

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 15.01.2024
после рецензирования: 19.02.2024
принятия статьи: 28.02.2024

С.Т. Гусейнов

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика
E-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-7473-2269>

М. Дж. Алиев

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика
E-mail: a.mushfiq@rambler.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-9084-6251>

НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассмотрен класс эллиптических уравнений второго порядка дивергентной структуры с неравномерным степенным вырождением. Подход, используемый в настоящей статье, основан на том, что скорости вырождения собственных чисел матрицы $\|a_{ij}(x)\|$ (функции $\lambda_i(x)$) являются не функциями необычной нормы $|x|$, а некоторого анизотропного расстояния $|x|_a$. Предполагается, что задача Дирихле для таких уравнений разрешима в классическом смысле при любой непрерывной граничной функции в любой нормальной области Ω .

Для слабых решений получены оценки вблизи граничной точки решений задачи Дирихле, функции Грина для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.

Ключевые слова. равномерная эллиптичность; неравномерное вырождение; фундаментальное решение.

Цитирование. Гусейнов С.Т., Алиев М.Дж. Некоторые вспомогательные оценки решений для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 1. С. 23–30. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Гусейнов С.Т., Алиев М.Дж., 2024

Сарван Тахмас оглы Гусейнов — доктор математических наук, доцент кафедры высшей математики, Бакинский государственный университет, AZ 1148, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.

Мушфи́г Джала́л оглы Алиев — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Бакинский государственный университет, AZ 1148, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.

1. Предварительные сведения

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E_n точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ расположена ограниченная область Ω с границей $\partial\Omega$, причем $0 \in \partial\Omega$.

Рассмотрим в Ω эллиптическое уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (1.1)$$

в предположении, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ являются измеримыми функциями в Ω , $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ и, кроме того, для $\xi \in E_n, x \in \Omega$

$$\mu \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \xi_i^2, \quad (1.2)$$

здесь $\mu \in (0, 1]$ — некоторая константа и

$$\lambda_i(x) = (|x|_{\alpha^-})^{\alpha_i}, \quad |x|_{\alpha^-} = \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{2}{2+\alpha_i}}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Отметим, что для равномерно эллиптических уравнений 2-го порядка дивергентной структуры доказательство оценки убывающего решения можно найти в [1; 2]. Настоящая статья тесно связано по тематике с работами [3–12].

Для равномерно эллиптических уравнений соответствующие результаты получены в работе [13]. Что касается неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка, то отметим в этой связи работу [14].

Функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\Lambda}^1(\Omega)$ называется слабым решением уравнения (1.1), если при всякой $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}_{2,\Lambda}^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0.$$

Введем некоторые обозначения:

$$S_r = \{x : |x| \leq r\}, \quad C_r = S_r \cap \bar{\Omega},$$

Пусть $\Gamma(x)$ — фундаментальное решение оператора L в R^n с особенностью в точке 0, $\rho(x) = [\Gamma(x)]^{\frac{1}{2-n}}$, $T_r = \{x : \rho(x) \leq r\}$. Как показано в [10; 11], существует такая зависящая только от μ и n постоянная α , что в R^n

$$2\alpha |x| \leq \rho(x) \leq (2\alpha)^{-1} |x|, \quad (1.4)$$

что эквивалентно включению $S_r(2\alpha) \subset T_r \subset S_r(\frac{1}{2\alpha})$.

Положим

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (2\alpha)^{\frac{1+\alpha^+}{2}} = 2\lambda_1.$$

Введем еще обозначения: $K_{r_1, r_2} = S_{r_1} \setminus S_{r_2}$, $Q_{r_1, r_2} = T_{r_1} \setminus T_{r_2}$, $\alpha^+ = \max \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$,

$$M_r(u) = r^{-n} \int_{K_{\alpha^{-1}r, \alpha r}} u^2 dx,$$

$\text{cap}(E)$ — гармоническая емкость множества E , $\gamma(r) = r^{2-n} \text{cap}(C_r)$ — относительная емкость $\bar{\Omega}$ в шаре S_r .

2. Основные вспомогательные леммы

В этом пункте через u обозначим функцию из пространства $W_2^1(S_\delta)$ ($\delta = \text{const} > 0$), удовлетворяющую в $\Omega \cap S_\delta$ уравнению $Lu = 0$ и равную нулю на C_δ .

Лемма 1. Пусть

$$J(r) \equiv \frac{1}{2-n} \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j dS_x, \quad (2.1)$$

где $r < \delta$ и $\{n_j\}$ — проекции единичной внешней нормали к ∂T_r на координатные оси. Тогда

$$2r^{1-n} \int_{T_r} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = J'(r). \quad (2.2)$$

Доказательство. Положим $t = r^{2-n}$. Тогда

$$\begin{aligned} Lu^2 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u^2}{\partial x_j} \right) = 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) u \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) u + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Gamma - t)_+ L(u^2) dx &= 2 \int_{\Omega} (\Gamma - t)_+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \\ \int_{\Omega} (\Gamma - t)_+ L(u^2) dx &= \int_{T_r} (\Gamma - t)_+ L(u^2) dx. \end{aligned}$$

Пусть

$$I = \int_{T_r} (\Gamma - t) L(u^2) dx = \int_{T_r} (\Gamma - t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u^2}{\partial x_j} \right) dx.$$

Обозначим

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u^2}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \int_{T_r} (\Gamma - t) \frac{\partial}{\partial x_i} w_i dx = \sum_{i=1}^n \int_{T_r} \left[(\Gamma - t) \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} w_i \right] dx - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial}{\partial x_i} ((\Gamma - t) w_i) dx. \end{aligned}$$

Обозначим через $\bar{w} = ((\Gamma - t)w_1, (\Gamma - t)w_2, \dots, (\Gamma - t)w_n)$. Тогда $i_1 = \int_{T_r} \operatorname{div} \hat{w} dx = \int_{\partial T_r} (\hat{w}, \hat{n}) ds = 0$, $\hat{w}/\partial T_r = 0$ (т. к. $\Gamma - t = 0$ на ∂T_r).

Тогда

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{i=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial}{\partial x_i} w_i dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{T_r} a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial u^2}{\partial x_j} dx = \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{T_r} \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial u^2}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Обозначим $z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Тогда

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{j=1}^n \int_{T_r} z_j \frac{\partial u^2}{\partial x_j} dx = - \sum_{j=1}^n \int_{T_r} \left(\frac{\partial z_j}{\partial x_j} u^2 + z_j \frac{\partial u^2}{\partial x_j} \right) dx + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial z_j}{\partial x_j} u^2 dx = j_1 + j_2. \end{aligned}$$

Пусть $\hat{z} = (u^2 z_1, u^2 z_2, \dots, u^2 z_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} j_1 &= - \sum_{j=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial}{\partial x_j} (u^2 z_j) dx = - \int_{T_r} \operatorname{div} \hat{z} dx = - \int_{\partial T_r} (\hat{z}, \hat{n}) ds = \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 z_j n_j ds = - \sum_{j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} n_j ds = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} j_2 &= \sum_{j=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial z_j}{\partial x_j} u^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{T_r} u^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right) dx = \\ &= \int_{T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \right) dx = \int_{T_r} u^2 L \Gamma dx, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\Gamma(x)$ — фундаментальное решение, т. е.

$$L \Gamma(x) = -\delta(x).$$

Другими словами,

$$\int_{T_r} \varphi(x) L\Gamma(x) dx = -\varphi(0),$$

$j_2 = -u^2(0)$ на $0 \in \partial\Omega$, поэтому $j_2 = 0$ и из (2.4) заключаем

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds, \\ \frac{2}{2-n} \int_{T_r} (\Gamma - t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx &= -\frac{1}{2-n} \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds, \\ \frac{2}{2-n} \int_{T_r} (\Gamma - t) \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx &= J(r), \\ J'(r) &= \frac{2}{n-2} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r dy \int_{\partial T_y} (\Gamma - r^{2-n}) \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} ds_y = \\ &= 2r^{1-n} \int_{T_r} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При $\lambda_1 r < \delta$ справедливо неравенство

$$J(r) \leq CM_r(u). \quad (2.5)$$

Доказательство. Заметим, что на ∂T_r

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} n_i n_j |\nabla \Gamma| \leq 0, \\ \int_{T_r} L\Gamma dx &= \int_{\partial T_r} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \text{производная по конормали} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Знаем, что $L\Gamma(x) = -\delta(x)$.

По определению $\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j$,

$$\begin{aligned} \int_{T_r} L\Gamma dx &= - \int_{T_r} \delta(x) dx = -1. \\ \int_{T_r} L\Gamma dx &= \int_{\partial T_r} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds = -1. \end{aligned}$$

Тогда

$$J(r) = -\frac{1}{n-2} \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds.$$

Из принципа максимума следует

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n-2} \int_{T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds &\leq -\frac{1}{n-2} \max_{\partial T_r} u^2 \int_{\partial T_r} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j ds = \\ &= \frac{1}{n-2} \max_{T_r} u^2 \leq \frac{1}{n-2} \max_{S_r(2\lambda_1)^{-1}} u^2 = \frac{1}{n-2} \max_{\partial S_r(2\lambda_1)^{-1}} u^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{n-2} \max_{\partial S_r(2\lambda_1)^{-1} \cup \partial S_r(2\lambda_1)} u^2 = \frac{1}{n-2} \max_{K_r\left(\frac{1}{2\lambda_1}, 2\lambda_1\right)} u^2 \leq \frac{C}{n-2} M_r(u). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\max_{K_r\left(\frac{1}{2\lambda_1}, 2\lambda_1\right)} u^2 \leq CM_r(u). \quad (2.7)$$

Неравенство (2.5) доказано.

Лемма 3. При $r < R < \delta$ справедливо неравенство

$$J(r) \leq C J(R) \exp \left(-C \int_r^R \gamma(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (2.8)$$

Доказательство. В силу леммы 1, учитывая (1.4)

$$J'(r) \geq 2\mu r^{1-n} \int_{T_r} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq C r^{1-n} \int_{s_r(\lambda_1)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx. \quad (2.9)$$

Из леммы 2 и оценки (2.8) имеем

$$J'(r) \geq C r^{1-n} \frac{C_1 \text{cap}_\lambda(C_r(\lambda_1^3))}{r^n \prod_{i=1}^n r^{\alpha_i/2}} \int_{K_r(\lambda_1 \lambda_1^3)} u^2 dx \geq C \frac{J(\alpha^2 r)}{r} \gamma(\alpha^3 r).$$

С другой стороны,

$$\frac{J'(r)}{J(\alpha^2 r)} \geq C \frac{\gamma(\alpha^3 r)}{r}.$$

Интегрируя от r до R , получаем

$$\ln \frac{J(R)}{J(r)} \geq C \int_r^R \frac{\gamma(\rho)}{\rho} d\rho.$$

Отсюда, используя оценку $\gamma(\rho) \leq 1$ и монотонность $J(r)$, получаем неравенство (2.7). Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $R < \delta$ и $r \leq \alpha^2 R$, где α — постоянная из (1.4). Тогда справедливо неравенство

$$\int_{S_r(\alpha)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq C J(R) r^{n-2} \exp \left(-C \int_r^R \gamma(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (2.10)$$

Доказательство. В силу леммы 1 и (1.4)

$$J'(r) \geq C r^{1-n} \int_{S_r(a)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx.$$

Интегрируя от αr до r

$$\begin{aligned} \int_{\alpha r}^r J'(\rho) d\rho &\geq C \int_{\alpha r}^r \rho^{1-n} \int_{S_\rho(\alpha)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx d\rho \geq \\ &\geq C r^{2-n} \int_{S_r(\alpha^2)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

получим

$$J(r) \geq C r^{2-n} \int_{S_r(a)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx.$$

Теперь (2.10) следует из неравенства (2.8).

3. Оценки убывающего решения

Основной целью этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть функция $u(x) \in W_{2,\Lambda}^1(S_\delta(k))$ удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ в $\Omega \cap S_\delta(k)$ и равна нулю на $C_\delta(k)$. Тогда $R < \alpha\delta$, $r < \alpha^5 R$ и справедлива оценка

$$\max_{S_r''(\alpha)} |u| \leq C M_R^{1/2}(u) \exp \left(-C \int_r^R \gamma(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (3.1)$$

Доказательство. Применяя формулу А.С. Кронрода [11; 12], получим

$$\int_{\Omega} F(x) |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{u=t} F(x) dS_x,$$

где $F(x)$ — измеримая по Борелю функция, а функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица, получаем

$$A = \int_{Q_r(\frac{1}{\alpha^2}, \alpha^2)} u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma(x)=t} u^2 |\nabla \Gamma| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}}{|\nabla \Gamma| |\nabla \Gamma|} dS_x =$$

$$= (2-n) \int_{a^2r}^{a^{-2}r} \tau^{1-n} d\tau \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j dS_x,$$

$$A \equiv \int_{a^2r}^{a^{-2}r} J(\tau) \tau^{1-n} d\tau.$$

Применяя лемму 3, приходим к неравенству

$$A \leq CJ(R) r^{2-n} \exp \left(-C \int_r^R \gamma(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right).$$

В силу леммы 4 та же оценка верна для интеграла

$$B \equiv \int_{Q_r(\frac{1}{\alpha^2}, \alpha^2)} \left[\Gamma - (\alpha^{-2}r)^{2-n} \right]^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx.$$

Поэтому, полагая $v = u \left[\Gamma - (\alpha^{-2}r)^{2-n} \right]_+$ и

$$N \equiv \int_{CT_{\alpha^2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

$$2u\Gamma_+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} \leq 2 \sqrt{\Gamma_+^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}} \sqrt{u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}} \leq$$

$$\leq \Gamma_+^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j},$$

получим

$$N \equiv \int_{CT_{\alpha^2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \leq 2(A+B) \leq Cr^{2-n} J(R) \exp \left(-C \int_r^R \gamma(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (3.2)$$

С другой стороны, так как $v = 0$ вне $S_r(\frac{1}{\alpha^3})$, то

$$N \geq C \int_{K_r(\frac{1}{\alpha^3}, \alpha)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq Cr^{-2} \int_{K_r(\frac{1}{\alpha^3}, \alpha)} v^2 dx \geq Cr^{2-n} M_r(u). \quad (3.3)$$

В силу принципа максимума и неравенства (2.6) из (3.1) и (3.2) следует

$$\max_{S_r(a)} u^2 \leq \max_{\partial T_r} u^2 \leq CM_r(u) \leq CJ(R) \exp \left(-C \int_r^R \gamma(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right). \quad (3.4)$$

Заметим наконец, что в силу леммы 2 справедливо неравенство $J(R) \leq CM_R(u)$, которое вместе с (3.3) и доказывает теорему.

Литература

- [1] Мазья В.Г. О регулярности на границе решений эллиптических уравнений и конформного отображения // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 152, № 6. С. 1297–1300. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/dan28720>.
- [2] Мазья В.Г. О модуле непрерывности решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы // Проблемы математического анализа. Ленинград, 1966. С. 45–58.
- [3] De Giorgi E. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Acad. Sci. Torino. 1957. Vol. 3, no. 1, pp. 25–43. URL: <https://zbmath.org/0084.31901>.
- [4] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // American Journal of Mathematics. 1958. Vol. 80, No. 4, Pp. 931–954. DOI: <https://doi.org/10.2307/2372841>.
- [5] Morrey C.B. Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity // Mathematische Zeitschrift. 1959. Vol. 72. Pp. 146–164. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01162944>.
- [6] Уральцев Н.Н. О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 130, № 6. С. 1206–1209.
- [7] Stampacchia G. Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1960. Vol. 51. Pp. 1–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02410941>.

- [8] Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13, Issue 3, Pp. 457–468. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130308>.
- [9] Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1961. Vol. 14, Issue 3, Pp. 577–591. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329>.
- [10] Litman W., Stampacchia G., Weinberger H.F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe de Scienze. 1963. Serie 3, Vol. 17, no. 1–2, pp. 43–77. DOI: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1963_3_17_1-2_43_0.
- [11] Royden H. The growth of a fundamental solution of an elliptic divergence structure equation // Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. 1962. Pp. 333–340. URL: <https://zbmath.org/0152.31101>.
- [12] Алхутов Ю.А. О регулярности граничных точек относительно задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 30, Вып. 3. С. 333–342. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mzm6197>.
- [13] Мазья В.Г. О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме // Матем. заметки. 1967. Т. 2, Вып. 2. С. 209–220. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/mzm5480>.
- [14] Guseynov S.T. The regularity test of boundary point for non-uniformly degenerating second order elliptic equations // Proceedings of IMM of Azerbaijan AS, 1999. Vol. XI. P. 65–77. URL: https://www.imm.az/journals/RMI_eserleri/cild11_N19_1999/meqaleler/65-77.pdf.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30

Submitted: 15.01.2024

Revised: 19.02.2024

Accepted: 28.02.2024

S.T. Huseynov

Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan

E-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-7473-2269>

M.J. Aliyev

Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan

E-mail: a.mushfiq@rambler.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-9084-6251>

SOME AUXILIARY ESTIMATES FOR SOLUTIONS TO NON-UNIFORMLY DEGENERATE SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

ABSTRACT

We consider a class of second order elliptic equations in divergence form with non-uniform exponential degeneracy. The method used is based on the fact that the degeneracy rates of the eigenvalues of the matrix $\|a_{ij}(x)\|$ (function $\lambda_i(x)$) are not the functions of unusual norm $|x|$, but of some anisotropic distance $|x|_{a-}$. We assume that the Dirichlet problem for such equations is solvable in the classical sense for every continuous boundary function in any normal domain Ω .

Estimates for the weak solutions of Dirichlet problem near the boundary point are obtained, and Green's functions for second order non-uniformly degenerate elliptic equations are constructed.

Key words: uniform ellipticity; non-uniform degeneration spaces; fundamental solution.

Citation. Huseynov S.T., Aliyev M.J. Some auxiliary estimates for solutions to non-uniformly degenerate second-order elliptic equations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 23–30. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Huseynov S.T., Aliyev M.J., 2024

Sarvan T. Huseynov — Doctor of Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Higher Mathematics, Baku State University, 23, Khalilov Street, Baku, AZ 1148, Republic of Azerbaijan.

Mushfig J. Aliyev — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Higher Mathematics, Baku State University, 23, Khalilov Street, Baku, AZ 1148, Republic of Azerbaijan.

References

- [1] Mazya V.G. Regularity at the boundary of solutions of elliptic equations and conformal mapping. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, vol. 152, number 6, pp. 1297–1300. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/dan28720>. (In Russ.)
- [2] Mazya V.G. On modulus of continuity of the solution to the Dirichlet problem near regular boundary // *Problems of Mathematical Analysis*. Leningrad, 1966, pp. 45–58. (In Russ.)
- [3] De Giorgi E. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Acad. Sci. Torino*, 1957. vol. 3, no. 1, pp. 25–43. Available at: <https://zbmath.org/0084.31901>. (In Italian)
- [4] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *American Journal of Mathematics*, 1958, vol. 80, no. 4, pp. 931–954. DOI: <https://doi.org/10.2307/2372841>.
- [5] Morrey C.B. Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity. *Mathematische Zeitschrift*, 1959, vol. 72, pp. 146–164. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01162944>.
- [6] Uraltseva N.N. On regularity of solutions of multidimensional elliptic equations and variational problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1960, vol. 130, no. 6, pp. 1206–1209. (In Russ.)
- [7] Stampacchia G. Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1960, vol. 51, pp. 1–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02410941>.
- [8] Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, vol. 13, issue 3, pp. 457–468. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130308>.
- [9] Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1961, vol. 14, issue 3, pp. 577–591. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329>.
- [10] Litman W., Stampacchia G., Weinberger H.F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa — Classe de Scienze*, 1963, serie 3, vol. 17, no. 1–2, pp. 43–77. DOI: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1963_3_17_1-2_43_0.
- [11] Royden H. The growth of a fundamental solution of an elliptic divergence structure equation. *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, 1962, pp. 333–340. URL: <https://zbmath.org/0152.31101>.
- [12] Alkhutov Yu.A. Regularity of boundary points relative to the Dirichlet problem for second-order elliptic equations. *Mathematical Notes*, 1981, vol. 30, issue 3, pp. 333–342. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01141620>. (In English; original in Russian)
- [13] Maz'ya V.G. Behavior, near the boundary, of solutions of the Dirichlet problem for a second order elliptic equations in divergent form. *Mathematical Notes*, 1967, vol. 2, issue 2, pp. 610–617. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01094255>. (In English; original in Russian)
- [14] Guseynov S.T. The regularity test of boundary point for non-uniformly degenerating second order elliptic equations. *Proceedings of IMM of Azerbaijan AS*, 1999, vol. XI, pp. 65–77. Available at: https://www.imm.az/journals/RMI_eserleri/cild11_N19_1999/meqaleler/65-77.pdf.