

Решение задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным краевым условием

Гасанова Э.Э., Пулькина Л.С.



Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; gasanowaelvira@gmail.com (Э.Э.); louise@samdiff.ru (Л.С.);

Поступила: 10.04.2024

Рассмотрена: 17.05.2024

Принята: 02.09.2024

Аннотация. В статье доказано существование единственного решения начально-краевой задачи с нелокальным условием для одномерного волнового уравнения. Обоснование разрешимости основано на возможности построения биортогонального базиса и представлении решения в виде ряда по собственным и присоединенным функциям.

Научная статья



Ключевые слова: волновое уравнение; краевая задача; нелокальное условие; биортогональный базис.

Введение

Задачи с нелокальными условиями, которые мы понимаем как соотношения, связывающие значения искомого решения и его производных в различных точках границы и на внутренних многообразиях, активно изучаются в настоящее время. Интерес к ним связан не только с теоретическим аспектом развития теории дифференциальных уравнений, но и с тем, что математические модели, в основе которых лежат нелокальные задачи, часто оказываются более эффективными и полезными для современного естествознания [1; 2]. Задолго до начала систематических исследований задач с нелокальными условиями была опубликована статья В.А. Стеклова [3], в которой изучена задача с нелокальными краевыми условиями для уравнения теплопроводности. В ней получены условия на коэффициенты нелокальных соотношений, выполнение которых гарантирует разрешимость поставленной задачи. Естественно возник интерес к тем случаям, когда эти условия не выполнены. В этой связи отметим статьи Н.И. Ионкина [4], в которой рассмотрена задача с неклассическим краевым условием для уравнения теплопроводности, и С.А. Бейлина [5]. В нашей статье рассматривается задача с нелокальным краевым условием, которое является частным случаем условий В.А. Стеклова, для простейшего гиперболического уравнения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t). \quad (3)$$

Под решением задачи будем понимать функцию $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2), (3). Отметим, что второе из условий (3) является нелокальным. На первый взгляд кажется естественным применить метод разделения переменных, однако на этом пути возникают трудности отнюдь не технического свойства. Их преодолению посвящен следующий раздел.

2. Собственные и присоединенные функции задачи

Будем искать частные решения задачи (1)–(3) в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$ и, разделив переменные в уравнении (1), приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1), \quad (4)$$

собственные функции которой

$$X_0(x) = x, \quad X_n(x) = \sin 2\pi n x, \quad \lambda_n = 2\pi n. \quad (5)$$

Полученная совокупность функций не ортогональна, не полна и, стало быть, не образует базис в $L_2(0, 1)$. Следуя [8; 9], дополним собственные функции $X_n(x)$ присоединенными, которые найдем как решения задачи (6)

$$\tilde{X}_n'' + \lambda_n^2 \tilde{X}_n(x) = p_n X_n(x), \quad \tilde{X}(0) = 0, \quad \tilde{X}'(0) = \tilde{X}'(1), \quad (6)$$

где $p_n \neq 0$. Положим $p_n = -4n\pi$. Получим

$$\tilde{X}_n(x) = x \cos 2\pi n x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Пополненную таким образом систему запишем, переобозначив функции, так:

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos 2k\pi x, \quad X_{2k}(x) = \sin 2k\pi x. \quad (8)$$

В силу результатов, полученных В.А. Ильиным [9], система функций (8) образует базис.

Рассмотрим теперь сопряженную к (4) задачу

$$Y''(x) + \mu^2 Y(x) = 0, \quad Y'(1) = 0, \quad Y(0) = Y(1) \quad (9)$$

и найдем ее собственные функции:

$$Y_0(x) = q_0, \quad Y_k(x) = q_k \cos 2\pi k x, \quad \mu_k = \lambda_k = 2\pi k. \quad (10)$$

Решив задачу

$$\tilde{Y}_k'' + \lambda_k^2 \tilde{Y}_k(x) = p_k Y_k(x), \quad \tilde{Y}_k'(1) = 0, \quad \tilde{Y}_k(0) = \tilde{Y}_k(1), \quad (11)$$

найдем и присоединенные функции

$$\tilde{Y}_k(x) = q_k(1 - x) \sin 2k\pi x.$$

Переобозначив, как и выше, найденные функции, запишем систему собственных и присоединенных функций сопряженной задачи:

$$Y_0 = q_0, \quad Y_{2k-1}(x) = q_{2k-1} \cos 2k\pi x, \quad Y_{2k} = q_{2k}(1 - x) \sin 2k\pi x. \quad (12)$$

Числа q_0, q_{2k}, q_{2k-1} найдем так, чтобы системы функций (8) и (12) оказались биортонормированными, а именно:

$$(X_0, Y_0) = 1, \quad (X_{2k-1}, Y_{2l-1}) = \delta_{kl}, \quad (X_{2k}, Y_{2l}) = \delta_{kl},$$

$$(X_{2k}, Y_{2l-1}) = 0, \quad (X_{2k-1}, Y_{2l}) = 0 \quad \forall k, l.$$

Эти равенства оказываются выполненными, если положить $q_0 = 2, q_{2k} = q_{2k-1} = 4$.

3. Существование решения

Основным результатом статьи является обоснование существования единственного решения поставленной задачи.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &\in C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1), \quad f \in C^2(Q_T), \quad f_x \in C^1(\bar{Q}_T), \\ \varphi(0) = \psi(0) &= 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), \quad \psi'(0) = \psi'(1), \quad \varphi''(0) = \psi''(0) = 0, \\ f(0, t) &= 0, \quad f'(1) = f'(0). \end{aligned}$$

Тогда существует решение задачи (1)–(3), и оно единственно.

Доказательство.

Решение задачи будем искать в виде суммы $u(x, t) + v(x, t)$, где $u(x, t)$ — решение поставленной задачи для однородного уравнения, соответствующего (1), а $v(x, t)$ — решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее однородным условиям (2) и (3).

Начнем с решения задачи для однородного уравнения. Будем искать решение в виде ряда

$$u(x, t) = X_0(x)T_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)T_{2k}(t) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(t), \quad (13)$$

где $X_0(x)$, $X_{2k}(x)$, $X_{2k-1}(x)$ — собственные и присоединенные функции (8), а $T_0(t)$, $T_{2k}(t)$, $T_{2k-1}(t)$ найдем из (1) и (2) следующим образом: потребуем, чтобы функции $u_0(x, t) = X_0(x)T_0(t)$, $u_k(x, t) = X_{2k}(x)T_{2k}(t) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(t)$ были решениями однородного уравнения (1) и удовлетворяли условиям (2).

Подставив $u_0(x, t)$ в уравнение (1), получим, учитывая, что $X_0(x) = x$, уравнение $T_0''(t) = 0$, откуда $T_0(t) = at + b$. Постоянные a, b найдем из начальных условий (2). Положив в (13) $t = 0$, получим

$$\varphi(x) = X_0(x)b + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)T_{2k}(0) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(0). \quad (14)$$

Умножив обе части (14) скалярно на $Y_0(x)$ и, учитывая биортогональность систем функций (8) и (12), получим $b = (\varphi, Y_0) = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx$. Совершенно аналогично из равенства

$$\psi(x) = X_0(x)a + \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}(x)T_{2k}'(0) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}'(0) \quad (15)$$

найдем $a = (\psi, Y_0) = 2 \int_0^1 \psi(x) dx$. Подставив в уравнение (1) функции $u_k(x, t) = X_{2k}(x)T_{2k}(t) + X_{2k-1}(x)T_{2k-1}(t)$, получим равенство

$$(T_{2k}'' + (2k\pi)^2 T_{2k} + 4k\pi T_{2k-1}) \sin 2k\pi x + x(T_{2k-1}'' + (2k\pi)^2 T_{2k-1}) \cos 2k\pi x = 0,$$

из которого вытекают два уравнения для нахождения T_{2k}, T_{2k-1} . Прежде чем их выписать, найдем начальные условия, которым должны удовлетворять функции T_{2k}, T_{2k-1} . Для этого умножим (14), (15) скалярно на $Y_{2k}(x)$, а затем на $Y_{2k-1}(x)$ и получим, учитывая биортогональность систем (8), (12) и представление функций из (12)

$$T_{2k}(0) = 4 \int_0^1 \varphi(x)(1-x) \sin 2k\pi x dx = \varphi_{2k},$$

$$T_{2k-1}(0) = 4 \int_0^1 \varphi(x) \cos 2k\pi x dx = \varphi_{2k-1},$$

$$T_{2k}'(0) = 4 \int_0^1 \psi(x)(1-x) \sin 2k\pi x dx = \psi_{2k},$$

$$T'_{2k-1}(0) = 4 \int_0^1 \psi(x) \cos 2k\pi x dx = \psi_{2k-1}.$$

Таким образом, для нахождения T_{2k}, T_{2k-1} мы пришли к двум начальным задачам:

$$T''_{2k-1}(t) + (2k\pi)^2 T_{2k-1}(t) = 0, \quad T_{2k-1}(0) = \varphi_{2k-1}, \quad T'_{2k-1}(0) = \psi_{2k-1},$$

$$T''_{2k} + (2k\pi)^2 T_{2k} = -4k\pi T_{2k-1}, \quad T_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \quad T'_{2k}(0) = \psi_{2k}.$$

Решив эти задачи, получим

$$T_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cos 2k\pi t + \frac{\psi_{2k-1}}{2k\pi} \sin 2k\pi t, \quad (16)$$

$$T_{2k}(t) = (\psi_{2k-1}t - \varphi_{2k}) \cos 2k\pi t - (\varphi_{2k-1}t + \frac{\varphi_{2k-1} - \psi_{2k}}{2k\pi}) \sin 2k\pi t. \quad (17)$$

Итак, членами ряда (13) являются частные решения задачи (1)–(3) и, если ряд (13) и полученные ряды из производных второго порядка сходятся равномерно, то сумма ряда (13) будет решением поставленной задачи.

Найдем производные частных решений второго порядка.

$$u_{kxx}(x, t) = -4k^2\pi^2 \sin 2k\pi x T_{2k}(t) - 4k^2\pi^2 \left(\frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi x + x \cos 2k\pi x \right) T_{2k-1}(t),$$

$$u_{ktt}(x, t) = X_{2k} 4k^2\pi^2 \left[(\varphi_{2k}t + \frac{\varphi_{2k-1} - \psi_{2k} - \psi_{2k-1}}{2k\pi}) \sin 2k\pi t + \right. \\ \left. + (\varphi_{2k} - \psi_{2k-1}t - \frac{1}{k\pi} \varphi_{2k-1}) \cos 2k\pi t \right] - X_{2k-1}(x) 4k^2\pi^2 (\varphi_{2k-1} \cos 2k\pi t + \frac{1}{2k\pi} \psi_{2k-1} \sin 2k\pi t).$$

Из этих представлений видно, что для сходимости рядов необходимы дополнительные условия на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, получением которых мы и займемся. Для этого сделаем элементарные преобразования, интегрируя по частям, в результате чего приходим к следующему утверждению:

если $\varphi, \psi \in C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1)$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$,
 $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi''(0) = \psi''(0) = 0$, то

$$\varphi_{2k-1} = 2 \frac{\tilde{\varphi}_{2k-1}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\varphi}_{2k-1} = 2 \int_0^1 (\varphi'(x) \sin k\pi x)'' \cos k\pi x dx,$$

$$\varphi_{2k} = 2 \frac{\tilde{\varphi}_{2k}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\varphi}_{2k} = 2 \int_0^1 [(1-x)\varphi(x) \cos k\pi x]''' \cos k\pi x dx,$$

$$\psi_{2k-1} = 2 \frac{\tilde{\psi}_{2k-1}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\psi}_{2k-1} = 2 \int_0^1 (\psi'(x) \sin k\pi x)'' \cos k\pi x dx,$$

$$\psi_{2k} = 2 \frac{\tilde{\psi}_{2k}}{\pi^3 k^3}, \quad \tilde{\psi}_{2k} = 2 \int_0^1 [(1-x)\psi(x) \cos k\pi x]''' \cos k\pi x dx.$$

Заметим, что в полученных формулах $\tilde{\varphi}_{2k}, \tilde{\varphi}_{2k-1}, \tilde{\psi}_{2k}, \tilde{\psi}_{2k-1}$ — коэффициенты Фурье функций $(\varphi'(x) \sin k\pi x)''$, $[(1-x)\varphi(x) \cos k\pi x]'''$, $(\psi'(x) \sin k\pi x)''$, $[(1-x)\psi(x) \cos k\pi x]'''$ и, стало быть, гарантирована сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_{2k}}{k^3}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_{2k-1}}{k^3}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_{2k}}{k^3}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_{2k-1}}{k^3}$. Нетрудно убедиться, что

ряд (13) мажорируется сходящимся рядом $\frac{2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_{2k}| + |\tilde{\varphi}_{2k-1}| + |\tilde{\psi}_{2k}| + |\tilde{\psi}_{2k-1}|}{k^3}$, а ряды из производных

$\sum_{k=1}^{\infty} u_{kxx}$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_{ktt}$ — сходящимся рядом $\frac{8}{\pi} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{\varphi}_{2k}| + |\tilde{\varphi}_{2k-1}| + |\tilde{\psi}_{2k}| + |\tilde{\psi}_{2k-1}|}{k}$. Следовательно, ряд (13) сходится абсолютно и равномерно и его можно дважды почленно дифференцировать по x и по t . В силу обобщенного принципа суперпозиции сумма ряда (13) является решением задачи с условиями (2), (3) для однородного уравнения (1).

Приступим к нахождению функции $v(x, t)$ — решения неоднородного уравнения (1).

Будем искать решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным начальным условиям в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2k}(t)X_{2k}(x) + V_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x). \quad (18)$$

Функции $V_{2k}(t)$, $V_{2k-1}(t)$, подлежащие определению, должны удовлетворять условиям $V_{2k}(0) = 0$, $V'_{2k}(0) = 0$, $V_{2k-1}(0) = 0$, $V'_{2k-1}(0) = 0$, а $X_{2k}(x)$, $X_{2k-1}(x)$ — собственные и присоединенные функции однородной задачи. Подставим $v(x, t)$ в уравнение (1) и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} [V''_{2k-1}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k-1}(t)] \cos 2k\pi x + \\ & + [V''_{2k}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k}(t) + 4k\pi V_{2k-1}(t)] \sin 2k\pi x = f(x, t). \end{aligned}$$

Разложив $f(x, t)$ в ряд по $X_{2k}(x)$, $X_{2k-1}(x)$, получим из последнего равенства две задачи для каждого k :

$$V''_{2k-1}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k-1}(t) = f_{2k-1}(t), \quad V_{2k-1}(0) = 0, \quad V'_{2k-1}(0) = 0,$$

$$V''_{2k}(t) + 4k^2\pi^2 V_{2k}(t) = f_{2k}(t) - 4k\pi V_{2k-1}(t), \quad V_{2k}(0) = 0, \quad V'_{2k}(0) = 0,$$

где $f_{2k-1}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t)Y_{2k-1}(x)dx$, $f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x, t)Y_{2k}(x)dx$. Каждая из этих задач имеет единственное решение, поэтому функция $v(x, t)$ найдена. Действительно, сходимость ряда (18) и рядов из производных доказывается так же, как и выше.

4. Единственность решения

Покажем, что решение задачи единственно. Предположим, что это не так, и существует два различных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда их разность, $u = u_1 - u_2$, представляет собой решение однородного уравнения (1) и удовлетворяет однородным условиям (2) и (3). Но тогда функцию $u(x, t)$ можно представить в форме биортогонального ряда

$$u(x, t) = c_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}(t)X_{2k}(x) + c_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x), \quad (19)$$

где $X_0(x)$, $X_{2k}(x)$, $X_{2k-1}(x)$ — собственные и присоединенные функции (8). Найдем коэффициенты $c_i(t)$, пользуясь свойством биортогональности систем функций (8) и (12). Нам потребуется следующее утверждение. Если решение уравнения (1) удовлетворяет условию $u_x(0, t) = u_x(1, t)$, то $\int_0^1 u(x, t)dx = 0$. Действительно, пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Интегрируя обе его части по $x \in (0, 1)$, получим равенство $\int_0^1 u_{tt}dx = u_x(1, t) - u_x(0, t)$ и в силу условия $u_x(0, t) = u_x(1, t)$, $\int_0^1 u_{tt} = 0$. Рассматривая последнее равенство как дифференциальное уравнение $\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t)dx = 0$ и учитывая, что в силу начальных условий $\int_0^1 u(x, 0)dx = 0$, $\int_0^1 u_t(x, 0)dx = 0$, получим $\int_0^1 u(x, t)dx = 0$. Но тогда

$$c_0(t) = 2 \int_0^1 u(x, t)dx = 0.$$

Найдем $c_{2k-1}(t)$, умножив обе части (19) на Y_{2k-1} скалярно и проделав ряд преобразований, интегрируя по частям и учитывая, что $u(x, t)$ и Y_{2k-1} удовлетворяют уравнениям (1) с $f = 0$ и (9).

$$\begin{aligned} c_{2k-1}(t) &= \int_0^1 u(x, t)Y_{2k-1}(x)dx = -\frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 u(x, t)Y''_{2k-1}dx = \\ &= -\frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 u_{xx}(x, t)Y_{2k-1}dx = -\frac{1}{(2k\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t)Y_{2k-1}(x)dx, \end{aligned}$$

откуда сразу следует

$$c_{2k-1}''(t) + (2k\pi)^2 c_{2k-1}(t) = 0.$$

Так как из нулевых начальных условий $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ следует, что $c_{2k-1}(0) = 0$, $c_{2k-1}'(0) = 0$, то и $c_{2k-1}(t) = 0$ как решение однородной задачи Коши. Совершенно аналогично доказывается, что и $c_{2k}(t) = 0$. Таким образом, наше предположение не верно, $u_1 = u_2$, и, стало быть, решение задачи единственно.

Теорема полностью доказана.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Гасанова Э.Э., Пулькина Л.С. Решение задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным краевым условием // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 17–24. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-17-24.

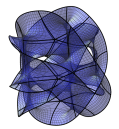
© Гасанова Э.Э., Пулькина Л.С., 2024

Гасанова Эльвира Эльчиновна (gasanowaelvira@gmail.com) – студент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

- [1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de4116>.
- [2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek, Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, issue 11. P. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня // Сообщ. Харьковского мат. общества. Вторая серия. 1897. Т. 5, № 3–4. С. 136–181. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/khmo222>.
- [4] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/de2993>.
- [5] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. Vol. 2001, no. 76. P. 1–8. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/76/beilin.pdf>.
- [6] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва: Наука, 2006. 287 с. URL: <https://knigogid.ru/books/1900983-zadachi-so-smescheniem-dlya-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread>.



- [7] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. Vol. 2020, no. 28. P. 1–20. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/pulkina.pdf>.
- [8] Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 796–799. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan40263>.
- [9] Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора 2 порядка // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048–1053. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan9839>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-17-24

Solution of certain problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation

Gasanova E.E., Pulkina L.S. 

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; gasanowaelvira@gmail.com (E.E.); louise@samdiff.ru (L.S.);

Received: 10.04.2024
Revised: 17.05.2024
Accepted: 02.09.2024

Abstract. In this paper, we study a problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation. To prove the solvability of the problem we construct biorthogonal basis consisting of eigen- and adjoint-functions of not self adjoint operator.

Key words: wave equation; boundary problem; nonlocal condition; biorthogonal basis

Scientific article



Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declare no conflict of interest.

Citation. Gasanova E.E., Pulkina L.S. Solution of certain problem with nonlocal boundary condition for one-dimensional wave equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 17–24. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-17-24. (In Russ.)

© Gasanova E.E., Pulkina L.S., 2024

Elvira E. Gasanova (gasanowaelvira@gmail.com) – student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Ludmila S. Pulkina (louise@samdiff.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Samarskii A.A. Some problems of the theory of differential equations. *Differential Equations*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de4116>. (In Russ.)
- [2] Bažant, Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, issue 11, pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
- [3] Stekloff W. Problem of cooling an inhomogeneous solid body. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*. 2-e série, 1897, vol. 5, no. 3–4, pp. 136–181. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/khmo222>. (In Russ.)
- [4] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/de2993>. (In Russ.)
- [5] Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001, vol. 2001, no. 76, pp. 1–8. URL: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/76/beilin.pdf>.
- [6] Nakhushev A.M. Displacement problems for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006, 287 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/1900983-zadachi-so-smescheniem-dlya-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread>.
- [7] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020, vol. 2020, no. 28, pp. 1–20. Available at: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/pulkina.pdf>.
- [8] Il'in V.A. Necessary and sufficient conditions for a subsystem of eigen- and associated functions of a Keldys bundle of ordinary differential operators to be a basis. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1976, vol. 227, no. 4, pp. 796–799. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan40263>. (In Russ.)
- [9] Il'in V.A. Unconditional basis property on a closed interval of systems of eigen- and associated functions of a second-order differential operator. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1983, vol. 273, no. 5, pp. 1048–1053. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan9839>. (In Russ.)