



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66

УДК 512.531; 519.7

Дата: поступления статьи: 11.02.2024
после рецензирования: 23.03.2024
принятия статьи: 15.05.2024**М.А. Фомченкова**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Masha18072013@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3227-5433>**Л.В. Степанова**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: stepanovalv.lv@ssau.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

ПРОЦЕДУРА ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЕЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ, ОСНОВАННАЯ НА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В статье предложена и реализована процедура восстановления асимптотического разложения полей напряжений, деформаций и перемещений в анизотропных материалах, обобщающих решение Уильямса для линейно упругих изотропных материалов, на основании конечно-элементного решения задачи о деформировании образца с дефектом в анизотропном ортотропном материале в приближении плоской задачи теории упругости. Коэффициенты разложения поля напряжений вблизи вершины трещины в анизотропном материале определяются с помощью переопределенного метода, предложенного изначально для восстановления асимптотического разложения из экспериментальных данных фотоупругого исследования. В настоящей работе данный метод распространен на анизотропные материалы с различными видами симметрии, и новизна предлагаемого подхода заключается в реконструкции асимптотического разложения из конечно-элементного решения для компонент тензора напряжений в узлах конечно-элементной сетки, что позволяет не исключать их поля перемещений составляющие, отвечающие перемещениям тела как абсолютно твердого тела. В предлагаемом подходе можно непосредственно в схеме переопределенного метода использовать данные конечно-элементных вычислений. Показано, что коэффициенты высших приближений надежно определяются посредством переопределенного метода, основанного на поле напряжений, найденном из конечно-элементного анализа.

Ключевые слова: метод конечных элементов; анизотропные среды; трещина; поля напряжений у вершины трещины; асимптотическое решение.

Цитирование. Фомченкова М.А., Степанова Л.В. Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 54–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Фомченкова М.А., Степанова Л.В., 2024

Мария Александровна Фомченкова — магистрант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Лариса Валентиновна Степанова — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Всестороннее исследование причин появления дефектов, трещин несплошностей и закономерностей их развития в анизотропных хрупких материалах представляет жизненно важный интерес для оценки прочности и живучести конструкций, выполненных из анизотропных материалов. Анизотропные хрупкие материалы (например, монокристаллический кремний) широко используются в качестве основных компонентов в полупроводниках, фотоэлектрической технике, инфракрасной оптике и т. д. благодаря своим выдающимся фотоэлектрическим возможностям. Вследствие хрупкости в анизотропных материалах с высокой прочностью и низкой вязкостью в процессе механической обработки возможны хрупкие разрушения, что снижает целостность элемента конструкции. Поэтому представляется особенно важным и актуальным аккуратное определение напряжений, связанных с вершиной трещины, ибо сформулированные и применяемые сейчас критерии разрушения используют поля напряжений и деформаций вблизи острия дефекта и могут дать направление его распространения. При построении поля упругих напряжений необходимо учитывать анизотропные характеристики, чтобы точно предсказать дальнейшее развитие трещины. В настоящее время для ортотропных анизотропных материалов построены аналитические решения задач о растяжении и комбинированном нагружении бесконечных пластин с центральной трещиной. Для смешанного нагружения данной геометрии образца с трещиной имеется аналитическое решение задачи, базирующееся на классическом формализме теории функции комплексного переменного [1]. В [1] получены асимптотические разложения полей напряжений, перемещений и деформаций, содержащие слагаемые высоких порядков, дающие возможность более точной и целостной оценки поля напряжений на больших расстояниях от вершины трещины, таким образом существенно расширяя зону доминирования асимптотического решения.

Хорошо известно, что первые, главные члены рядов напряжений и деформаций у кончика острой трещины в линейно упругом теле (ряд Уильямса) являются сингулярными, так же как и главные слагаемые ряда, обобщающего ряд Уильямса на анизотропные среды в плоской постановке задачи. Следовательно, данные слагаемые преобладают в непосредственной близости от вершины острой трещины, острого выреза или острого надреза. В силу этого в малой области сингулярного доминирования, примыкающей к вершине, первых (сингулярных) слагаемых вполне достаточно для математического описания и характеристики механических полей вокруг вершины трещины. Коэффициенты первых слагаемых в рядах, отвечающих эталонному нормальному отрыву (деформации типа I) и эталонному поперечному сдвигу (деформации типа II), полностью определяются и обуславливаются комплексом приложенных нагрузок и конфигурацией образца. Согласно классической механике разрушения данные коэффициенты именуются коэффициентами интенсивности напряжений (КИН), которые выполняют первостепенную роль в контексте классической линейной механики хрупкого разрушения, и их критические значения служат критериальными характеристиками состояния тела с трещиной. Ввиду этого многие исследования и в настоящее время посвящены исключительно определению либо КИН, либо КИН и Т-напряжений. При этом, даже невзирая на то, что КИН являются ключевыми параметрами механики трещин, в многочисленных исследованиях [1–11] обнаружено, что слагаемые асимптотического ряда М. Уильямса или его обобщения на анизотропные материалы более высоких порядков, в свою очередь, также вносят весомый вклад в описание полевых величин, ассоциированных с вершиной острой трещины. Многочисленные исследования, проведенные представителями различных научных школ, показали [1–11], что при увеличении дистанции от вершины трещины регулярными слагаемыми пренебрегать нельзя. Путем сопоставления теоретического решения в рядах с экспериментально найденными значениями перемещений и напряжений, фиксируемыми современными и классическими поляризационно-оптическими техниками, в числе которых в последнее время преимущественно используются метод корреляции цифровых изображений (КЦИ) [2–5], наиболее часто применяемый сейчас; цифровая голографическая интерферометрия [6; 7]; методы спекл-интерферометрии [8] и метод цифровой фотоупругости, сегодня обращающий на себя пристальное внимание [9–11], выяснено, что с увеличением расстояния от кончика острой трещины (при расширении исследуемой зоны) особые (сингулярные) слагаемые уже не в полной мере характеризуют искомые поля у вершины трещины, поэтому существенность и вклад слагаемых более высокого порядка становятся бесспорными и очевидными. Для анизотропных материалов, таких как горные породы, древесина, есть много примеров, когда зона процесса разрушения находится за пределами сингулярной доминирующей зоны, что требует учета слагаемых более высокого порядка малости [12–14]. Для воз-

возможного построения асимптотических решений, учитывающих неособые слагаемые ряда, в окрестности вершины острой трещины и выреза в образцах с заданными, конечными размерами в настоящей работе было проведено объемное компьютерное моделирование в конечно-элементном комплексе Simulia Abaqus, в котором выполнен большой цикл вычислений, направленных на определение напряженно-деформированного состояния в области, охватывающей вершину трещины в анизотропных ортотропных материалах, в частности с кубической симметрией их материальных свойств. Конечно-элементный анализ и вычисления нацелены на аккуратное определение полей напряжений в окрестности вершины острого разреза и использовании этих значений в алгоритме переопределенного метода. В вычислительных экспериментах варьировались два угла: угол наклона трещины к горизонтали, что позволяет рассмотреть все типы комбинированного нагружения от эталонного чистого отрыва до эталонного чистого сдвига, и угол между трещиной и осью симметрии упругих свойств материала.

1. Математическая постановка задачи

Хрупкое разрушение является частой причиной разрушения механических компонентов, особенно при наличии острых трещин. В условиях хрупкого разрушения область локализации неупругих деформаций вокруг вершины трещины оказывается относительно малой, и для исследования механического отклика образцов можно использовать концепцию и решения линейной механики хрупкого разрушения. Для образца с трещиной (рис. 1.1), подвергнутого произвольной нагрузке в плоскости, разложение в ряд М. Уильямса отражает упругие напряжения вокруг вершины трещины:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(r, \theta) \\ \sigma_{22}(r, \theta) \\ \sigma_{12}(r, \theta) \end{Bmatrix} = \\ & = 2Re \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{n/2-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ -\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} + \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \end{bmatrix} \right\} + (1.1) \\ & + Re \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{n/2-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_1^2 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ -\mu_2 \mu_1^{\frac{(-1)^n}{2}} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} + \mu_1 \mu_2^{\frac{(-1)^n+1}{2}} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине математического разреза; μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения; a_n^1, a_n^2 — коэффициенты ряда, являющиеся функциями приложенной нагрузки и конфигурации образца и подлежащие определению.

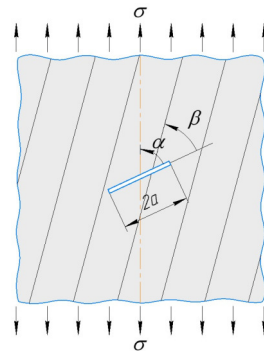


Рис. 1.1. Пластина с трещиной в анизотропном материале
 Fig. 1.1. Plate with a crack in an anisotropic material

В (1.1) μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения, имеющего вид

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0, \quad (1.2)$$

где S_{ij} — компоненты тензора податливости.

Большинство анизотропных материалов, таких как горные породы, обладают одной или несколькими плоскостями симметрии, что уменьшает количество независимых упругих констант, необходимых для

их характеристики. Например, ортотропные материалы имеют три ортогональные плоскости симметрии, что приводит к сокращению числа упругих постоянных до девяти. Далее, число упругих модулей во многих случаях снижается за счет принятия гипотезы Сен-Венана [15]. В настоящем анализе используются исходные значения компонент тензора упругих модулей без каких бы то ни было упрощений. На сегодняшний день доступно использование базы данных Materials Project [16], являющейся общедоступной базой химических и механических свойств материалов, созданной для предоставления этих данных общественности с целью ускорения процесса обнаружения новых материалов, а также дополняющей сведениям о них. Используя возможности суперкомпьютеров и новейшие методы моделирования свойств материалов, Materials Project обеспечивает открытый веб-доступ к вычисленной информации об известных материалах, а также мощные инструменты анализа, которые помогут вдохновить и разработать новые материалы (рис. 1.2 и 1.3). В качестве примера рассмотрен материал $CsSnI_3$. Матрица упругих констант материала $CsSnI_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 17 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

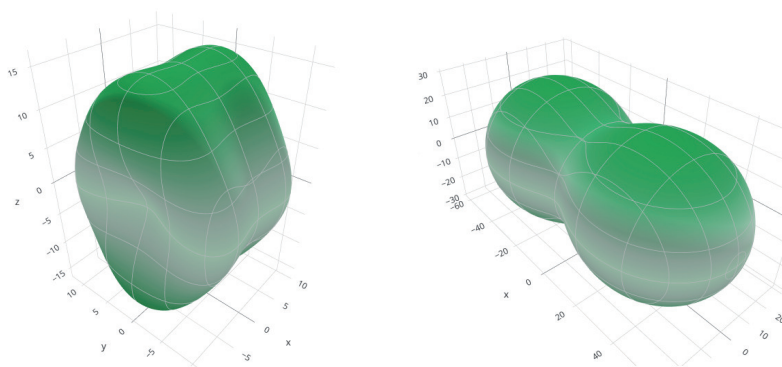


Рис. 1.2. Визуализация упругих свойств рассматриваемого материала: модуль Юнга (слева) и сжимаемость (справа)

Fig. 1.2. Visualization of the elastic properties of the material in question: Young's modulus (left) and compressibility (right)

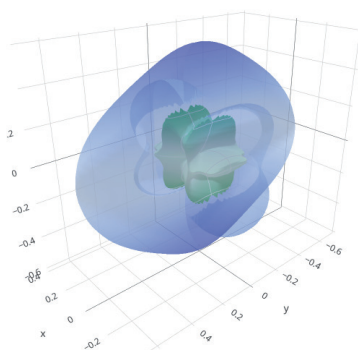


Рис. 1.3. Визуализация упругих свойств рассматриваемого материала: пространственное распределение коэффициента Пуассона

Fig. 1.3. Visualization of the elastic properties of the material in question: spatial distribution of Poisson's ratio

2. Конечно-элементное решение задачи о комбинированном нагружении пластины с горизонтальной и наклонной трещиной в анизотропном материале и его анализ

Для определения напряженно-деформированного состояния в образце с центральным разрезом из перовскита и последующего нахождения амплитудных множителей a_n^1 , a_n^2 проведена серия конечно-элементных вычислений, в ходе которой были определены поля напряжений и перемещений у вершины разреза. Все вычисления были выполнены в конечно-элементном пакете SIMULIA Abaqus. Для построения сетки в окрестности вершины трещины использовались сингулярные конечные элементы, количество узлов вдоль окружностей, охватывающих вершины трещины, равно 144. Таким образом, при экспортировании значений компонент тензора напряжений имеется возможность сформировать переопределенную систему уравнений, состоящую из 435 уравнений, если избирается один контур для анализа, 870 уравнений в случае выбора двух контуров и т. д.

Результаты вычислений представлены на рисунках.

На рис. 2.1 показаны распределения компонент тензора напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для различных углов наклона трещины и расположения осей симметрии упругих свойств материала.

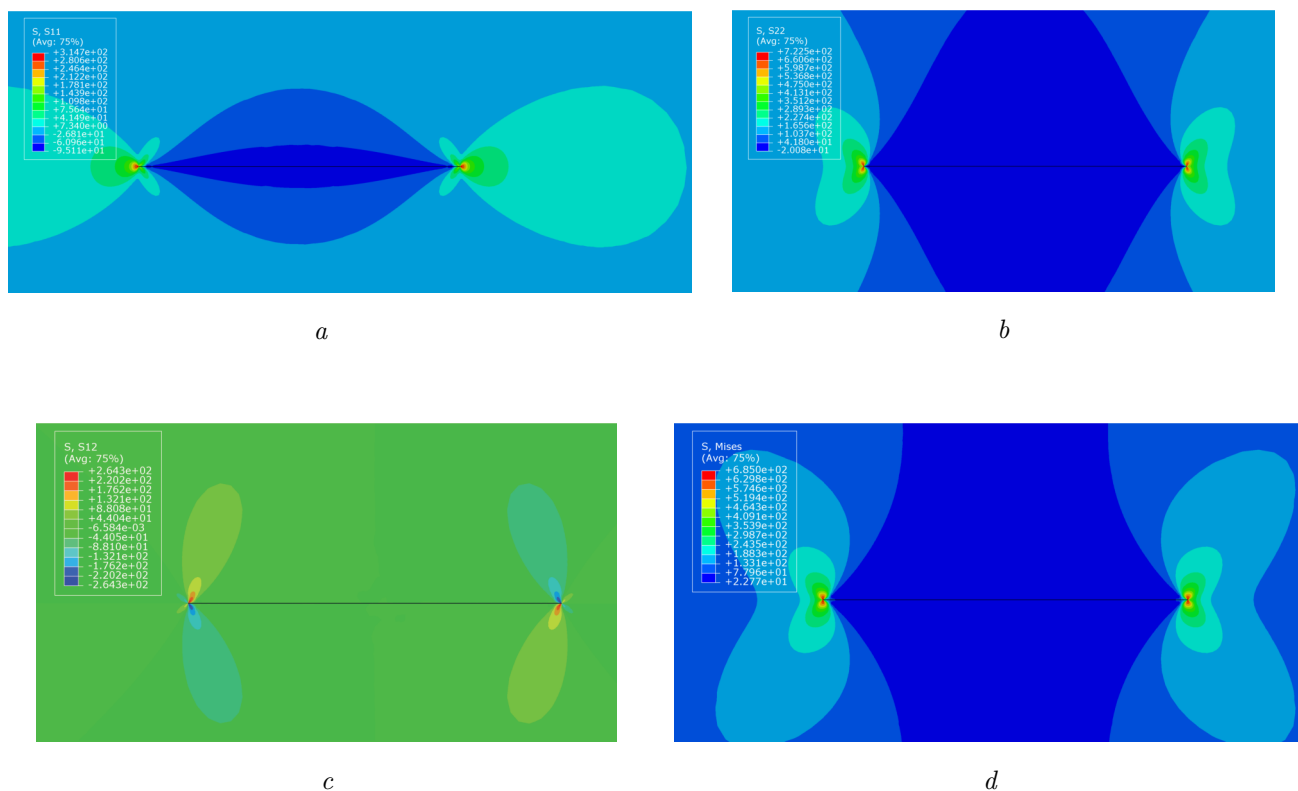


Рис. 2.1. Распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для углов $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$: a — σ_{11} , b — σ_{22} , c — σ_{12} , d — интенсивность касательных напряжений

Fig. 2.1. Distributions of stress tensor components and stress intensity for angles $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$:
 a — σ_{11} , b — σ_{22} , c — σ_{12} , d — tangential stress intensity

На рис. 2.2 приведены распределения напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для угла наклона трещины $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 30^\circ$; на рис. 2.3 показаны распределения напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для угла наклона трещины $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 0^\circ$; на рис. 2.4 — распределения напряжений σ_{ij} в окрестности вершины трещины для угла наклона трещины $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Полученные численные решения задач о комбинированном нагружении пластины с надрезом были использованы для воспроизведения аналитического решения вблизи кончика трещины в анизотропном материале с помощью переопределенного метода.

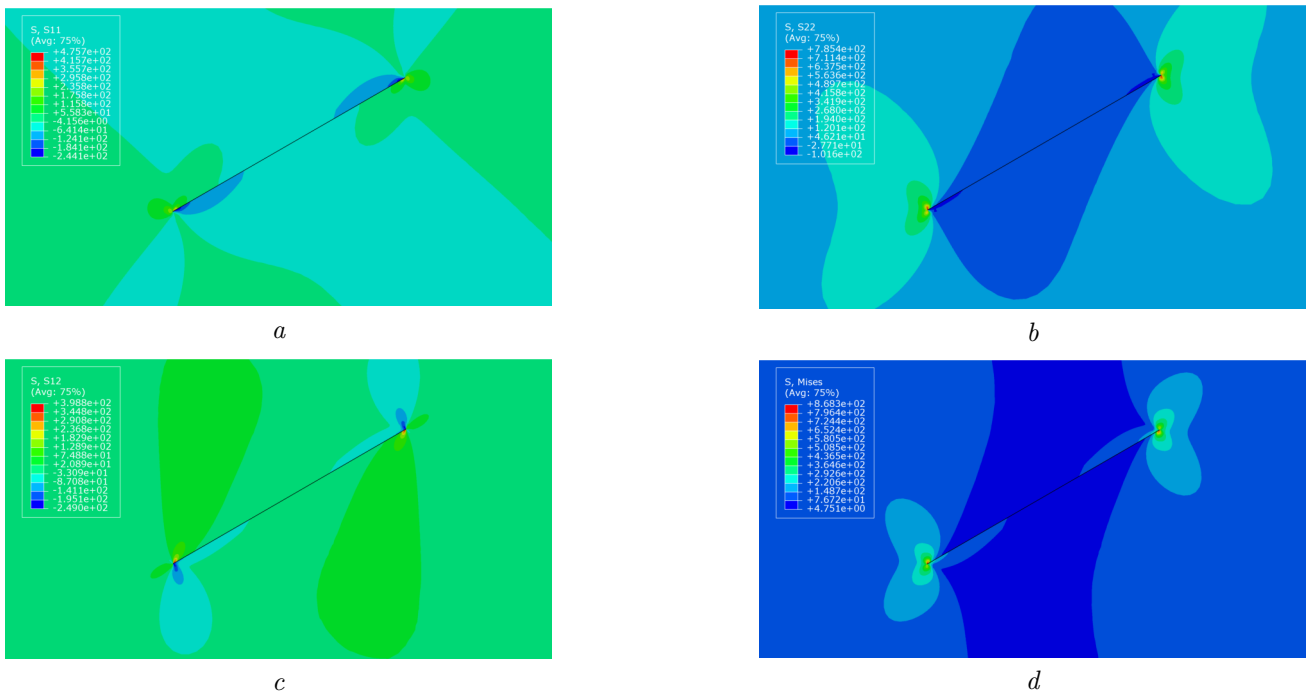


Рис. 2.2. Распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$: a — σ_{11} , b — σ_{22} , c — σ_{12} , d — интенсивность касательных напряжений

Fig. 2.2. Distributions of stress tensor components and stress intensity for angles $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$:

a — σ_{11} , b — σ_{22} , c — σ_{12} , d — intensity of tangential stresses

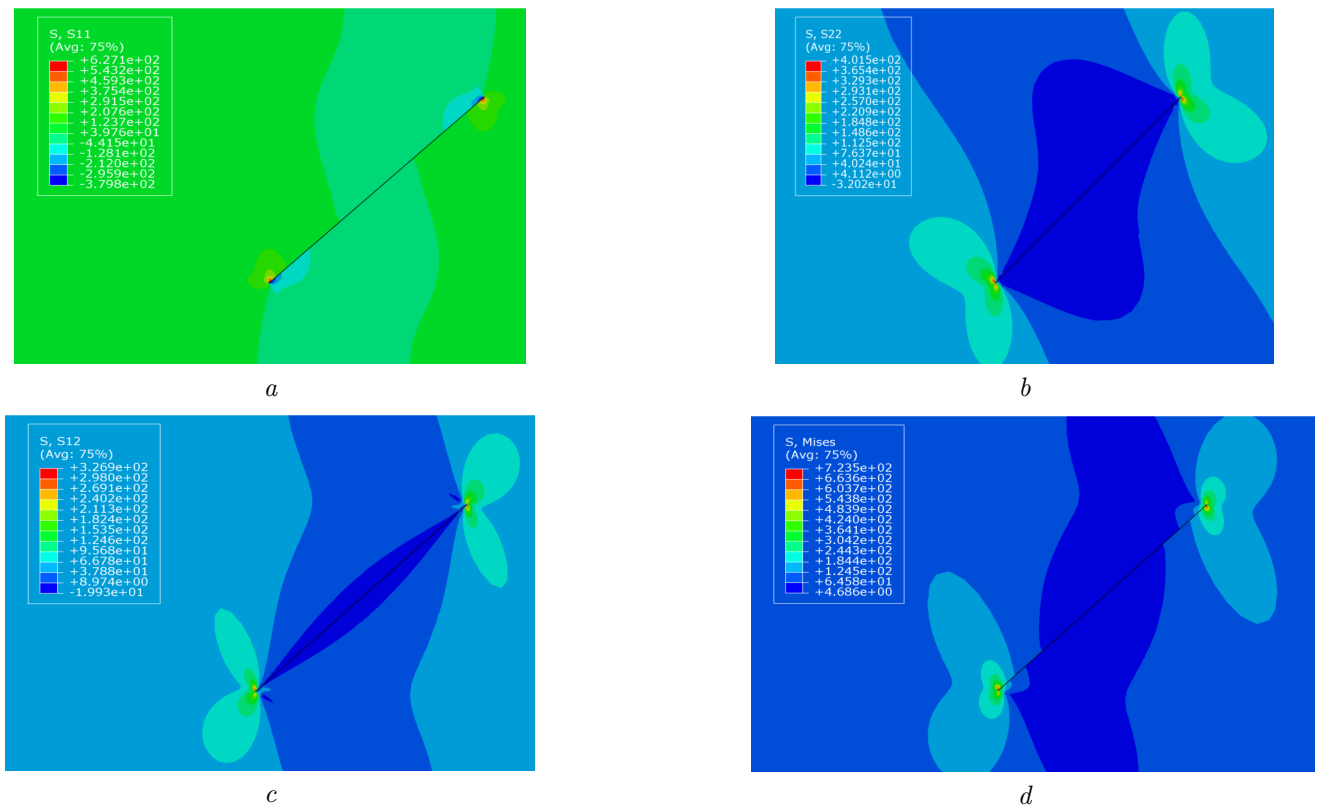


Рис. 2.3. Распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для углов $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$: a — σ_{11} , b — σ_{22} , c — σ_{12} , d — интенсивность касательных напряжений

Fig. 2.3. Distributions of stress tensor components and stress intensity for angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$:

a — σ_{11} , b — σ_{22} , c — σ_{12} , d — intensity of tangential stresses

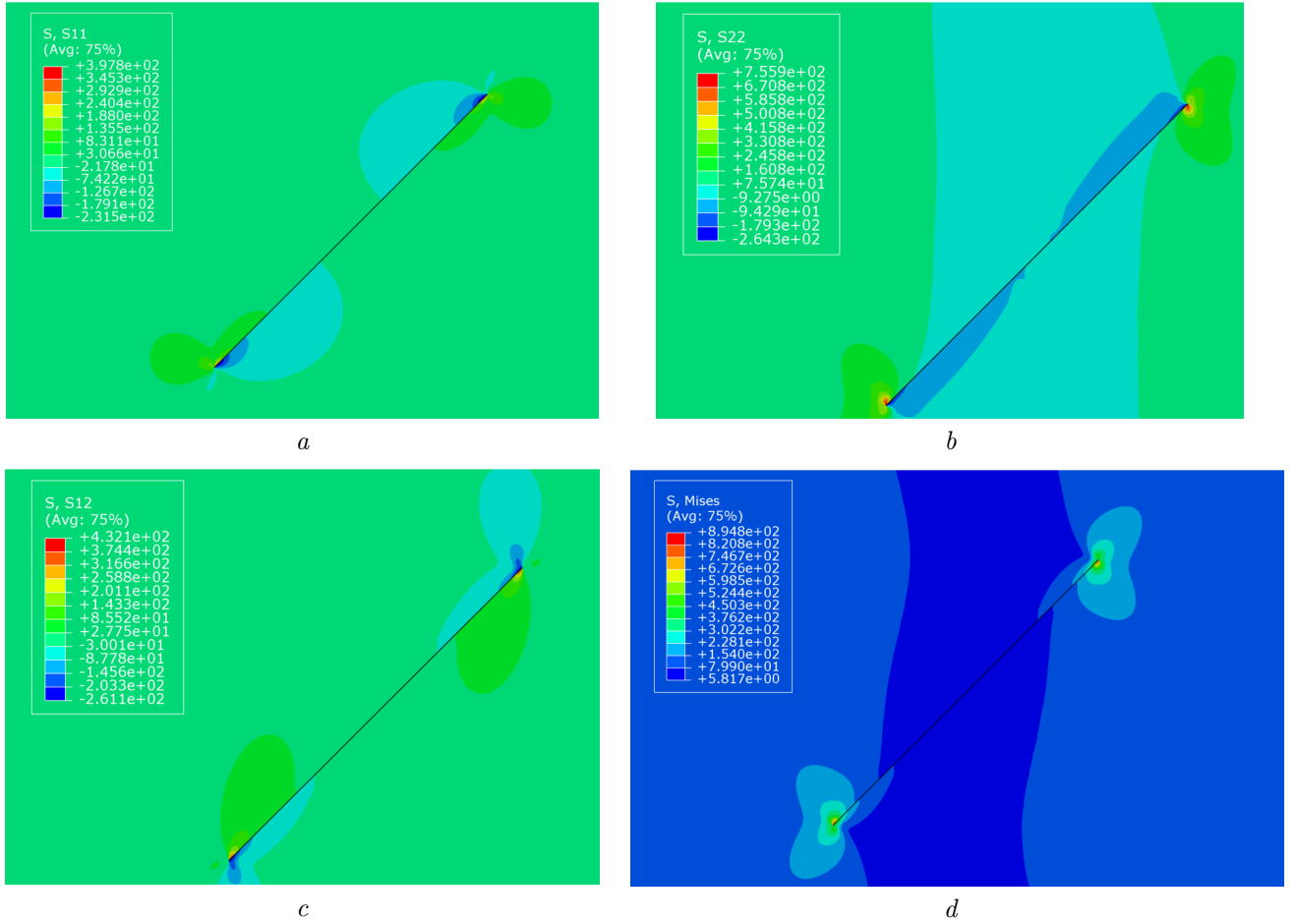


Рис. 2.4. Распределения напряжений и интенсивности напряжений при углах $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$:
 $a - \sigma_{11}$, $b - \sigma_{22}$, $c - \sigma_{12}$, $d -$ интенсивность касательных напряжений
 Fig. 2.4. Distributions of stresses and stress intensity at angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$:
 $c - \sigma_{12}$, $d -$ tangential stress intensity

3. Техника переопределенного метода

В настоящее время переопределенный метод [17] нахождения коэффициентов ряда Уильямса или его обобщений на случай анизотропных сред стал основным способом определения значений коэффициентов [1–14]. В большинстве случаев алгоритм переопределенного метода основан на использовании значений компонент вектора перемещений у вершины трещины, что приводит к необходимости аккуратного исключения перемещения тела как абсолютно твердого тела. В настоящей работе используется подход, базирующийся на применении компонент тензора напряжений, что упрощает вычисления. С целью реконструкции асимптотического разложения полей напряжений у вершины трещины из конечно-элементного решения выбирались значения компонент тензора напряжений вдоль окружностей, охватывающих вершину трещины (рис. 3.1).

Для определения коэффициентов разложений (1.1), представляемых в кратком виде:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m r^{n/2-1} f_{m,ij}^{(n)}(\theta), \quad (3.1)$$

оно в может быть записано в матричной форме

$$\Sigma = CA, \quad (3.2)$$

где Σ — вектор-строка, состоящая из известных значений компонент тензора напряжений; C — матрица порядка, состоящая из известных радиальных и угловых распределений компонент тензора напряжений; A — вектор-столбец, состоящий из искоемых амплитудных множителей a_n^1 и a_n^2 .

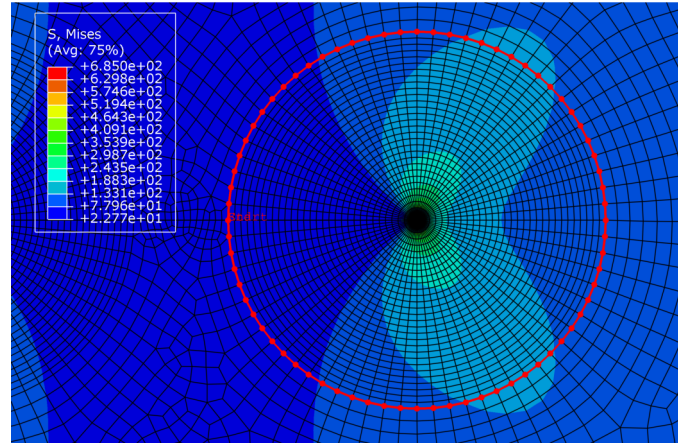


Рис. 3.1. Путь для извлечения значений компонент напряжений в окрестности вершины трещины
Fig. 3.1. Path to extract stress component values in the vicinity of the crack tip

В раскрытой форме матрица C имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{1,11}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,11}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,11}^{(2)}(\theta_1) & f_{2,11}^{(2)}(\theta_1) & \cdots & f_{1,11}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,11}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,22}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,22}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,22}^{(2)}(\theta_1) & f_{2,22}^{(2)}(\theta_1) & \cdots & f_{1,22}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,22}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,12}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,12}^{(1)}(\theta_1) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,12}^{(2)}(\theta_1) & f_{2,12}^{(2)}(\theta_1) & \cdots & f_{1,12}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,12}^{(n)}(\theta_1) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,11}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,11}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,11}^{(2)}(\theta_2) & f_{2,11}^{(2)}(\theta_2) & \cdots & f_{1,11}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,11}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,22}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,22}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,22}^{(2)}(\theta_2) & f_{2,22}^{(2)}(\theta_2) & \cdots & f_{1,22}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,22}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,12}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,12}^{(1)}(\theta_2) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,12}^{(2)}(\theta_2) & f_{2,12}^{(2)}(\theta_2) & \cdots & f_{1,12}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,12}^{(n)}(\theta_2) r^{\frac{n}{2}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{1,11}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,11}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,11}^{(2)}(\theta_k) & f_{2,11}^{(2)}(\theta_k) & \cdots & f_{1,11}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,11}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,22}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,22}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,22}^{(2)}(\theta_k) & f_{2,22}^{(2)}(\theta_k) & \cdots & f_{1,22}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,22}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} \\ f_{1,12}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{2,12}^{(1)}(\theta_k) r^{-\frac{1}{2}} & f_{1,12}^{(2)}(\theta_k) & f_{2,12}^{(2)}(\theta_k) & \cdots & f_{1,12}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} & f_{2,12}^{(n)}(\theta_k) r^{\frac{n}{2}-1} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Таким образом, Σ — матрица, имеющая одну строку и $3M$ столбцов, где M — число точек, извлеченных из конечно-элементного анализа, размерность матрицы C равна $3M \times 2K - 1$, где K — количество слагаемых, удерживаемых в асимптотическом разложении поля напряжений. В общем случае можно сохранять различное число слагаемых, соответствующих нормальному отрыву и поперечному сдвигу, но в данном случае сохранялось одинаковое число слагаемых.

В качестве тестового образца была выбрана квадратная пластина, длина стороны которой была много больше длины трещины. Результаты расчета алгоритма переопределенного метода сопоставлялись с аналитическим решением задачи о растяжении бесконечной плоскости с математическим разрезом. Результаты сравнения конечно-элементного решения и аналитического решения для большой пластины с малым дефектом приведены на рис. 3.2–3.5. Сплошными линиями изображены угловые распределения компонент тензора напряжений, определенные в соответствии с аналитическим решением задачи при сохранении различного числа слагаемых в разложении. Точками показаны результаты конечно-элементного анализа. Из представленных графиков следует, что конечно-элементное решение полностью совпадает с асимптотическим решением с коэффициентами ряда, найденными с помощью переопределенного метода. Таким образом, можно заключить, что переопределенный метод, основанный на конечно-элементном анализе напряженного состояния, позволяет с хорошей точностью воспроизвести коэффициенты обобщенного ряда и дать асимптотическое представление напряжений.

Далее, в конечно-элементном пакете Simulai Abaqus была рассмотрена серия экспериментов для квадратной пластины со стороной $l = 10$ см и длиной трещины, равной $2a = 1$ см. Полученные коэффициенты ряда, обобщающего ряд Уильямса на случай ортотропных материалов, для растягиваемой пластины оказались следующими:

$$\begin{aligned} a_1 &= 18.755 \frac{\text{Па}\sqrt{\text{см}}}{\text{Па}}, a_2 = -4.211 \frac{\text{Па}}{\text{Па}}, a_3 = 13.7 \frac{\text{Па}}{\sqrt{\text{см}}}, a_4 = 0, \\ a_5 &= -3.162 \frac{\text{Па}}{\text{см}^{3/2}}, a_6 = 0.617 \frac{\text{Па}}{\text{см}^2}, a_7 = 0.629 \frac{\text{Па}}{\text{см}^{5/2}}, a_8 = 0, \\ a_9 &= 0.115 \frac{\text{Па}}{\text{см}^{7/2}}, a_{10} = 0.01 \frac{\text{Па}}{\text{см}^4}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

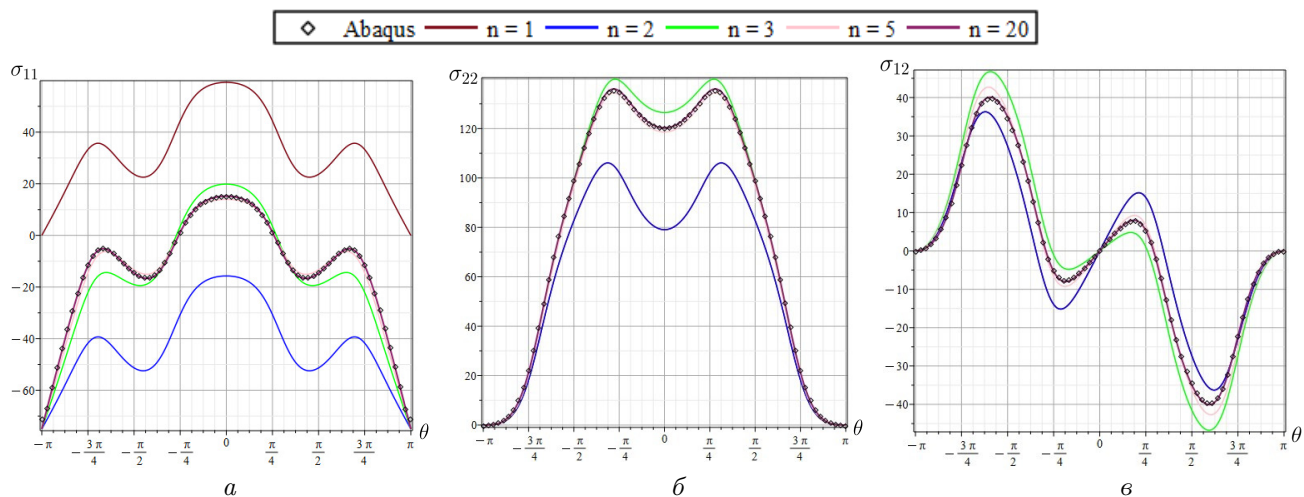


Рис. 3.2. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Fig. 3.2. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

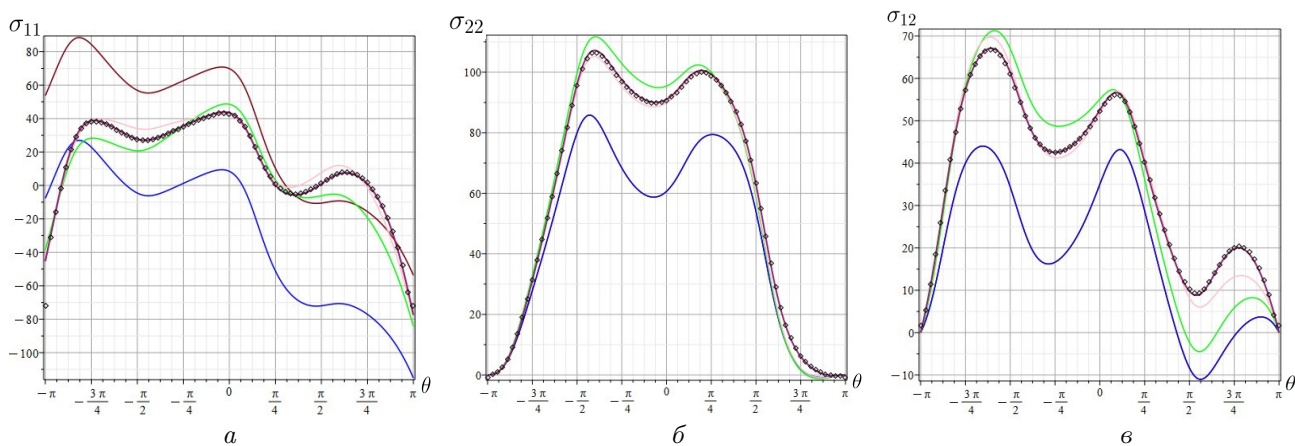


Рис. 3.3. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Fig. 3.3. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

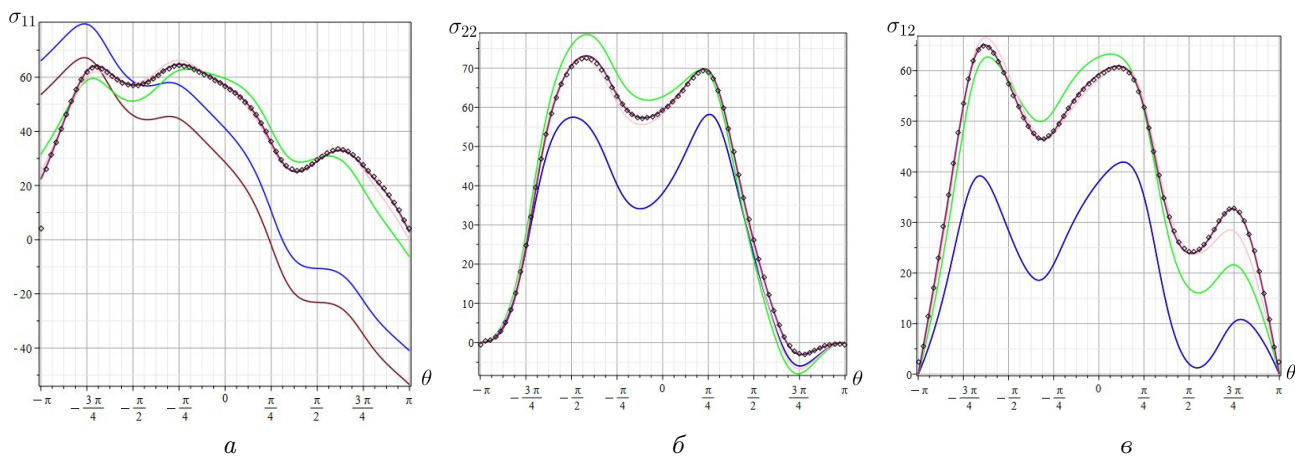


Рис. 3.4. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Fig. 3.4. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

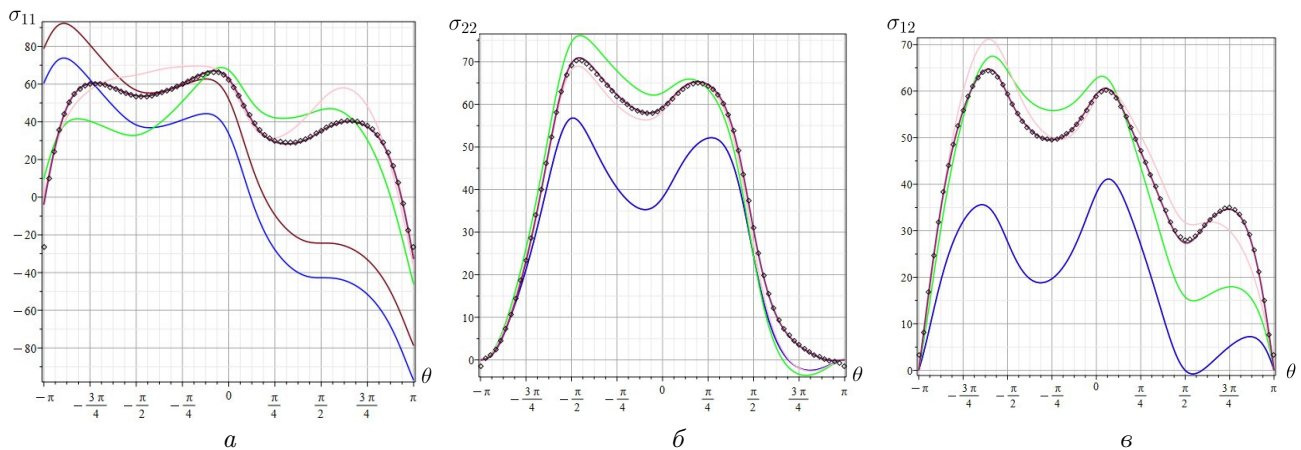


Рис. 3.5. Угловые распределения компонент тензора напряжений для углов $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Fig. 3.5. Angular distributions of stress tensor components for angles $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Подставив полученные коэффициенты (3.4) в асимптотическое представление для компонент тензора напряжений (1.1), можно получить следующие графики (рис. 3.6).

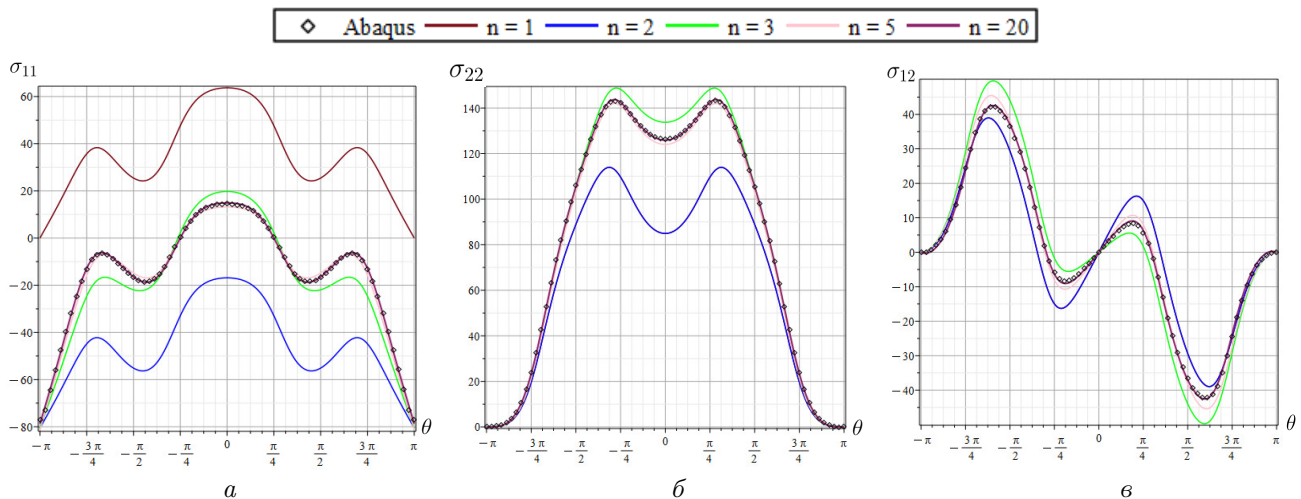


Рис. 3.6. Угловые распределения напряжений при углах $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$ для пластины с размерами $f = 10$ см, $b = 10$ см, $a = 1$ см: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Fig. 3.6. Angular stress distributions at angles $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$ for a plate with dimensions $f = 10$ cm, $b = 10$ cm, $a = 1$ cm: а — σ_{11} , б — σ_{22} , в — σ_{12}

Выводы

В работе дано обобщение переопределенного метода отыскания амплитудных множителей слагаемых высших порядков — коэффициентов ряда, обобщающего решение М. Уильямса на анизотропные среды. Представлены описание метода и опыт его применения на примере пластины, ослабленной центральным математическим разрезом, из анизотропного материала с кубической сингонией его свойств и в целом анизотропных ортотропных материалов. С помощью решения переопределенной системы уравнений вычислены коэффициенты членов разложения Уильямса более высокого порядка. Новизна рассматриваемого подхода заключается в использовании поля напряжений в расчетной схеме переопределенного метода. Процедура переопределенного метода, основанная на значениях компонент тензора напряжений, является более простой по сравнению с техникой, базирующейся на применении компонент вектора перемещений.

Литература

- [1] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Zhu C., Ren T., Zhang Q. Nonlinear optimization DIC method inspired by unsupervised learning for high order displacement measurement // *Optics and Lasers in Engineering*. 2024. Vol. 178. 108250.
- [3] Gonzales G.L.G., Antunes F.V., Sergio E.R., Vasco-Olmo J.M., Diaz F.A., Neto D.M. A comparison between FEM predictions and DIC results of crack tip displacement field in CT specimens made of titanium // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. Vol. 127. P. 104055. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104055>.
- [4] Lammens B., Portemont G., Berthe J., Seghir R., Rethore J. Determining singular and non-singular Williams' expansion terms from full-field measurements: Consideration of structural effects on fracture behavior. // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 130. P. 104304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104304>.
- [5] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods // *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 296. P. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V. Holographic interferometry experiments and numerical analyses of the stress field on the Williams series expansion: higher – order terms // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol 39. P. 761–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.150>.
- [7] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Crack tip monitoring by multiscale optical experimental techniques // *International Journal of Fatigue*. 2022. Vol. 155. P. 106610. DOI: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.29006.18244>.
- [8] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Electronic Speckle Pattern Interferometry for fatigue crack monitoring // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol. 37. P. 873–879. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.021>.
- [9] Patil P.P., Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // *Optics and Lasers in Engineering*. 2017. Vol. 93. P. 182–194. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.
- [10] Belova O.N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: construction of the Williams series expansion // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol. 37. P. 888–899. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.023>.
- [11] Xu L.R. Experimental studies on the static sharp notch effects during dynamic crack kinking/nucleation at the material interfaces // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. P. 104476.
- [12] Hou C. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic // *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 242. P. 107455. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455>.
- [13] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods // *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 296. P. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [14] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 231. P. 106982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [15] de Saint-Venant. Memoire sur la distribution des elasticites autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans etre isotrope // *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*. 1863. Serie 2. Vol. 8. P. 353–430. URL: http://www.numdam.org/item/JMPA_1863_2_8_353_0.
- [16] The Materials Project. URL: <https://next-gen.materialsproject.org> (дата обращения: 10.01.2024).
- [17] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-Revisited // *Engineering Fracture Mechanics*. 1997. Vol. 56, issue 1. P. 25–41; 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66

Submitted: 11.02.2024

Revised: 23.03.2024

Accepted: 15.05.2024

M.A. Fomchenkova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: Masha18072013@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3227-5433>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: stepanova.l.v.@ssau.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

PROCEDURE OF THE OVERDETERMINISTIC METHOD FOR FINDING THE FIELD EXPANSION COEFFICIENTS AT THE CRACK TIP BASED ON A FINITE ELEMENT SOLUTION FOR THE STRESS TENSOR COMPONENTS

ABSTRACT

The article proposes and implements a procedure for reconstructing the asymptotic series expansion of stress, strain and displacement fields in anisotropic materials, generalizing the Williams solution for linearly elastic isotropic materials, based on a finite element solution to the problem of deforming a sample with a defect in an anisotropic orthotropic material in the approximation of a plane problem of elasticity theory. The stress field expansion coefficients near the crack tip in an anisotropic material are determined using an overdeterministic method originally proposed to reconstruct the asymptotic expansion from experimental data of a photoelastic study. In this paper, this method is extended to anisotropic materials with various types of symmetry and the novelty of the proposed approach lies in the reconstruction of the asymptotic expansion from the finite element solution for the stress tensor components in the nodes of the finite element grid, which allows us not to exclude their displacement fields components corresponding to the displacement of a body as an absolutely solid body. In the proposed approach, it is possible to use data from finite element calculations directly in the scheme of the overdeterministic method. It is shown that the coefficients of higher approximations are reliably determined by an overdeterministic method based on the stress field found from finite element analysis.

Key words: finite element method; anisotropic media; crack; stress fields at the crack tip; asymptotic solution.

Citation. Fomchenkova M.A., Stepanova L.V. Procedure of the overdeterministic method for finding the field expansion coefficients at the crack tip based on a finite element solution for the stress tensor components. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 54–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Fomchenkova M.A., Stepanova L.V., 2024

Maria A. Fomchenkova — Master's degree student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
- [2] Zhu C., Ren T., Zhang Q. Nonlinear optimization DIC method inspired by unsupervised learning for high order displacement measurement. *Optics and Lasers in Engineering*, 2024, vol. 178, p. 108250.
- [3] Gonzales G.L.G., Antunes F.V., Sergio E.R., Vasco-Olmo J.M., Diaz F.A., Neto D.M. A comparison between FEM predictions and DIC results of crack tip displacement field in CT specimens made of titanium. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2023, vol. 127, p. 104055. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104055>.

- [4] Lammens B., Portemont G., Berthe J., Seghir R., Rethore J. Determining singular and non-singular Williams' expansion terms from full-field measurements: consideration of structural effects on fracture behavior. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, vol. 130, p. 104304. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104304>.
- [5] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 296, p. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [6] Belova O.N., Stepanova L.V. Holographic interferometry experiments and numerical analyses of the stress field on the Williams series expansion: higher – order terms. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 39, pp. 761–769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.03.150>.
- [7] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Crack tip monitoring by multiscale optical experimental techniques. *International Journal of Fatigue*, 2022, vol. 155, p. 106610. DOI: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.29006.18244>.
- [8] Farahani B.V., Direito F., Sousa P.J., Tavares P.J., Infante V., Moreira P.P.M.G. Electronic Speckle Pattern Interferometry for fatigue crack monitoring. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 37, pp. 873–879. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.021>.
- [9] Patil P.P., Vyasrayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, vol. 93, pp. 182–194. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.
- [10] Belova O.N., Stepanova L.V., Kosygina L.N. Experimental study on the interaction between two cracks by digital photoelasticity method: construction of the Williams series expansion. *Procedia Structural Integrity*, 2022, vol. 37, pp. 888–899. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.02.023>.
- [11] Xu L.R. Experimental studies on the static sharp notch effects during dynamic crack kinking/nucleation at the material interfaces. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2024, p. 104476.
- [12] Hou C. Determination of SIFs and T-stress using an over-deterministic method based on stress fields: Static and dynamic. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, vol. 242, p. 107455. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107455>.
- [13] Shi L., Olutunde Oyadiji S. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 2024, vol. 296, p. 109852. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
- [14] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 231, p. 106982. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
- [15] de Saint-Venant. Memoire sur la distribution des elasticites autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulierement lorsqu'il est amorphe sans etre isotrope. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 1863, serie 2, vol. 8, pp. 353–430. Available at: http://www.numdam.org/item/JMPA_1863_2_8_353_0.
- [16] The Materials Project. Available at: <https://next-gen.materialsproject.org> (accessed 10.01.2024).
- [17] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity-Revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, vol. 56, issue 1, pp. 25–41; 43–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).