI: <http://doi.org/10.1088/0953-4075/39/11/C01>.
- [19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // International Journal of Quantum Information. 2017. Vol. 15, number 07. P. 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [20] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // Laser Physics. 2009. Vol. 19, issue 3. P. 525–530. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [21] Valizadeh S., Tavassoly M.K., Yazdanpanah N. Stability of various entanglements in the interaction between two two-level atoms with a quantized field under the influences of several decay sources // Indian Journal of Physics. 2018. Vol. 92, issue 8. P. 955–968. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12648-018-1173-9>.
- [22] Zhang G.-f., Chen Z.-y. The entanglement character between atoms in the non-degenerate two photons Tavis-Cummings model // Optics Communications. 2007. Vol. 275, issue 1. P. 274–277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.03.022>.
- [23] Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика теплового перепутывания пар кубитов в трехкубитной модели Тависа-Каммингса // Журнал технической физики. 2024. Т. 94, вып. 3. С. 341–350. DOI: <https://doi.org/10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23>.



Dynamics of entanglement of qubits in the three-qubit Tavis — Cummings model with dipole-dipole interaction

Bagrov A.R.^{id}, Bashkirov E.K.^{id}

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; alexander.bagrov00@mail.ru (A.R.); bashkirov.ek@ssau.ru (E.K.);

Received: 19.07.2024

Revised: 23.08.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



Abstract. The article studies the dynamics of pairwise entanglement of three qubits, two of which are trapped in a resonator and interact with a single-mode ideal resonator through single-photon transitions, and the third qubit is outside the resonator. This takes into account the dipole-dipole coupling between the isolated qubit and the qubit in the resonator. We have found a solution to the quantum nonstationary Schrodinger equation for the total wave function of the system for the initial separable and biseparable states of qubits and the thermal initial state of the resonator field. Using these solutions, the criterion of entanglement of qubit pairs - negativity is calculated. The results of numerical simulation of the negativity criterion have shown that the including of a small dipole-dipole coupling between an isolated and one of the trapped qubits can lead to significant entanglement of qubit pairs for all initial states. There is a transition of entanglement from one pair of atoms to other pairs of atoms during the evolution of the system. It is also shown that for some separable and biseparable states, the dipole-dipole interaction can suppress the effect of sudden death of entanglement.

Key words: qubits; coplanar resonator; dipole-dipole interaction; entanglement; sudden death of entanglement; negativity; one-photon transitions; thermal field.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declare no conflict of interest.

Citation. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of entanglement of qubits in the three-qubit Tavis — Cummings model with dipole-dipole interaction. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 89–103. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-89-103. (In Russ.)

© Bagrov A.R., Bashkirov E.K., 2024

Alexander R. Bagrov (alexander.bagrov00@mail.ru) – Master, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov (bashkirov.ek@ssau.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, vol. 74, number 10, p. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 2013, vol. 85, issue 2, pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.

- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vols. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 2019, vol. 574, pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race. *Nature*, 2021, vol. 599. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, 2014, vol. 86, issue 1, pp. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, pp. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issues 1–2, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 10, pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2012, vol. 01, no. 06, pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [12] Liu P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis — Cummings Model Induced by a Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2005, vol. 43, issue 3, pp. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 2000, vol. 62, issue 6, p. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, issue 3, pp. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, vol. 43, p. 095501. Available at: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 2017, vol. 58, issue 10, p. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups, SU(2) and SU(4). *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms in a cavity interacting with a thermal field. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, vol. 39, number 11, p. 2619. DOI: <http://doi.org/10.1088/0953-4075/39/11/C01>.

- [19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states. *International Journal of Quantum Information*, 2017, vol. 15, number 07, p. 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [20] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise. *Laser Physics*, 2009, vol. 19 (3), pp. 525–530. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [21] Valizadeh S., Tavassoly M.K., Yazdanpanah N. Stability of various entanglements in the interaction between two two-level atoms with a quantized field under the influences of several decay sources. *Indian Journal of Physics*, 2018, vol. 92, issue 8, pp. 955–968. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12648-018-1173-9>.
- [22] Zhang G.-f., Chen Z.-y. The entanglement character between atoms in the non-degenerate two photons Tavis-Cummings model. *Optics Communications*, 2007, vol. 275, issue 1, pp. 274–277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.03.022>.
- [23] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of thermal entanglement of qubit pairs in the three-qubit Tavis-Cummings model. *Journal of Technical Physics*, 2024, vol. 94, issue 3, pp. 341–350. DOI: <https://doi.org/10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23>. (In Russ.)