МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2025-1-8-14

УДК 378.147

УЧЕБНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ИНСТРУМЕНТ НАУЧНОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ УЧАЩИМИСЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Абатурова Вера Сергеевна
к.п.н.
veronika-abaturova@yandex.ru
г. Владикавказ
Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН

Дятлов Владимир Николаевич
к.ф.-м.н., доцент
vndyatlov@gmail.com
г. Новосибирск
Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Новосибирский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрена проблема применения алгоритма учебного математического моделирования в обучении учащихся основной и старшей школы решению текстовых задач как инструмента научного метода. Показано, что, несмотря на наличие требований к результатам овладения учебными познавательными, логическими и исследовательскими действиями, учащиеся основной и старшей школы испытывают затруднения при решении текстовых задач, демонстрируют низкий уровень умений анализировать условие задачи, составлять математическую модель, находить обоснованный ответ, используя изученные математические методы. Приведены результаты сопоставления алгоритма научного метода решения исследовательских задач и алгоритма учебного математического моделирования при решении текстовых задач, в ходе доказывается, что эти алгоритмы коррелируют, т.е. учебное математическое моделирование является инструментом научного метода при решении учащимися текстовых задач. Также представлена детализация универсальных учебных действий учащегося на каждом этапе алгоритма учебного математического моделирования при решении текстовой задачи. Приведен пример решения типовой текстовой задачи на движение с помощью этого метода. В завершении статьи приведены результаты исследования, проведённого авторами в рамках мероприятий для учителей и учащихся основной и старшей школы, в ходе которых применялся алгоритм учебного математического моделирования при решении учащимися текстовых задач.

Ключевые слова: учебное математическое моделирование, научный метод, решение текстовых задач

Введение

В национальном проекте РФ «Образование», реализуемом в настоящее время, одной из задач системы общего и среднего образования указано внедрение новых образовательных технологий, обеспечивающих освоение обучающимися базовых навыков и умений. В действующих нормативных документах системы образования (ФГОС ООО, ФГОС СОО) зафиксирована необходимость овладения обучающимися универсальными учебными познавательными действиями, т.е. сформированность метапредменых умений: *выявлять и характеризовать существенные признаки объектов (явлений); с учётом предложенной задачи выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых фактах, данных и наблюдениях; выявлять дефициты информации, данных, необходимых для решения поставленной задачи; выявлять причинно-следственные связи при изучении явлений и процессов; делать выводы с использованием дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии, формулировать гипотезы о взаимосвязях; самостоятельно выбирать способ решения учебной задачи.*

Одним из индикаторов овладения учащимися указанными умениями являются текстовые задачи. Такие задачи показывают способность к составлению математической модели, её анализу и решению. Однако результаты контрольно-измерительных мероприятий показывают, что многие учащиеся испытывают серьезные трудности при решении текстовых задач. Это связано с тем, что текстовые задачи по сравнению с другим изучаемым в школе учебным материалом имеют особенность: их формулировка даётся на естественном языке (языке, используемом для общения) и предполагается, что условие будет переформулировано учащимся на математическом языке с последующим анализом и, как правило, получением числового результата. Такой перевод какой-то конструкции с одного языка на другой имеет отношение к широко применяемому методу исследования – моделированию. Среди разных способов моделирования можно выделить математическое моделирование, о котором имеет смысл говорить в тех случаях, когда образ объекта моделирования может быть представлен в виде некоторой содержательной математической конструкции, позволяющей в результате применения математических средств сделать выводы об оригинале с интересующей исследователя точки зрения. Вместе с тем область расположения оригинала может быть самой разнообразной.

Математические модели строятся для весьма разнообразных ситуаций, но надо иметь в виду, что реальные, жизненно важные ситуации, можно моделировать только с привлечением весьма развитого математического аппарата, на школьном уровне практически никогда не доступного. На элементарном уровне можно моделировать только то, что относится к условно реальным конструкциям, таким как идеальное движение точки (равномерное), пропорциональные (линейные) зависимости, обратно пропорциональные зависимости, долевое изменение величин и т.п. На уровне школьного курса математики в качестве оригиналов для математического моделирования обычно используют условно реальные ситуации, приближенные к действительности, насколько это возможно. Так появляются текстовые задачи «на работу» или «на движение», «на проценты», «экономические» задачи, приводящие к линейным моделям и т.п. (исключение, возможно, составляют задачи, связанные с процентами или долевым содержанием). Ценность математического моделирования при решении текстовых задач состоит в усвоении самого процесса математического моделирования, поэтому мы говорим об учебном математическом моделировании при решении текстовых задач. Именно с точки зрения анализа процесса построения, изучения и решения модели в данной статье будут рассмотрены некоторые вопросы, связанные с учебным математическим моделированием.

Материалы и методы

Одной из причин наличия проблем, связанных с решением школьниками текстовых задач, отражающих условно реальные ситуации, на наш взгляд, может оказаться система, принятая при обучении их решению, состоящая в изложении набора схем, образцов решения и необходимости при встрече с текстовой задачей следовать одному из шаблонов. В качестве альтернативы указанному подходу к обучению решению текстовых задач можно предложить аналог системы действий, присущей исследовательской деятельности и состоящей в выполнении определенного набора шагов, позволяющих анализировать разные ситуации и находить решения возникающих задач. Такая система действий состоит из указанных ниже нескольких этапов, которые соответствуют научному методу решения исследовательской задачи (Абатурова, 2023). Каждый этап научного метода порождает соответствующий этап учебного математического моделирования при решении текстовых задач.

Перечислим и охарактеризуем этапы научного метода решения исследовательских задач и сопоставленного ему метода учебного математического моделирования при решении текстовых задач. Некоторые предыдущие результаты применения математического моделирования и научного метода представлены в работах В.С. Абатуровой (Абатурова, 2023) и совместных работах В.С. Абатуровой и В.Н. Дятлова (Абатурова, Дятлов, 2023; 2022).

Рассмотрим алгоритм научного метода решения исследовательских задач.

1. Постановка задачи. В исследовательской деятельности этот этап предполагает изучение обстановки, сбор информации, постановку цели и признаков её достижения.

2. Наблюдения, эксперименты, их анализ, поиск закономерностей. На этом этапе исследователь определяется с получением необходимой для анализа информации, в том числе путём постановки экспериментов, отмечает особенности результатов, работает над поиском взаимосвязей между элементами и закономерностей.

3. Выдвижение гипотезы. На этом этапе формулируется ожидаемый результат.

4. Построение и применение теории, методики. В исследовательской деятельности в этот момент создаются элементы теории, позволяющей продвинуться в решении для достижения ожидаемого результата, подбирается инструментарий, разрабатывается план действий.

5. Проверка гипотезы, выводы. Здесь происходит проверка выполнения признаков или критериев достижения цели, и, если они выполнены, делается вывод о получении результата.

6. Принятие гипотезы в случае её подтверждения или возвращения к предыдущим этапам, если гипотеза не подтвердилась. Это естественный шаг в любом исследовании, либо оно завершилось приемлемым результатом, либо по какой-то причине результат оказался неудовлетворительным.

Рассмотрим теперь алгоритм учебного математического моделирования при решении текстовой задачи, который, фактически, содержит возможность формирования требуемых во ФГОС ООО и ФГОС СОО метапредметных умений и универсальных учебных действий.

Этап 1. Смысловое чтение условия задачи. На этом шаге происходит ознакомление с текстом условия задачи, составлением образа описываемой ситуации, соотнесением фраз условия задачи с математическими понятиями и математическими соотношениями, известными учащемуся.

Этап 2. Анализ условия задачи, выделение ключевых фраз, подготовка предмодели и её детализация. Анализ условия задачи предполагает выяснение, есть ли в тексте задачи фразы, в которых говорится о сравнении (равенстве или неравенстве) двух различных способов выражения одной и той же величины или о сравнении двух значений некоторой величины, относящихся к разным объектам (назовем её для краткости балансовой величиной). Учащийся на этом шаге начинает действия в рамках выбранного математического средства (соотношения), составляет *предмодель* ситуации, адаптированную для дальнейшей её формализации и представления в виде математической модели. Поскольку термин «предмодель» не относится к распространенным, поясним, что под этим понимается. Обсудим это понятие в ситуации наличия балансовых величин. При наличии ключевой фразы в тексте условия задачи, соответствующей ей *предмоделью* назовем запись содержания ключевой фразы на естественном языке, без введения математических соотношений, в виде сравнения (обычно равенства), которые отражают указанные в условии закономерности (балансовое соотношение, записанное на естественном языке, используемом в тексте задачи). Предмодель послужит основой для перехода к модели с использованием кратких обозначений и математических соотношений, то есть к математической модели.

Этап 3. Формализация предмодели и построение математической модели. После получения предмодели в виде балансового соотношения, отражающего какое-то событие, начинается её детализация и формализация, то есть осуществляется мотивированное введение кратких обозначений и совершается переход от предмодели к математической модели (балансового соотношения, записанного в виде уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств)). Перевод текста условия задачи на математический язык всегда сопровождается указанием искомой величины, то есть указанием цели. Бывает так, что искомая величина не входит в набор введенных при составлении соотношений переменных, а выражается через них в виде какой-то их комбинации.

Этап 4. Внутримодельное решение. На этом шаге в решении текстовой задачи выбираются математические ресурсы и решается математическая задача, полученная на предыдущем этапе.

Этап 5. Интерпретация результата решения математической модели. На этом этапе решения задачи полученный на этапе 4 результат переводится на естественный язык, т.е. происходит возвращение к фабуле задачи и записывается ответ на вопрос задачи.

Этап 6. Проверка результата на корректность. При решении текстовой задачи её результат может оказаться правдоподобным, и в таком случае при условии корректного решения математической модели результат можно считать полученным. Если же правдоподобности не наблюдается, то необходимо вернуться к предыдущим этапам с целью поиска ошибок при их выполнении.

Приведём пример применения алгоритма учебного математического моделирования, указав все его этапы, при решении типовой текстовой задачи.

Пример. *Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину – со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.*

Решение.

Этап 1. Смысловое чтение условия задачи. В первую очередь полезно вспомнить взаимозависимость между длиной пути, временем на его прохождения и скоростью, которую полезно и достаточно помнить, например, в виде «длина пути равна произведению скорости на время прохождения пути», без использования символов. Разумеется, можно отметить, что движение считается равномерным.

Этап 2. Анализ условия задачи, выделение ключевых фраз, подготовка предмодели и её детализация. Обратимся к анализу фраз в тексте условия задачи. Найдем фразы, в которых говорится о сравнении, например, *«со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого»*, однако в качестве решающей, ключевой, следует, по-видимому, взять фразу *«прибыл в B одновременно с первым автомобилем»*. Речь в ней идёт о равенстве времени в пути обоих участников движения. Тем самым можно записать такую предмодель:

время в пути первого автомобиля = время в пути второго автомобиля.

К этой предмодели можно добавить вспомогательную:

Скорость второго равна скорости первого плюс 15.

Начнём постепенно детализировать выражения в обеих частях равенства. По условию первый автомобиль проехал весь путь с одной скоростью, значит,

$$\text{время в пути первого автомобиля} = \frac{\text{длина пути}}{\text{скорость первого автомобиля}}.$$

Со вторым автомобилем дело обстоит иначе – он двигался по-разному в первой и второй половинах пути, тем самым

время в пути второго автомобиля = время на первой половине пути + время на второй половине пути, что можно записать так:

$$\text{время в пути второго автомобиля} = \frac{\text{половина пути}}{50} + \frac{\text{половина пути}}{\text{скорость первого} + 15}.$$

Детализация левой и правой частей равенства в предмодели приводит к такой её форме:

$$\frac{\text{длина пути}}{\text{скорость первого автомобиля}} = \frac{\text{половина пути}}{50} + \frac{\text{половина пути}}{\text{скорость первого автомобиля} + 15}.$$

Этап 3. Формализация предмодели и построение математической модели. Предмодель составлена, и теперь можно посмотреть, что известно, а для чего придётся вводить обозначения. В принципе, все конкретные данные задачи в предмодели уже отражены. Нет длины пути и скорости первого автомобиля. Значит, для них надо вводить обозначения. Обратим особое внимание на то, что при предлагаемом подходе выбор и введение обозначений носит мотивированный характер.

Пусть длина пути равна l (*км*), скорость первого автомобиля равна x (*км/ч*). Используя эти обозначения, переводим предмодель в символьную запись:

$$\frac{l}{x} = \frac{l/2}{50} + \frac{l/2}{x+15} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{100} + \frac{1}{2(x+15)} \qquad (1)$$

и получаем математическую модель.

Этап 4. Внутримодельное решение. После простейших тождественных преобразований полученное уравнение преобразуется к обычному квадратному уравнению

$$x^2 - 35x - 1500 = 0,$$

которое имеет два корня: $x_1 = 60$, $x_2 = -25$. Ясно, что эти числа являются корнями уравнения (1), ибо для них знаменатели дробей не обращаются в нуль.

Этап 5. Интерпретация результата решения математической модели. Из разумных соображений можно увидеть, что решением задачи будет один из двух полученных корней уравнения, т.к. корень $x_2 = -25$ не удовлетворяет условию исходной задачи (скорость автомобиля не может быть отрицательной). Таким образом, скорость первого автомобиля равна 60 км/ч.

Этап 6. Проверка результата на корректность. Полученный результат отвечает требованиям правдоподобности и корректности, что стало ясным после подстановки результата в условие задачи.

Результаты исследования

В ходе данного исследования нами в РСО-А (очно и дистанционно) были проведены следующие мероприятия: 1) тематические научно-практические семинары для учителей математики по применению алгоритма учебного математического моделирования при обучении учащихся решению текстовых задач; 2) ресурсные занятия со школьниками 7-х – 10-х классов по применению алгоритма учебного математического моделирования при решении текстовых задач; 3) открытые уроки и мастер-классы учителей математики РСО-А, на которых была применена методика обучения учащихся решению текстовых задач с применением алгоритма учебного математического моделирования.

Обсуждение и заключение

Исследование показало, что использование алгоритма учебного математического моделирования при решении учащимися текстовых задач как инструмента научного метода позволяет повысить у учащихся мотивацию к решению задач, способствует повышению их академической успешности.

Список литературы

Абатурова В.С. Формирование и развитие научного стиля мышления школьников. Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2023. Т. 15. С. 16–17.

Абатурова В. С., Дятлов В. Н. Математическое моделирование в обучении школьников решению мотивационно-прикладных задач // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сборник тезисов докладов международной научной конференции, Елец, 29 сентября – 01 октября 2023 года. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2023. С. 30–34.

Абатурова В.С., Дятлов В.Н. Научный метод как методологическая основа формирования у учащихся умения моделировать реальные ситуации и процессы // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2022. № 1(25). С. 8–15. DOI: 10.24888/2500-1957-2022-1-8-15

EDUCATIONAL MATHEMATICAL MODELING AS A TOOL OF SCIENTIFIC METHOD IN SOLVING TEXT PROBLEMS BY STUDENTS

Abaturova V. S.
PhD (Pedagogy)
veronika-abaturova@yandex.ru
Vladikavkaz
Southern Mathematical Institute – the Affiliate of the Vladikavkaz Scientific Center of the RAS, North-Caucasus Center for Mathematical Research of the Vladikavkaz Scientific Centre of the RAS

Dyatlov V. N.
PhD (Physics and Mathematics)
associate professor
vndyatlov@gmail.com
Novosibirsk
Southern Mathematical Institute – the Affiliate of the Vladikavkaz Scientific Center of the RAS, Novosibirsk State University

Abstract. The article considers the problem of using the algorithm of educational mathematical modeling in teaching primary and high school students to solve text problems as a tool of the scientific method. It is shown that despite the requirements for the results of mastering educational cognitive, logical and research activities, primary and high school students have difficulty solving text problems, demonstrate a low level of skills to analyze the condition of the problem, create a mathematical model, and find a reasonable answer using the studied mathematical methods. The results of comparing the algorithm of the scientific method of solving research problems and the algorithm of educational mathematical modeling in solving text problems are presented. In the course, it is proved that these algorithms correlate, i.e. educational mathematical modeling is a tool of the scientific method in solving text problems by students. It also provides a detailed description of the student's universal learning actions at each stage of the learning mathematical modeling algorithm when solving a text problem. An example of solving a typical text problem for movement using this method is given. At the end of the article, the results of a study conducted by the authors within the framework of events for teachers and students of primary and high schools, during which an algorithm of educational mathematical modeling was used when students solved text problems.

Keywords: educational mathematical modeling, scientific method, text problem solving

References

Abaturova, V. S. (2023). Formation and development of the scientific style of thinking of schoolchildren. *Mathematical Forum* (*Results of Science. South of Russia*), 15, 16–17 (In Russ.).

Abaturova, V. S., Dyatlov, V. N. (2023). Matematicheskoe modelirovanie v obuchenii shkol'nikov resheniyu motivacionno-prikladnyh zadach [Mathematical modeling in teaching schoolchildren to solve motivational and applied problems]. *Fundamental'nye problemy obucheniya matematike, informatike i informatizacii obrazovaniya: Sbornik tezisov dokladov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Elets, 29 sentyabrya – 01 oktyabrya 2023 goda* (pp. 30-34). Elets: Eletskij gosudarstvennyj universitet im. I.A. Bunina. (In Russ.).

Abaturova, V. S., Dyatlov, V. N. (2022). Scientific method as a methodological basis for the formation of students' ability to model real situations and processes. *Continuum. Mathematics. Computer science. Education*, 1(25), 8–15. DOI: 10.24888/2500-1957-2022-1-8-15 (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 10.03.2025
Принята к публикации 14.03.2025