

ФИЗИКА

PHYSICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 25.12.2023
после рецензирования: 01.02.2024
принятия статьи: 28.02.2024**А.Р. Багров**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>**Е.К. Башкиров**Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>**ДИНАМИКА ПЕРЕПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ
ГРИНБЕРГЕРА — ХОРНА — ЦАЙЛИНГЕРА В ТРЕХКУБИТНОЙ
ТЕПЛОВОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА****АННОТАЦИЯ**

В данной статье мы исследовали динамику систем двух и трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с выделенной модой общего теплового поля резонатора без потерь. Нами найдено решение квантового временного уравнения Лиувилля для различных трех- и двухкубитных перепутанных состояний кубитов. На основе указанных решений проведено вычисление критерия перепутанности кубитов – степени совпадения. Результаты численного моделирования степени совпадения показали, что увеличение среднего числа фотонов в моде приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания. При этом показано, что двухкубитное перепутанное состояние более устойчиво по отношению к внешнему шуму, нежели трехкубитные перепутанные состояния Гринбергера — Хорна — Цайлингера (GHZ). При этом истинно перепутанное GHZ -состояние более устойчиво к шуму, чем GHZ -подобное перепутанное состояние.

Ключевые слова: кубиты; трехкубитные состояния Гринбергера — Хорна — Цайлингера; резонансное взаимодействие; резонатор; тепловое поле; перепутывание; степень совпадения.

Цитирование. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика перепутанных состояний Гринбергера — Хорна — Цайлингера в трехкубитной тепловой модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 1. С. 82–95. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Багров А.Р., Башкиров Е.К., 2024

Александр Романович Багров — магистр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Перепутанные состояния в настоящее время являются основным ресурсом физики квантовых вычислений, квантовых коммуникаций и квантовой криптографии, квантовой метрологии и т. д. [1–10]. Используя различные классы перепутанных состояний, можно ускорить вычисления, обеспечить безопасность коммуникаций и преодолеть стандартные квантовые пределы при измерениях. Для многокубитных систем существуют несколько неэквивалентных классов перепутанных состояний [11–13]. В частности, для простейшего случая трехкубитной системы существуют всего два подлинно перепутанных состояния [14–19]. К последним относятся перепутанные состояния Гринбергера — Хорна — Цайлингера (GHZ -состояния) и перепутанные состояния Вернера (W -состояния). Среди всех классов перепутанных состояний GHZ -состояния являются одними из наиболее востребованных состояний для целей квантовой информатики и квантовой метрологии [20–23]. В последние годы многочастичные GHZ -состояния были реализованы для различных физических систем кубитов: ионов в ловушках [24–26], ридберговских атомов [27], фотонов [28–30], сверхпроводящих кубитов [31–33]. Указанные работы открыли новые возможности в развитии масштабируемых квантовых компьютеров, квантовой метрологии и квантовой связи. В работах [22; 23] осуществлено перепутывание до 20 кубитов с точностью (степенью совпадения) выше 0,5. Точность и технические сложности в реализации перепутанных состояний кубитов растут экспоненциально с увеличением числа кубитов. Сложности теоретического анализа динамики GHZ -состояний также существенно возрастают с увеличением числа кубитов в системе. Поэтому при теоретическом рассмотрении таких состояний особое внимание уделяется анализу трехкубитных систем (см. ссылки в [34]). Для генерации, управления, контроля и измерения состояний систем кубитов используют электромагнитные поля резонаторов. При этом резонаторы функционируют при конечных температурах от мК для систем сверхпроводящих кубитов до комнатных в случае примесных спинов. Это означает, что кубиты взаимодействуют с тепловыми полями резонаторов. Такое взаимодействие приводит к осцилляциям Раби параметров перепутывания кубитов и, соответственно, к уменьшению степени их начального перепутывания. Еще одним эффектом, приводящим к ошибкам при измерении состояний кубитов, является мгновенная смерть перепутывания [35]. Указанный эффект экспериментально наблюдался для кубитов различной физической природы [36–38]. Поэтому представляет значительный интерес изучение методов, предотвращающих эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов, вызванной взаимодействием с тепловыми полями резонаторов. Изучение указанного эффекта для кубитов, взаимодействующих с тепловыми шумами резонаторов, особенно важно в связи с тем, что в резонаторах всех квантовых устройств обязательно присутствуют тепловые фотоны.

В нашей работе [39] мы детально исследовали динамику перепутывания в системе трех кубитов, резонансно взаимодействующих с модой теплового квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе, для сепарабельных, бисепарабельных и истинно перепутанных состояний W -типа. При этом было показано, что эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место для любых интенсивностей теплового поля резонатора. Представляет большой интерес изучить динамику трехкубитной модели в резонаторе для истинно перепутанного состояния кубитов GHZ -типа.

В настоящей статье мы исследовали динамику системы, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с модой теплового квантового электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных переходов, для перепутанных состояний кубитов GHZ -типа. При этом в качестве количественной меры перепутывания подсистемы кубитов использовались не отрицательности пар кубитов, а степень совпадения (fidelity) состояния подсистемы кубитов в произвольный момент времени и начального GHZ -состояния.

1. Модель и решение временного уравнения Шредингера

Рассмотрим систему трех идентичных кубитов Q_1, Q_2, Q_3 , резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой модели в дипольном приближении и приближении вращающейся волны можно представить в виде

$$\hat{H}_{int} = \sum_{k=1}^3 \hbar \gamma (\hat{\sigma}_k^+ \hat{c} + \hat{\sigma}_k^- \hat{c}^\dagger), \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_k^+ = |+\rangle_{kk} \langle -|$ и $\hat{\sigma}_k^- = |-\rangle_{kk} \langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в k -м кубите, $|-\rangle_k$ — основное и $|+\rangle_k$ — возбужденное состояние k -го кубита ($k = 1, 2, 3$), $\hat{c}^\dagger$ и $\hat{c}$ — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды и γ — параметр кубит-фотонного взаимодействия.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в истинно перепутанном состоянии GHZ -типа

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \theta |+, +, +\rangle + \sin \theta |-, -, -\rangle \quad (2)$$

или GHZ -подобном состоянии вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \varphi |+, -, -\rangle + \sin \varphi |-, +, +\rangle, \quad (3)$$

где θ и φ — параметры, определяющие степень начального перепутывания кубитов. Начальные состояния кубитов вида (2) и (3) в резонаторах можно получить с помощью импульсов электромагнитного поля определенной длительностью.

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\varrho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (4)$$

Здесь весовые функции p_n в формуле (4) имеют вид

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n}$ — среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе–Эйнштейна

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1)^{-1},$$

здесь k_B — постоянная Больцмана и T — температура микроволнового резонатора.

Поставим перед собой задачу найти динамику рассматриваемой модели для начального состояния кубитов (2) и (3) и теплового поля резонатора (4). В качестве первого шага для решения поставленной задачи рассмотрим решение уравнения эволюции в случае фоковского начального состояния электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим полученные результаты для теплового состояния поля резонатора (4).

В случае чистого фоковского состояния начальную волновую функцию поля резонатора выберем в виде

$$|\phi(0)\rangle_{F,n} = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Найдем вначале временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля (5), а потом обобщим результаты на случай теплового поля резонатора. Введем для нашей системы число возбуждений N , равное $N = q + n$, где q — число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Для чисел возбуждения $N \geq 3$ оператор эволюции рассматриваемой системы имеет вид

$$S(n, t) = \begin{pmatrix} S_{11}(n, t) & \cdots & S_{18}(n, t) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{81}(n, t) & \cdots & S_{88}(n, t) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} S_{11}(n, t) &= \frac{(7 + 2n + \Omega_n) \cos(\theta_1 \gamma t) + (-7 - 2n + \Omega_n) \cos(\theta_2 \gamma t)}{2\Omega_n}, \\ S_{22}(n, t) &= \frac{4\Omega_n \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t) + (-1 - 2n + \Omega_n) \cos(\theta_1 \gamma t) + (1 + 2n + \Omega_n) \cos(\theta_2 \gamma t)}{6\Omega_n}, \\ S_{12}(n, t) &= -i \frac{(7 + 2n + \Omega_n) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (-7 - 2n + \Omega_n) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{6\sqrt{1 + n} \Omega_n}, \\ S_{15}(n, t) &= \frac{\sqrt{(1 + n)(2 + n)} (-\cos(\theta_1 \gamma t) + \cos(\theta_2 \gamma t))}{\Omega}, \\ S_{25}(n, t) &= -i \frac{\sqrt{2 + n} \Omega_n \sin(\sqrt{2 + n} \gamma t) - (2 + n) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (2 + n) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{3\sqrt{2 + n} \Omega_n}, \\ S_{58}(n, t) &= -i \frac{(1 + 2n + \Omega_n) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (-1 - 2n + \Omega_n) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{6\sqrt{3 + n} \Omega_n}, \\ S_{18}(n, t) &= -i \frac{\sqrt{2 + n} (\sin(\theta_2 \gamma t) \theta_1 - \sin(\theta_1 \gamma t) \theta_2)}{\Omega_n}, \\ S_{55}(n, t) &= S_{22}(n, t) - \frac{1}{\Omega_n} (\cos(\theta_1 \gamma t) - \cos(\theta_2 \gamma t)), \quad S_{23}(n, t) = S_{22}(n, t) - \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t), \\ S_{88}(n, t) &= S_{11}(n, t) - \frac{3}{\Omega} (\cos(\theta_1 \gamma t) - \cos(\theta_2 \gamma t)), \quad S_{56}(n, t) = S_{55}(n, t) - \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t), \\ S_{27}(n, t) &= S_{25}(n, t) + i \sin(\sqrt{2 + n} \gamma t), \quad S_{28}(n, t) = \sqrt{\frac{n + 3}{n + 1}} S_{15}(n, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{22} = S_{33} = S_{44}, S_{55} = S_{66} = S_{77}, S_{12} = S_{13} = S_{14} = S_{21} = S_{31} = S_{41}, \\ S_{15} = S_{16} = S_{17} = S_{51} = S_{61} = S_{71}, S_{23} = S_{24} = S_{32} = S_{34} = S_{42} = S_{43}, \\ S_{27} = S_{36} = S_{45} = S_{54} = S_{63} = S_{72}, S_{56} = S_{57} = S_{65} = S_{67} = S_{75} = S_{76}, \\ S_{25} = S_{26} = S_{35} = S_{37} = S_{46} = S_{47} = S_{52} = S_{53} = S_{62} = S_{64} = S_{73} = S_{74}, \\ S_{28} = S_{38} = S_{48} = S_{82} = S_{83} = S_{84}, S_{58} = S_{68} = S_{78} = S_{85} = S_{86} = S_{87}, S_{18} = S_{81}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_n = \sqrt{9 + 16(n+2)^2}, \theta_1 = \sqrt{5(n+2) - \Omega_n}, \theta_2 = \sqrt{5(n+2) + \Omega_n}.$$

При записи оператора эволюции в матричной форме мы использовали базисные векторы вида

$$\begin{aligned} |+, +, +, n\rangle, |+, +, -, n+1\rangle, |+, -, +, n+1\rangle, |-, +, +, n+1\rangle, \\ |+, -, -, n+2\rangle, |-, +, -, n+2\rangle, |-, -, +, n+2\rangle, |-, -, -, n+3\rangle. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае волновую функцию можно найти как

$$|\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_n = S(n, t) |\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} |n\rangle. \quad (7)$$

В дальнейшем при обобщении результатов на случай теплового поля резонатора нам потребуются также волновые функции, соответствующие числам возбуждения $N = 2, 1, 0$. Для $N = 2$ базис гильбертова пространства должен быть сужен до набора

$$\begin{aligned} |+, +, -, 0\rangle, |+, -, +, 0\rangle, |-, +, +, 0\rangle, \\ |+, -, -, 1\rangle, |-, +, -, 1\rangle, |-, -, +, 1\rangle, |-, -, -, 2\rangle. \end{aligned}$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$\begin{aligned} |\Psi_1(t)\rangle = Z_1(t) |+, +, -, 0\rangle + Z_2(t) |+, -, +, 0\rangle + Z_3(t) |-, +, +, 0\rangle + \\ + Z_4(t) |+, -, -, 1\rangle + Z_5(t) |-, +, -, 1\rangle + Z_6(t) |-, -, +, 1\rangle + Z_7(t) |-, -, -, 2\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты $Z_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) есть

$$\begin{aligned} Z_1(t) = \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) + 5 \left(2C_1 - C_2 - C_3 \right) \cos \gamma t + \left(2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7 \right) \cos \sqrt{10}\gamma t - \right. \\ \left. - i \left(5(C_4 + C_5 - 2C_6) \sin \gamma t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}\gamma t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2(t) = \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) - 5(C_1 - 2C_2 + C_3) \cos \gamma t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7) \cos \sqrt{10}\gamma t - \right. \\ \left. - i \left(5(C_4 - 2C_5 + C_6) \sin \gamma t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}\gamma t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3(t) = \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) - 5(C_1 + C_2 - 2C_3) \cos \gamma t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7) \cos \sqrt{10}\gamma t + \right. \\ \left. + 5i(2C_4 - C_5 - C_6) \sin \gamma t - i\sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}\gamma t \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_4(t) = \frac{1}{15} \left[5(2C_4 - C_5 - C_6) \cos \gamma t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}\gamma t - i \left(5(C_1 + C_2 - 2C_3) \sin \gamma t + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}\gamma t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_5(t) = \frac{1}{15} \left[-5(C_4 - 2C_5 + C_6) \cos \gamma t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}\gamma t - i \left(5(C_1 - 2C_2 + C_3) \sin \gamma t + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}\gamma t \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_6(t) = \frac{1}{15} \left[-5(C_4 + C_5 - 2C_6) \cos \gamma t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}\gamma t + 5i(2C_1 - C_2 - C_3) \sin \gamma t - \right. \\ \left. - i\sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}\gamma t \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_7(t) = \frac{1}{5} \left[\sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_3 + 2C_7 + \left(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3C_7 \right) \cos \sqrt{10}\gamma t - i\sqrt{5}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}\gamma t \right]. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $C_i = Z_i(0)$.

Для $N = 1$ выбираем базис гильбертова пространства в виде

$$|+, -, -, 0\rangle, |-, +, -, 0\rangle, |-, -, +, 0\rangle, |-, -, -, 1\rangle.$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\Psi_2(t)\rangle = Y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + Y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + Y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + Y_4(t)|-, -, -, 1\rangle, \quad (9)$$

где коэффициенты $Y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) имеют вид

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \frac{1}{3} \left[2F_1 - F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}\gamma t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}\gamma t \right], \\ Y_2(t) &= \frac{1}{3} \left[-F_1 + 2F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}\gamma t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}\gamma t \right], \\ Y_3(t) &= \frac{1}{3} \left[-F_1 - F_2 + 2F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}\gamma t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}\gamma t \right], \\ Y_4(t) &= F_4 \cos \sqrt{3}\gamma t - \frac{i(F_1 + F_2 + F_3) \sin \sqrt{3}\gamma t}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $F_i = Y_i(0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Наконец, для $N = 0$ базис гильбертова пространства составляет вектор $|-, -, -, 0\rangle$. Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_3(t)\rangle = |-, -, -, 0\rangle. \quad (10)$$

2. Расчет степени совпадения состояний кубитов

Имея явный вид для временных волновых функций системы (7)–(10), мы можем вычислить временную матрицу плотности полной системы (три кубита+мода поля) в случае теплового состояния поля

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_n {}_n \langle \Psi(t)|. \quad (11)$$

Для вычисления параметра перепутывания кубитов нам потребуется редуцированная матрица плотности трех кубитов. Ее мы можем вычислить, усредняя выражение (11) по переменным поля

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) = S p_F \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t). \quad (12)$$

При исследовании перепутывания кубитов в рассматриваемой модели для сепарабельных, бисепарабельных и истинно перепутанных состояний W -типа в качестве количественного критерия перепутывания мы использовали отрицательности пар кубитов. В случае GHZ -состояний такой критерий малоинформативен, поскольку при усреднении трехкубитной матрицы плотности $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t)$ по переменным одного из кубитов два оставшихся кубита оказываются неперепутанными. Поэтому в настоящей работе мы в качестве количественного критерия перепутывания кубитов используем степень совпадения (fidelity) текущего состояния кубитов в момент времени t и их начального GHZ -состояния. В случае теплового поля резонатора состояние кубитов в произвольный момент времени является смешанным. Количественная мера степени совпадения для смешанных состояний кубитов предложена в работе [40]

$$F(\rho, \rho') = \left(\text{tr} \sqrt{\rho^{\frac{1}{2}} \rho' \rho^{\frac{1}{2}}} \right)^2. \quad (13)$$

В формуле (13) ρ – начальная матрица плотности системы и ρ' – матрица плотности кубитов в момент времени $t > 0$. Выражение (13) достаточно сложное, однако, если одна из матриц, допустим ρ , описывает чистое состояние ($\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$), то формула сильно упрощается:

$$F(\rho, \rho') = \left(\text{tr} \sqrt{|\psi\rangle\langle\psi| \rho' |\psi\rangle\langle\psi|} \right)^2 = \langle\psi| \rho' |\psi\rangle = \text{tr}(\rho \rho'). \quad (14)$$

Выбранные начальные состояния кубитов (2) и (3) являются чистыми с матрицами плотности вида $|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} {}_{Q_1 Q_2 Q_3} \langle \Psi(0)|$.

Рассчитаем параметр степени совпадения для начального GHZ -состояния кубитов вида (2). В трехкубитном базисе

$$|+, +, +\rangle, |+, +, -\rangle, |+, -, +\rangle, |-, +, +\rangle,$$

$$|+, -, -\rangle, |-, +, -\rangle, |-, -, +\rangle, |-, -, -\rangle$$

матрица плотности кубитов для начального состояния вида (2) есть

$$M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) = |\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} \langle \Psi(0)| = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & \cdots & 0 & M_{18} \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ M_{81} & 0 & \cdots & 0 & M_{88} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где элементы матрицы плотности задаются формулами:

$$M_{11} = \langle +, +, + | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | +, +, + \rangle = \cos^2 \theta, \quad M_{88} = \langle -, -, - | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | -, -, - \rangle = \sin^2 \theta, \\ M_{18} = \langle +, +, + | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | -, -, - \rangle = \cos \theta \sin \theta, \quad M_{81} = \langle -, -, - | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | +, +, + \rangle = \cos \theta \sin \theta.$$

Запишем матрицу конечного смешанного состояния $\rho' = \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t)$ в произвольный момент времени t для состояния (3):

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} \langle \Psi(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{18} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{55} & \rho_{56} & \rho_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{65} & \rho_{66} & \rho_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{75} & \rho_{76} & \rho_{77} & 0 \\ \rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{88} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тогда, подставляя матрицы (15) и (16) в формулу (14), получаем для степени совпадения следующее выражение:

$$F = \cos^2 \theta \rho_{11} + \cos \theta \sin \theta (\rho_{18} + \rho_{81}) + \sin^2 \theta \rho_{88}, \quad (17)$$

где

$$\rho_{11} = \langle +, +, + | \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) | +, +, + \rangle = \sum_{n=3}^{\infty} p_n [\cos^2 \theta |S_{11}(n, t)|^2 + \sin^2 \theta |S_{18}(n-3, t)|^2] + \\ + p_2 \cos^2 \theta |S_{11}(2, t)|^2 + p_1 \cos^2 \theta |S_{11}(1, t)|^2 + p_0 \cos^2 \theta |S_{11}(0, t)|^2, \\ \rho_{88} = \langle -, -, - | \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) | -, -, - \rangle = \sum_{n=3}^{\infty} p_n [\cos^2 \theta |S_{81}(n, t)|^2 + \sin^2 \theta |S_{88}(n-3, t)|^2] + \\ + p_2 (\cos^2 \theta |S_{81}(2, t)|^2 + |x_7(t)|^2) + p_1 (\cos^2 \theta |S_{81}(1, t)|^2 + |y_4(t)|^2) + p_0 (\cos^2 \theta |S_{81}(0, t)|^2 + \sin^2 \theta), \\ \rho_{18} = \langle +, +, + | \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) | -, -, - \rangle = \sum_{n=3}^{\infty} p_n [\cos \theta \sin \theta S_{11}(n, t) S_{88}^*(n-3, t)] + \\ + p_2 \cos \theta S_{11}(2, t) x_7^*(t) + p_1 \cos \theta S_{11}(1, t) y_4^*(t) + p_0 \cos \theta \sin \theta S_{11}(0, t), \quad \rho_{81} = \rho_{18}^*.$$

Трехкубитная матрица плотности в начальный момент времени для начального состояния (3) выражается формулой:

$$M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) = |\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} \langle \Psi(0)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & M_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{54} & M_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где элементы матрицы плотности задаются формулами:

$$M_{44} = \langle -, +, + | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | -, +, + \rangle = \sin^2 \varphi, \quad M_{55} = \langle +, -, - | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | +, -, - \rangle = \cos^2 \varphi, \\ M_{54} = \langle +, -, - | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | -, +, + \rangle = \cos \varphi \sin \varphi, \quad M_{45} = \langle -, +, + | M_{Q_1 Q_2 Q_3}(0) | +, -, - \rangle = \sin \varphi \cos \varphi.$$

Запишем матрицу конечного смешанного состояния $\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t)$ в произвольный момент времени t для начального состояния (3):

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_{n < n} \langle \Psi(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} & \rho_{26} & \rho_{27} & 0 \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & \rho_{35} & \rho_{36} & \rho_{37} & 0 \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} & \rho_{45} & \rho_{46} & \rho_{47} & 0 \\ 0 & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & \rho_{55} & \rho_{56} & \rho_{57} & \rho_{58} \\ 0 & \rho_{62} & \rho_{63} & \rho_{64} & \rho_{65} & \rho_{66} & \rho_{67} & \rho_{68} \\ 0 & \rho_{72} & \rho_{73} & \rho_{74} & \rho_{75} & \rho_{76} & \rho_{77} & \rho_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{85} & \rho_{86} & \rho_{87} & \rho_{88} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Теперь, подставляя матрицы (18) и (19) в формулу (14), получаем для степени совпадения:

$$F = \sin^2 \varphi \rho_{44} + \cos \varphi \sin \varphi \cdot (\rho_{45} + \rho_{54}) + \cos^2 \varphi \rho_{55}, \quad (20)$$

где элементы матрицы плотности задаются выражениями:

$$\begin{aligned} \rho_{44} &= \langle -, +, + | \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) | -, +, + \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [\cos^2 \varphi |S_{45}(n-2, t)|^2 + \sin^2 \varphi |S_{44}(n-1, t)|^2] + \\ &\quad + p_1 \cdot [|Z_3(t)|^2 + \sin^2 \varphi |S_{44}(0, t)|^2] + p_0 |x_3(t)|^2, \\ \rho_{55} &= \langle +, -, - | \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) | +, -, - \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [\cos^2 \varphi |S_{55}(n-2, t)|^2 + \sin^2 \varphi |S_{54}(n-1, t)|^2] + \\ &\quad + p_1 \cdot [|Z_4(t)|^2 + \sin^2 \varphi |S_{54}(0, t)|^2] + p_0 [|x_4(t)|^2 + |y_1(t)|^2], \\ \rho_{45} &= \langle -, +, + | \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) | +, -, - \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [\sin \varphi \cos \varphi S_{44}(n-1, t) S_{55}^*(n-2, t)] + \\ &\quad + p_1 \sin \varphi S_{44}(0, t) Z_4^*(t) + p_0 x_3(t) y_1^*(t), \quad \rho_{54} = \rho_{45}^*. \end{aligned}$$

Сравним поведение степени совпадения для трехкубитных GHZ и GHZ -подобных состояний с поведением аналогичной величины для двухкубитного состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos \phi |+, +\rangle + \sin \phi |-, -\rangle. \quad (21)$$

Двухкубитная система с начальным состоянием кубитов (21) и полем в фоковском состоянии (5) эволюционирует следующим образом:

а) для случая начального числа фотонов в моде $n = 0$:

$$|\psi_{n=0}(t)\rangle = x_1(t) |+, +, 0\rangle + x_2(t) |+, -, 1\rangle + x_3(t) |-, +, 1\rangle + x_4(t) |-, -, 2\rangle + \sin \phi |-, -, 0\rangle,$$

б) для случая начального числа фотонов в моде $n = 1$:

$$|\psi_{n=1}(t)\rangle = y_1(t) |+, +, 1\rangle + y_2(t) |+, -, 2\rangle + y_3(t) |-, +, 2\rangle + y_4(t) |-, -, 3\rangle + Z_1(t) |+, -, 0\rangle + Z_2(t) |-, +, 0\rangle + \\ + Z_3(t) |-, -, 1\rangle,$$

в) для случая начального числа фотонов в моде $n \geq 2$:

$$|\psi_{n \geq 2}(t)\rangle = c_1(t) |+, +, n\rangle + c_2(t) |+, -, n+1\rangle + c_3(t) |-, +, n+1\rangle + c_4(t) |-, -, n+2\rangle + k_1(t) |+, +, n-2\rangle + \\ + k_2(t) |+, -, n-1\rangle + k_3(t) |-, +, n-1\rangle + k_4(t) |-, -, n\rangle.$$

Временные коэффициенты находятся из следующих систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{Z}_1(t) = gZ_3(t) \\ i\dot{Z}_2(t) = gZ_3(t) \\ i\dot{Z}_3(t) = g(Z_1(t) + Z_2(t)) \end{cases}, \quad \begin{cases} i\dot{k}_1(t) = g\sqrt{n-1}(k_2(t) + k_3(t)) \\ i\dot{k}_2(t) = g(\sqrt{n-1}k_1(t) + \sqrt{n}k_4(t)) \\ i\dot{k}_3(t) = g(\sqrt{n-1}k_1(t) + \sqrt{n}k_4(t)) \\ i\dot{k}_4(t) = g\sqrt{n}(k_2(t) + k_3(t)) \end{cases}, \quad (22)$$

$$\begin{cases} i\dot{c}_1(t) = g\sqrt{n+1}(c_2(t) + c_3(t)) \\ i\dot{c}_2(t) = g(\sqrt{n+1}c_1(t) + \sqrt{n+2}c_4(t)) \\ i\dot{c}_3(t) = g(\sqrt{n+1}c_1(t) + \sqrt{n+2}c_4(t)) \\ i\dot{c}_4(t) = g\sqrt{n+2}(c_2(t) + c_3(t)) \end{cases}. \quad (23)$$

Решая системы дифференциальных уравнений (21) со следующими начальными условиями: $k_1(0) = k_2(0) = k_3(0) = 0, k_4(0) = \sin \phi$ и $Z_1(0) = Z_2(0) = 0, Z_3(0) = \sin \phi$, находим аналитические выражения

для временных коэффициентов $k_i(t)$, $Z_i(t)$:

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= -\frac{i \cdot \sin(\sqrt{2}\gamma t) \cdot \sin \phi}{\sqrt{2}}, \quad Z_2(t) = -\frac{i \cdot \sin(\sqrt{2}\gamma t) \cdot \sin \phi}{\sqrt{2}}, \quad Z_3(t) = \cos(\sqrt{2}\gamma t) \cdot \sin \phi, \\ k_1(t) &= -\frac{2 \cdot \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{n} \cdot \sin^2 \left(\sqrt{n-\frac{1}{2}} \cdot \gamma t \right) \cdot \sin \phi}{2n-1}, \quad k_2(t) = -\frac{i \cdot \sqrt{n} \cdot \sin(\sqrt{4n-2} \cdot \gamma t) \cdot \sin \phi}{\sqrt{4n-2}}, \\ k_3(t) &= -\frac{i \cdot \sqrt{n} \cdot \sin(\sqrt{4n-2} \cdot \gamma t) \cdot \sin \phi}{\sqrt{4n-2}}, \quad k_4(t) = \frac{(n-1+n \cdot \cos(\sqrt{4n-2} \cdot \gamma t)) \sin \phi}{2n-1}. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти временные коэффициенты $y_i(t)$, $x_i(t)$, нужно учесть следующее: $c_i(t) \rightarrow y_i(t)$ при числе фотонов в моде $n=1$ и $c_i(t) \rightarrow x_i(t)$ при числе фотонов в моде $n=0$.

Для системы дифференциальных уравнений (23) используем следующие начальные условия: $c_1(0) = \cos \phi$, $c_2(0) = c_3(0) = c_4(0)$. В итоге получаем следующие аналитические формулы для $c_i(t)$:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{(n+2+(n+1) \cdot \cos(\sqrt{4n+6} \cdot \gamma t)) \cos \phi}{2n+3}, \quad c_2(t) = -\frac{i \cdot \sqrt{n+1} \cdot \cos \phi \cdot \sin(\sqrt{4n+6} \cdot \gamma t)}{\sqrt{4n+6}}, \\ c_3(t) &= -\frac{i \cdot \sqrt{n+1} \cdot \cos \phi \cdot \sin(\sqrt{4n+6} \cdot \gamma t)}{\sqrt{4n+6}}, \quad c_4(t) = -\frac{2 \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} \cdot \cos \phi \cdot \sin^2 \left(\sqrt{n+\frac{3}{2}} \cdot \gamma t \right)}{2n+3}. \end{aligned}$$

Двухкубитная матрица плотности в начальный момент времени для начального состояния (21) выражается формулой:

$$M_{Q_1 Q_2}(0) = |\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} \langle \Psi(0)| = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & M_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} & 0 & 0 & M_{44} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где элементы матрицы плотности задаются формулами

$$\begin{aligned} M_{11} &= \langle +, + | M_{Q_1 Q_2}(0) | +, + \rangle = \cos^2 \phi, \quad M_{44} = \langle -, - | M_{Q_1 Q_2}(0) | -, - \rangle = \sin^2 \phi, \\ M_{14} &= \langle +, + | M_{Q_1 Q_2}(0) | -, - \rangle = \cos \phi \sin \phi, \quad M_{41} = \langle -, - | M_{Q_1 Q_2}(0) | +, + \rangle = \sin \phi \cos \phi. \end{aligned}$$

Запишем матрицу конечного смешанного состояния $\rho_{Q_1 Q_2}(t)$ в произвольный момент времени t для начального состояния (21):

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Теперь подставим матрицы (24) и (25) в формулу (14) и получим для степени совпадения следующую формулу:

$$F = \rho_{11} \cos^2 \phi + (\rho_{14} + \rho_{41}) \cos \phi \sin \phi + \rho_{44} \sin^2 \phi, \quad (26)$$

где элементы матрицы плотности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \langle +, + | \rho_{Q_1 Q_2}(t) | +, + \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|c_1(t)|^2 + |k_1(t)|^2] + p_1 |y_1(t)|^2 + p_0 |x_1(t)|^2, \\ \rho_{44} &= \langle -, - | \rho_{Q_1 Q_2}(t) | -, - \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|c_4(t)|^2 + |k_4(t)|^2] + p_1 [|y_4(t)|^2 + |Z_3(t)|^2] + p_0 [|x_4(t)|^2 + \sin^2 \phi], \\ \rho_{14} &= \langle +, + | \rho_{Q_1 Q_2}(t) | -, - \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n c_1(t) k_4^*(t) + p_1 y_1(t) Z_3^*(t) + p_0 x_1(t) \sin \phi, \quad \rho_{41} = \rho_{14}^*. \end{aligned}$$

3. Результаты и их обсуждение

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости степени совпадения $F(t)$ от приведенного времени γt для начального истинно перепутанного GHZ -состояния (2) в случае $\theta = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов представлены на рис. 1. Из рисунка хорошо видно, что взаимодействие кубитов с тепловым полем резонатора приводит к осцилляциям Раби параметра перепутывания кубитов. При этом увеличение среднего числа фотонов в моде приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания. Это означает, что при увеличении интенсивности шума состояние трех

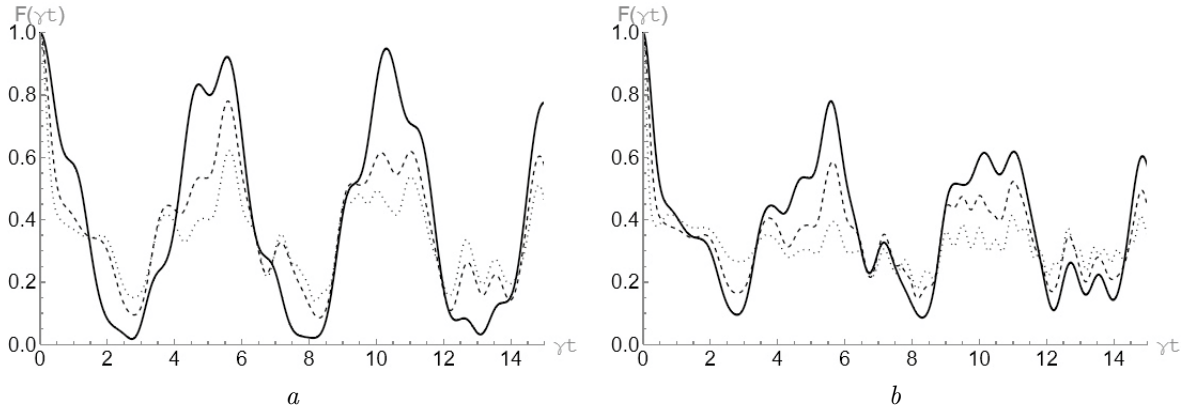


Рис. 1. График зависимости параметра степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального GHZ -состояния вида (2) с $\theta = \pi/4$ для различных средних чисел тепловых фотонов $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 2.5$ (точечная линия) (a); $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 10$ (точечная линия) (b)

Fig. 1. Graph of the dependence of the fidelity $F(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial GHZ state of the form (2) with $\theta = \pi/4$ for various average numbers of thermal photons $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dashed line), $\bar{n} = 2.5$ (dotted line) (a); $\bar{n} = 1$ (solid line), $\bar{n} = 3$ (dashed line), $\bar{n} = 10$ (dotted line) (b)

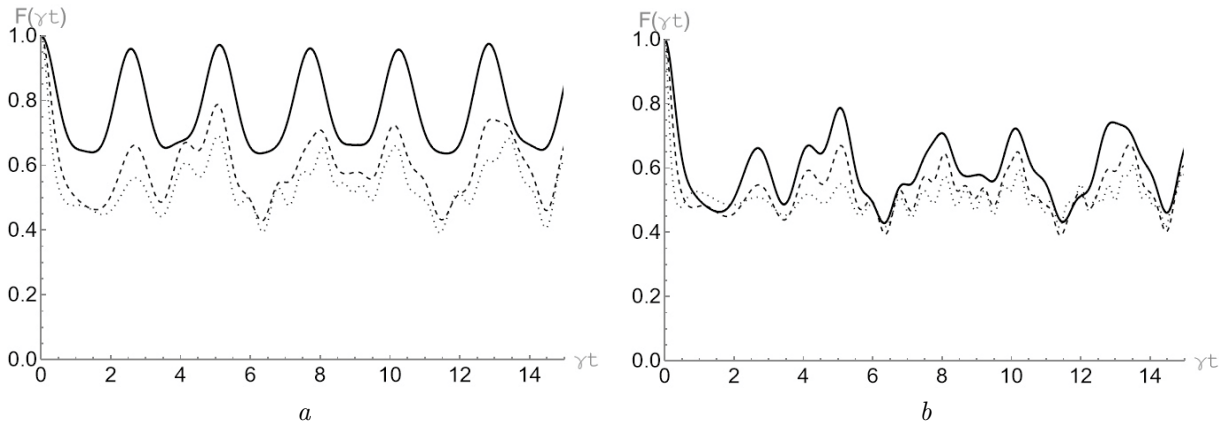


Рис. 2. График зависимости параметра степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального двухкубитного состояния вида (21) с $\phi = \pi/4$ для различных средних чисел тепловых фотонов $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 2.5$ (точечная линия) (a); $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 10$ (точечная линия) (b)

Fig. 2. Graph of the dependence of the fidelity $F(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial two-qubit state of the form (21) with $\phi = \pi/4$ for various average numbers of thermal photons $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dotted line), $\bar{n} = 2.5$ (dotted line) (a); $\bar{n} = 1$ (solid line), $\bar{n} = 3$ (dotted line), $\bar{n} = 10$ (dotted line) (b)

кубитов все менее походит на начальное перепутанное GHZ -состояние и все ближе к сепарабельному состоянию. Для сравнения на рис. 2 показаны аналогичные зависимости степени совпадения $F(t)$ для двухкубитной модели с начальным состоянием (20) в случае $\phi = \pi/4$. Сравнение графиков показывает, что в случае двухкубитной системы тепловой шум приводит к существенно меньшему разрушению начального максимально перепутанного состояния, нежели в случае трехкубитной системы. Это говорит нам о том, что истинно перепутанное GHZ -состояние менее устойчиво по отношению к внешнему шуму, чем двухкубитное состояние вида (21). Временная зависимость степени совпадения $F(t)$ от приведенного времени γt для начального GHZ -подобного перепутанного состояния (3) в случае $\varphi = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов представлена на рис. 3. Из рисунка видно, что, как и для двух предыдущих состояний, взаимодействие кубитов с тепловым полем резонатора приводит к осцилляциям Раби параметра перепутывания кубитов. Однако в отличие от начального истинно перепутанного GHZ -состояния в рассматриваемом случае увеличение среднего числа тепловых фотонов в моде приводит к более существенному уменьшению максимальной степени перепутывания кубитов. Таким образом, GHZ -подобное перепутанное состояние значительно менее устойчиво по отношению к разрушающему действию теплового шума.

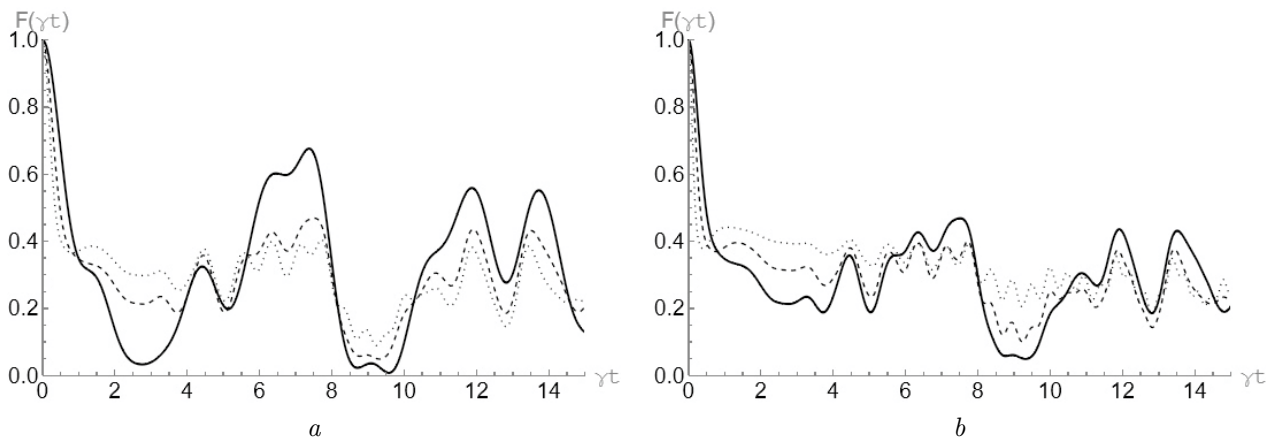


Рис. 3. График зависимости параметра степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального GHZ подобного состояния (3) с $\varphi = \pi/4$ для различных средних чисел тепловых фотонов $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 2.5$ (точечная линия) (a); $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 10$ (точечная линия) (b)

Fig. 3. Graph of the dependence of the fidelity $F(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial GHZ like state (3) with $\varphi = \pi/4$ for various average numbers of thermal photons $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dotted line), $\bar{n} = 2.5$ (dotted line) (a); $\bar{n} = 1$ (solid line), $\bar{n} = 3$ (dotted line), $\bar{n} = 10$ (dotted line) (b)

Выводы

Таким образом, в данной статье нами исследована динамика перепутывания в системе, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с общей модой теплового поля идеального резонатора. В работе рассмотрены два типа начальных состояний кубитов: истинно перепутанное состояние GHZ -типа (2) и GHZ -подобное перепутанное состояние (3). Нами найдено точное решение квантового уравнения Лиувилля для начальных состояний кубитов и теплового состояния поля резонатора. На основе точного решения нами рассчитана временная зависимость параметра перепутывания кубитов. В качестве критерия перепутывания кубитов выбран параметр, называемый степенью совпадения. В нашем случае данный параметр определяет степень совпадения трехкубитной матрицы плотности в произвольный момент времени t и начальной трехкубитной матрицы плотности чистых состояний (2) и (3). Для сравнения результатов нами проведен также аналогичный расчет степени совпадения в случае двухкубитной системы с начальным состоянием вида (21) и теплового поля резонатора. Результаты численного моделирования степени совпадения показали, что для всех выбранных начальных состояний кубитов их взаимодействие с тепловым полем резонатора приводит к осцилляциям Раби параметра перепутывания кубитов с уменьшением амплитуд осцилляций в процессе эволюции. При этом увеличение интенсивности поля резонатора приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания кубитов. Показано также, что наименее устойчивым по отношению к внешнему шуму является GHZ -подобное трехкубитное состояние (3), а наиболее устойчивым — двухкубитное перепутанное состояние (21).

Литература

- [1] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vols. 718–719. Pp. 1–102. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [2] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80. Number 10. Article Number 106001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // Annual Reviews of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. Pp. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review // Science China Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
- [5] Terhal B.M. Quantum error correction for quantum memories // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87, Issue 2. Pp. 307–346. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.307>.
- [6] Kimble H.J. The quantum internet // Nature. 2008. Vol. 453. Pp. 1023–1030. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature07127>.

- [7] Pezzé L., Smerzi A., Oberthaler M.K., Schmied R., Treutlein P. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles // *Reviews of Modern Physics*. 2018. Vol. 90. Article number 035005. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005>.
- [8] Zou Y.-Q. [et al.] Beating the classical precision limit with spin-1 dicke states of more than 10,000 atoms // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2018. Vol. 115. Pp. 6381–6385. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.1715105115>.
- [9] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120, Issue 26. Article number 260502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502>.
- [10] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 121, Issue 25. Article number 250505. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505>.
- [11] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement // *New Journal of Physics*. 2010. Vol. 12. Article number 053002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
- [12] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states // *Npj Quantum Information*. 2022. Vol. 8. Number 57. Pp. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
- [13] Zhahir A.A., Mohd S.M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2022. Vol. 13, Issue 5. Pp. 218–225. DOI: <https://doi.org/10.14569/ijacsa.2022.0130527>.
- [14] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties // *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*. 2000. Vol. 61, Issue 4. Article number 042314. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
- [15] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*. 2000. Vol. 62, Issue 6. Article number 062314. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [16] Acin A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 87, Issue 4. Article number 040401. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
- [17] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // *The European Physical Journal D*. 2008. Vol. 48. Article number 040401. Pp. 435–442. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [18] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2019. Vol. 10, Issue 7. Pp. 374–379. DOI: <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // *International Journal of Quantum Information*. 2017. Vol. 15, No. 7. Article number 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [20] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 122, Issue 11. Article number 110501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501>.
- [21] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit // *Physical Review Letters*. 2017. Vol. 119, Issue 18. Article number 180511. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511>.
- [22] Wei K.X. [et al.] Verifying multipartite entangled GHZ states via multiple quantum coherences // *Physical Review A*. 2020. Vol. 101, Issue 3. Article number 032343. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.032343>.
- [23] Song C. [et al.] Generation of multicomponent atomic Schrödinger cat states of up to 20 qubits // *Science*. 2019. Vol. 365, Issue 6453. Pp. 574–577. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.aay0600>.
- [24] Leibfried D. [et al.] Toward heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states // *Science*. 2004. Vol. 304, Issue 5676. Pp. 1476–1478. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.10975>.
- [25] Roos C.F. [et al.] Control and measurement of three-qubit entangled states // *Science*. 2004. Vol. 304, Issue 5676. Pp. 1478–1480. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1097522>.
- [26] Monz T. [et al.] 14-qubit entanglement: creation and coherence // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, Issue 13. Article number 130506. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.130506>.
- [27] Omran A. [et al.] Generation and manipulation of Schrödinger cat states in Rydberg atom arrays // *Science*. 2019. Vol. 365, Issue 6453. Pp. 570–574. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.aax9743>.
- [28] Lu C.-Y. [et al.] Experimental entanglement of six photons in graph states // *Nature Physics*. 2007. Vol. 3. Pp. 91–95. DOI: <https://doi.org/10.1038/nphys507>.
- [29] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120, Issue 26. Article number 260502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502>.
- [30] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 121, Issue 25. Article number 250505. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505>.

- [31] Neeley M. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits // *Nature*. 2010. Vol. 467. Pp. 570–573. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature09418>.
- [32] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 122, Issue 11. Article number 110501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501>.
- [33] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit // *Physical Review Letters*. 2017. Vol. 119, Issue 18. Article number 180511. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511>.
- [34] Li D., Cheng M., Li X., Li S. A relation among tangle, 3-tangle, and von Neumann entropy of entanglement for three qubits // *Quantum Information Processing*. 2023. Vol. 22. Article number 14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-022-03759-4>.
- [35] Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // *Science*. 2009. Vol. 323, Issue 5914. Pp. 598–601. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-022-03759-4>.
- [36] Wang F. [et al.] Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath // *Physical Review B*. 2018. Vol. 98, Issue 6, Article number 064306. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306>.
- [37] Sun G., Zhou Z., Mao B., Wen X., Wu P., Han S. Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system // *Physical Review B*. 2012. Vol. 86, Issue 6. Article number 064502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502>.
- [38] Salles A., de Melo F., Almeida M. P., Hor-Meyll M., Walborn S.P., Souto Ribeiro P. H., Davidovich L. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment // *Physical Review A*. 2008. Vol. 78, Issue 2. Article number 022322. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322>.
- [39] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Sudden death of entanglement in a thermal three-qubit Tavis-Cummings model // *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology*. 2023. Article number 23240901. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITNT57377.2023.10139206>.
- [40] Jozsa R. Fidelity for Mixed Quantum States // *Journal of Modern Optics*. 1994. Vol. 41, Issue 12. Pp. 2315–2323. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349414552171>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95

Submitted: 25.12.2023

Revised: 01.02.2024

Accepted: 28.02.2024

A.R. Bagrov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

DYNAMICS OF ENTANGLED GREENBERGER — HORNE — ZEILINGER STATES IN THREE QUBITS THERMAL TAVIS — CUMMINGS MODEL

ABSTRACT

In this paper, we investigated the dynamics of systems of two and three identical qubits interacting resonantly with a selected mode of a thermal field of a lossless resonator. We found solutions of the quantum time-dependent Liouville equation for various three- and two-qubit entangled states of qubits. Based on these solutions, we calculated the criterion of the qubit entanglement — fidelity. The results of numerical calculations of the fidelity showed that increasing the average number of photons in a mode leads to a decrease in the maximum degree of entanglement. It is shown that the two-qubit entangled state is more stable with respect to external noise than the three-qubit entangled Greenberger — Horne — Zeilinger states (*GHZ*). Moreover, a genuine entangled *GHZ*-state is more stable to noise than a *GHZ*-like entangled state.

Key words: qubits; three qubits Greenberger — Horne — Zeilinger states; resonance interaction; cavity; thermal field; entanglement; fidelity.

Citation. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of entangled Greenberger — Horne — Zeilinger states in three qubits thermal Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya*

seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 82–95. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bagrov A.R., Bashkirov E.K., 2024

Alexander R. Bagrov — Master's Degree Student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] X. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [2] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, article number 106001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Science China Information Sciences*, 2020, vol. 63, article number 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
- [5] Terhal B.M. Quantum error correction for quantum memories. *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, issue 2, pp. 307–346. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.307>.
- [6] Kimble H.J. The quantum internet. *Nature*, 2008, vol. 453, pp. 1023–1030. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature07127>.
- [7] Pezzé L., Smerzi A., Oberthaler M.K., Schmied R., Treutlein P. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles. *Reviews of Modern Physics*, 2018, vol. 90, article number 035005. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005>.
- [8] Zou Y.-Q. [et al.] Beating the classical precision limit with spin-1 dicke states of more than 10,000 atoms. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, vol. 115, pp. 6381–6385. DOI: <http://doi.org/10.1073/pnas.1715105115>.
- [9] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, issue 26, article number 260502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502>.
- [10] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, issue 25, number 250505. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505>.
- [11] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multipartite entanglement. *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, article number 053002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
- [12] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states. *Npj Quantum Information*, 2022, vol. 8, number 57. pp. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
- [13] Zhahir A.A., Mohd S.M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2022, vol. 13, issue 5, pp. 218–225. DOI: <https://doi.org/10.14569/ijacsa.2022.0130527>.
- [14] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 61, issue 4, article number 042314. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
- [15] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 62, issue 6, Article number 062314. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [16] Acin A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States. *Physical Review Letters*, 2000, vol. 87, issue 4, Article number 040401. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
- [17] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, Article number 040401, pp. 435–442. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [18] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.

- [19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states. *International Journal of Quantum Information*, 2017, vol. 15, no. 7, article number 1750049. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [20] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, article number 110501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501>.
- [21] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit. *Physical Review Letters*, 2017, vol. 119, issue 18, Article number 180511. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511>.
- [22] Wei K.X. [et al.] Verifying multipartite entangled GHZ states via multiple quantum coherences. *Physical Review A*, 2020. vol. 101, issue 3, article number 032343. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.032343>.
- [23] Song C. [et al.] Generation of multicomponent atomic Schrödinger cat states of up to 20 qubits. *Science*, 2019, vol. 365, no. 6453, pp. 574–577. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.aay0600>.
- [24] Leibfried D. [et al.] Toward heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states. *Science*, 2004, vol. 304, issue 5676, pp. 1476–1478. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.10975>.
- [25] Roos C.F. [et al.] Control and measurement of three-qubit entangled states. *Science*, 2004, vol. 304, issue 5676, pp. 1478–1480. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1097522>.
- [26] Monz T. [et al.] 14-qubit entanglement: creation and coherence. *Physical Review Letters*, 2011, vol. 106, issue 13, Article number 130506. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.130506>.
- [27] Omran A. [et al.] Generation and manipulation of Schrödinger cat states in Rydberg atom arrays. *Science*, 2019, vol. 365, issue 6453, pp. 570–574. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.aax9743>.
- [28] Lu C.-Y. [et al.] Experimental entanglement of six photons in graph states. *Nature Physics*, 2007, vol. 3, pp. 91–95. DOI: <https://doi.org/10.1038/nphys507>.
- [29] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, issue 26, Article number 260502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502>.
- [30] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, issue 25, Article number 250505. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505>.
- [31] Neeley M. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits. *Nature*, 2010, vol. 467, pp. 570–573. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature09418>.
- [32] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, issue 11, Article number 110501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501>.
- [33] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit. *Physical Review Letters*, 2017, vol. 119, issue 18, Article number 180511. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511>.
- [34] Li D., Cheng M., Li X., Li S. A relation among tangle, 3-tangle, and von Neumann entropy of entanglement for three qubits. *Quantum Information Processing*, 2023, vol. 22, Article number 14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-022-03759-4>.
- [35] Yu T., Eberly J.H. Sudden death of entanglement. *Science*, 2009, vol. 323, issue 5914, pp. 598–601. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1167343>.
- [36] Wang F. [et al.] Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath. *Physical Review B*, 2018, vol. 98, issue 6, Article number 064306. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306>.
- [37] Sun G., Zhou Z., Mao B., Wen X., Wu P., Han S. Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system. *Physical Review B*, 2012, vol. 86, Issue 6, Article number 064502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502>.
- [38] Salles A., de Melo F., Almeida M. P., Hor-Meyll M., Walborn S.P., Souto Ribeiro P. H., Davidovich L. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment. *Physical Review*, 2008. vol. A78, number 022322. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322>.
- [39] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Sudden death of entanglement in a thermal three-qubit Tavis-Cummings model. *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology*, 2023, Article number 23240901. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITNT57377.2023.10139206>.
- [40] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, 1994, vol. 41, issue 12, pp. 2315–2323. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349414552171>.