Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 25.08.2023
после рецензирования: 04.10.2023
принятия статьи: 05.12.2023

К.Г. Койфман
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Российская Федерация
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7891-9995

ОТСЧЕТНАЯ ФОРМА ТЕЛ С РАСШИРЕННОЙ КИНЕМАТИКОЙ. ЧАСТЬ II. ВТОРОЙ ГРАДИЕНТ И МИКРОСТРУКТУРА[1]

АННОТАЦИЯ

В статье развиваются дифференциально-геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций гиперупругих твердых тел с расширенной кинематикой. Отклик таких тел, наряду со стандартным кинематическим полем, представленным градиентом деформации, характеризуется дополнительными тензорными полями. В качестве таковых рассмотрены: 1) второй градиент деформации и 2) тензорное поле второго ранга, моделирующее микроструктуру тела. Для каждого из этих двух случаев получены условия совместности и предложена их геометрическая интерпретация. На материальном многообразии, представляющем тело с расширенной кинематикой, синтезирована геометрия. Соответствующая аффинная связность обладает ненулевым кручением и кривизной, что может быть полезно для моделирования тела с дислокациями и дисклинациями.

Ключевые слова: гиперупругость; тело с расширенной кинематикой; второй градиент; микроструктура; несовместные деформации; остаточные напряжения; неевклидова геометрия; материальная метрика; материальная связность; кривизна; кручение; неметричность.

Цитирование. Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть II. Второй градиент и микроструктура // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 54–76. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Константин Георгиевич Койфман — тьютор по математике, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, д. 5.

1. Предварительные сведения

1°. Настоящая статья продолжает работу [1], в которой представлен геометрический метод моделирования несовместных деформаций для гиперупругих тел и рассмотрены его особенности на примере простого материала. Несмотря на то что неевклидова отсчетная форма для тела из простого материала является классической и различные способы ее построения рассмотрены в статьях [2–10], подход к синтезированию неевклидовой формы, предложенный в исследовании [1], несколько отличается от этих способов. Он является комбинацией рассуждений Кренера [2], в рамках которых геометрия определяет-

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

ся на основе условий совместности, с идеей локальной разгрузки, предложенной в работах[2] [9; 10] для формализации локальных деформаций. Цель настоящей статьи — синтезирование неевклидовой формы для тел с расширенной кинематикой.

В работе используются основные структуры и общие формулы, определенные в [1]. В частности, $\mathcal{E}$ есть евклидово физическое пространство [1, формула (2.1)] с ассоциированным векторным пространством $\mathcal{V}$. Ортонормированный базис в последнем обозначается через $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$. Символ $\mathcal{S}_R$ обозначает промежуточную форму [1, формула (2.8)], $\mathfrak{S}_R$ — ее подлежащее многообразие[3] и т. д. В случае необходимости приводятся ссылки на соответствующие формулы из первой части работы.

2°. Метод синтеза неевклидовой формы, используемый в работе, аналогичен методу подвижного репера, предложенному Картаном для построения неевклидовых пространств [11]. Остановимся более подробно на этой аналогии.

В случае простого материала переход к натуральному состоянию определяется полем локальных деформаций $\boldsymbol{H} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ [1, формулы (3.8) и (3.11)], условие совместности которых имеет вид $\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$. Это означает, что в случае выполнения последнего условия (и односвязности формы $\mathcal{S}_R$) поле $\boldsymbol{H}$ является градиентом некоторой глобальной деформации из промежуточной формы в глобально натуральную форму. Если же локальные деформации несовместны, то равенство нулю ротора не выполняется. Скажем тогда, что имеется источник несовместности, представленный тензорным полем второго ранга $\boldsymbol{\eta}$. В этом случае уравнение, характеризующее структурную неоднородность тела, имеет вид

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\eta}. \tag{1.1}$$

Подход, предложенный Кренером, заключается в преобразовании условия совместности с тем, чтобы результат этого преобразования можно было интерпретировать геометрически. Действительно, в соответствии с [1, **20°** и **22°**] условие, выражающее равенство нулю ротора $\boldsymbol{H}$, эквивалентно равенству нулю кручения $\mathfrak{T}$ специфической связности Γ на многообразии $\mathfrak{S}_R$, коэффициенты которой определяются формулами [1, (3.18)]. Следовательно, совместность деформаций эквивалентна утверждению, что связность Γ евклидова. Но тогда появление источника несовместности $\boldsymbol{\eta}$ равносильно изменению геометрии на многообразии $\mathfrak{S}_R$: из евклидовой она переходит в неевклидову, представленную тензором кручения $\mathfrak{T}_0$. В таком случае уравнение (1.1) преобразуется в равенство $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0$, характеризующее геометрическую структуру неевклидова пространства над $\mathfrak{S}_R$.

С другой стороны, Картаном были получены структурные уравнения, характеризующие в общих чертах геометрию неевклидовых пространств [11–13]. Новизна идеи Картана заключалась в отказе от использования криволинейных координат и переходе к полям базисов более общего вида. Действительно, криволинейные координаты накладывают жесткие ограничения на виды локальных базисов за счет замены переменных (три функции определяют все поле базисов в трехмерном пространстве). Если же, отказываясь от использования замены переменных, перейти к неголономным базисам, то появляются дополнительные функциональные степени свободы, распоряжаясь которыми можно прийти к разнообразным геометриям. В явном виде поле базисов $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$ — подвижный репер — может быть определено по заданному полю $\Omega : \mathcal{E} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{V})$ обратимых линейных преобразований[4] трансляционного пространства $\mathcal{V}$ в соответствии с равенствами $\boldsymbol{z}_i = \Omega[\boldsymbol{c}_i]$, $i = 1, 2, 3$. Если через $(\vartheta^i)_{i=1}^3$ обозначить репер пространства $\mathcal{V}^*$, сопряженный к $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$, а через $g_{ij} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_j)$ — метрические коэффициенты относительно подвижного репера, то структурные уравнения Картана для евклидова пространства имеют вид

$$g_{mk}\omega^m_j + g_{mj}\omega^m_k - dg_{jk} = 0, \quad d\vartheta^i + \omega^i_j \wedge \vartheta^j = 0, \quad d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = 0, \tag{1.2}$$

где $\wedge$ — операция внешнего произведения [14]. Поля 1-форм ω^i_j, $i, j = 1, 2, 3$, относительно которых записаны соотношения (1.2), определяют взаимные искажения элементов репера $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$ при переходе от точки к точке.

Уравнения (1.2) можно рассматривать как «условия совместности» для заданных искажений подвижного репера. Действительно, в евклидовом пространстве реализуется не произвольный набор полей ω^i_j, а лишь тот, который удовлетворяет равенствам (1.2). Переход к пространствам более общего вида можно

[2]См. также [1, **16°** и **17°**].

[3]В рамках классической механики континуума нет необходимости выделять третью форму, наряду с отсчетной и актуальной формами. Вместе с тем в настоящей работе третья форма, называемая промежуточной, используется для синтезирования геометрии на материальном многообразии. Формально, подобно любой другой форме тела (см. [1, **7°**]), промежуточная форма представлена в виде упорядоченной совокупности $\mathcal{S}_R = (\mathfrak{S}_R, \boldsymbol{g}|_{S_R}, \boldsymbol{\epsilon}|_{S_R}, \boldsymbol{\nabla}|_{S_R})$, где $\mathfrak{S}_R$ — подлежащее многообразие (носитель геометрической структуры), а $\boldsymbol{g}|_{S_R}$, $\boldsymbol{\epsilon}|_{S_R}$, $\boldsymbol{\nabla}|_{S_R}$ обозначают метрику, форму объема и связность над многообразием $\mathfrak{S}_R$, индуцированные из евклидова пространства $\mathcal{E}$. При синтезировании неевклидовой отсчетной формы последние три поля заменяются на более общие геометрические поля.

[4]Хотя в оригинальных работах Картана рассматривались только вращения, можно предположить, что эти преобразования являются достаточно общими.

осуществить, определив семейства 1-форм неметричности Q_{ij}, а также 2-форм кручения T^i и кривизны R^i_j, и подставив их в правые части уравнений (1.2):

$$g_{mk}\omega^m_j + g_{mj}\omega^m_k - dg_{jk} = Q_{jk}, \quad d\vartheta^i + \omega^i_j \wedge \vartheta^j = T^i, \quad d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = R^i_j. \tag{1.3}$$

Уравнения (1.3) определяют структуру пространства произвольной аффинной связности. В этой связи можно ассоциировать поля Q_{ij}, T^i и R^i_j с величинами, выражающими несовместность полей ω^i_j с евклидовой геометрией.

Рассмотренная аналогия между источниками несовместности и тензорными полями кручения, кривизны и неметричности демонстрирует единство подходов, используемых в настоящей работе и в общей теории пространств аффинной связности.

2. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы для среды второго градиента

2.1. Второй градиент деформации

3°. Квадратичное приближение деформации. Синтезированию поля локальных деформаций предпошлем рассмотрение кинематики среды второго градиента. Предположим, что упругий потенциал относительно промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ является отображением

$$\mathcal{S}_R \times \mathrm{End}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{V};\, \mathrm{End}(\mathcal{V})) \ni (X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2) \mapsto \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2) \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Поэтому, если $\gamma \in \mathrm{Deform}\,(\mathcal{S}_R;\, \mathcal{S})$ — произвольная деформация, то отклик тела в точке $X \in \mathcal{S}_R$ характеризуется равенством [15; 16]

$$W = \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1(X),\, \boldsymbol{F}_2(X)).$$

В списке аргументов, наряду с первым градиентом деформации $\boldsymbol{F}_1(X) \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, представлен второй градиент $\boldsymbol{F}_2(X) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}; \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, определяемый равенством $\boldsymbol{F}_2(X) := D_X \boldsymbol{F}_1$. Следовательно, в окрестности точки X выполнено разложение по формуле Тейлора второго порядка [17]:

$$\gamma(X + \boldsymbol{h}) = \gamma(X) + \boldsymbol{F}_1(X)[\boldsymbol{h}] + \frac{1}{2}\boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{h},\, \boldsymbol{h}] + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|^2), \tag{2.2}$$

в котором $\boldsymbol{h} \in \mathcal{V}$ — достаточно малый вектор, т. е. $X + \boldsymbol{h} \in \mathcal{S}_R$. Здесь и в дальнейшем подразумевается отождествление второго градиента с билинейным отображением $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ в силу естественного изоморфизма[5] [17] $\mathrm{Hom}(\mathcal{V};\, \mathrm{End}(\mathcal{V})) \cong_{\mathrm{vec}} \mathrm{L}_2(\mathcal{V},\, \mathcal{V};\, \mathcal{V})$.

Обобщенная теорема Шварца [17] влечет, что второй градиент симметричен, т. е. $\boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}]$. Поэтому его можно восстановить по значениям $\boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}]$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ в соответствии с формулой, известной из теории билинейных отображений [18]:

$$\boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}] = \frac{\boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}] - \boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u}] - \boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}]}{2}.$$

В свою очередь, из (2.2) вытекает следующее равенство:

$$\boldsymbol{F}_2(X)[\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}] = 2\lim_{s\to 0} \frac{\mathrm{vec}(\gamma(X),\, \gamma(X + s\boldsymbol{v})) - s\boldsymbol{F}_1(X)[\boldsymbol{v}]}{s^2},$$

доказывающее единственность второго градиента как симметричного билинейного отображения, для которого выполнено соотношение (2.2).

4°. Представления второго градиента. В прямоугольных координатах $(x^i)^3_{i=1}$ деформации γ соответствует представление [1, формула (2.10)], а первому градиенту деформации $\boldsymbol{F}_1(X)$ — разложение [1, формула (3.3)]. Поскольку второй градиент деформации можно записать как

$$\boldsymbol{F}_2(X) = \left[\frac{\partial}{\partial X^J}\boldsymbol{F}_1\right]\Bigg|_X \otimes \boldsymbol{c}^J,$$

то его разложение имеет вид[6]

$$\boldsymbol{F}_2(X) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^I \partial X^J}\Bigg|_{\mathrm{Coor}(X)} \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{c}^I \otimes \boldsymbol{c}^J.$$

[5] В явном виде этот изоморфизм может быть определен следующим образом. Если $\boldsymbol{A}$ — элемент $\mathrm{Hom}(\mathcal{V}; \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, то ему отвечает элемент $\boldsymbol{L_A}$ пространства $\mathrm{L}_2(\mathcal{V},\, \mathcal{V};\, \mathcal{V})$, заданный равенством $\boldsymbol{L_A}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{A}[\boldsymbol{u}])[\boldsymbol{v}]$. Искомый изоморфизм является соответствием $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{L_A}$.

[6] Здесь Coor обозначает декартову арифметизацию [1, формула (2.2)].

Вместе с тем несмотря на то что в криволинейных координатах $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$ первый градиент $\boldsymbol{F}_1$ имеет простое разложение [1, формула (3.4)], представление, соответствующее второму градиенту, является более сложным. Для его получения рассмотрим следующее утверждение. Пусть

$$\mathcal{S}_R \ni X \mapsto \boldsymbol{A}_X = A^i_J\big|_X\, \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$$

— тензорное поле, представленное в паре координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$. Тогда для его градиента

$$D_X\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial}{\partial Q^K}\boldsymbol{A}\right]\bigg|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X$$

в точке $X \in \mathcal{S}_R$ справедливо разложение[7]

$$D_X\boldsymbol{A} = \left\{\partial_K A^i_J\big|_{\sigma_R(\cdot)} + A^l_J F^j_K \overset{q}{\Gamma}{}^i_{jl}\Big|_{\gamma(\cdot)} - A^i_L \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ}\right\}\bigg|_X \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X. \tag{2.3}$$

Здесь F^i_J — компоненты градиента деформации [1, формула (3.4)], а $\overset{Q}{\Gamma}{}^I_{JK}$ и $\overset{q}{\Gamma}{}^i_{jk}$ — символы Кристоффеля, отвечающие криволинейным координатам $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$, т. е.

$$\overset{Q}{\Gamma}{}^I_{JK} = \boldsymbol{E}^I\cdot\partial_J\boldsymbol{E}_K \quad \text{и} \quad \overset{q}{\Gamma}{}^i_{jk} = \boldsymbol{e}^i\cdot\partial_j\boldsymbol{e}_k.$$

Доказательство. Используя обобщенное правило дифференцирования произведения [17], получаем равенство[8]

$$\begin{aligned} D_X\boldsymbol{A} = \Big\{\partial_K A^I_J\big|_{\sigma_R(X)}\, \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \boldsymbol{E}^J|_X &+ \\ + A^i_J\, \partial_K(\boldsymbol{e}_i\circ\gamma)|_{\sigma_R(X)} \otimes \boldsymbol{E}^J|_X &+ \\ + A^i_J \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \partial_K\boldsymbol{E}^J\Big|_{\sigma_R(X)}&\Big\} \otimes \boldsymbol{E}^K|_X. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В нем, согласно определению символов Кристоффеля,

$$\begin{gathered} \partial_K(\boldsymbol{e}_i\circ\gamma)|_{\sigma_R(X)} = F^j_K\Big|_X\, \partial_j\boldsymbol{e}_i|_{\sigma\circ\gamma(X)} = F^j_K\Big|_X \overset{q}{\Gamma}{}^l_{ji}\Big|_{\gamma(X)} \boldsymbol{e}_l|_{\gamma(X)}, \\ \partial_K\boldsymbol{E}^J\Big|_{\sigma_R(X)} = -\overset{Q}{\Gamma}{}^J_{KL}\Big|_X \boldsymbol{E}^L|_X. \end{gathered}$$

Подставляя полученные выражения в (2.4) и заменяя соответствующим образом индексы суммирования, приходим к формуле (2.3). □

В случае, когда $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_1$, формула (2.3) приводит к равенству

$$\boldsymbol{F}_2(X) = \left\{\partial_K F^i_J\big|_{\sigma_R(\cdot)} + F^l_J F^j_K \overset{q}{\Gamma}{}^i_{jl}\Big|_{\gamma(\cdot)} - F^i_L \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ}\right\}\bigg|_X \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X, \tag{2.5}$$

являющемуся искомым разложением второго градиента. В нем

$$\partial_K F^i_J = \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^J \partial Q^K}.$$

Следовательно, в силу перестановочности повторных производных, $\partial_K F^i_J = \partial_J F^i_K$.

В работе используется следующий частный вид формулы (2.5). Выберем в качестве $(q^i)_{i=1}^3$ прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$. Тогда $\overset{x}{\Gamma}{}^i_{jk} = 0$, что дает

$$\boldsymbol{F}_2(X) = \left\{\partial_K F^i_J\big|_{\sigma_R(\cdot)} - F^i_L \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ}\right\}\Big|_X \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X. \tag{2.6}$$

В этом случае компоненты второго градиента выражаются через компоненты первого градиента и их производные, а также через символы Кристоффеля системы координат $(Q^I)_{I=1}^3$.

Замечание 1. *Евклидова структура физического пространства и отождествления по изоморфизму, индуцируемые ею, позволяют скрыть истинную природу полей, используемых в настоящей работе. Действительно, предположим заданными криволинейные координаты* $(Q^I)_{I=1}^3$ *на форме* $\mathcal{S}_R$*, а координаты на образах выберем прямоугольными. Тогда*

[7] Отображение σ_R есть координатное отображение, соответствующее криволинейным координатам $(Q^I)_{I=1}^3$ на форме $\mathcal{S}_R$ [1, формула (2.13)].

[8] Формула (2.4) — производная тензорного поля — содержит производные скалярных и векторных базисных полей. Производные базисных полей, в свою очередь, выражаются через исходные базисные поля; коэффициенты разложения есть символы Кристоффеля соответствующей системы координат.

1. *Деформация* $\gamma : \mathcal{S}_R \to \mathcal{S}$ *есть тройка* $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ *скалярных полей* $\gamma^i : \mathcal{S}_R \to \mathbb{R}$*, определенных равенством*
$$\gamma(Q^1, Q^2, Q^3) = o + \boldsymbol{c}_i \gamma^i(Q^1, Q^2, Q^3).$$

2. *Градиент деформации* $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{c}_i \otimes F^i$ *есть тройка* 1*-форм* (F^1, F^2, F^3)*, заданных как*
$$F^i = \frac{\partial x^i}{\partial Q^I} dQ^I, \quad i = 1, 2, 3.$$

То, что градиент деформации не является тензором в классическом понимании этого термина, отмечалось в работе [19, с. 245] и позднее в монографиях [20, 21].

3. *Второй градиент* $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{F}^i$ *есть совокупность трех тензоров второго ранга* $(\boldsymbol{F}^1, \boldsymbol{F}^2, \boldsymbol{F}^3)$.

В отличие от представления полей γ, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ *в исходной (евклидовой форме), их представление в соответствии с п. 1)–3) является общим и может быть непосредственно перенесено на произвольные гладкие многообразия.*

Несмотря на то что в рамках настоящей работы такое описание полей избыточно[9]*, к нему придется прибегнуть уже в случае рассмотрения деформирования материальных двумерных поверхностей в евклидовом пространстве.*

2.2. Семейство форм и условие совместности

5°. Гипотеза локальной разгрузки. Подобно случаю среды первого градиента [1, **16°**], предположим справедливой гипотезу локальной разгрузки. Пусть фиксированы тензоры $\boldsymbol{N}_1 \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ и $\boldsymbol{N}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}; \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, характеризующие натуральное состояние, и пусть задана промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ вместе с упругим потенциалом (2.1). Предположим далее, что определено семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \to \mathcal{S}^{(X)}$, для которого в любой точке $X \in \mathcal{S}_R$ выполнено условие[10]
$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_1}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_1^{(X)}(X),\, \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_2^{(X)}(X)} &= \boldsymbol{N}_1, \\ \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_2}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_1^{(X)}(X),\, \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_2^{(X)}(X)} &= \boldsymbol{N}_2, \end{aligned} \tag{2.7}$$
являющееся расширением [1, формула (3.6)]. Здесь $\boldsymbol{F}_1^{(X)} = D\gamma^{(X)}$ — первый градиент деформации $\gamma^{(X)}$, а $\boldsymbol{F}_2^{(X)} = D\boldsymbol{F}_1^{(X)}$, соответственно, второй градиент.

6°. Синтезирование локальных деформаций и гипердеформаций. Согласно второй из формул [1, (3.5)], в которой положим $(q^i)_{i=1}^3 = (x^i)_{i=1}^3$, первый градиент деформации $\gamma^{(X)}$ в точке $Y \in \mathcal{S}_R$ имеет представление
$$\boldsymbol{F}_1^{(X)}(Y) = [\boldsymbol{F}_1^{(X)}]^i_I\Big|_Y \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^I|_Y. \tag{2.8}$$
Из него, согласно равенству [1, (3.8)], синтезируется поле локальных деформаций $\boldsymbol{H}_1 : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$, с разложением
$$\boldsymbol{H}_1(X) = H^i_I\big|_{\sigma_R(X)} \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^I|_X, \quad \text{где} \quad H^i_I\big|_{\sigma_R(X)} = [\boldsymbol{F}_1^{(X)}]^i_I\Big|_X. \tag{2.9}$$

Вместе с тем, поскольку рассматривается среда второго градиента, одного лишь поля $\boldsymbol{H}_1$ недостаточно для описания локальной разгрузки. Нужно еще поле, представляющее второй градиент. С этой целью определим вторые градиенты деформаций $\gamma^{(X)}$:
$$\boldsymbol{F}_2^{(X)}(Y) = D_Y \boldsymbol{F}_1^{(X)},$$
которые, в соответствии с представлением (2.8) и формулой (2.6), имеют разложение
$$\boldsymbol{F}_2^{(X)}(Y) = \left\{ \partial_K [\boldsymbol{F}_1^{(X)}]^i_J\Big|_{\sigma_R(\cdot)} - [\boldsymbol{F}_1^{(X)}]^i_L \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ} \right\}\Big|_Y \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^J|_Y \otimes \boldsymbol{E}^K|_Y. \tag{2.10}$$
Синтезируем теперь новый тензор $\boldsymbol{H}_2(X) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}; \mathrm{End}(\mathcal{V}))$ по формуле
$$\boldsymbol{H}_2(X) := \boldsymbol{F}_2^{(X)}(Y)\Big|_{Y=X}, \tag{2.11}$$

[9] Поскольку физическое пространство евклидово, а размерности форм и пространства совпадают.

[10] Несмотря на то что в рамках настоящей работы тензоры $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ предполагаются постоянными, ход рассуждений не изменится, если эти тензоры заменить на переменные тензоры, зависящие от точки $X \in \mathcal{S}_R$. В таком случае правые части соотношений (2.7) и им подобным следует заменить на $\boldsymbol{N}_1(X)$ и $\boldsymbol{N}_2(X)$ соответственно. Такая замена целесообразна, если натуральное состояние определяется в рамках действия некоторого внешнего поля, которым нельзя пренебречь.

и назовем его локальной гипердеформацией. Совокупность таких тензоров образует тензорное поле $\boldsymbol{H}_2 : \mathcal{S}_R \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V};\, \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, которое предположим гладким.

Полагая теперь в формуле (2.10) $Y = X$, приходим к следующему представлению тензора гипердеформаций (2.11):

$$\boldsymbol{H}_2(X) = \Big\{ S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(\cdot)} - H^i_L\big|_{\sigma_R(\cdot)} \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ} \Big\}\Big|_X \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X, \tag{2.12}$$

где

$$S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)} := \partial_K [\boldsymbol{F}_1^{(X)}]^i_J\Big|_{\sigma_R(X)}, \tag{2.13}$$

а H^i_I — компоненты разложения (2.9). Заметим, что в силу перестановочности повторных производных, числа $S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)}$ обладают свойством симметрии: $S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)} = S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)}$.

Таким образом, локальная разгрузка среды второго градиента характеризуется парой тензорных полей $(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$, значения которых определяются согласно разложениям (2.9) и (2.12). При фиксированных криволинейных координатах $(Q^I)_{I=1}^3$ им соответствует поле матриц $X \mapsto \Big([H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}],\, [S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)}]\Big)$, где

$$\det[H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}] \neq 0,$$
$$S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)} = S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)}, \quad X \in \mathcal{S}_R.$$

Кроме того, в соответствии с (2.7), выполнено свойство:

$$\begin{aligned} &\forall X \in \mathcal{S}_R : \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_1}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{H}_1(X),\, \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{H}_2(X)} = \boldsymbol{N}_1, \\ &\forall X \in \mathcal{S}_R : \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_2}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{H}_1(X),\, \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{H}_2(X)} = \boldsymbol{N}_2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

7°. Восстановление семейства деформаций. Подобно случаю первого градиента, рассмотрим задачу восстановления семейства деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ по заданной паре гладких тензорных полей $\boldsymbol{H}_1 : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ и $\boldsymbol{H}_2 : \mathcal{S}_R \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V};\, \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, первое из которых имеет в качестве значений обратимые линейные преобразования, а второе — симметричные тензоры. Кроме того, предполагается, что эти поля удовлетворяют свойству (2.14).

Зафиксировав точку $X \in \mathcal{S}_R$, изменим, если нужно, криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$ так, чтобы точке X отвечали их нулевые значения[11]. Пусть $H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}$ и $S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)} = S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)}$ — соответствующие функции из разложений (2.9) и (2.12). Тогда относительно пары координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(x^i)_{i=1}^3$ определим отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ согласно правилу:

$$x^i(Q^1,\, Q^2,\, Q^3) := b^i_X + H^i_I\big|_{\sigma_R(X)} Q^I + S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)} Q^J Q^K, \quad i = 1,\, 2,\, 3, \tag{2.15}$$

где $(b^i_X)_{i=1}^3$ — фиксированная тройка чисел.

Будучи заданным как квадратичная форма, построенное отображение является гладким. Кроме того, в силу обратимости матрицы $[H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}]$, теорема об обратной функции [17] гарантирует существование окрестности нуля, в которой (2.15) является диффеоморфизмом. Поэтому, если через $\mathcal{N}_X \subset \mathcal{S}_R$ обозначить соответствующую окрестность точки X в $\mathcal{E}$, то придем к деформации $\gamma^{(X)} : \mathcal{N}_X \to \widetilde{\mathcal{N}}_X$ формы $\mathcal{N}_X$, являющейся частью формы $\mathcal{S}_R$, в некоторую другую форму $\widetilde{\mathcal{N}}_X$. Отображение (2.15) является координатным представлением $\gamma^{(X)}$; кроме того, по построению

$$\left.\frac{\partial x^i}{\partial Q^I}\right|_{\sigma_R(X)} = H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}, \quad \left.\frac{\partial^2 x^i}{\partial Q^J \partial Q^K}\right|_{\sigma_R(X)} = S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)},$$

что влечет равенства $\boldsymbol{F}_1^{(X)}(X) = \boldsymbol{H}_1(X)$ и $\boldsymbol{F}_2^{(X)}(X) = \boldsymbol{H}_2(X)$.

Повторяя проделанную процедуру для всех точек формы $\mathcal{S}_R$, приходим к семейству деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, по которому синтезируется пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$. Кроме того, для построенного семейства выполняется свойство (2.7), т. е. деформации $\gamma^{(X)}$ являются разгрузочными. Вместе с тем в отличие от изначально определенных разгрузочных деформаций, заданных на всей промежуточной форме $\mathcal{S}_R$, полученные деформации определены лишь на ее частях. Это обстоятельство не противоречит общей методологии настоящей работы, поскольку рассматриваемые части конечны и потому также являются формами.

[11]Это всегда можно сделать, используя операцию сдвига в $\mathbb{R}^3$.

8°. Совместность локальных деформаций. В случае среды второго градиента будем называть пару $(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ тензорных полей, обладающую свойством (2.14), совместной, если 1) существует деформация $\gamma_0 \in \mathrm{Deform}\,(\mathcal{S}_R;\, \mathcal{S}_0)$ из промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ в некоторую форму $\mathcal{S}_0$, для которой выполнено равенство $\boldsymbol{H}_1 = D\gamma_0$, и 2) справедливо соотношение $\boldsymbol{H}_2 = D\boldsymbol{H}_1$. Таким образом, для γ_0 выполняется свойство

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_1}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = D_X\gamma_0,\ \boldsymbol{F}_2 = D_X^2\gamma_0} &= \boldsymbol{N}_1, \\ \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_2}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = D_X\gamma_0,\ \boldsymbol{F}_2 = D_X^2\gamma_0} &= \boldsymbol{N}_2, \end{aligned}$$

вытекающее из (2.7). В этом смысле форма $\mathcal{S}_0$ является глобальной натуральной.

Заметим, что если пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$ совместна, то, в частности, совместно поле локальных деформаций $\boldsymbol{H}_1$. При этом потенциал [1, формула (3.1)], относительно которого определяется натуральное состояние, индуцирован из $\widehat{W}_2$:

$$\widehat{W}_1(X,\, \boldsymbol{F}) := \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{H}_2(X)).$$

Вместе с тем из совместности $\boldsymbol{H}_1$ в общем случае не вытекает совместность пары $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$. По этой причине уместно расширить терминологию:

а) пара $(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ имеет первый порядок совместности, если для некоторой деформации γ_0 выполнено свойство 1), однако свойство 2) не выполнено,

б) пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$ имеет второй порядок совместности (или просто совместна), если выполнены оба свойства 1) и 2),

в) пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$ несовместна, если ни одно из свойств 1), 2) не выполнено.

Таким образом, условие совместности [1, формула (3.15)] для случая простого материала дополняется вторым условием, представленным свойством 2), что приводит к совокупности равенств:

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\, \boldsymbol{H}_1 &= \mathbf{0}, \\ D\boldsymbol{H}_1 &= \boldsymbol{H}_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Их выполнение является необходимым (а в случае односвязности $\mathcal{S}_R$ и достаточным) для первого и второго порядка совместности пары $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$. В координатной форме, согласно[12] (2.9) и (2.12),

$$\begin{aligned} \partial_J H^i_K - \partial_K H^i_J = 0, \\ \partial_J H^i_K = S^i_{JK}, \quad i,\, J,\, K = 1,\, 2,\, 3. \end{aligned}$$

Вместе с тем первое из условий (2.16) избыточно, если рассматривать второй порядок совместности. Действительно, симметрия функций S^i_{JK} по нижним индексам дает

$$\partial_K H^i_J = S^i_{KJ} = S^i_{JK} = \partial_J H^i_K.$$

Но это и означает, что $\mathrm{curl}\, \boldsymbol{H}_1 = \mathbf{0}$. Поэтому второму порядку совместности отвечает следующее условие:

$$D\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2 \quad \text{или} \quad \partial_J H^i_K = S^i_{JK}, \quad i,\, J,\, K = 1,\, 2,\, 3. \tag{2.17}$$

2.3. Геометрическая интерпретация условия совместности

9°. Поле Λ. Условие совместности (2.17) представим в следующем виде. Принимая во внимание, что значения поля $\boldsymbol{H}_1$ являются обратимыми линейными преобразованиями, домножим обе части (2.17) на $[\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i$ и просуммируем по i:

$$[\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i \partial_J H^i_K - [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i S^i_{JK} = 0, \quad I,\, J,\, K = 1,\, 2,\, 3. \tag{2.18}$$

Определим скалярные поля Γ^I_{JK} в соответствии с [1, формула (3.18)] и новые поля Λ^I_{JK} по формуле

$$\Lambda^I_{JK} := [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i S^i_{JK}. \tag{2.19}$$

Тогда равенство (2.18) принимает вид

$$\Gamma^I_{JK} - \Lambda^I_{JK} = 0, \quad I,\, J,\, K = 1,\, 2,\, 3. \tag{2.20}$$

[12] Для вычисления производной $D\boldsymbol{H}_1$ можно воспользоваться равенством (2.3), где $A^i_I = H^i_I$, а $q = x$.

В первой части работы [1, предложение 1] уже было показано, что поля Γ^I_{JK} являются коэффициентами некоторой связности. Установим, что аналогичное свойство выполняется и для полей Λ^I_{JK}.

10°. Свойства поля Λ. Доказательство того, что поля Λ^I_{JK} являются коэффициентами некоторой связности, предварим определением закона преобразования полей S^i_{JK}. Для этого продифференцируем обе части соотношения [1, формула (3.20)] по новым координатам $\widetilde{Q}^L$. Если через $\widetilde{\partial}_L$ обозначить это дифференцирование, то полученная формула примет вид

$$\widetilde{\partial}_L[\widetilde{\boldsymbol{F}^{(X)}}]^{\,i}_{J}|_Y = \frac{\partial^2 Q^K}{\partial\widetilde{Q}^J\partial\widetilde{Q}^L}\bigg|_{\widetilde{\sigma}_R(Y)}[\boldsymbol{F}^{(X)}]^i_K|_Y + \frac{\partial Q^K}{\partial\widetilde{Q}^J}\bigg|_{\widetilde{\sigma}_R(Y)}\frac{\partial Q^M}{\partial\widetilde{Q}^L}\bigg|_{\widetilde{\sigma}_R(Y)}\partial_M[\boldsymbol{F}^{(X)}]^i_K|_Y. \tag{2.21}$$

Полагая в выражении (2.21) $Y = X$ и принимая во внимание определение (2.13), получаем искомый закон преобразования полей S^i_{JK}:

$$\widetilde{S}^i_{LJ}\Big|_{\widetilde{\sigma}_R(X)} = S^i_{MK}\big|_{\widetilde{\sigma}_R(X)}\frac{\partial Q^M}{\partial\widetilde{Q}^L}\bigg|_{\widetilde{\sigma}_R(X)}\frac{\partial Q^K}{\partial\widetilde{Q}^J}\bigg|_{\widetilde{\sigma}_R(X)} + H^i_K\big|_{\widetilde{\sigma}_R(X)}\frac{\partial^2 Q^K}{\partial\widetilde{Q}^L\partial\widetilde{Q}^J}\bigg|_{\widetilde{\sigma}_R(X)}. \tag{2.22}$$

Обозначая через $\mathfrak{S}_R$ многообразие, над которым определена промежуточная форма $\mathcal{S}_R$, приходим к следующему утверждению:

Предложение 1. *Скалярные функции* Λ^I_{JK} *являются коэффициентами некоторой аффинной связности на многообразии* $\mathfrak{S}_R$.

Доказательство. Докажем утверждение методом, аналогичным тому, как было доказано предложение 1 в [1]. Если через $\widetilde{\Lambda}^I_{JK}$ обозначить функции (2.19), определенные относительно координат $(\widetilde{Q}^I)^3_{I=1}$, то в соответствии с формулами [1, формула (3.21)] и (2.22) получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}^I_{JK} &= [\widetilde{\overset{-1}{\boldsymbol{H}}}]^{\,I}_{i}\widetilde{S}^i_{JK} = \\
&= \frac{\partial\widetilde{Q}^I}{\partial Q^L}[\overset{-1}{\boldsymbol{H}}]^L_i\left(S^i_{PR}\frac{\partial Q^P}{\partial\widetilde{Q}^J}\frac{\partial Q^R}{\partial\widetilde{Q}^K} + H^i_M\frac{\partial^2 Q^M}{\partial\widetilde{Q}^J\partial\widetilde{Q}^K}\right) = \\
&= \Lambda^L_{PR}\frac{\partial\widetilde{Q}^I}{\partial Q^L}\frac{\partial Q^P}{\partial\widetilde{Q}^J}\frac{\partial Q^R}{\partial\widetilde{Q}^K} + \frac{\partial\widetilde{Q}^I}{\partial Q^L}\frac{\partial^2 Q^L}{\partial\widetilde{Q}^J\partial\widetilde{Q}^K}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение приводит к закону преобразования коэффициентов связности в координатном репере, что и доказывает предложение. ☐

Связность, соответствующая полям Λ^I_{JK}, обозначается через Λ. Из симметрии полей S^I_{JK} по нижним индексам следует, что и полученная связность симметрична, т. е. ее кручение равно нулю: $\mathfrak{T}(\Lambda) = 0$.

Получим другие выражения для функций Λ^I_{JK}. С этой целью восстановим по паре $(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2)$ синтезирующее ее семейство деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X\in\mathcal{S}_R}$. В свою очередь, семейству $\{\gamma^{(X)}\}_{X\in\mathcal{S}_R}$ отвечает семейство первых градиентов $\{\boldsymbol{F}^{(X)}_1\}_{X\in\mathcal{S}_R}$ и обратных градиентов $\{\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1\}_{X\in\mathcal{S}_R}$ с разложениями

$$\boldsymbol{F}^{(X)}_1 = [\boldsymbol{F}^{(X)}_1]^i_I\boldsymbol{c}_i\otimes\boldsymbol{E}^I \quad \text{и} \quad \overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1 = [\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_i\boldsymbol{E}_I\otimes\boldsymbol{c}^i$$

соответственно. Их компоненты связаны соотношениями

$$[\boldsymbol{F}^{(X)}_1]^i_J[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^J_j = \delta^i_j \quad \text{и} \quad [\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_i[\boldsymbol{F}^{(X)}_1]^i_J = \delta^I_J. \tag{2.23}$$

Дифференцируя обратный градиент $\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1$ в точке Y, принадлежащей области определения деформации $\gamma^{(X)}$, получаем равенство

$$D_Y\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1 = \left\{\partial_K[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_j\bigg|_{\sigma_R(\cdot)} + [\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^L_J\,\overset{Q}{\Gamma}{}^I_{KL}\right\}\Bigg|_Y\boldsymbol{E}_I|_Y\otimes\boldsymbol{c}^j\otimes\boldsymbol{E}^K|_Y. \tag{2.24}$$

Заметим, что рассуждения, приводящие к последнему равенству, аналогичны использованным при выводе формулы (2.6). Полагая теперь $Y = X$, приходим к тензору третьего ранга

$$\boldsymbol{P}_2(X) := D_Y\,\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1\bigg|_{Y=X},$$

который по аналогии с имплантом [1, формула (3.12)] назовем гиперимплантом. Из (2.24) следует разложение для гиперимпланта:

$$\boldsymbol{P}_2(X) = \left\{R^I_{Kj}\big|_{\sigma_R(\cdot)} + P^L_j\big|_{\sigma_R(\cdot)}\,\overset{Q}{\Gamma}{}^I_{KL}\right\}\Big|_X\boldsymbol{E}_I|_X\otimes\boldsymbol{c}^j\otimes\boldsymbol{E}^K|_X.$$

Здесь

$$R^I_{Kj}\big|_{\sigma_R(X)} := \partial_K[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_j\Big|_{\sigma_R(X)}, \tag{2.25}$$

а P^L_j — компоненты поля имплантов $\boldsymbol{P}_1 = \overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1$.

Для того чтобы связать поля R^I_{Kj} и S^I_{JK}, рассмотрим второе из равенств (2.23). Дифференцируя обе его части по Q^K, получаем

$$[\boldsymbol{F}^{(X)}_1]^i_J\partial_K[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_i + [\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_i\partial_K[\boldsymbol{F}^{(X)}_1]^i_J = 0,$$

что при $Y = X$ дает

$$H^i_J R^I_{Ki} + [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}]^I_i S^i_{KJ} = 0.$$

Из последнего равенства и вытекает, что

$$S^i_{KJ} = -H^i_I H^j_J R^I_{Kj}. \tag{2.26}$$

Следовательно, наряду с парой $(\boldsymbol{H}_1,\ \boldsymbol{H}_2)$, состоящей из полей локальных деформаций и гипердеформаций, можно рассматривать пару $(\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2)$, состоящую из импланта и гиперимпланта. В терминах элементов этой пары связность Γ определяется формулой [1, (3.26)], а связность Λ, в силу равенства (2.26), — формулой

$$\Lambda^I_{JK} = -[\overset{-1}{\boldsymbol{P}}_1]^j_K R^I_{Jj}. \tag{2.27}$$

Формулу (2.27) можно записать иначе. Для этого, используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_j}{\partial Q^K} = [\boldsymbol{F}^{(X)}_1]^i_K\frac{\partial[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_j}{\partial x^i}$$

в произвольной точке Y. Переходя теперь к $Y = X$ и учитывая (2.25), придем к равенству

$$R^I_{Kj} = H^i_K\widetilde{R}^I_{ij}, \tag{2.28}$$

где

$$\widetilde{R}^I_{ij} = \frac{\partial[\overset{-1}{\boldsymbol{F}}{}^{(X)}_1]^I_j}{\partial x^i}\Bigg|_{Y=X}, \quad \widetilde{R}^I_{ij} = \widetilde{R}^I_{ji}.$$

Наконец, учитывая равенство (2.28), формулу (2.27) можно преобразовать к виду:

$$\Lambda^I_{JK} = -[\overset{-1}{\boldsymbol{P}}_1]^i_J[\overset{-1}{\boldsymbol{P}}_1]^j_K\widetilde{R}^I_{ij}.$$

В таком виде связность Λ определяется в монографии [6, формула (2.59)].

11°. Тензор неоднородности. Связности Γ и Λ определяют новое поле

$$\mathsf{D} := \Gamma - \Lambda \tag{2.29}$$

с компонентами $D^I_{JK} = \Gamma^I_{JK} - \Lambda^I_{JK}$. Поле (2.29) является тензорным полем третьего ранга, в чем можно убедиться, сопоставив законы преобразования коэффициентов связностей Γ и Λ: слагаемые, соответствующие вторым частным производным, при вычитании взаимно уничтожаются. Следуя терминологии, предложенной в работе [6], назовем поле D тензором неоднородности.

В общем случае тензор неоднородности D не является симметричным, а его антисимметричная часть

$$D^I_{[JK]} = \frac{1}{2}(D^I_{JK} - D^I_{KJ}) \tag{2.30}$$

пропорциональна кручению связности Γ. Действительно,

$$D^I_{JK} = \Gamma^I_{JK} - \Gamma^I_{KJ} + \Gamma^I_{KJ} - \Lambda^I_{KJ} = \mathfrak{T}(\Gamma)^i_{JK} + D^i_{KJ},$$

что влечет

$$2D^I_{[JK]} = \mathfrak{T}(\Gamma)^I_{JK}.$$

Таким образом, тензор (2.29) можно представить в виде

$$\mathsf{D} = \frac{1}{2}\mathfrak{T}(\Gamma) + \operatorname{Sym}\mathsf{D}, \tag{2.31}$$

где $\operatorname{Sym}\mathsf{D}$ — соответствующая симметричная часть.

12°. Условие совместности в терминах тензора неоднородности. Согласно определению (2.29) тензора неоднородности, условие совместности (2.20) может быть записано в окончательном виде:

$$\mathsf{D}(\Gamma,\, \Lambda) = 0 \quad \text{или} \quad D^I_{JK} = 0, \quad I,\, J,\, K = 1,\, 2,\, 3. \tag{2.32}$$

Это необходимое (а в случае односвязности $\mathfrak{S}_R$ и достаточное) условие совместности пары $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$.

Заметим, что в случае выполнения условия (2.32) из равенства (2.31) следует, что $\mathfrak{T}(\Gamma) = 0$, т. е. поле локальных деформаций $\boldsymbol{H}_1$ совместно. Этот результат находится в полном соответствии с установленном выше свойством, согласно которому совместность второго порядка влечет совместность первого порядка. Таким образом, в терминах полей кручения и неоднородности предложенную классификацию совместности деформаций можно записать следующим образом:

а) пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$ имеет первый порядок совместности, если $\mathfrak{T}(\Gamma) = 0$, но $\mathsf{D} \neq 0$,

б) пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$ имеет второй порядок совместности, если $\mathsf{D} = 0$,

в) пара $(\boldsymbol{H}_1,\, \boldsymbol{H}_2)$ несовместна, если $\mathfrak{T}(\Gamma) \neq 0$ и $\mathsf{D} \neq 0$.

2.4. Неевклидова отсчетная форма

13°. Материальная связность. Связности Вайценбока Γ [1, формула (3.18)], Леви-Чивита L [1, формула (3.32)] и Λ (2.19) могут служить примерами материальных связностей на $\mathfrak{S}_R$. Каждой из них отвечает своя неевклидова отсчетная форма. Вместе с тем можно рассматривать и комбинации этих трех связностей, образуя разнообразные поля. Действительно, например, подберем такую связность Δ, чтобы были выполнены следующие условия:

а) кручение Δ совпадает с кручением Γ,

б) кривизна Δ отлична от нуля,

в) в случае совместных деформаций связность Δ является евклидовой связностью.

Простейшим вариантом является связность, определяемая формулой

$$\Delta := L + \mathsf{D}, \text{ или в компонентах } \Delta^I_{JK} := L^I_{JK} + D^I_{JK}. \tag{2.33}$$

Здесь D — тензор неоднородности (2.29). В явном виде, принимая во внимание, что компоненты материальной метрики G определены равенством $G_{IJ} = \delta_{ij} H^i_I H^j_J$, а также используя формулы [1, (3.18)] и (2.19), формулу (2.33) можно записать как

$$\Delta^I_{JK} = \frac{G^{IS}}{2} \left(\partial_J G_{SK} + \partial_K G_{JS} - \partial_S G_{JK}\right) + [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i \left(\partial_J H^i_K - S^i_{JK}\right). \tag{2.34}$$

Вклад второго градиента в геометрическую структуру представлен полями S^i_{JK}, которые наряду с H^i_K определяют локальную гипердеформацию $\boldsymbol{H}_2$.

Поскольку первое слагаемое в (2.33) является связностью, а второе — тензором третьего ранга, то, составляя закон преобразования для полей Δ^I_{JK}, можно убедиться в том, что они действительно являются коэффициентами связности на $\mathfrak{S}_R$. Полученная связность удовлетворяет требованиям *а)–в)*, указанным выше. В самом деле, поскольку связности L и Λ симметричны, то

$$\mathfrak{T}(\Delta) = \mathfrak{T}(\Gamma),$$

то есть кручение связности Δ совпадает с кручением связности Γ. Кроме того, кривизна $\mathfrak{R}(\Delta)$ связности Δ отлична от нуля, будучи представленной в компонентах выражением

$$\mathfrak{R}(\Delta)^I_{ABC} = \mathfrak{R}(L)^I_{ABC} + \mathfrak{R}(\mathsf{D})^I_{ABC} + L^E_{BC} D^I_{AE} + D^E_{BC} L^I_{AE} - L^E_{AC} D^I_{BE} - D^E_{AC} L^I_{BE}.$$

Здесь $\mathfrak{R}(L)$ — кривизна, порожденная тензором Леви-Чивита, а $\mathfrak{R}(\mathsf{D})$ — формальное выражение, которое представляет «кривизну», порожденную тензором D. Наконец, если деформации совместны, то $\mathsf{D} = 0$ и потому связность Δ совпадает со связностью Леви-Чивита. Но связность Леви-Чивита в этом случае сама порождается совместными деформациями, и потому ее кривизна равна нулю. Следовательно, в случае совместных деформаций Δ является евклидовой связностью.

Связность Δ можно в определенном смысле рассматривать как модификацию связности Леви-Чивита L для случая второго градиента. Аналогичная модификация связности Вайценбока Γ приводит к полю

$$\widetilde{\Delta} := \Gamma + \mathsf{D}, \text{ или в компонентах } \widetilde{\Delta}^I_{JK} := \Gamma^I_{JK} + D^I_{JK}. \tag{2.35}$$

В явном виде поле (2.35) представлено выражением

$$\widetilde{\Delta}^I_{JK} = [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i \left(2\partial_J H^i_K - S^i_{JK}\right). \tag{2.36}$$

Рассуждениями, аналогичными тем, что касались поля Δ, можно установить, что поле $\widetilde{\Delta}$ также является связностью на $\mathfrak{S}_R$. Эта связность удовлетворяет свойствам *б*) и *в*), и с точностью до множителя удовлетворяет свойству *а*):

$$\mathfrak{T}(\widetilde{\Delta}) = 2\mathfrak{T}(\Gamma).$$

В рамках физических приложений геометрия, определяемая связностью (2.33) (или (2.35)), могла бы быть полезна в случае одновременного наличия дислокаций, дисклинаций и точечных дефектов[13] в кристалле. Отметим, что, по-видимому, первое указание на то, что в рамках второго градиента можно эффективно смоделировать наличие дислокаций и дисклинаций, содержится в работе [22].

14°. Структура неевклидовой формы. Связность Δ, определенная согласно формуле (2.33), материальная метрика G, заданная формулой [1, формула (3.28)], и соответствующая метрике форма объема $\mu = dV_{\mathsf{G}}$ задают на многообразии $\mathfrak{S}_R$ структуру пространства с неевклидовой связностью:

$$\mathtt{S}_R = (\mathfrak{S}_R,\, \mathsf{G},\, dV_{\mathsf{G}},\, \Delta). \tag{2.37}$$

Пространство $\mathtt{S}_R$ является искомой неевклидовой отсчетной формой над материальным многообразием, соответствующей теории второго градиента. Его геометрия характеризуется полями кручения $\mathfrak{T}(\Gamma)$, кривизны $\mathfrak{R}(\Delta)$ и неметричности $\mathfrak{Q}(\Delta)$. Подобно тому как это было сделано в работе [10], можно показать, что эти поля не зависят от выбора промежуточной формы $\mathcal{S}_R$.

Заменяя материальную связность (2.33) на связность (2.35), от неевклидовой формы (2.37) можно перейти к неевклидовой форме

$$\widetilde{\mathtt{S}}_R = (\mathfrak{S}_R,\, \mathsf{G},\, dV_{\mathsf{G}},\, \widetilde{\Delta}). \tag{2.38}$$

Форму $\widetilde{\mathtt{S}}_R$ также следует считать искомой, поскольку в рамках построений настоящей статьи нет никакого способа предпочесть форму (2.37) форме (2.38). Следовательно, здесь возникает та же ситуация, что и для простого материала, где в качестве материальной можно выбирать как связность Вайценбока, так и связность Леви-Чивита.

2.5. Пример синтезирования неевклидовой формы

15°. Семейство деформаций. Проиллюстрируем рассуждения на примере центрально-симметричного деформирования промежуточной формы

$$\mathcal{S}_R = \{X \in \mathcal{E} \,:\, R^i < \|X - o\| < R^e\}, \tag{2.39}$$

развивая соответствующий пример из [1]. Именно предположим, что определено семейство $\{\gamma^{(\rho)}\}_{\rho\in]R^i,\,R^e[}$ деформаций $\gamma^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \to \mathcal{S}^{(\rho)}$, для которого выполнены условия:

а) при каждом значении параметра $\rho \in]R^i, R^e[$ деформация центрально-симметрична. Кроме того, для всех точек сферы $\mathcal{L}_\rho = \{X \in \mathcal{E} \,:\, \|X - o\| = \rho\}$ справедливо свойство:

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{L}_\rho :\ \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_1}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = D_X\gamma^{(\rho)},\, \boldsymbol{F}_2 = D^2_X\gamma^{(\rho)}} &= \boldsymbol{N}_1, \\ \forall X \in \mathcal{L}_\rho :\ \left.\frac{\partial \widehat{W}_2(X,\, \boldsymbol{F}_1,\, \boldsymbol{F}_2)}{\partial \boldsymbol{F}_2}\right|_{\boldsymbol{F}_1 = D_X\gamma^{(\rho)},\, \boldsymbol{F}_2 = D^2_X\gamma^{(\rho)}} &= \boldsymbol{N}_2, \end{aligned}$$

б) в сферических координатах $(r,\, \theta,\, \varphi)$ каждая деформация $\gamma^{(\rho)}$ имеет представление [1, (3.35)].

16°. Синтезирование поля локальных гипердеформаций. Используя матрицу компонент первого градиента $\boldsymbol{F}^{(\rho)}_1$ [1, формула (3.37)], получим гиперматрицу $[\partial_K[\boldsymbol{F}^{(\rho)}_1]^i_J]$ частных производных от этих компонент. Ей соответствуют следующие три 3×3-матрицы:

$$\begin{aligned} [\partial_K[\boldsymbol{F}^{(\rho)}_1]^1_J] &= \begin{bmatrix} \omega(\rho)f''_0(R)\sin\Theta\cos\Phi & \omega(\rho)f'_0(R)\cos\Theta\cos\Phi & -\omega(\rho)f'_0(R)\sin\Theta\sin\Phi \\ \omega(\rho)f'_0(R)\cos\Theta\cos\Phi & -\omega(\rho)f_0(R)\sin\theta\cos\Phi & -\omega(\rho)f_0(R)\cos\Theta\sin\Phi \\ -\omega(\rho)f'_0(R)\sin\Theta\sin\Phi & -\omega(\rho)f_0(R)\cos\Theta\sin\Phi & -\omega(\rho)f_0(R)\sin\Theta\cos\Phi \end{bmatrix}, \\ [\partial_K[\boldsymbol{F}^{(\rho)}_1]^2_J] &= \begin{bmatrix} \omega(\rho)f''_0(R)\sin\Theta\sin\Phi & \omega(\rho)f'_0(R)\cos\Theta\sin\Phi & \omega(\rho)f'_0(R)\sin\Theta\cos\Phi \\ \omega(\rho)f'_0(R)\cos\Theta\sin\Phi & -\omega(\rho)f_0(R)\sin\theta\sin\Phi & \omega(\rho)f_0(R)\cos\Theta\cos\Phi \\ \omega(\rho)f'_0(R)\sin\Theta\cos\Phi & \omega(\rho)f_0(R)\cos\Theta\cos\Phi & -\omega(\rho)f_0(R)\sin\Theta\sin\Phi \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

[13] Поскольку неметричность [1, формула (3.34)] связности Δ в общем случае отлична от нуля.

$$[\partial_K[\boldsymbol{F}_1^{(\rho)}]^3_J] = \begin{bmatrix} \omega(\rho)f_0''(R)\cos\Theta & -\omega(\rho)f_0'(R)\sin\Theta & 0 \\ -\omega(\rho)f_0'(R)\sin\Theta & -\omega(\rho)f_0(R)\cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагая теперь, в соответствии с (2.13), $R = \rho$ и заменяя затем все вхождения ρ на R, приходим к матрицам:

$$[S^1_{JK}] = \begin{bmatrix} \omega(R)f_0''(R)\sin\Theta\cos\Phi & \omega(R)f_0'(R)\cos\Theta\cos\Phi & -\omega(R)f_0'(R)\sin\Theta\sin\Phi \\ \omega(R)f_0'(R)\cos\Theta\cos\Phi & -\omega(R)f_0(R)\sin\theta\cos\Phi & -\omega(R)f_0(R)\cos\Theta\sin\Phi \\ -\omega(R)f_0'(R)\sin\Theta\sin\Phi & -\omega(R)f_0(R)\cos\Theta\sin\Phi & -\omega(R)f_0(R)\sin\Theta\cos\Phi \end{bmatrix},$$
$$[S^2_{JK}] = \begin{bmatrix} \omega(R)f_0''(R)\sin\Theta\sin\Phi & \omega(R)f_0'(R)\cos\Theta\sin\Phi & \omega(R)f_0'(R)\sin\Theta\cos\Phi \\ \omega(R)f_0'(R)\cos\Theta\sin\Phi & -\omega(R)f_0(R)\sin\theta\sin\Phi & \omega(R)f_0(R)\cos\Theta\cos\Phi \\ \omega(R)f_0'(R)\sin\Theta\cos\Phi & \omega(R)f_0(R)\cos\Theta\cos\Phi & -\omega(R)f_0(R)\sin\Theta\sin\Phi \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$
$$[S^3_{JK}] = \begin{bmatrix} \omega(R)f_0''(R)\cos\Theta & -\omega(R)f_0'(R)\sin\Theta & 0 \\ -\omega(R)f_0'(R)\sin\Theta & -\omega(R)f_0(R)\cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которыми, наряду с матрицей [1, (3.38)], определяется поле локальных гипердеформаций $\boldsymbol{H}_2$.

17°. Синтезирование геометрии. Метрический тензор G, связность Леви-Чивита L и связность Вайценбока Γ синтезированы в рамках примера из статьи [1] и представлены формулами [1, (3.39)], [1, (3.40)] и [1, (3.42)] соответственно. В свою очередь, связность Λ определяется по (2.19) и в силу формул [1, (3.38)] и (2.40) ее отличные от нуля коэффициенты имеют вид:

$$\Lambda^1_{11} = \frac{f_0''}{f_0'}, \quad \Lambda^1_{22} = -\frac{f_0}{f_0'}, \quad \Lambda^1_{33} = -\frac{f_0\sin^2\Theta}{f_0'},$$
$$\Lambda^2_{12} = \Lambda^2_{21} = \Lambda^3_{13} = \Lambda^3_{31} = \frac{f_0'}{f_0}, \quad \Lambda^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta, \quad \Lambda^3_{23} = \Lambda^3_{32} = \cot\Theta.$$

Полученным выражениям для коэффициентов связностей Γ и Λ отвечает тензор неоднородности D с компонентами

$$D^1_{11} = D^2_{12} = D^3_{13} = \frac{\omega'}{\omega}. \tag{2.41}$$

Следовательно, подобно случаю первого градиента, условие совместности поля локальных деформаций представлено равенством $\omega' = 0$.

Подстановка соотношений [1, (3.40)] и (2.41) в общую формулу (2.33) приводит к следующим выражениям для коэффициентов связности Δ:

$$\Delta^1_{11} = \frac{f_0''}{f_0'} + 2\frac{\omega'}{\omega}, \quad \Delta^1_{22} = -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0\omega')}{\omega[f_0']^2}, \quad \Delta^1_{33} = -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0\omega')\sin^2\Theta}{\omega[f_0']^2},$$
$$\Delta^2_{12} = \Delta^3_{13} = \frac{f_0'}{f_0} + 2\frac{\omega'}{\omega}, \quad \Delta^2_{21} = \Delta^3_{31} = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\omega'}{\omega}, \tag{2.42}$$
$$\Delta^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta, \quad \Delta^3_{23} = \Delta^3_{32} = \cot\Theta.$$

Кручение связности Δ совпадает с кручением связности Γ и представлено выражениями [1, формула (3.43)]. Помимо этого, в рамках рассматриваемой модельной задачи кривизна связности Δ совпадает с кривизной связности Леви-Чивита L. В частности, скалярная кривизна представлена выражением [1, формула (3.41)]. Наконец, тензор неметричности связности Δ [1, формула (3.34)] характеризуется следующими компонентами:

$$\mathfrak{Q}_{111} = 2\omega\omega'[f_0']^2, \quad \mathfrak{Q}_{122} = 2\omega\omega' f_0^2, \quad \mathfrak{Q}_{133} = 2\omega\omega' f_0^2\sin^2\Theta.$$

Соотношения [1, (3.39)] и (2.42) определяют неевклидову форму (2.37) частного вида. Мера несовместности деформаций, представленная тензором D, одновременно характеризует отклонение геометрии от евклидовой.

3. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы для среды с микроструктурой

3.1. Микроморфный континуум

18°. Деформации. В заключение рассмотрим микроморфный континуум — среду, точки которой, наряду с трансляционными степенями свободы, имеют дополнительные степени свободы, т. е. обладают внутренней структурой. Деформация континуума представлена парой $(\gamma,\ \boldsymbol{M})$, где $\gamma \in$

Deform $(\mathcal{S}_R;\, \mathcal{S})$ — макродеформация, соответствующая деформации в рамках теории простого материала, а $\boldsymbol{M} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ — микродеформация, являющаяся полем обратимых линейных отображений, характеризующим изменение внутренней структуры частиц среды. Предположим, что упругий потенциал относительно промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ представлен отображением [23]

$$\mathcal{S}_R \times \mathrm{End}(\mathcal{V}) \times \mathrm{End}(\mathcal{V}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{V};\, \mathrm{End}(\mathcal{V})) \ni (X,\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2) \mapsto \widehat{W}_3(X,\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2) \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Тогда отклик тела в точке $X \in \mathcal{S}_R$ характеризуется равенством

$$W = \widehat{W}_3(X,\, \boldsymbol{F}(X),\, \boldsymbol{M}(X),\, D_X\boldsymbol{M}),$$

где $\boldsymbol{F}(X) = D_X\gamma$ — градиент макродеформации γ в точке X. Отметим, что в частном случае, если положить $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}$, то придем к среде второго градиента.

19°. Координатное представление деформаций. В паре криволинейных координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$, ассоциированных с формами $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}$ соответственно, градиент макродеформации $\boldsymbol{F}$ представлен разложением [1, (3.4)]. Аналогичным образом в виде двухточечного разложения представим микродеформацию $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M}(X) = M^i_I\big|_X\, \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \boldsymbol{E}^I|_X.$$

Тогда, в соответствии с формулой (2.3), для градиента $D_X\boldsymbol{M}$ справедливо разложение

$$D_X\boldsymbol{M} = \left\{ \partial_K M^i_J\big|_{\sigma_R(\cdot)} + M^l_J F^j_K \overset{q}{\Gamma}{}^i_{jl}\Big|_{\gamma(\cdot)} - M^i_L \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ} \right\}\Bigg|_X \boldsymbol{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X.$$

В дальнейшем в качестве координат $(q^i)_{i=1}^3$ выбираются прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$.

Замечание 2. *Тело с микроструктурой деформируется более сложным образом, чем простой материал. Как и в случае последнего, деформация тела с микроструктурой сопровождается изменением формы, т. е. области физического пространства, занимаемой телом. Это изменение определяется отображением γ. Однако (и в этом состоит отличие от простого материала) наряду с изменением формы меняются и положения элементов внутри микроструктуры [24], моделируемой касательным пространством к $\mathcal{S}_R$ в рамках первого приближения. Именно поэтому, независимо от γ, задано двухточечное тензорное поле $\boldsymbol{M}$, определяющее изменение положений элементов микроструктуры.*

3.2. Семейство форм и условие совместности

20°. Гипотеза локальной разгрузки. В случае микроморфного континуума гипотеза локальной разгрузки принимается в следующем виде. Пусть фиксированы тензоры $\boldsymbol{N}_1 \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ и $\boldsymbol{N}_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V};\, \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, и пусть выбрана промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ вместе с упругим потенциалом (3.1). Далее предположим, что определено семейство пар $\{(\gamma^{(X)},\, \boldsymbol{M}^{(X)})\}_{X\in\mathcal{S}_R}$, состоящих из макродеформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \to \mathcal{S}^{(X)}$ и микродеформаций $\boldsymbol{M}^{(X)} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$, такое, что в любой точке $X \in \mathcal{S}_R$ выполнено условие

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\widehat{W}_3(X,\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2)}{\partial\boldsymbol{F}}\right|_{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{(X)}(X),\, \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}^{(X)}(X),\, \boldsymbol{M}_2=D_X\boldsymbol{M}^{(X)}} &= \boldsymbol{N}_1,\\ \left.\frac{\partial\widehat{W}_3(X,\, \boldsymbol{F},\, \boldsymbol{M}_1,\, \boldsymbol{M}_2)}{\partial\boldsymbol{M}_2}\right|_{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{(X)}(X),\, \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}^{(X)}(X),\, \boldsymbol{M}_2=D_X\boldsymbol{M}^{(X)}} &= \boldsymbol{N}_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\boldsymbol{F}^{(X)} = D\gamma^{(X)}$ — градиент макродеформации $\gamma^{(X)}$.

21°. Синтезирование локальных макродеформаций и микродеформаций. Опираясь на определение [1, (3.8)], синтезируем поле локальных макродеформаций $\boldsymbol{H} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$. В каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ локальная макродеформация $\boldsymbol{H}(X)$ имеет разложение [1, (3.11)], совпадающее с разложением локальной деформации в случае среды первого градиента.

По семейству $\{\boldsymbol{M}^{(X)}\}_{X\in\mathcal{S}_R}$ синтезируем новые тензорные поля. Прежде всего, положим

$$\boldsymbol{A}(X) := \boldsymbol{M}^{(X)}(X), \quad X \in \mathcal{S}_R. \tag{3.3}$$

Совокупности обратимых тензоров $\boldsymbol{A}(X)$ отвечает поле $\boldsymbol{A} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$, которое будем полагать гладким. В координатном представлении,

$$\boldsymbol{A} = A^i_I \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^I. \tag{3.4}$$

Далее, синтезируем тензор третьего ранга

$$\boldsymbol{B}(X) := D_Y\boldsymbol{M}^{(X)}\Big|_{Y=X}, \quad X \in \mathcal{S}_R$$

и назовем его локальной микродеформацией. Приходим к полю $\boldsymbol{B} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V}; \mathrm{End}(\mathcal{V}))$, которое также предположим гладким. Отметим, что в отличие от второго градиента макродеформации γ, это поле в общем случае не является симметричным по нижним индексам. Формула (2.3) влечет следующее представление для $\boldsymbol{B}(X)$, подобное (2.12):

$$\boldsymbol{B}(X) = \left\{ S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(\cdot)} - H^i_L\big|_{\sigma_R(\cdot)} \overset{Q}{\Gamma}{}^L_{KJ} \right\}\Big|_X \boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^J|_X \otimes \boldsymbol{E}^K|_X, \tag{3.5}$$

в котором, однако, величины

$$S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)} := \partial_K [\boldsymbol{M}^{(X)}]^i_J\Big|_{\sigma_R(X)} \tag{3.6}$$

уже несимметричны по нижним индексам.

Таким образом, локальная разгрузка микроморфной среды характеризуется тройкой тензорных полей $(\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$, определяемых разложениями [1, (3.11)], (3.4) и (3.5). При фиксированных криволинейных координатах $(Q^I)^3_{I=1}$ им соответствует поле матриц $X \mapsto \Big([H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}],\ [A^i_I\big|_{\sigma_R(X)}],\ [S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)}]\Big)$, где

$$\begin{gathered} \det[H^i_I\big|_{\sigma_R(X)}] \neq 0, \\ \det[A^i_I\big|_{\sigma_R(X)}] \neq 0, \\ S^i_{KJ}\big|_{\sigma_R(X)} \neq S^i_{JK}\big|_{\sigma_R(X)}, \quad X \in \mathcal{S}_R. \end{gathered}$$

Кроме того, в соответствии с (3.2) выполнено свойство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{W}_3(X,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2)}{\partial \boldsymbol{F}}\Bigg|_{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}(X),\ \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{A}(X),\ \boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{B}(X)} &= \boldsymbol{N}_1, \\ \frac{\partial \widehat{W}_3(X,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2)}{\partial \boldsymbol{M}_2}\Bigg|_{\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}(X),\ \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{A}(X),\ \boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{B}(X)} &= \boldsymbol{N}_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

во всех точках $X \in \mathcal{S}_R$.

22°. Совместность локальных деформаций. Назовем тройку $(\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$ тензорных полей, обладающих свойством (3.7), совместной, если 1) существует деформация $\gamma_0 \in \mathrm{Deform}\,(\mathcal{S}_R;\ \mathcal{S}_0)$ из промежуточной формы $\mathcal{S}_R$ в некоторую форму $\mathcal{S}_0$, для которой выполнено равенство $\boldsymbol{H} = D\gamma_0$, и 2) существует поле обратимых линейных преобразований $\boldsymbol{M}_0 : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$ такое, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{B} = D\boldsymbol{M}_0$. В этом случае для пары $(\gamma_0,\ \boldsymbol{M}_0)$ выполняется свойство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{W}_3(X,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2)}{\partial \boldsymbol{F}}\Bigg|_{\boldsymbol{F}=D_X\gamma_0,\ \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_0(X),\ \boldsymbol{M}_2=D_X\boldsymbol{M}_0} &= \boldsymbol{N}_1, \\ \frac{\partial \widehat{W}_3(X,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2)}{\partial \boldsymbol{M}_2}\Bigg|_{\boldsymbol{F}=D_X\gamma_0,\ \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_0(X),\ \boldsymbol{M}_2=D_X\boldsymbol{M}_0} &= \boldsymbol{N}_2, \end{aligned}$$

вытекающее из (3.7), и потому форма $\mathcal{S}_0$ является глобальной натуральной.

Как и в случае среды второго градиента, если тройка $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ совместна, то, в частности, совместно поле локальных деформаций $\boldsymbol{H}$. Потенциал [1, (3.1)], относительно которого определяется натуральное состояние, индуцирован из $\widehat{W}_3$:

$$\widehat{W}_1(X,\ \boldsymbol{F}) := \widehat{W}_3(X,\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{A}(X),\ \boldsymbol{B}(X)).$$

Однако из совместности $\boldsymbol{H}$ в общем случае не вытекает совместность всей тройки $(\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$. Подобно среде второго градиента, можно соответствующим образом расширить терминологию.

На основании условий 1) и 2), условие совместности для среды с микроморфной кинематикой можно представить в виде совокупности равенств:

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{0}, \\ D\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

В координатной форме, согласно [1, (3.11)], (3.4) и (3.5),

$$\partial_J H^i_K - \partial_K H^i_J = 0, \tag{3.8}$$

$$\partial_J A^i_K - S^i_{JK} = 0, \quad i,\ J,\ K = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.9}$$

Заметим, что в отличие от случая второго градиента полученные соотношения независимы.

3.3. Геометрическая интерпретация условия совместности

23°. Поля Σ и Λ. Выполним следующее преобразование условия совместности (3.8)–(3.9). Поскольку матричные поля $[H^i_I]$ и $[A^i_I]$ обратимы, домножим обе части равенства (3.8) на $[\overset{-1}{\boldsymbol{H}}]^I_i$, а обе части (3.9) — на $[\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i$, произведя в обоих случаях суммирование по i. Тем самым придем к следующей совокупности соотношений, эквивалентных исходным:

$$\begin{gathered}[\overset{-1}{\boldsymbol{H}}]^I_i \partial_J H^i_K - [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}]^I_i \partial_K H^i_J = 0,\\ [\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i \partial_J A^i_K - [\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i S^i_{JK} = 0, \quad i,\ J,\ K = 1,\ 2,\ 3.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Задавая поля Γ^I_{JK} по формуле [1, формула (3.18)] и вводя новые поля Σ^I_{JK} по формуле, аналогичной [1, формула (3.18)],

$$\Sigma^I_{JK} := [\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i \partial_J A^i_K, \tag{3.11}$$

и поля Λ^I_{JK} по аналогии с (2.19) как

$$\Lambda^I_{JK} := [\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i S^i_{JK}, \tag{3.12}$$

можно переписать равенства (3.10) в лаконичном виде:

$$\begin{gathered}\Gamma^I_{JK} - \Gamma^I_{KJ} = 0,\\ \Sigma^I_{JK} - \Lambda^I_{JK} = 0, \quad i,\ J,\ K = 1,\ 2,\ 3.\end{gathered} \tag{3.13}$$

24°. Кручение и тензор неоднородности. Каждое из полей Γ^I_{JK}, Σ^I_{JK} и Λ^I_{JK} задает связность на $\mathfrak{S}_R$. Действительно, для первого поля это уже было установлено при рассмотрении среды первого градиента; второе поле рассматривается аналогично. В случае третьего поля можно дословно повторить доказательство предложения 1. Отметим, что, в отличие от своего аналога из теории второго градиента, поля (3.12) несимметричны.

Таким образом, равенства (3.13) можно записать как

$$\begin{gathered}\mathfrak{T}(\Gamma)^I_{JK} = 0,\\ \mathsf{D}^I_{JK} = 0, \quad i,\ J,\ K = 1,\ 2,\ 3,\end{gathered} \tag{3.14}$$

где $\mathfrak{T}(\Gamma)$ — кручение связности Γ, а

$$\mathsf{D} := \Sigma - \Lambda \tag{3.15}$$

— аналог тензора неоднородности. Тем самым показано, что в случае микроморфного континуума меры несовместности представлены независимыми полями кручения $\mathfrak{T}(\Gamma)$ и неоднородности D.

Тензор неоднородности D не симметричен по нижним индексам, а его антисимметричная часть с компонентами (2.30) пропорциональна разности кручений связностей Σ и Λ. Действительно,

$$\begin{aligned} D^I_{JK} &= \Sigma^I_{JK} - \Lambda^I_{JK} = \\ &= \Sigma^I_{JK} - \Sigma^I_{KJ} + \Sigma^I_{KJ} - \Lambda^I_{JK} = \\ &= \mathfrak{T}(\Sigma)^I_{JK} + \Sigma^I_{KJ} - \Lambda^I_{JK} = \\ &= \mathfrak{T}(\Sigma)^I_{JK} + \Sigma^I_{KJ} - \Lambda^I_{KJ} + \Lambda^I_{KJ} - \Lambda^I_{JK} = \\ &= \mathfrak{T}(\Sigma)^I_{JK} - \mathfrak{T}(\Lambda)^I_{JK} + D^I_{KJ}, \end{aligned}$$

что и приводит к равенству

$$2D^I_{[JK]} = \mathfrak{T}(\Sigma)^I_{JK} - \mathfrak{T}(\Lambda)^I_{JK}.$$

3.4. Неевклидова отсчетная форма

25°. Материальная связность. Связности Вайценбока Γ [1, формула (3.18)], Леви-Чивита L [1, формула (3.32)], и новые связности Σ (3.11), Λ (3.12) служат примерами материальных связностей на $\mathfrak{S}_R$, каждой из которых отвечает своя неевклидова отсчетная форма. Наряду с этим, можно рассматривать и комбинации этих связностей. Примером может служить связность Δ, заданная формулой

$$\Delta := L + \mathsf{D}, \tag{3.16}$$

аналогичной (2.33). В явном виде, принимая во внимание формулу (3.15), а также определения (3.11) и (3.12), получаем выражение

$$\Delta^I_{JK} = \frac{G^{IS}}{2}\left(\partial_J G_{SK} + \partial_K G_{JS} - \partial_S G_{JK}\right) + [\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i \left(\partial_J A^i_K - S^i_{JK}\right). \tag{3.17}$$

Кручение связности Δ определяется равенством

$$\mathfrak{T}(\Delta) = \mathfrak{T}(\Sigma) - \mathfrak{T}(\Lambda),$$

а кривизна в общем случае отлична от нуля.

Альтернативную связность на $\mathfrak{S}_R$ можно получить, если вместо связности Леви-Чивита L использовать связность Вайценбока Γ. Действительно, положим

$$\widetilde{\Delta} := \Gamma + \mathsf{D}. \tag{3.18}$$

По форме построенная связность напоминает связность (2.35), однако, если раскрыть определения входящих в нее полей, то выражение для ее коэффициентов имеет иной вид:

$$\widetilde{\Delta}^I_{JK} = [\overset{-1}{\boldsymbol{H}}_1]^I_i \partial_J H^i_K + [\overset{-1}{\boldsymbol{A}}]^I_i \left(\partial_J A^i_K - S^i_{JK}\right). \tag{3.19}$$

Кручение связности (3.18) определяется формулой

$$\mathfrak{T}(\widetilde{\Delta}) = \mathfrak{T}(\Gamma) + \mathfrak{T}(\Sigma) - \mathfrak{T}(\Lambda).$$

Заметим, что если локальные деформации совместны (т. е. выполнены равенства (3.14)), то связность, определяемая формулой (3.16) (или (3.18)), является евклидовой. Поэтому она также может быть полезна для моделирования несовместных деформаций, возникающих в средах с дефектами.

Замечание 3. *В частном случае, когда микродеформация полагается равной градиенту деформации, теория среды с микроструктурой сводится к теории среды второго градиента. Тогда формула (3.17) переходит в формулу (2.34), а формула (3.19) — в формулу (2.36).*

26°. Структура неевклидовой формы. Связность Δ (3.16), материальная метрика G [1, формула (3.28)], и соответствующая метрике форма объема $\mu = dV_{\mathsf{G}}$ вводят на многообразии $\mathfrak{S}_R$ структуру пространства с неевклидовой связностью:

$$\mathsf{S}_R = (\mathfrak{S}_R,\, \mathsf{G},\, dV_{\mathsf{G}},\, \Delta). \tag{3.20}$$

Пространство S_R является примером неевклидовой отсчетной формы над материальным многообразием, соответствующей континууму с микроструктурой.

Если вместо материальной связности (3.16) использовать связность (3.18), то придем к альтернативному представлению неевклидовой формы:

$$\widetilde{\mathsf{S}}_R = (\mathfrak{S}_R,\, \mathsf{G},\, dV_{\mathsf{G}},\, \widetilde{\Delta}). \tag{3.21}$$

Как и форма (3.20), синтезированная форма (3.21) в равной степени пригодна для моделирования глобального натурального состояния тела с микроструктурой. Выбор определенной формы требует иных соображений, выходящих за рамки статьи.

3.5. Расширенное описание для тела с микроструктурой

27°. Материальное и физическое расслоения. В силу наличия дополнительного тензорного поля $\boldsymbol{M}$, не связанного с преобразованием форм γ, кинематика сред с микроструктурой отличается от кинематики простого материала и сред второго градиента. В этой связи целесообразно поставить вопрос о том, можно ли, поменяв соответствующим образом описание форм, представить деформацию среды с микроструктурой как изменение форм, понимаемых в расширенном смысле. Ответ на этот вопрос положительный.

Действительно, естественным формализмом, пригодным для построения расширения форм, является теория расслоений, восходящая к работам Фельдбау, Эресманна и Стинрода[14] [27–29]. В рамках этого формализма над отсчетной формой $\mathcal{B}$ и физическим пространством $\mathcal{E}$ выстраиваются тотальные пространства локально тривиальных расслоений с одним и тем же типовым слоем $\mathcal{F}$. В явном виде эти расслоения определены структурами [30]

$$\xi_{\mathcal{B}} = (\mathbb{B},\, \mathcal{B},\, \pi_{\mathcal{B}},\, \mathcal{F}) \tag{3.22}$$

— материальное расслоение и

$$\xi_{\mathcal{E}} = (\mathbb{E},\, \mathcal{E},\, \pi_{\mathcal{E}},\, \mathcal{F}) \tag{3.23}$$

— физическое расслоение, где $\mathbb{B}$ и $\mathbb{E}$ — гладкие многообразия, представляющие тотальные пространства расслоений, а $\pi_{\mathcal{B}} : \mathbb{B} \to \mathcal{B}$ и $\pi_{\mathcal{E}} : \mathbb{E} \to \mathcal{E}$ — гладкие сюръективные отображения. Многообразие $\mathcal{F}$ — общий элемент структур $\xi_{\mathcal{B}}$ и $\xi_{\mathcal{E}}$ — представляет типовой слой расслоения.

[14]По-видимому, первое определение расслоения было дано в работе Уитни [25], хотя частные случаи использовались и ранее, например, Зейфертом [26].

Предполагается, что расслоения (3.22) и (3.23) локально тривиальны. Это означает (случай расслоения $\xi_{\mathcal{E}}$ идентичен рассмотренному далее), что для любой точки $X \in \mathcal{B}$ существуют окрестность U в $\mathcal{B}$ и диффеоморфизм $\Phi : \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U) \to U \times \mathcal{F}$, называемый локальной тривиализацией, такие, что $\mathrm{pr}_U \circ \Phi = \pi_{\mathcal{B}}$, где $\mathrm{pr}_U : U \times \mathcal{F} \to U$ — проекция декартова произведения на первый сомножитель. Таким образом, локально диффеоморфизм Φ должен иметь представление $\Phi(p) = (\pi_{\mathcal{B}}(p), \varphi(p))$ для некоторого гладкого отображения $\varphi : \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U) \to \mathcal{F}$, свойства которого зависят от частного вида расслоения. Примеры материальных расслоений и их физическую интерпретацию можно найти в работе [31].

28°. Дополненные деформации. Тотальные пространства $\mathbb{B}$ и $\mathbb{E}$ расслоений (3.22) и (3.23) над отсчетной формой $\mathcal{B}$ и физическим пространством $\mathcal{E}$ определяют дополненную отсчетную форму и дополненное физическое пространство соответственно. Каждой форме $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ соответствует дополненная форма $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}$, определяемая как прообраз $\mathbb{S} = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\mathcal{S})$.

Дополненная деформация определяется как отображение $\kappa : \mathbb{B} \to \mathbb{S}$, удовлетворяющее свойству $\chi \circ \pi_{\mathcal{B}} = \pi_{\mathcal{E}} \circ \kappa$, где $\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ — классическая деформация. Таким образом, в специально подобранных локальных координатах на тотальных пространствах можно записать

$$\widetilde{\kappa}(Q^1, Q^2, Q^3; f^1, \ldots, f^m) = (\widetilde{\chi}(Q^1, Q^2, Q^3); \tau(Q^1, Q^2, Q^3; f^1, \ldots, f^m)).$$

Здесь $(Q^I)_{I=1}^3$ — локальные координаты на форме $\mathcal{B}$, а $(f^a)_{a=1}^m$ — локальные координаты на типовом слое $\mathcal{F}$. Тильдами сверху обозначены координатные представления соответствующих отображений. Отображение $\tau : \mathbb{R}^{3+m} \to \mathbb{R}^m$ определяет тип микроструктуры.

В рамках описания микроструктуры, используемого в настоящей работе, в качестве расслоений (3.22) и (3.23) достаточно выбрать касательные расслоения. Несмотря на их тривиальность в случае трехмерных тел, они перестают быть тривиальными при рассмотрении материальных поверхностей. При таком выборе представление дополненной деформации есть не что иное, как пара [31] $(\gamma, \boldsymbol{M})$. Этим получен желаемый результат: формализм касательных расслоений позволяет интерпретировать пару $(\gamma, \boldsymbol{M})$ как одно точечное отображение между касательными пространствами.

Использование формализма расслоений приводит к необходимости модифицировать геометрический язык для описания неевклидовой отсчетной формы. Вместо теории аффинных связностей применяется более общая теория связностей на расслоениях. Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [32].

3.6. Пример синтезирования неевклидовой формы

29°. Семейство деформаций. Завершим основные построения настоящего раздела модельным примером. Предположим, что промежуточная форма $\mathcal{S}_R$ является полым шаром (2.39) и, что на ней задано семейство $\{(\gamma^{(\rho)}, \boldsymbol{M}^{(\rho)})\}_{\rho \in]R^i,\, R^e[}$, состоящее из макродеформаций $\gamma^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \to \mathcal{S}^{(\rho)}$ и микродеформаций $\boldsymbol{M}^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \to \mathrm{End}(\mathcal{V})$. Это семейство подчиняется следующим условиям:

а) для любого $\rho \in]R^i, R^e[$ макродеформация $\gamma^{(\rho)}$ является центрально-симметричной и имеет представление [1, (3.35)] в сферических координатах (r, θ, φ);

б) для каждого $\rho \in]R^i, R^e[$ микродеформация $\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)$ в точках X сферы $\mathcal{L}_\rho = \{X \in \mathcal{E} : \|X - o\| = \rho\}$ является поворотом материальных элементов вокруг базисного вектора $\boldsymbol{E}_R(X)$ на угол $\tau(\rho)$;

в) для всех точек сферы $\mathcal{L}_\rho$ справедливы соотношения:

$$\forall X \in \mathcal{L}_\rho : \left. \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2)}{\partial \boldsymbol{F}} \right|_{\boldsymbol{F}=D_X\gamma^{(\rho)},\, \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X),\, \boldsymbol{M}_2=D_X\boldsymbol{M}^{(\rho)}} = \boldsymbol{N}_1,$$

$$\forall X \in \mathcal{L}_\rho : \left. \frac{\partial \widehat{W}_3(X, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2)}{\partial \boldsymbol{M}_2} \right|_{\boldsymbol{F}=D_X\gamma^{(\rho)},\, \boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X),\, \boldsymbol{M}_2=D_X\boldsymbol{M}^{(\rho)}} = \boldsymbol{N}_2.$$

Явный вид тензора $\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)$, задающего поворот вокруг оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{E}_R(X)$, на угол $\tau(\rho)$, может быть определен в соответствии с формулой Родрига [33; 34]. Относительно диадного базиса $\boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{c}^j$ тензор $\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)$ представлен матрицей

$$[\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)]_d = E + (\sin\tau(\rho))K + (1 - \cos\tau(\rho))K.K,$$

где E — единичная матрица, а

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -k^3 & k^2 \\ k^3 & 0 & -k^1 \\ -k^2 & k^1 & 0 \end{bmatrix}$$

— матрица, составленная из компонент вектора $\boldsymbol{k} = k^i \boldsymbol{c}_i$. Тогда матрица $\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)$ относительно смешанного диадного базиса $\boldsymbol{c}_i \otimes \boldsymbol{E}^I$ определяется по формуле

$$[\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)] = [\boldsymbol{M}^{(\rho)}(X)]_d.T,$$

где T — матрица перехода от базиса $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$ к базису $(\boldsymbol{E}_R, \boldsymbol{E}_\Theta, \boldsymbol{E}_\Phi)$ в точке X. Окончательно

$$[\boldsymbol{M}^{(\rho)}]^i_{\ J} = \begin{bmatrix} \sin\Theta\cos\Phi & R(\cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(\rho) - \sin\Phi\sin\tau(\rho)) & -R\sin\Theta(\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos\Theta\cos\Phi\sin\tau(\rho)) \\ \sin\Theta\sin\Phi & R(\cos\Theta\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos\Phi\sin\tau(\rho)) & R\sin\Theta(\cos\Phi\cos\tau(\rho) - \cos\Theta\sin\Phi\sin\tau(\rho)) \\ \cos\Theta & -R\cos\tau(\rho)\sin\Theta & R\sin^2\Theta\sin\tau(\rho) \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

30°. Синтезирование поля локальных деформаций. Поле $\boldsymbol{H}$ локальных макродеформаций определено в [1] и представлено формулой [1, (3.38)]. Осталось определить поля $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, соответствующие локальным микродеформациям. Первое из них синтезируется по формуле (3.3). Полагая в (3.24) $R = \rho$ и заменяя затем все переменные ρ на R, получаем

$$[A^i_J] = \begin{bmatrix} \sin\Theta\cos\Phi & R(\cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(R) - \sin\Phi\sin\tau(R)) & -R\sin\Theta(\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos\Theta\cos\Phi\sin\tau(R)) \\ \sin\Theta\sin\Phi & R(\cos\Theta\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos\Phi\sin\tau(R)) & R\sin\Theta(\cos\Phi\cos\tau(R) - \cos\Theta\sin\Phi\sin\tau(R)) \\ \cos\Theta & -R\cos\tau(R)\sin\Theta & R\sin^2\Theta\sin\tau(R) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Для синтезирования поля $\boldsymbol{B}$ требуется еще определить скалярные поля S^i_{JK} в соответствии с (3.6). С этой целью получим гиперматрицу $[\partial_K[\boldsymbol{M}^{(\rho)}]^i_{\ J}]$, дифференцируя элементы матрицы (3.24). В результате придем к следующим матрицам:

$$\begin{aligned}
[\partial_K[\boldsymbol{M}^{(\rho)}]^1_{\ J}] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(\rho) - \sin\Phi\sin\tau(\rho) & -\sin\Theta(\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos\Theta\cos\Phi\sin\tau(\rho)) \\ \cos\Theta\cos\Phi & -R\cos\Phi\cos\tau(\rho)\sin\Theta & -R(\cos\Theta\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos2\Theta\cos\Phi\sin\tau(\rho)) \\ -\sin\Theta\sin\Phi & -R(\cos\Theta\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos\Phi\sin\tau(\rho)) & R\sin\Theta(\cos\Theta\sin\Phi\sin\tau(\rho) - \cos\Phi\cos\tau(\rho)) \end{bmatrix}, \\
[\partial_K[\boldsymbol{M}^{(\rho)}]^2_{\ J}] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\Theta\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos\Phi\sin\tau(\rho) & \sin\Theta(\cos\Phi\cos\tau(\rho) - \cos\Theta\sin\Phi\sin\tau(\rho)) \\ \cos\Theta\sin\Phi & -R\cos\tau(\rho)\sin\Theta\sin\Phi & R(\cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(\rho) - \cos2\Theta\sin\Phi\sin\tau(\rho)) \\ \cos\Phi\sin\Theta & R(\cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(\rho) - \sin\Phi\sin\tau(\rho)) & -R\sin\Theta(\cos\tau(\rho)\sin\Phi + \cos\Theta\cos\Phi\sin\tau(\rho)) \end{bmatrix}, \\
[\partial_K[\boldsymbol{M}^{(\rho)}]^3_{\ J}] &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos\tau(\rho)\sin\Theta & \sin^2\Theta\sin\tau(\rho) \\ -\sin\Theta & -R\cos\Theta\cos\tau(\rho) & R\sin2\Theta\sin\tau(\rho) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Из них при $\rho = R$ вытекают представления для искомых функций:

$$\begin{aligned}
[S^1_{KJ}] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(R) - \sin\Phi\sin\tau(R) & -\sin\Theta(\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos\Theta\cos\Phi\sin\tau(R)) \\ \cos\Theta\cos\Phi & -R\cos\Phi\cos\tau(R)\sin\Theta & -R(\cos\Theta\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos2\Theta\cos\Phi\sin\tau(R)) \\ -\sin\Theta\sin\Phi & -R(\cos\Theta\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos\Phi\sin\tau(R)) & R\sin\Theta(\cos\Theta\sin\Phi\sin\tau(R) - \cos\Phi\cos\tau(R)) \end{bmatrix}, \\
[S^2_{KJ}] &= \begin{bmatrix} 0 & \cos\Theta\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos\Phi\sin\tau(R) & \sin\Theta(\cos\Phi\cos\tau(R) - \cos\Theta\sin\Phi\sin\tau(R)) \\ \cos\Theta\sin\Phi & -R\cos\tau(R)\sin\Theta\sin\Phi & R(\cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(R) - \cos2\Theta\sin\Phi\sin\tau(R)) \\ \cos\Phi\sin\Theta & R(\cos\Theta\cos\Phi\cos\tau(R) - \sin\Phi\sin\tau(R)) & -R\sin\Theta(\cos\tau(R)\sin\Phi + \cos\Theta\cos\Phi\sin\tau(R)) \end{bmatrix}, \\
[S^3_{KJ}] &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos\tau(R)\sin\Theta & \sin^2\Theta\sin\tau(R) \\ -\sin\Theta & -R\cos\Theta\cos\tau(R) & R\sin2\Theta\sin\tau(R) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

31°. Синтезирование геометрии. Поскольку метрический тензор G, связность Леви-Чивита L и связность Вайценбока Γ определяются по полю локальных макродеформаций $\boldsymbol{H}$, то их выражения известны и представлены формулами [1, (3.39), (3.40), (3.42)] соответственно. Новыми являются выражения для связностей Σ, Λ и результирующей связности Δ.

Коэффициенты связности Σ определяются в соответствии с общей формулой (3.11). Принимая во внимание выражение (3.25) для поля $\boldsymbol{A}$, приходим к равенствам (приведены только те функции, которые отличны от нуля)

$$\begin{gathered}
\Sigma^1_{22} = -R\cos\tau(R), \quad \Sigma^1_{23} = R\sin\Theta\sin\tau(R), \quad \Sigma^1_{32} = -R\sin\Theta\sin\tau(R), \\
\Sigma^1_{33} = -R\cos\tau(R)\sin^2\Theta, \quad \Sigma^2_{12} = \Sigma^3_{13} = \tfrac{1}{R}, \quad \Sigma^2_{13} = -\sin\Theta\,\tau'(R), \\
\Sigma^2_{21} = \frac{\cos\tau(R)}{R}, \quad \Sigma^2_{31} = \frac{\sin\Theta\sin\tau(R)}{R}, \quad \Sigma^2_{33} = -\cos\Theta\sin\Theta, \\
\Sigma^3_{12} = \csc\Theta\,\tau'(R), \quad \Sigma^3_{21} = -\frac{\csc\Theta\sin\tau(R)}{R}, \quad \Sigma^3_{23} = \Sigma^3_{32} = \cot\Theta, \quad \Sigma^3_{31} = \frac{\cos\tau(R)}{R}.
\end{gathered} \tag{3.27}$$

Из представленных выражений следует, что связность Σ несимметрична, т. е. обладает ненулевым кручением. Отметим, что последнее отлично от кручения связности Γ.

Связность Λ определяется согласно формуле (3.12). Учитывая соотношение (3.25) для поля $\boldsymbol{A}$ и формулу (3.26), определяющую частный вид полей S^i_{JK}, получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\Lambda^1_{22} = -R\cos\tau(R), \quad \Lambda^1_{23} = R\sin\Theta\sin\tau(R), \quad \Lambda^1_{32} = -R\sin\Theta\sin\tau(R),\\ \Lambda^1_{33} = -R\cos\tau(R)\sin^2\Theta, \quad \Lambda^2_{12} = \Lambda^3_{13} = \frac{1}{R},\\ \Lambda^2_{21} = \frac{\cos\tau(R)}{R}, \quad \Lambda^2_{31} = \frac{\sin\Theta\sin\tau(R)}{R}, \quad \Lambda^2_{33} = -\cos\Theta\sin\Theta,\\ \Lambda^3_{21} = -\frac{\csc\Theta\sin\tau(R)}{R}, \quad \Lambda^3_{23} = \Lambda^3_{32} = \cot\Theta, \quad \Lambda^3_{31} = \frac{\cos\tau(R)}{R}.\end{gathered} \tag{3.28}$$

Несмотря на то что большинство соответствующих коэффициентов связностей Σ и Λ совпадает, между ними все же есть отличные друг от друга. Например, $\Lambda^2_{13} = 0$, в то время как $\Sigma^2_{13} = -\sin\Theta\,\tau'(R)$. Мера отличия связностей друг от друга представлена тензором неоднородности (3.15), отличные от нуля компоненты которого, в соответствии с (3.27) и (3.28), имеют вид:

$$D^2_{13} = -\sin\Theta\,\tau'(R), \quad D^3_{12} = \csc\Theta\,\tau'(R). \tag{3.29}$$

Следовательно, с учетом выражений [1, (3.43)] для кручения связности Γ условия совместности (3.14) локальных деформаций в рассматриваемом модельном случае имеют вид

$$\omega' = 0 \quad \text{и} \quad \tau' = 0.$$

Подстановка соотношений [1, (3.40)] для коэффициентов связности Леви-Чивита и равенств (3.29) в общую формулу (3.16) приводит к следующим выражениям для коэффициентов связности Δ:

$$\begin{gathered}\Delta^1_{11} = \frac{\omega'}{\omega} + \frac{f_0''}{f_0'}, \quad \Delta^1_{22} = -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0\omega')}{\omega[f_0']^2}, \quad \Delta^1_{33} = -\frac{f_0\sin^2\Theta(\omega f_0' + f_0\omega')}{\omega[f_0']^2},\\ \Delta^2_{12} = \Delta^2_{21} = \Delta^3_{13} = \Delta^3_{31} = \frac{\omega'}{\omega} + \frac{f_0'}{f_0}, \quad \Delta^2_{13} = -\sin\Theta\,\tau'(R), \quad \Delta^2_{33} = -\cos\Theta\sin\Theta,\\ \Delta^3_{12} = \csc\Theta\,\tau'(R), \quad \Delta^3_{23} = \Delta^3_{32} = \cot\Theta.\end{gathered} \tag{3.30}$$

Кручение связности Δ отлично от нуля и представлено следующими компонентами:

$$\mathfrak{T}^2_{13} = -\mathfrak{T}^2_{31} = -\sin\Theta\,\tau'(R), \quad \mathfrak{T}^3_{12} = -\mathfrak{T}^3_{21} = \csc\Theta\,\tau'(R).$$

Кривизна связности Δ также отлична от нуля. В частности, скалярная кривизна имеет вид [1, (3.41)]. Неметричность равна нулю.

Формулы [1, (3.39)] и (3.30) определяют неевклидову форму (3.20). Меры несовместности деформаций, представленные полем кручения связности Γ и тензором неоднородности D, одновременно характеризуют отличие геометрии от евклидовой.

Заключение

Геометрический метод, изложенный в статье [1], обобщен в настоящей работе на тела с расширенной кинематикой. Показано, что благодаря дополнительным полям A^i_I и S^i_{JK}, определяемым спецификой расширенной кинематики, в таких телах имеется больше вариантов для синтезирования геометрии. Сводка результатов представлена в таблице. Ее строки содержат ссылки на явные представления материальных связностей. Во всех трех случаях кинематики, рассмотренных в работе, связности Вайценбока Γ и Леви-Чивита L вычисляются по одним и тем же формулам. Связности Σ и Λ могут быть определены лишь для тел с расширенной кинематикой, поскольку вычисление их коэффициентов требует знания дополнительных полей A^i_I и S^i_{JK}. Наконец, связности Δ и $\widetilde{\Delta}$ служат расширениями связностей Леви-Чивита и Вайценбока. В рамках физических приложений они могут быть полезны для геометрического моделирования тел с дислокациями и дисклинациями, поскольку их кручение и кривизна — плотности дислокаций и дисклинаций, — отличны от нуля.

Таблица

Различные материальные связности

Table

Various material connections

	Γ	L	Σ	Λ	Δ	$\widetilde{\Delta}$
Простой материал	[1, (3.18)]	[1, (3.32)]	-	-	-	-
Второй градиент	[1, (3.18)]	[1, (3.32)]	-	(2.19)	(2.34)	(2.36)
Микроструктура	[1, (3.18)]	[1, (3.32)]	(3.11)	(3.12)	(3.17)	(3.19)

Благодарности

Автор работы благодарит С.А. Лычева и А.Л. Левитина за обсуждения и критические замечания по содержанию статьи.

Литература

[1] Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть I. Геометрические методы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, 4. С. 26–53.

[2] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: https://libcats.org/book/789336.

[3] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 1–32. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00276433.

[4] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 33–94. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00276434.

[5] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Vol. 35, Number 7. Pp. 1727–1739. DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317.

[6] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8.

[7] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2012. Vol. 205, No. 1. Pp. 59–118. DOI: https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0.

[8] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 585–604. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=20181632. EDN: https://elibrary.ru/qzqmwd.

[9] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no. 8. Pp. 1852–1875. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221080187.

[10] Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 53–87. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87.

[11] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. URL: https://libcats.org/book/444677.

[12] Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. Москва: Наука, 1960. 207 с. URL: https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893xl1f8549212671.

[13] Картан Э. Геометрия римановых пространств. Москва: Книжный дом «Либроком», 2010. 248 с. URL: https://reallib.org/reader?file=444675.

[14] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012. 708 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5.

[15] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 17. Pp. 85–112. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00253050.

[16] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity // Journal of elasticity and the physical science of solids. 2002. Vol. 67. Pp. 205–227. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024926609083.

[17] Шварц Л. Анализ. Т. 1. Москва: Мир, 1972. 824 с. URL: https://klex.ru/14z8.

[18] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. Москва: URSS, 2017. 400 с. URL: http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html.

[19] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.

[20] Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993. 292 p. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003059882.

[21] Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars

[22] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007, 261 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8.

[23] Лычев С.А. Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости // Вестник Самарского государственного университета. 2007. № 4(54). С. 225–262. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071. EDN: https://elibrary.ru/hzzzon.

[24] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16. Pp. 51–78. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00248490.

[25] Whitney H. Sphere spaces // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1935. Vol. 21, No. 7. Pp. 462–468. DOI: http://doi.org/10.1073/pnas.21.7.464.

[26] Seifert H. Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume // Acta Mathematica. 1933. Vol. 60. Pp. 147–238. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02398271.

[27] Feldbau J. Sur la classification des espaces fibrés // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1939. Vol. 208. Pp. 1621–1623. URL: https://zbmath.org/0021.16304.

[28] Ehresmann C. Sur les espaces fibrés différentiables // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1947. Vol. 224. Pp. 1611–1612. URL: https://zbmath.org/0029.42001

[29] Стинрод Н. Топология косых произведений. Москва: Издательство иностранной литературы, 2010. 272 с. URL: https://reallib.org/reader?file=44439&pg=1.

[30] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. Москва: URSS, 2017. 504 с. URL: http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html.

[31] Лычев С.А., Койфман К.Г., Дигилов А.В. Нелинейные динамические уравнения для упругих микроморфных тел и оболочек. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 1. С. 81–103. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-81-103.

[32] Nguyen V.H., Casale G., Le Marrec L. On tangent geometry and generalised continuum with defects // Mathematics and Mechanics of Solids. 2022. Vol. 27, Issue 7. Pp. 1255–1283. https://doi.org/10.1177/10812865211059222.

[33] Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва: ГИФМЛ, 1961. 824 с. URL: https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lure1961ru.djvu.

[34] Liang K.K. Efficient conversion from rotating matrix to rotation axis and angle by extending Rodrigues' formula // arXiv, 2018. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.02999.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76

Submited: 25.08.2023
Revised: 04.10.2023
Accepted: 05.12.2023

K.G. Koifman
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7891-9995

REFERENCE SHAPE OF BODIES WITH ENHANCED KINEMATICS. PART II. SECOND GRADIENT AND MICROSTRUCTURE[15]

ABSTRACT

The work develops differential-geometric methods for modeling finite incompatible deformations of hyperelastic solids with enhanced kinematics. The response of such bodies, along with the standard kinematic field represented by the deformation gradient, is characterized by additional tensor fields. As such, the paper considers: 1) the second deformation gradient and 2) the tensor field of the second rank, modeling the microstructure of the body. For each of these two cases, compatibility conditions are obtained and their geometric interpretation is proposed. Geometry is synthesized on the material manifold representing a body with enhanced kinematics. The corresponding affine connection has non-zero torsion and curvature, which can be useful for modeling a body with dislocations and disclinations.

Key words: hyperelasticity; body with enhanced kinematics; second gradient; microstructure; incompatible deformations; residual stresses; non-Euclidean geometry; material metric; material connection; curvature; torsion; non-metricity.

[15]This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project № 22-21-00457).

Citation. Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part II. Second gradient and microstructure. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 54–76. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-54-76. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Konstantin G. Koifman — tutor in mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

References

[1] Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part I. Geometric methods. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023. vol. 29, no. 4. pp. 26–53.

[2] Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, no. 4, pp. 18–334. Available at: https://libcats.org/book/789336. (In Russ.)

[3] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, Vol. 27, No. 1, Pp. 1–32. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00276433.

[4] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, Vol. 27, No. 1, Pp. 33–94. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00276434.

[5] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, Vol. 35, Number 7, Pp. 1727–1739. DOI: https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317.

[6] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8.

[7] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, Vol. 205, no. 1, Pp. 59–118. DOI: https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0.

[8] Lychev S.A., Manzhirov A.V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 4, pp. 421–432. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011. EDN: https://elibrary.ru/wqyump. (In English; original in Russian)

[9] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, Vol. 42, No. 8, Pp. 1852–1875. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221080187.

[10] Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 53–87. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87. (In Russ.)

[11] Kartan E. Spaces of affine, projective and conformal connection. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1962, 210 p. Available at: https://libcats.org/book/444677. (In Russ.)

[12] Kartan E. Riemannian geometry in an orthogonal frame. Moscow: Nauka, 1960, 207 p.. URL: https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893xl1f8549212671. (In Russ.)

[13] Kartan E. Geometry of Riemannian spaces. Moscow: Knizhnyi dom «Librokom», 2010, 248 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=444675. (In Russ.)

[14] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012, 708 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5.

[15] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 17, pp. 85–112. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00253050.

[16] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity. *Journal of Elasticity*, 2002, vol. 67, pp. 205–227. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024926609083.

[17] Schwartz L. Analysis. Vol. 1. Moscow: Mir, 1972, 824 p. Available at: https://klex.ru/14z8. (In Russ.)

[18] Postnikov M.M. Lections in geometry. Semester II. Linear algebra. Moscow: URSS, 2017, 400 p. Available at: http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html. (In Russ.)

[19] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol. 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.

[20] Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. New York: CRC Press, 1993, 292 p. DOI: https://doi.org/10.1201/9781003059882.

[21] Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars.

[22] Elżanowski M., Epstein M. The symmetry group of second-grade materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, vol. 27, issue 4, pp. 635–638. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7462(92)90068-I.

[23] Lychev S.A. On conservation laws of micromorphic nondissipative thermoelasticity. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 4(54), pp. 225–262. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071. EDN: https://elibrary.ru/hzzzon. (In Russ.)

[24] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, Vol. 16, Pp. 51–78. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00248490.

[25] Whitney H. Sphere spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1935, vol. 21, no. 7, pp. 462–468. DOI: http://doi.org/10.1073/pnas.21.7.464.

[26] Seifert H. Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume. *Acta Mathematica*, 1933, vol. 60, pp. 147–238. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02398271.

[27] Feldbau J. Sur la classification des espaces fibrés. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1939, vol. 208, pp. 1621–1623. Available at: https://zbmath.org/0021.16304.

[28] Ehresmann C. Sur les espaces fibrés différentiables. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1947, vol. 224, pp. 1611–1612. Available at: https://zbmath.org/0029.42001.

[29] Steenrod N.E. The topology of fibre bundles. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 2010, 272 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=444395&pg=1. (In Russ.)

[30] Postnikov M.M. Lections in geometry. Semester IV. Differential geometry. Moscow: URSS, 2017, 504 p. Available at: http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html. (In Russ.)

[31] Lychev S.A., Koifman K.G., Digilov A.V. Nonlinear dynamic equations for elastic micromorphic solids and shells. Part I. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, issue 1, pp. 81–103. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-81-103.

[32] Nguyen V.H., Casale G., Le Marrec L. On tangent geometry and generalised continuum with defects. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2022, Vol. 27, no. 7, Pp. 1255–1283. https://doi.org/10.1177/10812865211059222.

[33] Lurie A.I. Analytical Mechanics. Moscow: GIFML, 1961, 824 p. Available at: https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lure1961ru.djvu. (In Russ.)

[34] Liang K.K. Efficient conversion from rotating matrix to rotation axis and angle by extending Rodrigues' formula. *arXiv*, 2018. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.02999.