

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 70, № 4, 2024

Труды Воронежской зимней математической школы С. Г. Крейна — 2024

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,
к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Аграчев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 23.10.2024. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 22,32. Тираж 110 экз. Заказ 1738.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 70, No. 4, 2024

Proceedings of the Voronezh Winter Mathematical Krein School — 2024

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Атанов А. В., Лобода А. В.</i> О невырожденных орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих 3-мерный абелев идеал	517
<i>Бабочин С. Д.</i> Корректная разрешимость задач для дробно-степенных операторных уравнений	533
<i>Вирченко Ю. П., Теволде А. М.</i> Унимодальность распределения вероятностей экстенсивного функционала выборок случайной последовательности	542
<i>Джосеф Д. Дж.</i> Интегральные неравенства для тригонометрических многочленов в периодических пространствах Морри	561
<i>Жаданова М. Л.</i> Интерполяция периодических функций и построение биортогональных систем с помощью равномерных сдвигов тета-функции	575
<i>Звягин А. В., Костенко Е. И.</i> Задача существования управления с обратной связью для одной нелинейно-вязкой дробной модели Фойгта	586
<i>Кабанко М. В., Малютин К. Г.</i> Интерполирование методом Эрла в пространстве функций полуформального порядка	597
<i>Кибкало В. А., Тунияни Д. А.</i> Упорядоченные бильярдные игры и топологические свойства бильярдных книжек	610
<i>Костин А. В.</i> Обращение полиномиального оператора с символом Маслова—Чебышева	626
<i>Костин В. А., Костин Д. В., Силаева М. Н.</i> О построении квадратного корня для некоторых дифференциальных операторов	636
<i>Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапина М. Г.</i> Двойственное преобразование Радона—Киприянова. Основные свойства	643
<i>Мозохина А. С., Рюмина К. А.</i> Многомасштабная математическая модель распространения респираторной инфекции с учётом иммунного ответа	654
<i>Половинкина М. В.</i> О восстановлении решения начально-краевой задачи для сингулярного уравнения теплопроводности	669
<i>Федоров В. Е., Годова А. Д.</i> Линейные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченным оператором	679
<i>Шашкин А. И., Половинкина М. В., Половинкин И. П.</i> Об изучении модели распространения эпидемии ВИЧ/СПИДа	691

CONTENTS

<i>Atanov A. V., Loboda A. V.</i> On nondegenerate orbits of 7-dimensional Lie algebras containing a 3-dimensional Abelian ideal	517
<i>Baboshin S. D.</i> Correct solvability of problems for fractional-power operator equations	533
<i>Virchenko Yu. P., Tevolde A. M.</i> Unimodality of the probability distribution of the extensive functional of samples of a random sequence	542
<i>Joseph D. J.</i> Integral inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces	561
<i>Zhadanova M. L.</i> Interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems using uniform shifts of the theta function	575
<i>Zvyagin A. V., Kostenko E. I.</i> The problem of existence of feedback control for one nonlinear viscous fractional Voigt model	586
<i>Kabanko M. V., Malyutin K. G.</i> Interpolation by Earl's method in the space of functions of semi-formal order	597
<i>Kibkalo V. A., Tuniyants D. A.</i> Ordered billiard games and topological properties of billiard books	610
<i>Kostin A. V.</i> Inversion of a polynomial operator with the Maslov–Chebyshev symbol	626
<i>Kostin V. A., Kostin D. V., Silaeva M. N.</i> On the construction of the square root for some differential operators	636
<i>Lyakhov L. N., Kalitvin V. A., Lapshina M. G.</i> Dual Radon–Kipriyanov transformation. Basic properties	643
<i>Mozokhina A. S., Ryumina K. A.</i> Multiscale mathematical model of the spread of respiratory infection considering the immune response	654
<i>Polovinkina M. V.</i> On the recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the singular heat conduction equation	669
<i>Fedorov V. E., Godova A. D.</i> Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator	679
<i>Shashkin A. I., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.</i> On studying the spread model of the HIV/AIDS epidemic	691

УДК 515.172.2, 512.816, 517.55

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532

EDN: VQUHHA

О НЕВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТАХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ, СОДЕРЖАЩИХ 3-МЕРНЫЙ АБЕЛЕВ ИДЕАЛ

А. В. Атанов¹, А. В. Лобода^{2,3}¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия²Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия³Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Статья связана с задачей описания однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств как орбит действия в этих пространствах групп Ли. Изучаются реализации в виде алгебр голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр Ли, содержащих только 3-мерные абелевы идеалы и подалгебры. Среди 594 типов 7-мерных разрешимых неразложимых алгебр Ли, содержащих 6-мерный нильрадикал, таких алгебр имеется пять типов. В статье описаны все их реализации, допускающие невырожденные по Леви 7-мерные орбиты. Показано наличие «просто однородных» орбит среди построенных гиперповерхностей.

Ключевые слова: алгебра Ли, абелева подалгебра, голоморфное векторное поле, однородное многообразие, вещественная гиперповерхность, вырождение в смысле Леви.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 23-21-00109).

Для цитирования: А. В. Атанов, А. В. Лобода. О невырожденных орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих 3-мерный абелев идеал // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 517–532. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532>

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья связана с задачей описания однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств. Отметим, что случаи пространств $\mathbb{C}^2$ (см. [17]) и $\mathbb{C}^3$ (см. [8, 19]) изучены. При этом полное описание однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ оказалось достаточно объемным, а его построение заняло фактически более 20 лет. Важным фрагментом полной классификации в задаче об однородности в $\mathbb{C}^3$ стала работа [20], содержащая описание Леви-вырожденных однородных гиперповерхностей.

В то же время это семейство поверхностей оказалось достаточно небольшим по сравнению с семейством невырожденных по Леви однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$. С ростом размерности объемлющих комплексных пространств количество Леви-вырожденных однородных многообразий увеличивается, например, за счет (являющихся голоморфно вырожденными) прямых произведений маломерных однородных многообразий на пространства $\mathbb{C}^k$.

Как показывает опыт авторов данной работы, ситуация с вырожденностью количественно меняется, начиная уже с пространства $\mathbb{C}^4$, в котором вырожденных однородных гиперповерхностей гораздо больше, чем невырожденных. Например, имеет место следующее утверждение (см. [11, 13]): *в пространстве $\mathbb{C}^4$ Леви-невырожденными орбитами семейства (из 149 типов) нильпотентных 7-мерных неразложимых алгебр Ли являются лишь*

$$\operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z_4 = z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_3|^2 \pm |z_1|^4.$$

Отметим, что 7 — это минимально возможная размерность алгебры голоморфных векторных полей на однородных гиперповерхностях пространства $\mathbb{C}^4$. В серии работ [5, 10, 11, 13, 14] авторами изучаются имеющиеся большие списки абстрактных 7-мерных алгебр Ли (см. [21, 22, 24, 26]) с точки зрения их голоморфной реализации. Показано (см., например, [5, 14]), что наличие в 7-мерной алгебре абелевых подалгебр или идеалов «больших» размерностей является препятствием для существования невырожденных орбит.

С другой стороны, именно «малая» размерность максимальной абелевой подалгебры у 5-мерной неразрешимой алгебры Ли позволила получить за счет реализации этой алгебры в пространстве $\mathbb{C}^3$ интересный пример просто однородной невырожденной гиперповерхности. В имеющихся списках 7-мерных алгебр Ли минимальной размерностью максимальных абелевых подалгебр (и одновременно абелевых идеалов) оказывается именно 3. Тем самым, изучение орбит алгебр именно с такими свойствами является естественным и оправданным.

Отметим еще, что в последние годы вырос интерес к изучению Леви-вырожденных, но обладающих свойствами k -невырожденности однородных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств (см. [23, 25]). Многие из них оказываются сводимыми к так называемым трубчатым многообразиям, представляющим большой класс однородных поверхностей. Свойство трубчатости важно и в наших исследованиях, но вопрос о связи его с однородностью пока не изучен в полном объеме.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 2.1. Многообразие M *однородно относительно некоторой группы* (преобразований) G , если эта группа транзитивно действует на M , т. е. любую точку из M можно перевести в любую другую точку этого многообразия некоторым преобразованием из группы G .

Свойство однородности $M^7 \subset \mathbb{C}^4$ везде ниже обсуждается в локальном смысле. Оно понимается как наличие на такой поверхности алгебры Ли $\mathfrak{g}(M)$ голоморфных (касательных к M) векторных полей, имеющей вблизи обсуждаемой точки Q поверхности ранг, равный 7.

Без ограничения общности точку Q можно считать началом координат пространства $\mathbb{C}^4$, но при обсуждении уравнений конкретных поверхностей приходится иногда отказываться от такого соглашения. Голоморфные векторные поля вида

$$Z = a(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + b(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + c(z) \frac{\partial}{\partial z_3} + d(z) \frac{\partial}{\partial z_4}$$

в этом пространстве будем записывать в форме

$$Z = (a(z), b(z), c(z), d(z)).$$

Здесь $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — вектор комплексных координат в $\mathbb{C}^4$, а компоненты поля Z — голоморфные функции вблизи точки Q .

Касание полем Z вещественной гиперповерхности M 4-мерного комплексного пространства означает, что

$$\operatorname{Re}(Z(\Phi))|_M \equiv 0. \quad (2.1)$$

В этом тождестве $\Phi(z, \bar{z})$ — определяющая функция поверхности M , заданная и имеющая ненулевой дифференциал вблизи точки Q .

Важной для нас является теорема Фробениуса (см., например, [3]) о размерности орбит (или интегральных поверхностей) алгебр векторных полей. В соответствии с этой теоремой, орбита 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей является вещественной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^4$, если в точке Q (как и во всех близких к ней точках) значения полей из $\mathfrak{g}$ образуют вещественную гиперплоскость в этом пространстве (или, упрощенно говоря, алгебра имеет в данной

точке ранг, равный 7). Для каждой из получаемых ниже 7-мерных алгебр мы обсуждаем их орбиты после проверки условия на ранг, не комментируя эту проверку отдельными пояснениями.

Определение 2.2. Пусть вещественно-аналитическая гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ задается вблизи точки Q (перенесенной в начало координат) уравнением

$$\operatorname{Im} z_{n+1} = F(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, \operatorname{Re} z_{n+1}) \text{ с условиями } F(0) = 0, dF(0) = 0. \quad (2.2)$$

Если при этом матрица Гессе поверхности (2.2), т. е. эрмитова матрица

$$H = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} \right) (0), \quad k, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.3)$$

является вырожденной (невырожденной), то поверхность M называется *вырожденной* (*невырожденной*) *по Леви* в обсуждаемой точке Q .

Определение 2.3. Если Γ — многообразие в $\mathbb{R}^n$, то $M = \Gamma + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ называется *трубкой*, или *трубчатым многообразием* над Γ .

3. АЛГЕБРЫ ЛИ РАЗМЕРНОСТИ 7 И ИХ АБЕЛЕВЫ ПОДАЛГЕБРЫ

Количество вещественных 7-мерных алгебр Ли, представляющих интерес в обсуждаемой задаче об однородности в качестве алгебр с минимально возможной размерностью, является очень большим. Приведем здесь два утверждения, относящиеся к 7-мерным алгебрам.

Теорема 3.1 (основной результат работы [26], Theorem 5.1). *Класс вещественных 7-мерных разрешимых (неразложимых) алгебр Ли состоит из 939 семейств алгебр.*

Разложение этого класса на подклассы алгебр, имеющих нильрадикалы размерностей 4, 5, 6, 7, соответственно, описывается разложением

$$939 = (8 + 188 + 594 + 149).$$

Замечание 3.1. Учитывая еще разложимые (разрешимые и неразрешимые) алгебры Ли и список из 7 типов неразложимых неразрешимых алгебр, можно говорить о 1325 типах 7-мерных вещественных алгебр Ли.

Для самого большого подсемейства алгебр из теоремы 3.1 изучение задачи о невырожденных не сводимых к трубкам орбитах фактически завершается в данной статье. В упоминавшейся серии работ [5, 10, 11, 13, 14] такие орбиты изучены в связи с максимальной размерностью и количеством абелевых подалгебр такой размерности, содержащихся в изучаемых алгебрах.

Наиболее общим фактом, доказанным в последнее время, является следующее утверждение.

Теорема 3.2 (см. [14]). *Пусть в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 3$) задана $(2n+1)$ -мерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей. Если эта алгебра имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q и содержит $(2n-1)$ -мерную абелеву подалгебру, то голоморфно однородная вещественная гиперповерхность, содержащая Q и являющаяся орбитой алгебры $\mathfrak{g}$, вырождена по Леви.*

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, содержащая 5-мерную абелеву подалгебру. Тогда все 7-мерные орбиты $\mathfrak{g}$ вырождены по Леви.*

Обозначим через $A_{7,4}$ множество алгебр из списка [24], у которых максимальная размерность абелевых подалгебр равна 4.

С помощью компьютерных алгоритмов (см. [5]) установлено, что из 594 типов алгебр работы [24] большинство имеет либо 5-мерные абелевы подалгебры, либо три различных 4-мерных абелевых подалгебры. В работах [11, 14] для алгебр Ли, обладающих одним из этих двух свойств, доказана вырожденность или трубчатость всех орбит в $\mathbb{C}^4$.

В связи с этим основной содержательный интерес в обсуждаемой задаче представляют лишь 104 типа алгебр из [24]:

- 66 типов из них содержат две 4-мерных абелевых подалгебры;

- 33 типа содержат единственную 4-мерную абелеву подалгебру;
- 5 типов содержат лишь 3-мерные абелевы подалгебры.

При этом в работе [10] изучен случай двух 4-мерных абелевых подалгебр; исследования орбит 7-мерных алгебр Ли из [24] с единственной 4-мерной абелевой подалгеброй в настоящее время завершаются. Предварительный вывод из этих исследований заключается в том, что алгебрам Ли из семейства $A_{7,4}$ соответствуют не более 42 семейств (типов) Леви-невырожденных голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$, не сводимых к трубкам.

В настоящей статье мы обсуждаем пять типов 7-мерных алгебр Ли из [24], содержащих лишь 3-мерные абелевы подалгебры.

Замечание 3.2. Среди 188 типов алгебр Ли с 5-мерными нильрадикалами также имеются алгебры, содержащие лишь 3-мерные абелевы подалгебры. 4-мерные нильрадикалы восьми типов алгебр Ли из [26] автоматически оказываются абелевыми идеалами.

4. КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОБСУЖДАЕМЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

К пяти типам изучаемых в этой статье алгебр Ли относятся алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$ (один тип) и $[7, [6, 16], 1, k]$ ($k = 1, 2, 3, 4$) (четыре типа). Таблицы коммутационных соотношений (в некоторых канонических базисах) для этих алгебр приведены ниже.

Уточним на примере алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$, что, по сложившейся традиции, нетривиальными значениями $[e_j, e_k]$ заполняется только правая верхняя часть таблицы, соответствующая неравенствам $j < k$; элементы ее левой нижней части ($j > k$) определяются условием антикоммутативности $[e_j, e_k] = -[e_k, e_j]$, но в таблицу не заносятся; диагональные коммутаторы $[e_k, e_k]$ равны нулю в силу того же условия антикоммутативности. Эти нулевые значения также не вносятся в таблицу.

ТАБ. 1. Коммутационные соотношения в алгебре Ли $[7, [6, 12], 1, 1]$

ТАБ. 1. Commutation relations in the Lie algebra $[7, [6, 12], 1, 1]$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1							$7e_1$
e_2					e_1		$5e_2$
e_3				$-e_1$		e_2	$4e_3$
e_4					e_2	e_3	$3e_4$
e_5						e_4	$2e_5$
e_6							e_6
e_7							

Вторая таблица, описывающая общим образом коммутационные соотношения в алгебрах $[7, [6, 16], 1, k]$ ($k = 1, 2, 3, 4$), состоит из двух частей. В ее левой части содержится описание нильпотентной 6-мерной алгебры Ли $[6, 16]$, являющейся идеалом в любой из алгебр четырех обсуждаемых типов. В четырех столбцах правой части по отдельности выписаны значения коммутаторов $[e_j, e_7]$, $j = 1, \dots, 6$ для этих четырех типов алгебр.

ТАБ. 2. Коммутационные соотношения в алгебрах Ли $[7, [6, 16], 1, k]$, $k = 1, 2, 3, 4$

ТАБ. 2. Commutation relations in the Lie algebras $[7, [6, 16], 1, k]$, $k = 1, 2, 3, 4$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$e_7^{(1)}$	$e_7^{(2)}$	$e_7^{(3)}$	$e_7^{(4)}$
e_1							$(2m+3)e_1$	$2e_1$	e_1	$2e_1$
e_2					e_1		$(m+3)e_2$	e_2	$2e_2$	e_2
e_3				$-e_1$		e_2	$(m+2)e_3$	e_3	e_3	e_3
e_4						e_3	$(m+1)e_4$	e_4		e_4
e_5						e_4	me_5	e_5	$-e_5$	$e_2 + e_5$
e_6							e_6		$\varepsilon e_1 + e_6$	

Отметим, что тип $[7, [6, 16], 1, 1]$ содержит однопараметрическое семейство алгебр Ли с параметром $m \in \mathbb{R}$ (в оригинальной работе [24] этот параметр обозначен символом « a »); в тип $[7, [6, 16], 1, 3]$ входят две алгебры Ли, отвечающие значениям параметра $\varepsilon = \pm 1$; каждый из трех остальных типов $[7, [6, 12], 1, 1]$, $[7, [6, 16], 1, 2]$ и $[7, [6, 16], 1, 4]$ представлен единственной алгеброй Ли.

Замечание 4.1. У каждой алгебры Ли из пяти представленных типов помимо абелева идеала $I_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ имеется еще три абелевы подалгебры $I'_3 = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$, $I''_3 = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle$ и $I'''_3 = \langle e_1, e_2, e_6 \rangle$.

5. СХЕМА ИЗУЧЕНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТ

Схема изучения невырожденных орбит 7-мерных алгебр Ли с 3-мерными абелевыми идеалами повторяет, в целом, аналогичный двухшаговый подход, описанный, например, в [10] для случая 4-мерных абелевых подалгебр:

- на 1-м шаге схемы строится «каноническая» реализация абстрактных алгебр Ли в виде алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$;
- на 2-м шаге эти реализации интегрируются.

Одним из главных отличий случая, изучаемого в данной статье, от уже использованных утверждений является сведение обсуждений не к трем, а к двум основным случаям.

Предложение 5.1 (аналог леммы 7.1 из [9]). *Пусть невырожденная по Леви гиперповерхность M является орбитой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_7$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, а сама эта алгебра содержит 3-мерную абелеву подалгебру $\mathfrak{h}_3$. Тогда произвольный (упорядоченный) базис e_1, e_2, e_3 подалгебры $\mathfrak{h}_3$ можно привести голоморфной заменой координат к одному из двух видов:*

1. $e_1 = (0, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 0, 0)$;
2. $e_1 = (0, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, c_3(z_1, z_2), d_3(z_1, z_2))$.

Доказательство. Одно ненулевое векторное поле в пространстве $\mathbb{C}^n$ любой размерности n можно превратить, например, в дифференцирование по переменной z_n (выпрямить) в силу известных утверждений из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае невырожденной гиперповерхности M многомерного комплексного пространства второе ненулевое векторное поле, касательное к M и коммутирующее с первым полем, можно превратить в дифференцирование по еще одной комплексной переменной, в соответствии с обсуждениями работ [11, 16]. В этих же работах объясняется и упрощение третьего поля из тройки коммутирующих полей. $\square$

Использование коммутационных соотношений позволяет далее упростить (в каждом из двух случаев предложения 5.1) весь базис обсуждаемой алгебры Ли и привести его к некоторому «каноническому виду».

Отметим, что первый шаг описанной схемы естественно разбить еще на два этапа.

- На первом этапе реализуются в виде векторных полей в $\mathbb{C}^4$ базисные элементы 6-мерной нильпотентной подалгебры, имеющейся у всех алгебр работы [24].
- В случае успешной реализации первого этапа на втором этапе для каждого из пяти типов алгебр обсуждается возможность реализации базисного элемента e_7 в виде векторного поля в $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющего коммутационным соотношениям в рассматриваемой алгебре.

Отметим, что для конкретной алгебры первый шаг схемы может оказаться противоречивым как на первом ее этапе, так и на втором.

Замечание 5.1. В [1] описанная схема голоморфной реализации эффективно использована при описании орбит разложимых 7-мерных алгебр Ли, не являющихся предметом данной статьи.

6. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГЕБРЫ $[7, [6, 12], 1, 1]$ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

Для алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$ реализация первого шага описанной выше схемы приводит к следующим утверждениям.

Предложение 6.1. Пусть 7-мерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеет структуру абстрактной алгебры Ли $[7, [6, 12], 1, 1]$ и тройка полей e_1, e_2, e_3 имеет выпрямленный вид случая 1 из предложения 5.1. Тогда все 7-мерные орбиты этой алгебры могут быть только вырожденными по Леви.

Доказательство. Доказательство повторяет технические приемы, использованные в серии работ [5, 10, 11, 13, 14]. Уточним, что первыми их реализовали авторы статьи [16].

Покажем, что случай

$$e_1 = (0, 0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 0, 0, 1), \quad e_3 = (0, 0, 0, 1) \quad (6.1)$$

невозможен при допущении существования невырожденной орбиты у обсуждаемой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}$. Из четырех коммутационных соотношений таблицы 1

$$[e_1, e_4] = 0, \quad [e_2, e_4] = 0, \quad [e_1, e_6] = 0, \quad [e_2, e_6] = 0$$

следует, что компоненты полей e_4, e_6 могут зависеть только от переменных z_1, z_2 . Еще из двух соотношений

$$[e_3, e_4] = -e_1, \quad [e_3, e_6] = e_2$$

получаем тогда упрощенный вид полей

$$\begin{aligned} e_4 &= (a_4(z_1), b_4(z_1), c_4(z_1), -z_2 + d_4(z_1)), \\ e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), z_2 + c_6(z_1), d_6(z_1)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для поля e_5 получаем из соотношений $[e_1, e_5] = 0, [e_2, e_5] = e_1, [e_3, e_5] = 0$ аналогичное упрощение до вида

$$e_5 = (a_5(z_1), b_5(z_1), c_5(z_1), z_3 + d_5(z_1)). \quad (6.3)$$

Теперь в рамках первого случая обсудим два подслучая, связанные с возможным обращением в нуль компоненты $a_4(z_1)$ поля e_4 .

В подслучае 1.1 при $a_4(z_1) \neq 0$ вблизи обсуждаемой точки можно (пользуясь леммой о линеаризации из [12]) привести поле e_4 к виду

$$e_4 = (1, 0, 0, -z_2) \quad (6.4)$$

с сохранением вида (6.1), (6.2), (6.3) упрощенных формул для остальных рассмотренных выше полей e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 .

Но с учетом формулы (6.4) из соотношений $[e_4, e_5] = e_2, [e_4, e_6] = e_3$ следует, что первые компоненты полей e_5 и e_6 могут быть только константами. Этот вывод противоречит еще одному коммутационному соотношению $[e_5, e_6] = e_4$ из таблицы 1, так как первая компонента поля e_4 из формулы (6.4) равна единице, а у коммутатора $[e_5, e_6]$ она тождественно нулевая.

Это означает, что в подслучае 1.1 реализации алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$, допускающие хотя бы одну невырожденную орбиту в пространстве $\mathbb{C}^4$, невозможны.

Переходим к подслучаю 1.2, в котором $a_4(z_1) \equiv 0$. Здесь можно воспользоваться еще одним стандартным соображением о вырожденности по Леви (и даже о голоморфной вырожденности) орбиты 7-мерной алгебры голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, у которой шесть базисных полей имеют тождественно нулевую первую компоненту (см., например, [11]).

В силу этого соображения одна из двух компонент $a_5(z_1)$ либо $a_6(z_1)$ полей из формул (6.2) и (6.3) обязательно отлична от нуля (при допущении существования невырожденной орбиты у обсуждаемой 7-мерной алгебры). В каждом из этих двух случаев рассуждения, аналогичные описанным выше, также приводят к противоречиям. $\square$

С учетом предложения 6.1 все реализации алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$ в виде алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$, допускающие невырожденные по Леви орбиты, возможны только в рамках случая 2 из предложения 5.1. Поэтому результат обсуждений случая 2 является итоговым для всех возможных интересующих нас реализаций алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$. Сформулируем этот результат следующим образом.

Теорема 6.1. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеет структуру абстрактной алгебры Ли $[7, [6, 12], 1, 1]$. Если $\mathfrak{g}$ имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q

и хотя бы одну невырожденную орбиту в $\mathbb{C}^4$, содержащую точку Q , то голоморфной заменой координат базис этой алгебры можно привести к виду $(q, r \in \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, -z_1, z_2), \\ e_4 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_5 &= \left(0, -z_1, z_2 + \frac{1}{3}z_1^3, z_3 + qz_1^5\right), \\ e_6 &= \left(1, 0, -z_1z_2 - 5qz_1^4, \frac{1}{2}z_2^2 + rz_1^6\right), \\ e_7 &= (z_1, 3z_2, 5z_3, 7z_4). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Доказательство. В случае 2 предложения 5.1 тройка полей e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$e_1 = (0, 0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 0, 0, 1), \quad e_3 = (0, 0, c_3(z_1, z_2), d_3(z_1, z_2)). \quad (6.6)$$

При этом в силу коммутационных соотношений $[e_1, e_4] = [e_2, e_4] = 0$ компоненты поля e_4 могут зависеть только от переменных z_1, z_2 .

Предположим сначала, что две первые компоненты $a_4(z_1, z_2)$ и $b_4(z_1, z_2)$ этого поля тождественно равны нулю (в некоторой окрестности обсуждаемой точки $Q \in \mathbb{C}^4$). В совокупности с аналогичными тождествами для базисных полей e_1, e_2, e_3 это означало бы в силу условия (2.1) независимость определяющей функции любой орбиты обсуждаемой 7-мерной алгебры от переменных z_3, z_4 . Для Леви-невырожденной гиперповерхности такое невозможно, следовательно,

$$(a_4(z_1, z_2), b_4(z_1, z_2)) \neq (0, 0).$$

При выполнении этого условия мы можем голоморфной заменой переменных z_1, z_2 превратить поле e_4 в

$$e_4 = (0, 1, c_4(z_1, z_2), d_4(z_1, z_2)). \quad (6.7)$$

После еще одной замены переменных $z_3^* = z_3 + \varphi(z_1, z_2)$, $z_4^* = z_4 + \psi(z_1, z_2)$ с функциями $\varphi(z_1, z_2)$, $\psi(z_1, z_2)$, удовлетворяющими условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_2} + c_4(z_1, z_2) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_2} + d_4(z_1, z_2) = 0,$$

поле e_4 выпрямляется до состояния $e_4 = (0, 1, 0, 0)$.

Поля e_1, e_2, e_3 при этом сохраняют свой вид (6.6), но из соотношения $[e_3, e_4] = -e_1$ с упрощенным полем e_4 теперь легко получить условия

$$\frac{\partial c_3}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial d_3}{\partial z_2} = 1.$$

В силу этих условий можно считать, что компоненты $c_3(z_1, z_2)$ и $d_3(z_1, z_2)$ упрощаются до вида $c_3(z_1)$ и $z_2 + d_3(z_1)$ соответственно.

Обсудим теперь возможные упрощения полей e_5 и e_6 обсуждаемой алгебры, вытекающие из коммутационных соотношений таблицы 1.

Из четверки соотношений

$$[e_1, e_5] = 0, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_1, e_6] = 0, \quad [e_2, e_6] = 0$$

следует, что компоненты поля e_6 могут зависеть только от пары переменных z_1, z_2 , а у поля e_5 лишь в последней компоненте появляется отличная от этой пары переменная z_3 :

$$e_5 = (a_5(z_1, z_2), b_5(z_1, z_2), c_5(z_1, z_2), z_3 + d_5(z_1, z_2)), \quad e_6 = (a_6(z_1, z_2), b_6(z_1, z_2), c_6(z_1, z_2), d_6(z_1, z_2)).$$

Два соотношения $[e_4, e_5] = e_2$ и $[e_4, e_6] = e_3$ превращаются с учетом выпрямленного вида e_4 в

$$\frac{\partial}{\partial z_2}(a_5, b_5, c_5, d_5) = (0, 0, 1, 0), \quad \frac{\partial}{\partial z_2}(a_6, b_6, c_6, d_6) = (0, 0, c_3, z_2 + d_3).$$

Еще два соотношения $[e_3, e_5] = 0$, $[e_3, e_6] = e_2$ означают справедливость следующих четырех условий:

$$\begin{aligned} a_5(z_1, z_2)c'_3(z_1) &= 0, & -a_5(z_1, z_2)d'_3(z_1) + b_5(z_1, z_2) &= c_3(z_1), \\ -a_6(z_1, z_2)c'_3(z_1) &= 1, & -a_6(z_1, z_2)d'_3(z_1) + b_6(z_1, z_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из этих уравнений вытекают равенства

$$a_5(z_1, z_2) \equiv 0, \quad b_5(z_1, z_2) = c_3(z_1)$$

и независимость функций

$$a_6 = -\frac{1}{c'_3(z_1)} \neq 0, \quad b_6 = a_6 d'_3(z_1)$$

от переменной z_2 . После таких упрощений поле e_6 принимает вид

$$e_6 = (a_6(z_1), a_6(z_1), c_6(z_1, z_2), d_6(z_1, z_2)).$$

Пользуясь неравенством $a_6(z_1) \neq 0$, можно за счет голоморфной замены переменной z_1 сделать этот ненулевой коэффициент единичной константой. Тогда в силу упрощения соотношений (6.8) получим

$$c'_3(z_1) = -1, \quad c_3(z_1) = -z_1 + C_3, \quad b_6(z_1) = d'_3(z_1).$$

Используя еще сдвиг $z_1^* = z_1 + C_3$, выпишем полученные промежуточные результаты упрощения базисных полей алгебры:

$$\begin{aligned} e_3 &= (0, 0, -z_1, z_2 + d_3(z_1)), \\ e_5 &= (0, -z_1, z_2 + c_5(z_1), d_5(z_1)), \\ e_6 &= \left(1, d'_3(z_1), -z_1 z_2 + c_6(z_1), \frac{1}{2}z_2^2 + z_2 d_3(z_1) + d_6(z_1)\right). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что в рамках 6-мерного нильрадикала [6, 12] изучаемой алгебры осталось не рассмотренным лишь одно коммутационное соотношение $[e_5, e_6] = e_4$. Связанные с ним несложные выкладки (которые мы опускаем) приводят к следующему виду шести базисных полей этой нильпотентной алгебры:

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 0, -z_1, z_2 + d_3(z_1)), \\ e_4 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_5 &= (0, -z_1, z_2 + c_5(z_1), z_3 + d_5(z_1)), \\ e_6 &= \left(1, d'_3(z_1), -z_1 z_2 + c_6(z_1), \frac{1}{2}z_2^2 + z_2 d_3(z_1) + d_6(z_1)\right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$c'_5(z_1) + d'_3(z_1) = z_1^2, \quad c_6(z_1) = -z_1 d_3(z_1) - d'_5(z_1).$$

Для завершения доказательства теоремы 6.1 остается рассмотреть коммутаторы всех полей из базиса (6.9) с полем e_7 , которое должно удовлетворять всем оставшимся соотношениям из таблицы 1. Голоморфные функции, являющиеся компонентами этого поля, определяются из пошагового рассмотрения этих соотношений. Например, коммутаторы поля e_7 с тройкой выпрямленных полей e_1, e_2, e_4 дают, в силу таблицы 1, следующую структуру этого поля:

$$e_7 = (a_7(z_1), 3z_2 + b_7(z_1), 5z_3 + c_7(z_1), 7z_4 + d_7(z_1)).$$

Конкретный вид функций a_7, b_7, c_7, d_7 и итоговая уточненная информация о компонентах $d_3(z_1), d_5(z_1), d_6(z_1)$ базиса (6.9) определяются из оставшихся коммутационных соотношений

$$[e_3, e_7] = 4e_3, \quad [e_5, e_7] = 2e_5, \quad [e_6, e_7] = e_6.$$

Достаточно утомительные выкладки перехода к итоговым формулам (6.5) для алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$ мы здесь не приводим. Отметим лишь, что их смысл заключается в выписывании и исследовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных нескольких неизвестных функций $a_k(z_1), b_k(z_1), c_k(z_1), d_k(z_1)$. $\square$

Замечание 6.1. В отличие от доказанной теоремы, для других алгебр из списка [24] даже доведение базисов их нильрадикалов до состояния, аналогичного (6.9), оказывается возможным далеко не всегда. Противоречия часто возникают и на этапе перехода от реализованного 6-мерного нильрадикала ко всей 7-мерной алгебре.

7. РЕАЛИЗАЦИИ И ЗАПРЕТЫ ДЛЯ АЛГЕБР С НИЛЬРАДИКАЛОМ [6, 16]

Схема изучения голоморфных реализаций, описанная выше на примере алгебры [7, [6, 12], 1, 1], применяется и для семейства алгебр [7, [6, 16], 1, k] ($k = 1, 2, 3, 4$). Так, в случае 1 предложения 5.1 голоморфные реализации 6-мерной алгебры [6, 16] описываются следующим утверждением.

Предложение 7.1. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеет структуру абстрактной алгебры Ли [7, [6, 16], 1, k], $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Если эта алгебра имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q , а поля e_1, e_2, e_3 выпрямлены, то заменой координат в пространстве $\mathbb{C}^4$ базис 6-мерного нильпотентного идеала этой алгебры можно привести к виду ($C_k, D_k \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_3 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_4 &= \left(0, -z_1, -\left(\frac{1}{2}z_1^2 + C_4\right), -z_2 + D_4\right), \\ e_5 &= \left(0, \frac{1}{2}z_1^2 + C_4, \frac{1}{3}z_1^3 + C_5, z_3 - D_4z_1 + D_5\right), \\ e_6 &= (1, 0, z_2, 0). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Доказательство этого факта является чисто техническим, его детали мы здесь не приводим.

Дальнейшие попытки «присоединить» поле e_7 к такому набору приводят при $k = 2$ и при $k = 4$ к противоречию. В самом деле, при таких k поле $e_7 = (a_7(z), b_7(z), c_7(z), d_7(z))$ должно подчиняться шести коммутационным соотношениям, зафиксированным в последнем столбце таблицы 2 и связанным с коммутаторами $[e_k, e_7]$ ($k = 1, \dots, 6$). При этом из соотношений

$$[e_1, e_7] = 2e_1, [e_2, e_7] = e_2, [e_3, e_7] = e_3, [e_6, e_7] = 0$$

выводится упрощенный вид поля

$$e_7 = (A_7, z_2 + B_7, z_3 + B_7z_1 + C_7, 2z_4 + D_7)$$

с некоторыми комплексными константами A_7, B_7, C_7, D_7 .

Тогда из $[e_4, e_7] = e_4$ следует, что компонента A_7 поля e_7 — нулевая константа. Шесть нулевых компонент (в первом столбце) у семи базисных полей означают независимость определяющей функции орбиты от переменных z_2, z_3, z_4 . Форма Леви такой поверхности оказывается тождественно нулевой, что является крайней («сильной») степенью ее вырожденности.

Предложение 7.2. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеет структуру абстрактной алгебры [7, [6, 16], 1, k] при $k = 1$ или $k = 3$. Если эта алгебра имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q , а поля e_1, e_2, e_3 выпрямлены, то с точностью до голоморфных преобразований базис такой алгебры описывается следующим образом:

1. в формулах (7.1) константы C_4, D_4, C_5, D_5 необходимо положить равными нулю;
2. при $k = 1$ поле e_7 имеет вид

$$e_7 = (z_1, (m+2)z_2, (m+3)z_3, (2m+3)z_4 + D_7),$$

а при $k = 3$

$$e_7 = (z_1, z_2, 2z_3, z_4 + \varepsilon z_1).$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что и во втором случае предложения 5.1 алгебры [7, [6, 16], 1, 2] и [7, [6, 16], 1, 4] не допускают голоморфных реализаций с невырожденными орбитами в пространстве $\mathbb{C}^4$. Содержательный интерес здесь представляет следующее утверждение об алгебрах Ли с нильрадикалом [6, 16].

Предложение 7.3. В рамках случая 2 предложения 5.1 базисы алгебр Ли $[7, [6, 16], 1, 1]$ и $[7, [6, 16], 1, 3]$, допускающих реализации с Леви-невыврожденными орбитами в $\mathbb{C}^4$, описываются с точностью до голоморфных замен координат следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\
 e_2 &= (0, 0, 1, 0), \\
 e_3 &= (0, 0, -z_1, z_2), \\
 e_4 &= (0, 1, 0, 0), \\
 [7, [6, 16], 1, 3] : \quad e_5 &= \left(0, -z_1, \frac{1}{3}z_1^3, z_3 - \frac{1}{2}D_3z_1^2\right), \\
 e_6 &= \left(1, 0, -z_1(z_2 - D_3), \frac{1}{2}(z_2^2 - D_3^2)\right), \\
 e_7 &= (z_1, 0, 2z_3, z_4 + \varepsilon z_1);
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

в случае $[7, [6, 16], 1, 1]$ шесть первых полей описываются теми же формулами (7.2), а

$$e_7 = \left(z_1, (m+1)z_2, (m+3)z_3 - \frac{1}{2}(m+1)D_3z_1^2, (2m+3)z_4 + (m+1)D_3^2z_1 + D_7\right).$$

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

Интегрирование полученных алгебр с базисами, полиномиально зависящими от переменных, представляет собой трудоемкую процедуру. Поэтому для реализованного в пространстве $\mathbb{C}^4$ семейства $[7, [6, 16], 1, k]$, $(k = 1, 3)$ ниже приводятся лишь результаты такого интегрирования. В то же время пример описания орбит реализации алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$ при значениях параметров $q = r = 0$ мы рассмотрим более детально.

Теорема 8.1. С точностью до голоморфных замен координат все невырожденные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$ алгебр $[7, [6, 16], 1, k]$ $(k = 1, 3)$ описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 y_4 &= Cy_1^\alpha + T_j, \quad \alpha \neq 0, \\
 y_4 &= C \ln y_1 + T_j, \\
 y_4 &= \varepsilon y_1 \ln y_1 + T_j, \quad \varepsilon = \pm 1,
 \end{aligned}$$

где $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -\frac{3}{2y_1^3}(x_1y_2 - y_3)^2 - \frac{3A}{y_1^2}(x_1y_2 - y_3) - \frac{1}{2y_1}(3A^2 - (B - y_2)^2), \\
 T_2 &= Kx_1y_2 - \frac{L}{2}y_1y_2 + \frac{1}{6}y_1y_2^2 + \frac{y_2}{2y_1}(y_3 + Lx_1^2 - x_1^2y_2),
 \end{aligned}$$

A, B, C, K, L — некоторые вещественные константы.

Замечание 8.1. Приведенная формулировка подразумевает положительность координаты $y_1 = \operatorname{Im} z_1$ для всех точек, лежащих на предъявленных в теореме орбитах. При обсуждении локальных свойств этих гиперповерхностей вблизи выделенной точки Q приходится считать эту точку отличной от начала координат пространства $\mathbb{C}^4$.

Уточним еще, что первое уравнение из формулировки теоремы соответствует при различных значениях показателя α алгебрам из семейства $[7, [6, 16], 1, 1]$ при $m \neq -3/2$, соответственно, в первом ($j = 1$) и втором ($j = 2$) случаях предложения 5.1. Значение $m = -3/2$ обращает в нуль коэффициент при переменной z_4 поля e_7 из предложений 7.2 и 7.3. Этому значению соответствует второе уравнение из формулировки теоремы (также в двух случаях $j = 1, 2$). Третье уравнение описывает (в двух случаях) орбиты алгебр $[7, [6, 16], 1, 3]$.

Пример. Обсудим орбиты алгебры (6.5) с параметрами $q = r = 0$. Пусть $\Phi(z, \bar{z}) = 0$ — искомое уравнение какой-либо из таких орбит.

Уравнения (2.1), отвечающие полям e_1, e_2, e_4 из набора (6.5), означают, что искомая функция Φ не зависит от переменных x_2, x_3, x_4 . А система оставшихся четырех уравнений (после перехода

к вещественным переменным $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$) имеет вид

$$\begin{aligned} -y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= 0, & -y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + (y_2 + x_1^2 y_1 - \frac{1}{3} y_1^3) \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - (x_1 y_2 + x_2 y_1) \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + x_2 y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= 0, & x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + 3y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + 5y_3 \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} + 7y_4 \frac{\partial \Phi}{\partial y_4} &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что третье уравнение системы содержит фрагмент, представляющий собой левую часть первого уравнения системы, умноженную на x_2 . За счет такого наблюдения можно заменить это уравнение на более простое:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_1 y_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = 0.$$

Далее можно воспользоваться пошаговым решением отдельных уравнений этой системы. Так, решение первого ее уравнения имеет вид

$$\Phi(x_1, y_1, y_2, y_3, y_4) = F(x_1, y_1, y_2, y_1 y_4 + y_2 y_3)$$

с произвольной аналитической функцией F .

Обозначая ее аргументы в последнем равенстве через t_1, t_2, t_3, t_4 соответственно, можно переписать три оставшихся уравнения системы в виде

$$-t_2 \frac{\partial F}{\partial t_3} + \left(t_3^2 + t_1^2 t_2 t_3 - \frac{1}{3} t_2^3 t_3 \right) \frac{\partial F}{\partial t_4} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_1 t_3^2 \frac{\partial F}{\partial t_4} = 0, \quad t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} + 3t_3 \frac{\partial F}{\partial t_3} + 8t_4 \frac{\partial F}{\partial t_4} = 0.$$

Решая далее первое уравнение полученной системы, естественно перейти к очередному сокращенному набору переменных

$$s_1 = t_1, \quad s_2 = t_2, \quad s_3 = 2t_3^3 + 3t_1^2 t_2 t_3^2 - t_2^3 t_3^2 + 6t_2 t_4$$

и к функции $F(t_1, t_2, t_3, t_4) = G(s_1, s_2, s_3)$.

Одно из двух остающихся уравнений превращается теперь в $\frac{\partial G}{\partial s_1} = 0$, а последнее уравнение исходной системы принимает вид

$$s_2 \frac{\partial G}{\partial s_2} + 9s_3 \frac{\partial G}{\partial s_3} = 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем уравнения орбит в виде

$$(6y_1^2 y_4 + 6y_1 y_2 y_3 + 2y_2^3) + (3x_1^2 y_1 y_2^2 - y_1^3 y_2^2) = C y_1^9, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (8.1)$$

Вычисляя гессиан этой вещественной гиперповерхности 4-мерного комплексного пространства, несложно убедиться, что в точках общего положения это многообразие является невырожденным по Леви.

Замечание 8.2. Мы рассмотрели здесь самый простой случай базиса (6.5), элементы которого содержат переменную z_1 не более чем в третьей степени. В общих ситуациях базисные поля содержат слагаемые z_1^4, z_1^5, z_1^6 , что существенно усложняет процедуру «ручного» интегрирования соответствующих алгебр. В то же время использование пакета Maple и команды `pdsolve` (не гарантирующей, вообще говоря, получения всех решений системы уравнений в частных производных) также приводит к полиномиальным орбитам алгебр (6.5). Отметим, что девятая степень полиномов сохраняется и при компьютерном интегрировании этих алгебр.

Замечание 8.3. При пошаговом решении систем, подобных (7.2), важна очередность рассмотрения их отдельных уравнений. Произвольный порядок интегрирования таких уравнений не гарантирует получение окончательного ответа.

Замечание 8.4. Получение координатного представления однородного многообразия (по ассоциированной с ним алгебре Ли) может оказаться весьма затруднительным. В ряде работ о классификации таких многообразий (см., например, [15]) авторы ограничиваются только информацией о соответствующих этим многообразиям алгебрах.

9. О «ПРОСТОЙ» ОДНОРОДНОСТИ ОРБИТ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^4$

Важный класс однородных вещественных гиперповерхностей в пространствах $\mathbb{C}^n$ составляют «просто однородные» многообразия, размерность которых совпадает с размерностью их (полных) алгебр симметрий.

В $\mathbb{C}^3$ имеется только одна (см. [8]) нетрубчатая просто однородная (Леви-невыврожденная) гиперповерхность

$$(y_3 - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1.$$

Она является орбитой (единственной) неразложимой неразрешимой 5-мерной алгебры Ли. Сама эта алгебра содержит лишь 2-мерную абелеву подалгебру, в отличие от других 5-мерных алгебр Ли, у которых абелевы подалгебры имеют размерности не меньше 3.

В связи с наличием в пространстве $\mathbb{C}^3$ «просто однородной» гиперповерхности, являющейся орбитой алгебры Ли с экстремально малой размерностью максимальных абелевых подалгебр, естественно предположить существование аналогичных многообразий в пространствах $\mathbb{C}^n$ больших размерностей. На примере 7-мерных алгебр Ли из списка [24] это предположение подтверждается.

Теорема 9.1. *При $j = 1$, $\varepsilon = 1$, $A = B = 0$ орбита алгебры [7,[6,16]1,3] имеет дискретный голоморфный стабилизатор и не сводится голоморфными преобразованиями к трубчатым гиперповерхностям.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения опирается на технику локальных нормальных форм Мозера (см. [18]) и вычисление (например, в пакете символьной математики Maple) младших многочленов нормального уравнения

$$y_4 = \frac{1}{2y_1} y_2^2 - \frac{3}{2y_1^3} (y_3 - x_1 y_2)^2 + y_1 \ln y_1 \quad (9.1)$$

обсуждаемой поверхности M (в какой-либо точке этой поверхности).

Для дальнейших обсуждений удобно использовать замену переменных $z^* = -iz$, переводящую $y_k = \operatorname{Im} z_k$ в $x_k^* = \operatorname{Re} z_k^*$ ($k = 1, 2, 3$). Этой заменой уменьшается количество мнимых единиц в выкладках и, тем самым, несколько упрощаются вычисления. Для удобства таких вычислений сделаем еще одно растяжение $z_3 = z_3^*/\sqrt{3}$ и обозначим символом B число $\sqrt{3}$.

После этих договоренностей разложение определяющей функции поверхности M в ряд Тейлора (вблизи начальной точки $Q(i, 0, 0, 0) \in M \subset \mathbb{C}^4$), получаемое с помощью символьных вычислений, примет вид

$$y_4 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x_1, y_1, x_2, x_3), \quad (9.2)$$

где каждый F_k — это однородный многочлен степени k от своих переменных. В частности,

$$F_1 = 2x_1, \quad F_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad F_3 = -x_1 x_2^2 + 3x_1 x_3^2 - 2B y_1 x_2 x_3 - \frac{1}{3} x_1^3.$$

Последующие стандартные шаги приведения обсуждаемого уравнения к нормальной форме описаны как в работе [18], так и во многих статьях, использующих эту форму (см., например, [2, 6, 7]). Отметим легко получающийся из приведенной формулы для F_2 канонический вид

$$\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 \quad (9.3)$$

эрмитовой компоненты правой части уравнения (9.2), т. е. формы Леви поверхности M . Уточним еще, что здесь, в отличие от обсуждений начала статьи, через z обозначается вектор из трех комплексных координат (z_1, z_2, z_3) и, соответственно, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$.

Для наших целей достаточно рассмотрения многочленов $N_{220}(z, \bar{z})$ и $N_{320}(z, \bar{z})$ из получающегося нормального уравнения, имеющих суммарные 4-ю и 5-ю степени относительно переменных z и $\bar{z}$. Эти многочлены являются, соответственно, элементами 27-мерного вещественного и 60-мерного комплексного пространств, что объясняет необходимость привлечения компьютерных вычислений при работе с ними. Для поверхности (9.1) получаемый многочлен N_{220} содержит в качестве слагаемых 20 мономов, т. е. имеет достаточно общий вид. В итоге группа всех линейных

преобразований трех переменных z_1, z_2, z_3 , сохраняющих пару $(\langle z, z \rangle, N_{220})$, сводится к однопараметрической группе поворотов $z_k \rightarrow e^{it} z_k$, $t \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3$ (очевидно сохраняющих любой многочлен N_{220} , имеющий вторую степень как по z , так и по $\bar{z}$).

С другой стороны, известны (см., например, [6, 18]) голоморфные преобразования с тождественной линейной частью, сохраняющие N_{220} и нормальный вид уравнения обсуждаемой поверхности. При любом таком преобразовании

$$N_{320}^* = N_{320} + 2i \left(\langle z, a \rangle N_{220} - \langle z, z \rangle \sum_{k=1}^3 \bar{a}_k \frac{\partial N_{220}}{\partial \bar{z}_k} \right), \quad a \in \mathbb{C}^3,$$

а потому возмущения многочлена N_{320} в рамках нормальных уравнений ограничиваются видом многочлена N_{220} . В частности, многочлен N_{320} для гиперповерхности (9.1) содержит моном $z_3^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2$ с ненулевым коэффициентом. «Неполный» вид многочлена $N_{220}(z, \bar{z})$, содержащего лишь 20 мономов, не позволяет аннулировать $z_3^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2$ при возможных различных нормализациях исходного уравнения. По теореме Ежова (см. [4]) голоморфный стабилизатор обсуждаемой поверхности с сигнатурой $(+, +, -)$ формы Леви (9.3) линеаризуется в некоторых нормальных по Мозеру координатах. Сохранение еще и монома $z_3^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2$ линейным преобразованием приводит к дискретности стабилизатора.

Невозможность сведения поверхности (9.1) голоморфными преобразованиями к трубкам следует теперь из того, что в алгебре симметрий любой трубчатой гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$ имеется 4-мерная абелева подалгебра (сдвигов вдоль мнимых осей). Алгебра же $[7, [6, 12], 1, 1]$, являющаяся полной алгеброй симметрий поверхности (9.1), имеет, как отмечалось выше, лишь 3-мерные абелевы подалгебры. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанов А. В. Орбиты разложимых 7-мерных алгебр Ли с $\mathfrak{sl}(2)$ -подалгеброй // Уфимск. мат. ж. — 2022. — 14, № 1. — С. 3–22.
2. Белошапка В. К. О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности // Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1979. — 43, № 2. — С. 243–266.
3. Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Д. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
4. Ежов В. В. Линеаризация группы стабильности одного класса гиперповерхностей // Усп. мат. наук. — 1986. — 41, № 3. — С. 181–182.
5. Крутских В. В. О голоморфных реализациях 7-мерных алгебр Ли // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2023. — № 4. — С. 115–128.
6. Лобода А. В. Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ двумерными группами изотропии // Мат. сб. — 2001. — 192, № 12. — С. 3–24.
7. Лобода А. В. Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2009. — № 2. — С. 71–91.
8. Лобода А. В. Голоморфно однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2020. — 81, № 2. — С. 205–280.
9. Лобода А. В. О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерных комплексных пространств // Тр. МИАН. — 2020. — 311. — С. 194–212.
10. Лобода А. В. О 7-мерных алгебрах Ли, допускающих Леви-невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2023. — 84, № 2. — С. 205–230.
11. Лобода А. В., Акопян Р. С., Крутских В. В. О 7-мерных алгебрах голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющих 5-мерный абелев идеал // Дальневост. мат. ж. — 2023. — 23, № 1. — С. 55–80.
12. Лобода А. В., Атанов А. В. Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$ // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. — 2019. — 173. — С. 86–115.
13. Лобода А. В., Каверина В. К. О вырожденности орбит нильпотентных алгебр Ли // Уфимск. мат. ж. — 2022. — 14, № 1. — С. 57–83.
14. Atanov A. V., Loboda A. V. On degenerate orbits of real Lie algebras in multidimensional complex spaces // Russ. J. Math. Phys. — 2023. — 30. — С. 432–442.
15. Azad H., Huckleberry A., Richthofer W. Homogeneous CR-manifolds // J. Reine Angew. Math. — 1985. — 358. — С. 125–154.
16. Beloshapka V. K., Kossovskiy I. G. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic // J. Geom. Anal. — 2010. — 20, № 3. — С. 538–564.

17. *Cartan E.* Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes// *Ann. Mat. Pura Appl.* — 1932. — 11, № 4. — С. 17–90.
18. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds// *Acta Math.* — 1974. — 133. — С. 219–271.
19. *Doubrov B., Merker J., The D.* Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ // *Int. Math. Res. Not. IMRN.* — 2022. — 2022, № 19. — С. 15421–15473.
20. *Fels G., Kaup W.* Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5// *Acta Math.* — 2008. — 201. — С. 1–82.
21. *Gong M. P.* Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)// *PhD Thesis.* — Univ. Waterloo, 1998.
22. *Hindeleh F., Thompson G.* Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical// *Algebras Groups Geom.* — 2008. — 25, № 3. — С. 243–265.
23. *Kruglikov B., Santi A.* On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7 (I): the transitive case// *ArXiv.* — 2023. — 2302.04513.
24. *Parry A. R.* A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals// *Master's Thesis.* — Logan, 2007.
25. *Sykes D.* Homogeneous 2-nondegenerate CR manifolds of hypersurface type in low dimensions// *ArXiv.* — 2022. — 2202.10123.
26. *Vu A. L., Nguyen T. A., Nguyen T. T. C., Nguyen T. T. M., Vo T. N.* Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals// *Commun. Algebra.* — 2023. — 51, № 5. — С. 1866–1885.

А. В. Атанов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: atanov.cs@gmail.com

А. В. Лобода

Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: lobvgasu@yandex.ru

UDC 515.172.2, 512.816, 517.55

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532

EDN: VQUHHA

On nondegenerate orbits of 7-dimensional Lie algebras containing a 3-dimensional Abelian ideal

A. V. Atanov¹ and A. V. Loboda^{2,3}

¹ *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

² *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*

³ *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*



Abstract. This paper is related to the problem of describing homogeneous real hypersurfaces of multidimensional complex spaces as orbits of the action of Lie groups and algebras in these spaces. We study realizations in the form of algebras of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^4$ of 7-dimensional Lie algebras containing only 3-dimensional Abelian ideals and subalgebras. Among 594 types of 7-dimensional solvable indecomposable Lie algebras containing a 6-dimensional nilradical, there are five types of such algebras. The article describes all their realizations that admit nondegenerate in the sense of Levi 7-dimensional orbits. The presence of “simply homogeneous” orbits among the constructed hypersurfaces is shown.

Keywords: Lie algebra, Abelian subalgebra, holomorphic vector field, homogeneous manifold, real hypersurface, degeneration in the sense of Levi.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (grant 23-21-00109).

For citation: A. V. Atanov, A. V. Loboda, “On nondegenerate orbits of 7-dimensional Lie algebras containing a 3-dimensional Abelian ideal,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 517–532. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532>

REFERENCES

1. A. V. Atanov, “Orbity razlozhimyykh 7-mernyykh algebr Li s $\mathfrak{sl}(2)$ -podalgebroy” [Orbits of decomposable 7-dimensional Lie algebras with $\mathfrak{sl}(2)$ -subalgebra], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 1, 3–22 (in Russian).
2. V. K. Beloshapka, “O razmernosti gruppy avtomorfizmov analiticheskoy giperpoverkhnosti” [On the dimension of the automorphism group of an analytic hypersurface], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1979, **43**, No. 2, 243–266 (in Russian).
3. R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometriya mnogoobraziy* [Geometry of Manifolds], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
4. V. V. Ezhov, “Linearizatsiya gruppy stabil’nosti odnogo klassa giperpoverkhnostey” [Linearization of the stability group of one class of hypersurfaces], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1986, **41**, No. 3, 181–182 (in Russian).
5. V. V. Krutskikh, “O golomorfnykh realizatsiyakh 7-mernyykh algebr Li” [On holomorphic realizations of 7-dimensional Lie algebras], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2023, No. 4, 115–128 (in Russian).
6. A. V. Loboda, “Odnorodnye strogo psevdovypuklye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ dvumernymi gruppami izotropii” [Homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with two-dimensional isotropy groups], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 12, 3–24 (in Russian).
7. A. V. Loboda, “Affinno-odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti 3-mernogo kompleksnogo prostranstva” [Affinely homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2009, No. 2, 71–91 (in Russian).
8. A. V. Loboda, “Golomorfno odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ ” [Holomorphically homogeneous real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2020, **81**, No. 2, 205–280 (in Russian).
9. A. V. Loboda, “O zadache opisaniya golomorfno odnorodnykh veshchestvennykh giperpoverkhnostey chetyrekhmernyykh kompleksnykh prostranstv” [On the problem of describing holomorphically homogeneous real hypersurfaces of four-dimensional complex spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **311**, 194–212 (in Russian).
10. A. V. Loboda, “O 7-mernyykh algebrakh Li, dopuskayushchikh Levi-neyvirozhdennyye orbity v $\mathbb{C}^4$ ” [On 7-dimensional Lie algebras admitting Levi-nondegenerate orbits in $\mathbb{C}^4$], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2023, **84**, No. 2, 205–230 (in Russian).
11. A. V. Loboda, R. S. Akopyan, and V. V. Krutskikh, “O 7-mernyykh algebrakh golomorfnykh vektornykh poley v $\mathbb{C}^4$, imeyushchikh 5-mernyy abelev ideal” [On 7-dimensional algebras of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^4$ having a 5-dimensional Abelian ideal], *Dal’nevost. Mat. Zh.* [Far East. Math. J.], 2023, **23**, No. 1, 55–80 (in Russian).
12. A. V. Loboda and A. V. Atanov, “Razlozhimye pyatimernyye algebry Li v zadache o golomorfnoy odnorodnosti v $\mathbb{C}^3$ ” [Decomposable five-dimensional Lie algebras in the problem of holomorphic homogeneity

- in $\mathbb{C}^3$], *Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Mat. i Ee Pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **173**, 86–115 (in Russian).
13. A. V. Loboda and V. K. Kaverina, “O vyrozhdennosti orbit nil’potentnykh algebr Li” [On the degeneracy of orbits of nilpotent Lie algebras], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 1, 57–83 (in Russian).
 14. A. V. Atanov and A. V. Loboda, “On degenerate orbits of real Lie algebras in multidimensional complex spaces,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2023, **30**, 432–442.
 15. H. Azad, A. Huckleberry, and W. Richthofer, “Homogeneous CR-manifolds,” *J. Reine Angew. Math.*, 1985, **358**, 125–154.
 16. V. K. Beloshapka and I. G. Kossovskiy, “Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic,” *J. Geom. Anal.*, 2010, **20**, No. 3, 538–564.
 17. E. Cartan, “Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1932, **11**, No. 4, 17–90.
 18. S. S. Chern and J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifolds,” *Acta Math.*, 1974, **133**, 219–271.
 19. B. Doubrov, J. Merker, and D. The, “Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2022, **2022**, No. 19, 15421–15473.
 20. G. Fels and W. Kaup, “Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5,” *Acta Math.*, 2008, **201**, 1–82.
 21. M. P. Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)*, PhD Thesis, Univ. Waterloo, 1998.
 22. F. Hindleleh and G. Thompson, “Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical,” *Algebras Groups Geom.*, 2008, **25**, No. 3, 243–265.
 23. B. Kruglikov and A. Santi, “On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7 (I): the transitive case,” *ArXiv*, 2023, 2302.04513.
 24. A. R. Parry, *A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals*, Master’s Thesis, Logan, 2007.
 25. D. Sykes, “Homogeneous 2-nondegenerate CR manifolds of hypersurface type in low dimensions,” *ArXiv*, 2022, 2202.10123.
 26. A. L. Vu, T. A. Nguyen, T. T. C. Nguyen, T. T. M. Nguyen, and T. N. Vo, “Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals,” *Commun. Algebra*, 2023, **51**, No. 5, 1866–1885.

A. V. Atanov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: atanov.cs@gmail.com

A. V. Loboda

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: lobvgasu@yandex.ru

УДК 517.98

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541

EDN: VRITTM

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНО-СТЕПЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Д. БАБОШИН

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассматривается сумма линейных дробно-степенных операторов, действующих в банаховом пространстве и удовлетворяющих слабой позитивности. Устанавливается корректная разрешимость задачи для соответствующего дробно-операторного уравнения и приводится представление решения через обратный оператор с точной оценкой его нормы. Результаты применяются к задачам без начальных условий для уравнения с сингулярными коэффициентами. Приводятся примеры таких уравнений.

Ключевые слова: дробно-степенной оператор, дробно-операторное уравнение, корректная разрешимость.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: С. Д. Бабошин. Корректная разрешимость задач для дробно-степенных операторных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 533–541. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541>

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании корректной разрешимости по Адамару задач для эволюционных уравнений актуальным является вопрос обратимости суммы интегро-дифференциальных операторов.

В этом направлении важный результат содержит работа Да Прато и Грисварда [7], в которой указываются условия обратимости суммы производящих операторов сильно непрерывных полугрупп линейных преобразований в банаховом пространстве.

Целью настоящей работы является применение однопараметрических полугрупп с дробными степенями производящих операторов, в смысле работ [1, 4, 8, 9], к обращению их сумм методом Да Прато—Грисварда.

На этом пути удаётся получить представление обратного к исследуемой сумме оператора и найти его точную оценку.

Приводятся примеры дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами, для которых соответствующие уравнения корректно разрешимы для задач без начальных условий.

2. КОРРЕКТНОСТЬ ПО АДАМАРУ

Пусть F и U — метрические пространства с соответствующими метриками ρ_F и ρ_U . Согласно Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения

$$Au = f, \tag{2.1}$$

где $f \in F$ задано, называется *корректно поставленной* на пространствах (F, U) , если выполняются условия:

1. для всякого $f \in F$ существует $u \in U$ — решение уравнения (2.1);
2. решение определяется однозначно;
3. задача устойчива на пространствах (F, U) , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$ следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Важно отметить, что устойчивость задачи (2.1) зависит от выбранных топологий в U и F , и, вообще говоря, подходящим выбором топологий можно формально добиться непрерывности оператора A^{-1} , существование которого обеспечивают условия 1 и 2. Так, в случае линейно взаимно-однозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой

$$\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U,$$

и тогда

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\substack{f \in F \\ f \neq 0}} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|_F} = 1.$$

Однако обычно топологии определяются постановкой задачи и не могут выбираться произвольно. В связи с этим возникает следующая проблема, связанная с выбором топологий в пространствах данных задачи F и решений U .

1. С одной стороны, желательно, чтобы эти топологии не зависели от оператора A . Например, в случае, когда $A = A(\lambda)$ — оператор, зависящий от некоторого параметра λ , важно, чтобы область определения обратного оператора $A^{-1}(\lambda)$ (например, резольвенты $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$) была не зависящей от λ .
2. С другой стороны, хотелось бы иметь наиболее широкие пространства данных задачи F , при которых решение задачи остаётся в некотором «достаточно хорошем» классе U .

Настоящая заметка посвящена исследованию корректной разрешимости задач вида (2.1), где оператор A представляется в виде дробно-операторной функции

$$\mathbb{A}_n = \sum_{m=1}^n a_m A^{\alpha_m}, \quad \alpha_m \in (0, 1) \quad a_m > 0.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1 (о корректности). Пусть A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$, и область определения $D(A)$ плотна в E . Кроме того, оператор $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t), t \geq 0$ линейных ограниченных операторов, действующих в E , с оценкой

$$\|U(t)\varphi\| \leq M e^{-\omega t}, \quad \omega > 0.$$

Тогда оператор $\mathbb{A}_n$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathbb{A}_n^{-1}$ и для $f \in D(A)$ выполняется оценка

$$\|\mathbb{A}_n^{-1}f\| \leq \frac{M\|f\|}{\sum_{m=1}^n a_m^{\omega \alpha_m}}.$$

3. НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

3.1. C_0 -полугруппы B -позитивных операторов. При доказательстве корректной разрешимости уравнения (2.1) ключевую роль играет понятие сильно непрерывной однопараметрической полугруппы линейных и ограниченных операторов $U(t), t \geq 0$, действующих в банаховом пространстве E .

Определение 3.1. Семейство ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве E , называется *сильно непрерывной* однопараметрической полугруппой операторов, если $U(t)$ сильно непрерывно зависит от $t \geq 0$ и удовлетворяет условиям:

1. $U(0)\varphi = \varphi, \varphi \in E$,

2. $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$, $\varphi \in E$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t)\varphi - \varphi\|_E = 0$, $\varphi \in E$.

Для всякой полугруппы $U(t)$, удовлетворяющей условиям 1–3, существуют числа M и ω такие, что выполняется оценка

$$\|U(t)\varphi\|_E \leq M e^{\omega t}. \quad (3.1)$$

Классы таких полугрупп называются *сильно непрерывными*, или C_0 -полугруппами. Если $U(t)$ — C_0 -полугруппа, то существует оператор

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \| [U(h) - I]\varphi \| = A\varphi, \quad \varphi \in D(A),$$

который называется *производящим оператором* (генератором) полугруппы $U(t)$.

Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E . Полугруппы $U(t)$ с производящим оператором A будем обозначать $U(t, A)$.

Определение 3.2. Оператор A будем называть *позитивным по Балакришнану* (B -позитивным), если оператор $-A$ является генератором C_0 -полугруппы $U(t, -A)$, удовлетворяющей оценке (3.1) при $\omega < 0$.

3.2. Обращение суммы B -позитивных операторов. Нам понадобится результат Ж. Да Прато и Д. Грисварда об обращении операторной суммы.

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а A и B — два замкнутых в X линейных оператора с областями определения D_A и D_B , причём D_B плотно в X . Рассмотрим оператор $L\varphi = A\varphi + B\varphi$, $\varphi \in D_A \cap D_B = D_L$.

Теорема 3.1 (Да Прато—Грисвард [7]). Пусть

$$(A - \lambda)^{-1}(B - \lambda)^{-1}\varphi = (B - \lambda)^{-1}(A - \lambda)^{-1}\varphi, \quad \lambda > 0, \quad \varphi \in D_L,$$

и существуют такие $M_A, M_B > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\|(A - \lambda)^{-k}\| \leq \frac{M_A}{\lambda^k}, \quad \|(B - \lambda)^{-k}\| \leq \frac{M_B}{\lambda^k}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда $L = A + B$ допускает замыкание $\bar{L}$, при этом резольвентное множество оператора $\rho_{\bar{L}} \subset (0, \infty)$ и

$$\|(\bar{L} - \lambda)^{-k}\| \leq \frac{M_A M_B}{\lambda^k}, \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

$$(\bar{L} - \lambda)^{-1}(D_A + D_B) \subset D_L, \quad \lambda > 0. \quad (3.3)$$

Примером применения этой теоремы является доказательство корректной разрешимости задач Коши для уравнения

$$-\frac{du}{dt} + Bu(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad t \in (0, T),$$

где $f(t)$ — векторная функция со значениями в E , принадлежащая пространству $X = L^p[(0, T), E]$ с нормой

$$\|f\|_p = \left[\int_0^T \|f(t)\|_E^p dt \right]^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Из теоремы получаем следствия.

Следствие 3.1. Оператор $L = A + B$ является генератором C_0 -полугруппы операторов $U(t, A + B)$ в силу оценки (3.2) и соотношения (3.3).

Следствие 3.2. Если A и B — генераторы C_0 -полугрупп $U(t, A)$ и $U(t, B)$ с оценками

$$\|U(t, A)\| \leq M_1 e^{-\omega_1 t}, \quad \|U(t, B)\| \leq M_2 e^{-\omega_2 t}, \quad \omega_1, \omega_2 > 0,$$

при этом для всех $s, t \geq 0$ выполнено

$$U(t, A)U(s, B)\varphi = U(s, B)U(t, A)\varphi, \quad (3.4)$$

то оператор $L = A + B$ имеет обратный L^{-1} и справедливо равенство

$$(A + B)^{-1}\varphi = - \int_0^{\infty} U(s, A)U(s, B)\varphi ds. \quad (3.5)$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что в силу представления резольвенты (см. [1])

$$(\lambda - A)^{-1}\varphi = R(\lambda, A)\varphi = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}U(t, A)\varphi dt,$$

а из (3.4) следует коммутруемость резольвент:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)R(\lambda, B)\varphi &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}U(t, A) \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}U(s, B)\varphi ds dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+s)}U(t, A)U(s, B)\varphi ds dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+s)}U(s, B)U(t, A)\varphi ds dt = R(\lambda, B)R(\lambda, A)\varphi \end{aligned}$$

и соотношение

$$\begin{aligned} -(A + B) \int_0^{\infty} U(s, A)U(s, B)\varphi ds &= - \int_0^{\infty} AU(s, A)U(s, B)\varphi ds - \int_0^{\infty} BU(s, B)U(s, A)\varphi ds = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{dU(s, A)}{ds}U(s, B)\varphi ds - \int_0^{\infty} \frac{dU(s, B)}{ds}U(s, A)\varphi ds = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}[U(s, A)U(s, B)]\varphi ds = -U(s, A)U(s, B)\varphi|_0^{\infty} = \varphi. \end{aligned}$$

□

Этот результат позволяет обобщить равенство (3.5) на случай суммы нескольких операторов:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{-1} \varphi = - \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n U(s, A_i)\varphi ds, \quad (3.6)$$

где $U(s, A_i)$ — сильно непрерывные полугруппы с производящими операторами A_i такими, что для любых $i, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено $U(s_i, A_i)U(s_m, A_m)\varphi = U(s_m, A_m)U(s_i, A_i)\varphi$.

4. ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ B -ПОЗИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Если оператор A является B -позитивным и для полугруппы $U(t, -A)$ выполняется оценка

$$\|U(t, -A)\varphi\| \leq M e^{-\omega t} \|\varphi\|, \quad \omega \geq 0,$$

то для оператора A определена дробная степень A^α , $\alpha \in (0, 1)$, которая по Балакришнану [1] для $f \in D(A)$ имеет вид

$$A^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}} [U(t, -A) - I] f dt, \quad (4.1)$$

и отрицательная степень

$$A^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{U(t, -A) f dt}{t^{1-\alpha}} dt. \quad (4.2)$$

При этом оператор A^α является B -позитивным и полугруппа $U(t, -A^\alpha)$ имеет вид

$$U(t, -A^\alpha)f = \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi)U(\xi, -A)f d\xi,$$

где $h_{\alpha,t}(\xi)$ — функция Иосиды [1], являющаяся обратным преобразованием Лапласа функции $F(p) = e^{-p^\alpha t}$ со свойствами

$$h_{\alpha,t}(\xi) > 0, \quad \int_0^\infty e^{-a\xi} h_{\alpha,t}(\xi) d\xi = e^{-a^\alpha t}.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КОРРЕКТНОСТИ

Сначала проведём доказательство для двух слагаемых. То есть рассмотрим уравнение

$$A_2 u = (a_1 A^{\alpha_1} + a_2 A^{\alpha_2}) = f, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1), \quad (5.1)$$

где оператор A является B -позитивным с оценкой на полугруппу

$$\|U(t, -A)f\| \leq M e^{-\omega t} \|f\|, \quad \omega > 0.$$

Отсюда операторы $a_1 A^{\alpha_1}$ и $a_2 A^{\alpha_2}$ являются B -позитивными с полугруппами

$$U(t, -a_1 A^{\alpha_1})f = \int_0^\infty h_{\alpha_1, a_1 t}(\xi)U(\xi, -A)f d\xi,$$

$$U(t, -a_2 A^{\alpha_2})f = \int_0^\infty h_{\alpha_2, a_2 t}(\xi)U(\xi, -A)f d\xi$$

и оценками

$$\|U(t, -a_1 A^{\alpha_1})f\| \leq \int_0^\infty h_{\alpha_1, a_1 t}(\xi) \|U(\xi, -A)f\| d\xi \leq M \int_0^\infty h_{\alpha_1, a_1 t} e^{-\omega \xi} \|f\| d\xi = M e^{-a_1 t \omega^{\alpha_1}} \|f\|,$$

$$\|U(t, -a_2 A^{\alpha_2})f\| \leq M e^{-a_2 t \omega^{\alpha_2}} \|f\|. \quad (5.2)$$

Таким образом, для уравнения (5.1) можно применить теорему Да Прато—Грисварда и воспользоваться формулой (3.5).

В результате для $f \in D(A)$ получаем решение уравнения (5.1) в виде

$$u = - \int_0^\infty U(t, -a_1 A^{\alpha_1})U(t, -a_2 A^{\alpha_2})f dt. \quad (5.3)$$

Отсюда и из (5.2), (5.3) следует оценка корректности:

$$\|u\| \leq \int_0^\infty \|U(t, -a_1 A^{\alpha_1})\| \|U(t, -a_2 A^{\alpha_2})\| dt \|f\| \leq M^2 \int_0^\infty e^{-a_1 \omega^{\alpha_1} t} e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} dt \|f\| = - \frac{M^2 \|f\|}{a_1 \omega_1^{\alpha_1} + a_2 \omega_2^{\alpha_2}}. \quad (5.4)$$

Замечание 5.1. Оценка (5.4) точная, так как если f является собственным элементом оператора A , соответствующим соотношению $Af = \omega f$, $\omega > 0$, то для такого f равенство (5.3) имеет вид

$$u = - \int_0^\infty U(t, -a_1 A^{\alpha_1})U(t, -a_2 A^{\alpha_2})f dt = - \int_0^\infty U(t, -a_1 A^{\alpha_1})e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} f dt =$$

$$= - \int_0^\infty e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} \cdot e^{-a_1 \omega^{\alpha_1} t} dt f = \frac{f}{a_1 \lambda_1^{\alpha_1} + a_2 \lambda_2^{\alpha_2}}.$$

Отсюда имеем равенство

$$\|u\| = \frac{\|f\|}{a_1 \lambda_1^{\alpha_1} + a_2 \lambda_2^{\alpha_2}},$$

показывающее точность оценки (5.4).

Доказательство. Доказательство теоремы корректности для произвольного $n \in \mathbb{N}$ следует из соотношения (3.6), дающего оценку

$$\|u\| \leq \int_0^\infty \left\| \prod_{m=1}^n U(t, -A^{\alpha_m}) f \right\| dt \leq \int_0^\infty \left\| \prod_{m=1}^n U(t, -A^{\alpha_m}) \right\| dt \|f\| \leq \int_0^\infty e^{\sum_{m=1}^n a_m^{\omega} t} dt \|f\| = \frac{\|f\|}{\sum_{m=1}^n a_m^{\omega} t}. \quad (5.5)$$

Точность оценки (5.5) доказывается как и в случае оценки (5.4), с применением к f , являющемуся собственным элементом оператора A вида $Af = \omega f$. $\square$

6. ПРИМЕРЫ B -ПОЛУГРУПП

6.1. Канонические полугруппы. Для демонстрации приложений полученных результатов приведём примеры однопараметрических полугрупп, играющих важную роль в теории уравнений параболического типа, которые по классификации Э. Хилле и Р. Филлипса [6] называются *каноническими*, и определяемых сложением $U(\alpha \oplus \beta) = U(\alpha)U(\beta)$, где α, β — действительные или комплексные числа.

Так, если $F(x, y)$ — функция от $x, y \in \mathbb{R}$ такая, что $F(x, y) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(x, (F(x, z))) = F(F(x, y), z),$$

то формула $\alpha \oplus \beta = F(\alpha, \beta)$ может служить определением полугрупповой операции в $\mathbb{R}^+$.

При этом введение таких операций связывается с теоремами сложения для некоторых элементарных функций. К таким сложениям, например, относятся

$$1) \alpha + \beta, \quad 2) \alpha \cdot \beta, \quad 3) \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad 4) \alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.1)$$

соответствующие функциям

$$1) x, \quad 2) \ln x, \quad 3) \operatorname{th} x, \quad 4) \operatorname{sh} x.$$

Полугруппы, определяемые соотношениями (6.1), можно строить следующим образом: пусть функция $h(x)$ определена на интервале $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям

$$h'(x) > 0, \quad h(a) = -\infty, \quad h(b) = \infty.$$

Через $C_\omega(a, b)$ будем обозначать банахово пространство функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_\omega} = \sup_{x \in (a, b)} e^{\omega h(x)} |\varphi(x)|, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Введём операторы $\pm A_h$, заданные выражениями $\mathbb{D}_h = \pm \frac{d}{dh}$ с областями определения

$$D(\mathbb{D}_h) = \left\{ \varphi \in C_\omega(a, b), \quad \frac{d\varphi}{dh} \in C_\omega(a, b) \right\}. \quad (6.3)$$

Такие операторы являются генераторами полугрупп вида

$$U(t, \pm A_h) \varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) \pm t)], \quad t \geq 0. \quad (6.4)$$

Лемма 6.1. При $\omega \geq 0$ справедливы оценки

$$\|U(t, \pm A_h) \varphi\|_{\pm \omega} \leq e^{-\omega t} \|\varphi\|_{\pm \omega}. \quad (6.5)$$

Доказательство. Доказательство следует из (6.4) после замены $h^{-1}[h(x) \pm t] = s$, где $s \in (a, b)$, откуда следует соотношение

$$e^{\omega h(x)} U(t, \pm A_h) \varphi(x) = \varphi(s) e^{h(s)} e^{\mp \omega t}, \quad (6.6)$$

и из (6.6) следует (6.5).

Переходя к супремуму в правой и левой части (6.6), получаем

$$\|U(t, \pm A) \varphi\| \leq e^{\mp \omega t} \|\varphi\|_{\omega}.$$

□

Следствие 6.1. Неравенства (6.5) показывают, что операторы A_h являются B -позитивными в пространствах $C_{-\omega}(a, b)$, а операторы $-A_h$ будут B -позитивными в $C_{\omega}(a, b)$.

В частности, для некоторых классических случаев имеем:

1. $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $\pm A_h = \pm \frac{d}{dx}$, $U(t, \pm A_h) \varphi(x) = \varphi(x \pm t)$ — полугруппы переноса. Пространства $E = C_{\pm}[-\infty, \infty] \|\varphi\| = \sup |\varphi(x)|$. Дробным степеням $(\pm A)^{\alpha}$ соответствуют дробные производные Маршо.
2. $x \in [0, 1]$, $h(x) = \ln x$, $A = x \frac{d}{dx}$, $E = C \|\varphi\| = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$, $U(x, -A) \varphi(x) = \varphi(xe^{-t})$. Дробным степеням операторов $x \frac{d}{dx}$ соответствуют дробные производные Адамара [4, с. 251].

Следствие 6.2. Для дробных степеней операторов A_h справедливо равенство

$$A_h^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{[\varphi(s) - \varphi(x)] dh(s)}{[h(s) - h(x)]^{1+\alpha}}. \quad (6.7)$$

Доказательство. Для доказательства подставим $U(t, -A_h)$, определённую соотношением (6.4), в (4.1) и получим

$$A_h^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[U(t, -A_h) \varphi(x) - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[\varphi[h^{-1}(h(x) - t)] - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (6.8)$$

Делая в (6.8) замену $h^{-1}(h(x) - t) = s$, получаем (6.7). □

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что если $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $A_h = \frac{d}{dx}$, $U\left(t, -\frac{d}{dx}\right) \varphi(x) = \varphi(x - t)$, то

$$A_h^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[\varphi(x - t) - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt = D_{+}^{\alpha} \varphi = \frac{d\alpha}{dx\alpha} \varphi(x), \quad (7.1)$$

и, следовательно, в соответствии с [4] $A_h^{\alpha} \varphi(x)$ является правой производной Маршо.

В случае $x \in [0, 1]$, $h(x) = \ln x$, $A_h = x \frac{d}{dx}$, $U(t, -A_h) \varphi(x) = \varphi(xe^{-t})$ из (6.4) и (4.1) имеем дробную степень оператора Адамара при $\varphi \in C[0, 1]$, $\|\varphi\| = \max_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$:

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[\varphi(xe^{-t}) - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{[\varphi(s) - \varphi(x)]}{s \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{1+\alpha}} ds. \quad (7.2)$$

Аналогично, для отрицательной степени, пользуясь формулой (4.2), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi[h^{-1}(h(x)-t)]}{t^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi(x-t)dt}{t^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds = J^\alpha \varphi(x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

В соответствии с [4] $J^\alpha \varphi(x)$ — дробный интеграл Римана—Лиувилля.

А в случае $A_h = x \frac{d}{dx}$ из (4.2) следует равенство

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{t(\ln \frac{x}{t})^{1-\alpha}} = J_+^\alpha \varphi \quad (7.4)$$

для дробного интеграла Адамара [4].

В заключение заметим, что теорема 2.1 здесь применяется только к дифференциальным операторам в одномерном случае.

Однако очевидно, что эту теорему можно применять и для функций с несколькими переменными. Например, с оператором $Au = (I - \Delta)u$, где $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — лапласиан в пространствах $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ — пространствах Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник. — М.: Мир, 1967.
2. Костин В. А., Костин А. В., Костин Д. В. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения // Докл. РАН. — 2014. — 455, № 2. — С. 142–146.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
6. Хилье Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностран. лит., 1962.
7. Da Prato G., Grisvard P. Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles // J. Math. Pures Appl. (9). — 1975. — 54. — С. 305–387.
8. Hilfer R. Threefold introduction to fractional derivatives // В сб.: «Anomalous Transport: Foundations and Applications». — Weinheim: Wiley-VCH, 2008. — С. 17–73.
9. Kolokoltsov V. N., Shishkina E. L. Fractional calculus for non-discrete signed measures // Mathematics. — 2024. — 12. — 2804.

С. Д. Бабошин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: ijustbsd@gmail.com

UDC 517.98

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541

EDN: VRITTM

Correct solvability of problems for fractional-power operator equations

S. D. Baboshin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we consider the sum of linear fractional-power operators acting in a Banach space and satisfying weak positivity. We establish the correct solvability of the problem for the corresponding fractional-operator equation and we give the representation of the solution through the inverse operator with an exact estimate of its norm. The results are applied to problems without initial conditions for an equation with singular coefficients. We consider examples of such equations.

Keywords: fractional power operator, fractional-operator equation, correct solvability.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. D. Baboshin, “Correct solvability of problems for fractional-power operator equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 533–541. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541>

REFERENCES

1. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. V. A. Kostin, A. V. Kostin, and D. V. Kostin, “Elementarnye polugruppy preobrazovaniy i ikh proizvodnyashchie uravneniya” [Elementary semigroups of transformations and their generating equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **455**, No. 2, 142–146 (in Russian).
3. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
4. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
5. A. N. Tikhonov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
6. E. Hille and R. S. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-groups], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).
7. G. Da Prato and P. Grisvard, “Sommes d’opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles,” *J. Math. Pures Appl. (9)*, 1975, **54**, 305–387.
8. R. Hilfer, “Threefold introduction to fractional derivatives,” In: *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, Wiley-VCH, Weinheim, 2008, pp. 17–73.
9. V. N. Kolokoltsov and E. L. Shishkina, “Fractional calculus for non-discrete signed measures,” *Mathematics*, 2024, **12**, 2804.

S. D. Baboshin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: ijustbsd@gmail.com

УДК 519.213

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560

EDN: VSOLEA

УНИМОДАЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЭКСТЕНСИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ВЫБОРОК СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ю. П. Вирченко¹, А. М. Теволде²¹Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия²Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

Аннотация. Устанавливается критерий унимодальности распределения вероятностей функционала, который представляется суммой набора независимых одинаково распределенных случайных неотрицательных величин $\tilde{x}_k$ со случайным числом слагаемых, распределенных по Пуассону. Общее распределение слагаемых $\tilde{x}_k$ сосредоточено на отрезке $[0, 1]$ и таково, что $\Pr\{\tilde{x}_k = 0\} \neq 0$. Его абсолютно непрерывная часть асимптотически близка к равномерному распределению. Вводится понятие о сглаживающих функциях и находится явный вид распределения любого фиксированного числа слагаемых, равномерно распределенных на $[0, 1]$.

Ключевые слова: сумма независимых одинаково распределенных случайных величин, унимодальность распределения вероятностей, сглаживающая функция, одновёршинная функция.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Ю. П. Вирченко, А. М. Теволде. Унимодальность распределения вероятностей экстенсивного функционала выборок случайной последовательности // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 542–560. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560>

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование унимодальности вероятностных распределений, определяемых какими-либо естественными, с точки зрения постановки задач теории вероятностей, условиями представляется очень важным, так как ее наличие, с точки зрения математического моделирования природных процессов, отражает факт отсутствия каких-либо причин, регулярным образом оказывающих влияние на их протекание. Среди первых публикаций, посвященных этому направлению, назовем работу [9]. Не давая в настоящей статье сколько-нибудь значительного исторического обзора этому направлению, укажем на работы [5, 7, 10, 11], которые были посвящены установлению одновёршинности распределений, связанных с суммами независимых одинаково распределенных случайных величин — традиционному объекту исследований в теории вероятностей. Другое направление исследований унимодальности распределений начало оформляться в связи с изучением качественных свойств распределений для функционалов от выборок случайных процессов, в частности, для экстенсивных функционалов [1, 12–14], в терминологии настоящей работы, и для максимумов выборок [3, 15].

Задача, изучению которой посвящена настоящая работа, связана с изучением математической модели электропробоя гетерогенно-неупорядоченной конденсированной среды как объекта статистической математической физики [2] (см. также [4, 16]). С математической точки зрения, она состоит в нахождении условий, при которых абсолютно непрерывная часть распределения вероятностей суммы независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин является унимодальным.

Опишем общую постановку задачи. Рассмотрим случайную последовательность $\langle \tilde{x}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, компоненты которой являются элементами пространства Ω . Вероятностное пространство последовательности строится в виде $\langle \Omega^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B}^{\mathbb{N}}, \mathbf{P}^{\mathbb{N}} \rangle$, где $\mathfrak{B}$ — σ -алгебра на Ω , $\mathbf{P}$ — вероятностная мера, определенная на $\mathfrak{B}$, $\mathbf{P}(A) = \Pr\{\tilde{x} \in A\}$, $\tilde{x} \in \Omega$, $A \in \mathfrak{B}$.

Пусть на множестве Ω определен измеримый функционал со значениями в $\mathbb{R}$, $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Каждый такой функционал порождает функционалы $S^{(N)}[\cdot; \mathbf{H}]$, $N \in \mathbb{N}$ на пространствах Ω^N конечных подпоследовательностей длины N . Эти функционалы, называемые нами *экстенсивными*, определяются формулой

$$S^{(N)}[\langle \tilde{x}_n; n \in I_N \rangle; \mathbf{H}] = \sum_{n=1}^N \mathbf{H}(\tilde{x}_n), \quad I_n = \{1 \div N\}.$$

Они, очевидным образом, измеримы. Так как распределение вероятностей на Ω^N является N -кратной степенью меры $\mathbf{P}$, то значения каждого функционала $S^{(N)}[\cdot]$ представляются суммами независимых одинаково распределенных величин. Функция распределения вероятностей $G^{(N)}(x)$ каждого из них, определяемая мерой $\mathbf{P}$, определяется формулой (см. по этому поводу, например, [6])

$$G^{(N)}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \theta\left(x - \sum_{n=1}^N x_n\right) \prod_{n=1}^N d\Pr\{\mathbf{H}(\tilde{x}_n) \leq x_n\}, \quad (1.1)$$

где $\theta(x) = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$ — функция Хевисайда. Мы ограничиваемся случаем, когда общая функция распределения $V(x) = \Pr\{\tilde{x} \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$ случайных величин $\tilde{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$ не содержит сингулярной компоненты. В этом случае функция распределения $G^{(N)}(x)$ также не содержит сингулярной компоненты, т. е. обладает плотностью распределения $g^{(N)}(x)$ в терминах обобщенных функций над основным пространством локально-непрерывных функций на $\mathbb{R}$.

Изучению распределений вероятностей сумм независимых случайных величин посвящена богатая литература, так как этот математический объект связан с основами теории вероятностей. Следует заметить, однако, что в основном в этих исследованиях решаются задачи, связанные с предельными при $N \rightarrow \infty$ распределениями вероятностей для центрированных сумм случайных независимых величин при их подходящей нормировке. Эти результаты очень важны для обработки статистических данных в условиях малости информации о распределении $\mathbf{P}$, но при этом имеется возможность свободного оперирования экспериментальными данными относительно каждого отдельного слагаемого суммы. В противоположном случае, когда такая возможность отсутствует, а именно, экспериментально не определены ни число слагаемых суммы, ни каждое из слагаемых, а регистрируется только лишь результат — случайное значение суммы, то статистические оценки параметров предельных распределений становятся невозможны. Следствием этого является то, что приходится изучать распределения вероятностей $G^{(N)}$ с конкретным значением N , которое может быть как малой величиной, так и очень большой. В такой ситуации, ввиду существенной зависимости аналитической формы распределений вероятностей $G^{(N)}$ от распределения вероятностей $\mathbf{P}$, естественно интересоваться, в первую очередь, не этой формой, а ее качественными свойствами и классифицировать распределения согласно этим свойствам.

Следуя описанной идеологической установке, в настоящей работе мы исследуем возможность возникновения унимодальности распределений $G^{(N)}$ вероятностей сумм независимых неотрицательных случайных величин в том случае, когда распределение каждого из слагаемых сосредоточено на конечном отрезке. Объектом нашего изучения является установление признаков унимодальности распределений $G^{(N)}$ в случае пуассоновского предела при $N \rightarrow \infty$. При этом распределение вероятностей каждого из слагаемых предполагается асимптотически близким к равномерному. Такая постановка задачи возникает естественным образом при анализе электрической

прочности тонкой полимерной пленки по отношению к электрическому пробое в условиях случайным образом распределенных гетерогенным образом в ней с малой плотностью инородных включений со случайными геометрическими характеристиками [2]. Описанная выше постановка задачи возникает вследствие ограниченной возможности экспериментального изучения распределения вероятностей геометрических характеристик отдельных включений, а также ввиду случайности их числа в материале.

В следующем разделе мы даем конкретную частную постановку задачи, к которой относится полученный в работе результат. В разделе 3 мы вводим понятие о классе неотрицательных функций, обладающих сглаживающим свойством. В разделе 4 вычисляется явный аналитический вид плотностей распределений сумм независимых равномерно распределенных случайных величин. Наконец, в разделе 5 устанавливаются необходимые и достаточные условия унимодальности распределения $G^{(N)}$ в пуассоновском пределе $N \rightarrow \infty$ в случае, когда $\tilde{x}_k$ распределены равномерно на $[0, 1]$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим, что компоненты случайной последовательности $\langle \tilde{x}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ принимают значения в $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\mathfrak{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств в $\mathbb{R}_+$. Вероятностная мера P на Ω представляется функцией распределения V на $\mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что она состоит из абсолютно непрерывной компоненты с плотностью $pv(x) = dV(x)/dx > 0$ при $x > 0$, где $1 > p > 0$, $\int_0^\infty v(x)dx = 1$, и дискретной компоненты, представленной распределением $(1-p)\delta(x)$ с δ -функцией Дирака. Мы полагаем, что кусочно-непрерывная на $[0, \infty)$ неотрицательная плотность v непрерывна справа.

Ввиду непрерывности справа θ -функции, согласно ее определению, предел при $x \rightarrow +0$ производной по x интеграла $\int_0^\infty \theta(x-y)u(y)dy$ с любой непрерывной в окрестности $x=0$ и кусочно-непрерывной на $[0, \infty)$ функцией должен пониматься как $\int_{-0}^\infty \delta(x-y)u(y)dy = u(0)$.

Таким образом, случайную последовательность $\langle \tilde{x}_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ можно рассматривать как обобщение однородной последовательности независимых испытаний с вероятностью появления «успеха» p , $0 < p < 1$, и с пространством $\Omega = [0, \infty)$ возможных состояний для каждого из испытаний.

Операция свертки двух кусочно-непрерывных плотностей распределения $v_1(x)$ и $v_2(x)$, сосредоточенных на $[0, \infty)$, определяется формулой

$$(v_1 * v_2)(x) = \int_{-0}^\infty v_1(y)v_2(x-y)dy. \quad (2.1)$$

Эту бинарную операцию можно рассматривать как коммутативное умножение на множестве всех кусочно-непрерывных функций на $[0, \infty)$. Множество таких функций, снабженное операцией свертки, является коммутативной полугруппой. При таком определении умножения соответствующая ему m -я степень $(v_*^m)(x)$, $m \in \mathbb{N}$ любой кусочно-непрерывной функции $v(x)$ определяется посредством рекуррентного соотношения

$$(v_*^m)(x) = \int_0^x v(x-y)(v_*^{m-1})(y)dy, \quad N \geq 2.$$

Так как свертка пары кусочно-непрерывных функций на полуоси является кусочно-непрерывной функцией, то, представив дифференциал функции распределения V описанного выше типа в виде $dV(x) = [(1-p)\delta(x) + pv(x)]dx$, находим, что плотность распределения $g^{(N)}(x) = dG^{(N)}(x)/dx$ вероятностей значений функционала $S^{(N)}[\cdot]$ принимает вид

$$g^{(N)}(x) = (1-p)^N \delta(x) + \sum_{m=1}^N C_N^m p^m (1-p)^{N-m} v_*^N(x).$$

Таким образом, распределение вероятностей значений суммы $S^{(N)}[\cdot]$ с плотностью $[(1-p)\delta + pv]_*^N$, очевидным образом, состоит из дискретной компоненты с одной точкой роста $x = 0$ и абсолютно непрерывной компоненты с плотностью

$$g_N(x) = \sum_{m=1}^N C_N^m p^m (1-p)^{N-m} v_*^N(x). \quad (2.2)$$

В соответствии со сказанным в разделе 1, нас интересуют условия унимодальности получаемой из g_N абсолютно непрерывной части g плотности распределения в т. н. *пуассоновском пределе* $p = \lambda/N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, $\lambda > 0$

$$g(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} v_*^m(x). \quad (2.3)$$

Полученный нами результат относится к случаю, когда плотность v зависит от некоторого параметра $\eta > 0$ так, что $v(x) \equiv w(x; \eta) = w(x) + o(1)$ при $\eta \rightarrow +0$ равномерно по $x \in [0, 1]$, где $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$.

3. СГЛАЖИВАНИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Уточним понятия, в терминах которых будет далее проведено исследование. При этом мы не стремимся к формулировкам в наиболее общей форме, а ограничиваемся их разумной достаточностью для решения задачи.

Будем рассматривать кусочно-непрерывные функции u на $[0, \infty)$. Это означает, что в каждой точке $x \in [0, \infty)$ функция u имеет односторонний предел справа и ее область определения $[0, \infty)$ представляется в виде не более чем счетного дизъюнктивного объединения $[0, \infty) = \bigcup_j [a_j, a_{j+1})$,

где $a_1 = 0$, $a_j < a_{j+1}$, так, что во всех интервалах (a_j, a_{j+1}) , $j \in \mathbb{N}$ функция u непрерывна, а в точках a_j , $j = 2, 3, 4, \dots$ она может иметь разрывы первого рода.

Для любой точки x максимума кусочно-непрерывной функции u на $[0, \infty)$ существует такой отрезок $[a, b]$, что $x \in [a, b]$ и $u(y) = \text{const}$ при $y \in (a, b)$, где $\lim_{y \rightarrow a+0} u(y) = \lim_{y \rightarrow b-0} u(y)$, для которого при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место $u(x) < u(a)$, если $x \in (a - \varepsilon, a)$, и $u(x) < u(b)$, если $x \in (b, b + \varepsilon)$, $x \in (a, b)$. При этом если $x = a$ либо $x = b$, то допустима возможность, что $u(x) \neq \text{const}$. Отрезок $[a, b]$ будем называть *отрезком максимальнойности* функции u .

Точку максимума мы будем называть *локальным максимумом* кусочно-непрерывной функции u , если достаточно малая ее окрестность не содержит отличных от нее максимальных точек и при этом $a = b$. Локальный максимум может как достигаться функцией u , если точка a является точкой ее непрерывности слева/справа, так и, в противном случае, не достигаться.

Для любой точки x минимума кусочно-непрерывной функции u на $[0, \infty)$ существует такой отрезок $[a, b]$, что $x \in [a, b]$ и $u(y) = \text{const}$ при $y \in (a, b)$, где $\lim_{y \rightarrow a+0} u(y) = \lim_{y \rightarrow b-0} u(y)$, для которого при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место $u(y) > u(a)$, если $y \in (a - \varepsilon, a)$, и $u(y) > u(b)$, если $y \in (b, b + \varepsilon)$. Если $x = a$ либо $x = b$, то допускается возможность, что $u(x) \neq \text{const}$. Отрезок $[a, b]$ будем называть *отрезком минимальности* функции u .

Точку минимума мы называем *локальным минимумом* кусочно-непрерывной функции u , если она является изолированной, $a = b$, когда достаточно малая ее окрестность не содержит отличных от нее точек минимума. Аналогично понятию локального максимума, локальный минимум может как достигаться функцией u , если точка a является точкой ее непрерывности слева/справа, так и не достигаться в противном случае.

Замечание 3.1. Из данных определений следует, что точка $x = 0$, по определению, всегда является либо точкой максимума, либо точкой минимума.

Определение 3.1. Неотрицательную кусочно-непрерывную функцию u на $[0, \infty)$, обладающую единственным отрезком максимальнойности, назовем *одновершинной* (унимодальной).

Введение этого термина связано с понятием одновершинного (унимодального) распределения вероятностей на $\mathbb{R}$, когда функция u представляет собой его плотность. Справедливо следующее довольно очевидное утверждение.

Теорема 3.1. Для любой кусочно-непрерывной функции u на $[0, \infty)$ существует не более чем счетное дизъюнктивное разбиение области определения $[0, \infty) = \bigcup_j [b_j, b_{j+1})$, $b_1 = 0$, $b_j < b_{j+1}$, где каждый из отрезков $[b_j, b_{j+1}]$ состоит только из точек максимальности функции u или только из ее точек минимальности, либо в отрезке, входящем в состав этого разбиения, функция u является монотонно невозрастающей/неубывающей.

Доказательство. Достаточно рассмотреть отрезки изменения функции u , которые не пересекаются ни с одним интервалом, состоящим из точек максимальности/минимальности. Пусть $[a, b]$ — такой отрезок. Не ограничивая общности, такой отрезок можно считать не имеющим пересечения ни с каким интервалом, в котором имеются точки максимальности/минимальности. Для него существуют такие точки $a' < a$ и $b' > b$, что u постоянна на интервалах (a', a) , (b, b') . В противном случае можно расширить отрезок $[a, b]$, положив точку a равной наибольшей из всех точек, для которых интервал (a', a) обладает указанным свойством, либо $a' = -\infty$, а точку b' можно выбрать наименьшей среди всех возможных, либо $b' = \infty$.

Пусть x и y — пара произвольных точек из интервала (a, b) , $x < y$, таких, что $u(x) \neq u(y)$. Допустим, что u не монотонна на (x, y) . Положим, для определенности, что $u(x) \leq u(y)$. Тогда найдется точка z из (x, y) такая, что $u(z) < u(x)$, $u(z) < u(y)$. Следовательно, внутри интервала $(x, y) \subset (a, b)$ кусочно-непрерывная функция u имеет точку минимальности. Если на интервале (x, y) найдется точка z , в которой имеет место $u(z) > u(x)$, $u(z) > u(y)$, то функция u на интервале $(x, y) \subset (a, b)$ имеет точку максимальности. $\square$

Следствие 3.1. На каждом отрезке $[0, L]$, $L > 0$ кусочно-непрерывная функция u может иметь не более чем конечный набор отрезков максимальности и минимальности.

Следствие 3.2. Отрезки максимальности и минимальности кусочно-непрерывной функции u чередуются на полуоси $[0, \infty)$.

Кусочно-непрерывную функцию u назовем *кусочно-гладкой*, если ее область определения $[0, \infty)$ представляется в виде не более чем счетного дизъюнктивного объединения $[0, \infty) = \bigcup_j [a_j, a_{j+1})$, где $a_1 = 0$, $a_j < a_{j+1}$, и во всех интервалах (a_j, a_{j+1}) , $j \in \mathbb{N}$ функция u непрерывно дифференцируема. В каждой из точек a_j , $j = 2, 3, 4, \dots$ ее производная может иметь лишь разрывы первого рода.

Определение 3.2. Неотрицательную кусочно-гладкую функцию v на $[0, \infty)$ назовем *сглаживающей*, если для любой неотрицательной кусочно-непрерывной функции u , обладающей конечным набором отрезков максимальности и минимальности, ее образ при действии операции свертки $v * u$ представляет собой функцию, у которой каждое из чисел отрезков максимальности и минимальности не превосходит, соответственно, чисел отрезков максимальности и минимальности функции u .

Замечание 3.2. Сглаживающее свойство функции — более широкое понятие, чем понятие строго одновершинного распределения [7, 8]. Если функция v является сглаживающей и является плотностью абсолютно непрерывного распределения, то это распределение является обязательно строго одновершинным.

Пусть функция v на $[0, \infty)$ обладает носителем $[a, b]$, $a \geq 0$. Определим функцию $v^{(a)}$ формулой $v(x + a) = v^{(a)}(x)$, $x \in [0, \infty)$. Эта функция обладает носителем $[0, b - a]$.

Теорема 3.2. Для того чтобы функция v была сглаживающей, необходимо и достаточно, чтобы сглаживающей была функция $v^{(a)}$.

Доказательство. Пусть $\text{supp } v = [a, b]$. Рассмотрим ее свертку с произвольной кусочно-непрерывной функцией u :

$$(v * u)(x) = \int_0^x v(y)u(x-y)dy = \int_a^x v(y)u(x-y)dy = \int_0^{x-a} v(y+a)u(x-a-y)dy = \int_0^{x-a} v^{(a)}(y)u(x-a-y)dy.$$

Так как функция, стоящая в правой части равенства, непрерывна, то все точки ее максимальной/минимальности на отрезке $[0, L]$ совпадают с точками максимальной/минимальности функции $v * u$ на отрезке $[0, L + a]$. Ввиду произвольности числа $L > 0$ убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. $\square$

Следствие 3.3. Множество всех точек максимальной/минимальности функции $v * u$ на отрезке $[0, L]$ получается переносом на $-a$ множества точек максимальной/минимальности функции $v^{(a)} * u$ на $[a, L]$.

Справедливы следующие довольно очевидные утверждения.

Теорема 3.3. Пусть $C > 0$ — произвольная постоянная. Для того чтобы функция v была сглаживающей, необходимо и достаточно, чтобы сглаживающей была функция Cv .

Доказательство. Для любой функции u ее точки максимальной/минимальности совпадают с точками максимальной/минимальности функции Cu с произвольно выбранной постоянной $C > 0$. $\square$

Теорема 3.4. Пусть $\mu > 0$ — произвольная постоянная. Для того чтобы функция $v(\cdot)$ была сглаживающей, необходимо и достаточно, чтобы сглаживающей была функция $v(\mu(\cdot))$.

Доказательство. Пусть Σ — множество точек максимальной/минимальности функции $u(\cdot)$. Тогда для любого $\mu > 0$ множество $\mu\Sigma$ представляет точки максимальной/минимальности функции $u(\mu^{-1}(\cdot))$. Справедливость утверждения следует из равенства

$$\int_0^x v(\mu(x-y))u(y)dy = \mu^{-1} \int_0^{\mu x} v(\mu(\mu x - y))u(\mu^{-1}y)dy. \quad (3.1)$$

$\square$

Определим функцию $w(x; a, b, C)$, $a < b$ на $[0, \infty)$, $C > 0$ по формуле

$$w(x; a, b, C) = \begin{cases} C, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Вычислим свертку $(w(\cdot; a, b, C) * u)(x)$ с произвольной кусочно-непрерывной функцией u , носитель которой содержит $[a, b]$:

$$\begin{aligned} (w(\cdot; a, b, C) * u)(x) &= \int_0^x w(y; a, b, C)u(x-y)dy = \\ &= C\theta(x-a) \left[\theta(b-x) \int_a^x u(x-y)dy + \theta(x-b) \int_a^b u(x-y)dy \right] = \\ &= C\theta(x-a) \left[\theta(b-x) \int_0^{x-a} u(y)dy + \theta(x-b) \int_{x-b}^{x-a} u(y)dy \right]. \end{aligned}$$

Значения ее производных при $x > a$ представляются формулой

$$\frac{d}{dx}(w(x; a, b, C) * u)(x) = C \begin{cases} \theta(x-a)u(x-0), & x < b; \\ \theta(x-a)[u(x-a+0) - u(x-b-0)], & x > b. \end{cases} \quad (3.2)$$

Обозначим через $w(x) = w(x; 0, 1, 1)$ плотность равномерного распределения на $[0, 1]$.

Теорема 3.5. Если функция u обладает единственным интервалом максимальной/минимальности на $[0, \infty)$, то функция $w * u$ также обладает единственным интервалом максимальной/минимальности, соответственно, минимальности. Если при этом точка максимума/минимума неотрицательной функции u на $[0, \infty)$ единственна и функция u не имеет интервалов постоянства, то точка максимума/минимума функции $w * u$ также единственна и эта функция не имеет интервалов постоянства.

Доказательство. Из формулы (3.2) при $a = 0$, $b = C = 1$ следует, что $(w(\cdot) * u)(x)$ возрастает при $x < 1$, и поэтому ее точки стационарности возможны только при $x \geq 1$. Рассмотрим сначала случай, когда функция u непрерывна. В этом случае функция

$$(w * u)(x) = \int_{\max\{0, x-1\}}^x u(y) dy$$

непрерывно дифференцируема, и поэтому каждая ее экстремальная точка x_* , определяемая обращением в нуль производной, может находиться только при $x > 1$, и она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dx}(w * u)(x) = u(x) - u(x - 1) = 0. \quad (3.3)$$

Разберем случай, когда u имеет единственный максимальный отрезок на $[0, \infty)$. Случай же, когда u обладает единственным минимальным отрезком, разбирается аналогично.

Положим, сначала, что u имеет единственную точку максимальности, и допустим противное, что у функции $w * u$ имеется пара точек x_j , $j \in \{1, 2\}$ максимума на $(0, \infty)$, причем $x_1 < x_2$. Они являются решениями уравнения (3.3). Так как точка максимума x_* функции единственна, то $x_j \geq x_*$, $j \in \{1, 2\}$. Равенство здесь невозможно, так как в противном случае точка x_* не единственна. Точно также получается, что $x_j - 1 < x_*$, $j \in \{1, 2\}$. Если при этом $u(x_2) = u(x_1)$, то функция u имеет интервал постоянства (x_1, x_2) , что исключается условием теоремы. Таким образом, имеется единственная возможность $u(x_2) < u(x_1)$. Точно также рассуждая, находим, что $u(x_2 - 1) > u(x_1 - 1)$. Тогда, вычитая друг из друга равенства $u(x_j) = u(x_j - 1)$, получаем противоречие, так как $u(x_2) - u(x_1) < 0$ и одновременно $u(x_2) - u(x_1) = u(x_2 - 1) - u(x_1 - 1) > 0$.

Пусть теперь u кусочно-непрерывна. Найдется последовательность $\langle u_\varepsilon; \varepsilon > 0 \rangle$ одновершинных функций u_ε , которая сходится к функции u при $\varepsilon \rightarrow +0$ в ее точках непрерывности. Эта последовательность строится следующим образом. Пусть функция u имеет разрыв первого рода в какой-то точке x_* . У функции u_ε эта точка разрыва устраняется посредством соединения точек $\langle x_* - \varepsilon, u(x_* - \varepsilon) \rangle$ и $\langle x_* + \varepsilon, u(x_* + \varepsilon) \rangle$ на графике функции u отрезком прямой, где ε выбирается настолько малым, чтобы на интервале $(x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon)$ не имелось точек разрыва функции u , отличных от x_* . Это возможно сделать, так как функция u имеет только лишь конечный набор точек разрыва. Так как точка x_* выбрана произвольно, то, проводя описанную процедуру устранения точек разрыва в каждой из таких точек функции u , построим функцию u_ε с фиксированной величиной ε . Так как величина $\varepsilon > 0$ выбрана произвольно при условии ее достаточной малости, то, выбрав монотонно стремящуюся к нулю последовательность $\langle \varepsilon_n > 0; n \in \mathbb{N} \rangle$ и проделав для каждого из значений ε_n описанную процедуру устранения точек разрыва, построим указанную выше последовательность функций $\langle u_\varepsilon; \varepsilon > 0 \rangle$. Очевидно, что все функции u_ε в этой последовательности одновершинны и последовательность при $\varepsilon \rightarrow +0$ сходится к функции u поточечно в каждой из точек непрерывности функции u .

Все функции u_ε не имеют интервалов постоянства, если не имеет таких интервалов функция u . Тогда для каждой из функций $w * u_\varepsilon$, в силу непрерывности всех функций u_ε , утверждение теоремы справедливо, как это было установлено выше. Переходя к пределу в последовательности одновершинных функций $w * u_\varepsilon$, получим, что предельная функция $w * u$ также одновершинна. Она не имеет интервала постоянства в том случае, когда интервалов постоянства не имеет функция u .

Рассмотрим, теперь, не ограничивая общности, случай, когда у функции u имеется отрезок максимальности $[a, b]$ ненулевой длины. Допустим, что функция $w * u$ обладает отрезком максимальности $[a', b']$. При этом имеет место $a' \geq b$. Допустим, что имеется еще по крайней мере один отрезок экстремальности функции $w * u$. Этот отрезок является с необходимостью отрезком минимальности, и он расположен правее $[a', b']$, не пересекаясь с ним. Тогда имеется точка $y \in (a', b')$ непрерывности функции u , в которой имеет место $u(y) = u(y - 1)$, и существует точка $z > y$, в которой функция u непрерывна. Поэтому функция $w * u$ непрерывно дифференцируема и ее производная положительна, т. е. $u(z) > u(z - 1)$. При этом обязательно должно иметь место $z - 1 < b$, $u(z - 1) \leq u(b)$. Тогда $y - 1 = z - 1$ и поэтому $u(y - 1) \leq u(z - 1)$. Из этих неравенств следует, что $u(y) < u(z)$. Но это неравенство противоречит тому, что точки y и z находятся на интервале невозрастания функции u , что указывает на отсутствие какой-либо точки минимальности. $\square$

Следствие 3.4. Пусть при выполнимости утверждения теоремы относительно функции u ее единственный максимум/минимум реализуется в точке разрыва первого рода. В случае реализации максимума, точки x_ε максимумов функций $w * u_\varepsilon$, каждая из которых является решением уравнения $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = u_\varepsilon(x_\varepsilon - 1)$, могут стремиться при $\varepsilon \rightarrow 0$ к точке максимума x_* функции u — решению уравнения $u(x_* + 0) = u(x_* - 1)$, если функция u имеет разрыв в точке x_* с отрицательным скачком. Наоборот, они могут стремиться к решению уравнения $u(x_*) = u(x_* - 1 - 0)$, если функция u имеет разрыв в точке $x_* - 1$ с положительным скачком.

Аналогично, если минимум функции u реализуется в точке разрыва, то точки x_ε минимумов функций $w * u_\varepsilon$, каждая из которых является решением уравнения $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = u_\varepsilon(x_\varepsilon - 1)$, могут стремиться при $\varepsilon \rightarrow 0$ к точке x_* минимума функции $w * u$ — решению уравнения $u(x_*) = u(x_* - 1 - 0)$, если функция u имеет разрыв в точке $x_* - 1$ с отрицательным скачком. Наоборот, они могут стремиться к решению уравнения $u(x_* + 0) = u(x_* - 1)$, если функция u имеет разрыв в точке x_* с положительным скачком.

Замечание 3.3. В связи с доказанным утверждением, функция w представляет собой плотность т. н. строго одновершинного распределения. Свертка такого распределения с любым одновершинным распределением является плотностью одновершинного распределения. Однако, в формулировке теоремы утверждается не только одновершинность свертки, но также указывается тип вершины.

Теорема 3.6. Функция $w(x) \equiv w(x; 0, 1; 1)$ является сглаживающей на $[0, \infty)$.

Доказательство. Функция $(w(\cdot) * u)(x)$ возрастает при $x < 1$, и поэтому ее точки стационарности/постоянства возможны только при $x \geq 1$. Как и при доказательстве теоремы 3.5, рассмотрим сначала случай, когда функция u непрерывна. Если функция u имеет единственный максимум/минимум, то утверждение теоремы справедливо в силу указанной теоремы 3.5.

Не ограничивая общности, будем считать, что все экстремальные точки функции u изолированы. В этом случае понятие сглаживаемости определено для функций u , обладающих конечным набором точек максимума и минимума. Тогда можно считать, что все точки $x_1, x_2, \dots, x_N$ экстремальности функции u находятся на интервале $(0, 1)$, т. е. функция u либо монотонно не убывает, либо монотонно не возрастает при $x > 1$. Такого положения всегда можно добиться выбором, согласно теореме 3.4, подходящего масштабного множителя $\mu > 0$ и переходом к эквивалентной в смысле сглаживающего свойства функции.

Таким образом, интервал $(0, 1)$ состоит из $N + 1$ интервала (x_j, x_{j+1}) монотонного изменения функции u . Они разделены граничными точками x_j , $j = 0 \div N$, $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 1$. Допустим, для определенности, что последняя экстремальная точка x_N функции u является максимумом. Тогда функция u не возрастает при $x > 1$.

Точки x экстремальности функции $w * u$ с необходимостью удовлетворяют уравнению $u(x) = u(x - 1)$ и в рассматриваемом случае находятся на интервале $(1, 2)$ ввиду монотонного изменения функции u при $x > 1$. Они являются точками, в которых происходит пересечение графиков монотонной функции u и функции $u_- \equiv u(x - 1)$, которая обладает интервалами $(x_j - 1, x_{j+1} - 1)$ монотонного изменения в $(1, 2)$, разделенных граничными точками $x_j - 1$, $j = 0 \div N$. Ввиду монотонного невозрастания функции u на $(1, 2)$ ее график может иметь не более одной точки пересечения с графиком функции u_- на каждом интервале из числа указанных, где она не убывает. Каждая такая точка пересечения является точкой максимума функции $w * u$, так как $(w * u)(x - \delta) = u(x - \delta) - u(x - 1 - \delta) > 0$ и $(w * u)(x + \delta) = u(x + \delta) - u(x - 1 + \delta) < 0$ при достаточно малых $\delta > 0$. На тех же интервалах $(x_j - 1, x_{j+1} - 1)$, где функция u_- не возрастает, ее график может иметь несколько точек пересечения с графиком функции u . Точки пересечения в таких интервалах могут быть только точками минимума функции $w * u$ ввиду того, что при достаточно малых $\delta > 0$ должно выполняться $(w * u)(x - \delta) = u(x - \delta) - u(x - 1 - \delta) < 0$ и $(w * u)(x + \delta) = u(x + \delta) - u(x - 1 + \delta) > 0$. А так как точки максимальности и минимальности должны чередоваться, то только одна из точек пересечения на каждом из интервалов невозрастания функции u_- может быть точкой минимальности. Таким образом, функция $w * u$ может иметь не более, чем $N + 1$ точку экстремальности, так как интервал $(1, 2)$ разбивается точками $x_j + 1$, $j = 0 \div N$ на $N + 1$ интервалов.

Наконец, заметим, что на первом интервале $(1, x_1 + 1)$ точка пересечения графиков функций $u_-(x)$ и $u(x)$ отсутствует, так как такая точка соответствовала бы экстремальной точке функции $w * u$ на интервале $(0, x_1)$, которая отсутствует ввиду монотонного неубывания на нем этой функции. Таким образом, на интервале $(1, 2)$ имеется не более чем N точек пересечения графиков функций u_- и u . $\square$

Обобщением доказанной теоремы является следующая теорема.

Теорема 3.7. Для любой упорядоченной пары $\{a, b\} \subset [0, \infty)$, $a < b$ и любой постоянной $C > 0$ функция $w(x; a, b, C)$ на $[0, \infty)$ является сглаживающей.

Доказательство. В силу утверждения 3.3 множество всех точек максимальности/минимальности функции $w(\cdot; a, b, C) * u$ на отрезке $[0, L]$ получается переносом на $(-a)$ множества точек максимальности/минимальности функции $w(\cdot; 0, b - a, C) * u$ на $[a, L + a]$. Следовательно, числа отрезков максимальности/минимальности функции $w(\cdot; 0, b - a, C) * u$ не превосходит чисел таких же отрезков у функции $w(\cdot; a, b, C) * u$. Таким образом, достаточно доказать, что сглаживающей является функция $w(\cdot; 0, b - a, C)$. В силу теоремы 3.3 свойство сглаживания не зависит от величины постоянной C , а в силу теоремы 3.4 свойство сглаживания функции $w(\cdot; 0, b - a, C)$ не зависит от размера $(b - a)$ ее носителя.

Так как функция $w(x)$ является сглаживающей на $[0, \infty)$ в силу теоремы 3.5, то функция $w(x; a, b, C)$ также является сглаживающей. $\square$

Замечание 3.4. Сглаживающая функция $w(x; a, b, (b - a)^{-1})$ является плотностью строго одновершинного по Ибрагимову распределения. Очевидно, что для нее справедлива теорема Ибрагимова [7, 8], так как, полагая

$$u(x; \eta) = \begin{cases} w(x; a, b, (b - a)^{-1}), & x \in [a, b]; \\ (b - a)^{-1} \exp(-\eta(x - b)^2), & x \geq b; \\ (b - a)^{-1} \exp(-\eta(x - a)^2), & x \leq a, \end{cases}$$

получаем логарифмически вогнутую плотность распределения на $\mathbb{R}$. Переходом к пределу $\eta \rightarrow \infty$ получаем, что распределение вероятностей с плотностью $w(x; a, b, (b - a)^{-1})$ является пределом распределений, каждое из которых обладает логарифмически вогнутой плотностью.

Теорема 3.8. Свертка любых двух сглаживающих функций v_1 и v_2 на $[0, \infty)$ является сглаживающей функцией на $[0, \infty)$.

Доказательство. Пусть u — произвольная кусочно-непрерывная функция на $[0, \infty)$, имеющая N экстремальных точек. Тогда, согласно определению сглаживающей функции, $v_1 * u$ имеет не более чем N экстремальных точек. Применяя к этой функции операцию свертки со сглаживающей функцией v_2 , находим, что функция $v_2 * (v_1 * u) = (v_2 * v_1) * u$ также имеет не более чем N экстремальных точек. $\square$

Теорема 3.9. Предел последовательности $\langle v_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ сглаживающих функций является сглаживающей функцией на $[0, \infty)$.

Доказательство. Для произвольной кусочно-непрерывной функции u с N экстремальными точками рассмотрим последовательность $\langle v_n * u; n \in \mathbb{N} \rangle$. Ввиду сглаживающего свойства функций v_n каждая функция этой последовательности имеет не более чем N экстремальных точек. Так как эта последовательность, по предположению, имеет предел при $N \rightarrow \infty$, то имеет какой-то предел M последовательность $\langle M_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, где M_n — число экстремальных точек у функции $v_n * u$, $M_n \leq N$. Переходя к пределу в неравенстве $M_n \leq N$, получаем, что $M \leq N$. $\square$

Следствием теорем 3.7–3.9 является следующая теорема.

Теорема 3.10. Для любого не более чем счетного множества $A \subset \mathbb{N}$ свертка функций $w(\cdot; a_j, b_j, C_j)$, определяемая множеством троек чисел $\{\langle a_j, b_j, C_j \rangle; j \in A\}$, является сглаживающей функцией

$$v(x) = \left(\bigotimes_{j \in A} w(\cdot; a_j, b_j, C_j) \right)(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Доказательство. Доказательство получается применением утверждения 3.9 к последовательности сглаживающих, в силу теоремы 3.8, функций

$$v_n(x) = \left(\bigotimes_{j \in A_N} w(\cdot; a_j, b_j, C_j) \right)(x), \quad x \in [0, \infty),$$

где $A_N = A \cap I_N$. □

4. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ w_*^N

Неотрицательные кусочно-непрерывные функции u на $[0, \infty)$ образуют полугруппу относительно бинарной операции свертки пары таких функций. Сглаживающие функции в этой полугруппе образуют подполугруппу. Каждая из функций $w(\cdot; a, b, C)$, $0 < a < b$, $C > 0$ является ее образующей этой. Изучим качественное поведение степеней $w_*^m(x)$, $m \in \mathbb{N}$ плотности распределения $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$. Прежде всего докажем следующую формулу.

Теорема 4.1. Для плотностей $w_*^m(x)$, $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$w_*^m(x) = w_*(m-x). \quad (4.1)$$

Доказательство. Обозначим

$$\bar{u}_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u_j(x) e^{ikx} dx, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Фурье-образы плотностей $u_1(x)$ и $u_2(x)$, согласно (2.1),

$$\begin{aligned} (\overline{u_1 * u_2})(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (u_1 * u_2)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_1(y) u_2(x-y) dy \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} u_1(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} u_2(x-y) dx \right) dy = \bar{u}_1(k) \bar{u}_2(k). \end{aligned}$$

Следовательно, Фурье-образ m -й степени плотности $u(x)$

$$(\overline{u_*^m})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_*^m)(x) e^{ikx} dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

удовлетворяет соотношению $(\overline{u_*^m})(k) = (\overline{u_*^{m-1}})(k) \cdot \bar{u}(k)$, и поэтому

$$(\overline{u_*^m})(k) = \bar{u}^m(k).$$

Плотность $w(x)$ обладает свойством $w(x) = w(1-x)$. Следовательно, для ее Фурье-образа справедливы равенства

$$\bar{w}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} w(1-x) dx = e^{ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-1)} w(1-x) dx = e^{ik} \bar{w}(-k),$$

т. е.

$$\bar{w}(k) = e^{ik} \bar{w}(-k).$$

Отсюда следует, что $\bar{w}^m(k) = e^{ikm} \bar{w}^m(-k)$. Применив обратное преобразование Фурье к обеим частям этого равенства, находим

$$w_*^m(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} \bar{w}^m(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(x-m)} \bar{w}^m(-k) dk = w_*(m-x).$$

□

Следствие 4.1. Максимум функции $w_*^m(x)$ находится в точке $x = m/2$.

Доказательство. Утверждение следует из (4.1). □

Следующее утверждение является уточнением известной теоремы Ибрагимова (см. [7]) о т. н. *строго унимодальных* распределениях при применении ее к плотности $w(x)$.

Следствие 4.2. *Функции $w_*^m(x)$ при $m \geq 2$ имеют единственную точку максимума.*

Доказательство. Функция $w_*^2(x)$ имеет явным образом единственную точку максимума в $x = 1$. Справедливость общего утверждения для любого числа $m \geq 2$ получается индукцией по $m > 2$ с использованием сглаживающего свойства функции w . $\square$

Последовательное вычисление степеней операции свертки плотности $w(x)$ осуществляется на основе формулы

$$w_*^{m+1}(x) = \int_0^x w(x-y)w_*^m(y)dy = \int_0^x \theta(x-y)\theta(1-x+y)w_*^m(y)dy. \quad (4.2)$$

Очевидно, что $w_*^m(x) = \theta(x)w_*^m(x)$. Более того, на основе формулы (4.2) индукцией по m доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. *Каждая плотность $w_*^m(x)$ сосредоточена на $[0, m]$, $m = 1, 2, 3, \dots$, т. е. имеет место формула $w_*^m(x) = \theta(m-x)w_*^m(x)$.*

Доказательство. Заменим плотность $w_*^m(y)$ в подынтегральном выражении на $w_*^m(y)\theta(m-y)$, согласно предположению индукции. Ввиду того, что при $x > m+1$ и $y < m$, $1+y > x$ должно выполняться $1+m > 1+y > x > m+1$, что невозможно, имеем $\theta(m-y)\theta(1-x+y)\theta(x-m-1) = 0$. Следовательно, интеграл в (4.2) пропорционален $\theta(m+1-x)$. $\square$

Согласно (4.2), учитывая, что функция $w_*^{m+1}(x)$ сосредоточена на $[0, m+1]$, запишем ее выражение на этом отрезке в виде

$$w_*^{m+1}(x) = \int_0^x \theta(x-y)\theta(1-x+y)w_*^m(y)dy = \int_0^x w_*^m(y)dy + \theta(x-1) \int_{x-1}^x w_*^m(y)dy. \quad (4.3)$$

Индукцией по m с использованием (4.2) доказывается, что функции $w_*^m(x)$ непрерывны, начиная с $m = 2$, и при $m > 2$ они s раз непрерывно дифференцируемы, где $s < m-2$.

На основе формулы (4.3) докажем следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Для функций $w_*^m(x)$ имеет место представление*

$$w_*^m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x), \quad (4.4)$$

где для полиномов $P_{m,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $m = 1, 2, 3, \dots$ справедливы рекуррентные соотношения

$$P_{m+1,0}(x) = \int_0^x P_{m,0}(y)dy, \quad x \in [0, 1]; \quad (4.5)$$

$$P_{m+1,m}(x) = \int_{x-1}^m P_{m,m-1}(y)dy, \quad x \in [m, m+1]; \quad (4.6)$$

$$P_{m+1,k}(x) = \int_{x-1}^k P_{m,k-1}(y)dy + \int_k^x P_{m,k}(y)dy, \quad x \in [k, k+1], k = 1 \div m-1. \quad (4.7)$$

Доказательство. Представление (4.4) имеет место при $m = 1$ с $P_{1,0}(x) = 1$. Построим индукционный шаг от m к $m+1$. Подстановка разложения (4.4) в правую часть формулы (4.7) при $x \in [0, m+1]$ приводит к равенству

$$w_*^{m+1}(x) = \theta(1-x) \int_0^x P_{m,0}(y)dy + \theta(x-1) \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy, \quad (4.8)$$

где учтено, что в первый интеграл дает ненулевой вклад только слагаемое с полиномом $P_{m,0}(y)$. Последний интеграл при $k = 0, 1, 2, \dots$ запишем в виде

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \theta(x-k)\theta(k+2-x) \int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy,$$

так как при $x-1 > k+1$ и при $x < k$ он равен нулю.

При $k < m$, если $k+1 < x < k+2$, то $k < x-1 < k+1$, и в этом случае

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \int_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy;$$

если же $k < x < k+1$, то $x-1 < k$, и в этом случае

$$\int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy = \int_k^x P_{m,k}(y)dy.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{x-1}^x \theta(y-k)\theta(k+1-y)P_{m,k}(y)dy &= \theta(x-k-1)\theta(k+2-x) \int_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy + \\ &+ \theta_k\theta(x-k)\theta(k+1-x) \int_k^x P_{m,k}(y)dy, \end{aligned}$$

где $\theta_k = 1 - \delta_{k,0}$. Подставив полученные представления для интегралов в (4.8), находим, что

$$\begin{aligned} w_*^{m+1}(x) &= \theta(x)\theta(1-x) \int_0^x P_{m,0}(y)dy + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \left[\theta_k\theta(x-k)\theta(k+1-x) \int_k^x P_{m,k}(y)dy + \theta(x-k-1)\theta(k+2-x) \int_{x-1}^{k+1} P_{m,k}(y)dy \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x) \left[\int_k^x P_{m,k}(y)dy + \int_{x-1}^k P_{m,k-1}(y)dy \right] + \\ &+ \theta(x)\theta(1-x) \int_0^x P_{m,0}(y)dy + \theta(x-m)\theta(m+1-x) \int_{x-1}^m P_{m,m-1}(y)dy. \end{aligned}$$

Определяя функции $P_{m+1,0}(x)$, $P_{m+1,m}(x)$, $P_{m+1,k}$, $k = 1 \div m-1$, согласно (4.5)–(4.7), получаем искомое представление для плотности $w_*^{m+1}(x)$:

$$w_*^{m+1}(x) = \sum_{k=0}^m \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m+1,k}(x).$$

□

Следствие 4.3. Полиномы $P_{m+1,k}(x)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ удовлетворяют тождествам

$$P_{m,k}(x) = P_{m,m-1-k}(m-x). \quad (4.9)$$

Доказательство. Подставляя в тождество (4.1) разложения для функций $w_*^m(x)$ и $w_*^m(m-x)$ по формуле (4.4), находим, что должно выполняться равенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(m-x-k)\theta(k+1-m+x)P_{m,k}(m-x).$$

Замена переменной суммирования $m - 1 - k$ на k в сумме правой части равенства приводит к тождеству

$$\sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,k}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k)\theta(k+1-x)P_{m,-1-k}(m-x),$$

из которого следует, что имеет место (4.9) при $x \in [k, k+1]$. $\square$

Замечание 4.1. Из условия непрерывности плотностей w_*^m , $m \geq 2$ и непрерывности их производных $(w_*^m)^{(s)}$ порядка $s \leq m-2$, $m > 2$ в точках $x = 1 \div m$, заключаем, что полиномы $P_{m,k}$ должны обладать свойством $P_{m,k}^{(s)}(k+1) = P_{m,k+1}^{(s)}(k+1)$ при $k = 0 \div m-2$ и указанных значениях s , а также должно выполняться $P_{m,m-1}(m) = 0$.

Явный вид полиномов $P_{m,k}$ находится на основе формул (4.3)–(4.5), $k = 1 \div m$, $m \in \mathbb{N}$. Он определяется ими однозначно, если учесть, что $P_{1,0}(x) = 1$ вследствие определения функции $w(x) = \theta(x)\theta(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$ и разложения (3.1). Этот факт легко устанавливается рассуждением по индукции при $m \in \mathbb{N}$ при заданной функции $P_{1,0}(x)$ сначала для полиномов $P_{m,0}$ и $P_{m,m-1}$, а затем для каждого фиксированного значения $k < m$. Доказательству утверждения, устанавливающего вид полиномов $P_{m,k}$, мы предположим следующие комбинаторные леммы.

Лемма 4.1. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_+$, $s < m$ имеет место тождество

$$\sum_{l=s}^m \frac{(-1)^l}{(l-s)!(m-l)!} = 0.$$

Доказательство. Справедливы следующие тождественные преобразования:

$$\sum_{l=s}^m \frac{(-1)^l}{(l-s)!(m-l)!} = \sum_{l=s}^m (-1)^l \frac{l!}{((l-s)!)^2} C_m^l = \left[\frac{d^s}{d\xi^s} \sum_{l=0}^m (-\xi)^l C_m^l \right]_{\xi=1} = \left[\frac{d^s}{d\xi^s} (1-\xi)^m \right]_{\xi=1} = 0$$

ввиду $x < m$. $\square$

Следствие 4.4. Для любых $m \in \mathbb{N}$ и $s \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ имеет место тождество

$$\sum_{l=1}^m (-1)^l l^s C_m^l = 0. \quad (4.10)$$

Доказательство. При $s = 0$ имеем известное комбинаторное тождество. Положим, что (4.10) имеет место для всех $s \in \{0, 1, \dots, t\}$, $t < m-1$. Тогда для любого полинома Π степени не выше, чем t , имеет место аналогичное тождество

$$\sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l \Pi(l) C_m^l = 0.$$

Так как $l(l-1)\dots(l-t+2) = l^{t+1} + \Pi(l)$, где $\deg \Pi \leq t$, то используя тождество леммы 4.2 при $s = t+1$, получаем равенство (4.10) при $s = t+1$. $\square$

Лемма 4.2. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_+$, $n < m$ при $z \in \mathbb{C}$ имеет место тождество

$$(-1)^{m-1} (z-m)^n = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (z-k)^n C_m^k. \quad (4.11)$$

Доказательство. Положив $s = n-k$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, запишем (4.11) в виде

$$(-1)^{m-1} m^{n-k} = \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^l l^{n-k} C_m^l.$$

Просуммировав эти тождества по $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ с применением формулы бинома Ньютона, предварительно умножив их на $(-1)^{n-k} z^k C_n^k$, получим (4.11). $\square$

Теорема 4.4. Для полиномов $P_{m,k}$ справедлива формула

$$P_{m,k}(x) \equiv \frac{S_{m,k}(x)}{(m-1)!}, \quad S_{m,k}(x) = \sum_{l=0}^k (-1)^l (x-l)^{m-1} C_m^l \quad (4.12)$$

при $x \in [k, k+1]$, $k = 0 \div m-1 \in \mathbb{N}$, $m = 2, 3, \dots$

Доказательство. Рассуждая индукцией по $m \in \mathbb{N}$ с использованием формулы (4.5) и условия $P_{1,0}(x) = 1$ при $m = 1$, устанавливаем, что имеет место формула $P_{m,0}(x) = [(m-1)!]x^{m-1}$, $x \in [0, 1]$. Точно также индуктивным рассуждением при $m \in \mathbb{N}$, используя формулу (4.6) при том же условии, если $m = 1$, находим, что $P_{m,m-1}(x) = (-1)^{m-1}[(m-1)!](x-m)^{m-1}$, $x \in [m-1, m]$.

При фиксированных функциях $P_{m,0}$, $m \in \mathbb{N}$ формулу (4.7) можно рассматривать как систему неоднородных интегральных уравнений относительно семейства кусочно-непрерывных функций $\{P_{m,k}(x); k = 1 \div m-1, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$, которые определены, соответственно, на $[k, k+1]$. Эта система уравнений определяет указанное множество полиномов однозначным образом. Необходимо доказать, что все функции этого семейства имеют вид (4.12) при условии, что $P_{m,0}(x) = [(m-1)!]x^{m-1}$, $x \in [0, 1]$ и $P_{m,m-1}(x) = (-1)^{m-1}[(m-1)!](x-m)^{m-1}$, $x \in [m-1, m]$.

Из этой системы уравнений дифференцированием по x получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{P}_{m+1,k}(x) = P_{m,k}(x) - P_{m,k-1}(x-1), \quad k = 1 \div m-1, m \in \mathbb{N}, \quad (4.13)$$

где каждое уравнение выполняется на отрезке $[k, k+1]$ для фиксированных значений k и m . Эта система дифференциальных уравнений однозначно разрешима при дополнительных условиях в точках $x = k$, $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Таковыми являются условия непрерывности $P_{m,k-1}(k) = P_{m,k}(k)$, где $P_{m,1}(1) = P_{m,0}(1) = [(m-1)!]^{-1}$ и $P_{m,m-2}(m-1) = P_{m,m-1}(m-1) = [(m-1)!]^{-1}$, согласно уже вычисленным функциям $P_{m,0}$, $P_{m,m-1}$.

Доказательство теперь состоит в верификации того, что набор полиномов (4.12) удовлетворяет системе уравнений (4.13) и условиям непрерывности. При указанных значениях k и m имеет место $\dot{S}_{m+1,k}(x) = mS_{m+1,k}(x)$. Кроме того, при тех же значениях, имеет место равенство

$$\begin{aligned} S_{m,k}(x) - S_{m,k-1}(x-1) &= \left[x^{m-1} + \sum_{l=1}^k (-1)^l (x-l)^{m-1} (C_m^{l-1} + C_m^l) \right] = \\ &= \sum_{l=0}^k (-1)^l (x-l)^{m-1} C_{m+1}^l = S_{m+1,k}(x), \quad k = 1 \div m-1. \end{aligned}$$

где введены биномиальные коэффициенты C_m^l и использовано тождество $C_m^{l-1} + C_m^l = C_{m+1}^l$. Тогда полиномы $S_{m,k}(x)/(m-1)!$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (4.13). Выполнимость условий непрерывности для этих полиномов в точках $2, \dots, m-2$ следует из того, последнее слагаемое при $l = k+1$ в сумме $S_{m,k+1}(k+1)$ равно нулю и поэтому она совпадает с суммой $S_{m,k}(k+1)$. В точке же $x = 1$ имеем $S_{m,1}(1) = S_{m,0}(1) = 1$. Наконец, выполнимость условия непрерывности в точке $x = m-1$ следует из формулы (4.13) при $x = m$. $\square$

5. Одновершинность функции $g(x)$

В этом разделе мы найдем условия унимодальности функции g — абсолютно непрерывной части плотности распределения $g^{(N)}$ вероятностей экстенсивного функционала от случайной последовательности $\langle \tilde{x}_k, k = 1 \div N \rangle$ в пуассоновском пределе при $0 < p < 1$ в случае, когда компоненты последовательности распределены с общей плотностью $w(x)$.

Тогда формула (2.2), при учете разложения (4.4), принимает вид разложения по целочисленным интервалам

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \sum_{m=1}^N C_N^m p^m (1-p)^{N-m} w_*^m(x) = \sum_{m=1}^N C_N^m p^m (1-p)^{N-m} \sum_{k=0}^{m-1} \theta(x-k) \theta(k+1-x) P_{m,k}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^N \theta(x-k+1) \theta(k-x) R_k^{(N)}(x, p) \end{aligned}$$

с коэффициентами

$$R_k^{(N)}(x, p) = (1-p)^N \sum_{m=k}^N C_N^m \frac{\nu^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l (x-l)^{m-1} C_m^l,$$

$\nu = p/(1-p)$, согласно (4.12). В пуассоновском пределе $N \rightarrow \infty$, $p = \lambda/N$ функция (2.3) $g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g^{(N)}(x)$ представляется разложением

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta(x-k) \theta(k+1-x) R_{k+1}(x, \lambda) \quad (5.1)$$

с коэффициентами $R_k(x, \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} R_k^{(N)}(x, p)$,

$$R_k(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} P_{m,k-1}(x) = e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l!(m-l)!} (x-l)^{m-1}. \quad (5.2)$$

Следующее утверждение описывает дифференциальные свойства функции g .

Теорема 5.1. *При любом $p \in (0, 1)$ функция g — кусочно-гладкая на $\mathbb{R}_+$. Она имеет разрыв 1-го рода в точке $x_* = 1$, с $g(1-0) > g(1+0)$. Точка $x_* = 1$ является ее точкой максимальности. В точке $x = 2$ функция g непрерывна, но имеет разрыв 1-го рода производной в точке $x = 2$ и она непрерывно-дифференцируема на $\mathbb{R}_+ \setminus \{1, 2\}$.*

Доказательство. Наличие разрывов у функции g в $x = 1$ и у функции $\dot{g}$ в $x = 2$, а также непрерывная дифференцируемость g на $\mathbb{R}_+ \setminus \{1, 2\}$ следуют из представления (5.1), в котором функции R_k , $k \in \mathbb{N}$ согласно (5.2) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$, причем из (5.2) также следует, что $R_1(1-0) > R_2(1+0)$, $R_k(k-0) = R_{k+1}(k+0)$, $k \geq 2$ и $\dot{R}_2(2-0) \neq \dot{R}_3(2+0)$, $\dot{R}_k(k-0) = \dot{R}_{k+1}(k+0)$, $k \geq 3$. В самом деле,

$$g(1-0) = R_1(1-0) = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!(m-1)!},$$

$$g(1+0) = R_2(1+0) = e^{-\lambda} = R_1(1-0) - \lambda.$$

Точно также, на основе (5.2), находим

$$\dot{g}(2-0) = \dot{R}_2(2-0) = e^{-\lambda} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!(m-2)!} [2^{m-2} - m], \quad (5.3)$$

$$\dot{g}(2+0) = \dot{R}_3(2+0) = R_2(2-0) - \frac{\lambda^2}{2}. \quad (5.4)$$

Принимая во внимание (5.3), (5.4) и возрастание функции R_1 на отрезке $[0, 1]$, мы видим, что в точке x_* реализуется вершина функции g со значением $R_1(1)$. $\square$

Наконец, докажем утверждение, представляющее условия унимодальности функции g .

Теорема 5.2. *Если параметр $\lambda > 0$ удовлетворяет условию*

$$1 > \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{m!(m-1)!}, \quad (5.5)$$

то функция g имеет единственный максимум в точке $x_ = 1$. Если, наоборот, g имеет единственный максимум в x_* , то параметр λ с необходимостью удовлетворяет условию*

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{\lambda^{m-2}}{m!(m-2)!} < 1/2.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$w_k^{(N)}(x) = e^{-\lambda} \sum_{l=1}^N \frac{\lambda^m}{(m+k)!} w_*^m, \quad k \in \mathbb{N}_+, \quad N \geq 2. \quad (5.6)$$

Достаточность. Доказательство проведем индукцией по N . При $N = 2$ все функции $w_k^{(2)} = \lambda w / (1+k)! + \lambda^2 w_*^2 / (2+k)!$, $k \in \mathbb{N}$ кусочно-непрерывны с разрывом 1-го рода в x_* , одновершинны с вершиной в x_* и не имеют интервалов постоянства, так как непрерывна и не имеет интервалов постоянства функция $w_*^2(x) = x\theta(x)\theta(1-x) + (2-x)\theta(x-1)\theta(2-x)$. Она имеет единственную вершину в x_* , а функция $w(x) = \{1, x \in [0, 1]; 0, x \in (0, \infty)\}$.

Построим индукционный шаг от значения N к значению $N+1$. Положим, что все функции $w_k^{(N)}$ кусочно-непрерывны со скачком в x_* , каждая из них не имеет интервалов постоянства, а также обладает единственной вершиной в x_* . Тогда каждая функция $w * w_k^{(N)}$, $k \in \mathbb{N}_+$ непрерывна, так как непрерывны все функции w_*^m , $m \geq 2$. Каждая из них не имеет интервалов постоянства и имеет единственную вершину z_k , $k \in \mathbb{N}_+$ ввиду сглаживающего свойства функции w . При этом точки z_k удовлетворяют неравенству $z \geq x_*$ ввиду возрастания всех функций w_*^m на $[0, 1]$, $m \geq 2$. Функции $w_k^{(N)}$ по предположению индукции убывают на (x_*, ∞) . Из ограничения на параметр λ в условии теоремы следует, что

$$w_k^{(N)}(0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda}{k!} > e^{-\lambda} \frac{\lambda}{k!} \sum_{m=2}^N \frac{\lambda^m}{m!(m-1)!} > e^{-\lambda} \frac{\lambda}{k!} \sum_{m=2}^N \frac{\lambda^m}{(m+k)!(m-1)!} = w_k^{(N)}(1+0),$$

где использовано неравенство $(m+k)! > k!m!$. Таким образом, скачок $w_k^{(N)}(x_*-0) - w_k^{(N)}(x_*+0) = \lambda^1 / (k+1)!$ у каждой из функций $w_k^{(N)}$ в точке x_* превосходит разность $w_k^{(N)}(0) - w_k^{(N)}(1+0)$. Тогда согласно утверждению 3.4 каждая из функций $(w * w_k^{(N)})(x)$, $k \in \mathbb{N}_+$ имеет вершину $z_k \leq 1$, и поэтому $z_k = x_*$.

Рассмотрим теперь функции $\lambda(w / (k+1)! + w * w_k^{(N)})$ при $k \in \mathbb{N}$. Ввиду $w(x) = \{1, x \in [0, 1]; 0, x \in (0, \infty)\}$ они являются кусочно-непрерывными с одним разрывом 1-го рода в x_* , не имеют интервалов постоянства и одновершинны с вершиной в x_* . Кроме того,

$$\lambda[w / (k+1)! + w * w_k^{(N)}] = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda^{m+1} w_*^{m+1}}{(k+m)!} = w_{k-1}^{N+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

что завершает построение индукционного шага. Из одновершинности всех функций $w_k^{(N)}$ с вершиной в x_* следует, в частности, что таковой является функция с $k = 0$. Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем, что предельная функция $g = \lim_{N \rightarrow \infty} w_0^{(N)}$ одновершинна с вершиной в точке $x_* = 1$, так как предел одновершинных функций является одновершинной функцией.

Необходимость. Если g одновершинна с вершиной в точке x_* , то $\dot{g}(x_*+0) < 0$. Следовательно, должно выполняться $\dot{R}_2(1+0) < 0$. Из формулы (5.2), вычислив производную в точке $x = 1$, находим $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!(m-2)!} < \lambda^2$. □

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование возможности реализации унимодальности абсолютно непрерывной части распределения вероятностей суммы неотрицательных независимых одинаково распределенных на случайных величин. Решенную задачу нужно рассматривать как частный случай общей проблемы определения качественно различных распределений вероятностей для значений экстенсивных функционалов от траекторий стационарных случайных процессов и, в частности, определение тех ситуаций, когда эти распределения являются унимодальными. Исследования в этом направлении представляются важными с точки зрения приложений в теоретической физике, так как потеря свойства унимодальности у распределения вероятностей (и более общо, точной унимодальности [1, 13, 14]) указывает на проявление приводящего к такой ситуации какого-то физического механизма. Нужно отметить, что даже в рамках той относительно простой математической модели, которая исследовалась в настоящей работе, задача не решена исчерпывающим образом. Во-первых, по-видимому, при увеличении параметра λ должна происходить потеря свойства унимодальности. В этом случае возникает вопрос об определении числа вершин распределения.

Во-вторых, важно исследовать функции g_N при конечных значениях N с точки зрения определения области изменения параметра p , в которой они являются унимодальными. В-третьих, очень важно распространить результаты настоящей работы на распределения вероятностей более общего вида для случайных величин $\tilde{x}_k$, например, на класс всех строго одновершинных распределений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакиров Н. К. Экстремумы распределений квадратичных форм от гауссовских величин // Теор. вер. и ее примен. — 1989. — 34, № 2. — С. 241–250.
2. Брагинский Р. П., Гнеденко Б. В., Зайцева Г. М., Молчанов С. А. Теоретическое и статистическое исследование дефектного множества в эмаль-лаковых электроизоляционных покрытиях // Докл. АН СССР. — 1988. — 303, № 2. — С. 270–274.
3. Вирченко Ю. П., Новосельцев А. Д. Унимодальность распределений вероятностей для максимумов выборки независимых эрланговских случайных величин // Прикл. мат. и физ. — 2019. — 51, № 3. — С. 366–373.
4. Вирченко Ю. П., Новосельцев А. Д. Бифуркация распределения напряжений электрического пробоя эмаль-лаковых полимерных покрытий // В сб.: «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». — Воронеж: Науч.-иссл. публ., 2021. — С. 1530–1534.
5. Высочанский Д. Ф., Петунин Ю. И. Обоснование правила 3σ для унимодальных распределений // Теор. вер. и мат. стат. — 1980. — 21. — С. 25–36.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Либроком, 2011.
7. Ибрагимов И. А. О композиции одновершинных распределений // Теор. вер. и ее примен. — 1956. — 1, № 2. — С. 283–288.
8. Лукач Е. Характеристические функции. — М.: Наука, 1979.
9. Хинчин А. Я. Об унимодальных распределениях // Изв. НИИ Томск. мат. ин-та. — 1938. — 2, № 2. — С. 1–7.
10. Medgyssy P. On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distributions and of convex characteristic functions // Magyar Tud. Acad. Mat. Kutató Intér. Közl. — 1963. — 8. — С. 425–430.
11. Medgyssy P. On a new class of infinitely divisible functions and related topics // Studia Sci. Math. Hungar. — 1967. — 2. — С. 441–446.
12. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. Unimodality of a class of distributions connected with complex Ornstein–Uhlenbeck process // Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. — 1988. — № 1. — С. 55–87.
13. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. Essential unimodality of probability distributions of random quadratic functionals // Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. — 1990. — № 12. — С. 3–4.
14. Virchenko Yu. P., Mazmanishvili A. S. Essential unimodality of probabilistic distributions for random quadratic functionals // Cybernet. Systems Anal. — 1992. — 285, № 2. — С. 312–315.
15. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D. Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables // J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 1479. — 012104. — DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012104.
16. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D. Bifurcation of distribution function of electric breakdown voltages of polymer enamel-lacquer coatings // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1902. — 012091. — DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012091.

Ю. П. Вирченко

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия

E-mail: virch@bsu.edu.ru

А. М. Теволде

Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

E-mail: amanuelmt1@gmail.com

UDC 519.213

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560

EDN: VSOLEA

Unimodality of the probability distribution of the extensive functional of samples of a random sequence

Yu. P. Virchenko¹ and A. M. Tevolde²

¹*Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia*

²*Belgorod State University, Belgorod, Russia*

Abstract. We establish a criterion for the unimodality of the probability distribution of a functional that is represented by the sum of a set of independent identically distributed random nonnegative variables $\tilde{x}_k$ with a random number of terms distributed according to Poisson. The general distribution of terms $\tilde{x}_k$ is concentrated on the interval $[0, 1]$ and is such that $\Pr\{\tilde{x}_k = 0\} \neq 0$. Its absolutely continuous part is asymptotically close to a uniform distribution. We introduce the concept of smoothing functions and establish an explicit form of the distribution of any fixed number of terms uniformly distributed on $[0, 1]$.

Keywords: sum of independent identically distributed random variables, unimodality of probability distribution, smoothing function, single-peak function.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: Yu. P. Virchenko, A. M. Tevolde, “Unimodality of the probability distribution of the extensive functional of samples of a random sequence,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 542–560. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-542-560>

REFERENCES

1. N. K. Bakirov, “Ekstremumy raspredeleniy kvadratichnykh form ot gaussovskikh velichin” [Extrema of distributions of quadratic forms from Gaussian variables], *Teor. ver. i ee primen.* [Probab. Theor. Appl.], 1989, **34**, No. 2, 241–250 (in Russian).
2. R. P. Braginskii, B. V. Gnedenko, G. M. Zaytseva, and S. A. Molchanov, “Teoreticheskoe i statisticheskoe issledovanie defektного mnozhestva v emal’-lakovykh elektroizolyatsionnykh pokrytiyakh” [Theoretical and statistical study of defect set in enamel-varnish electrical insulating coatings], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **303**, No. 2, 270–274 (in Russian).
3. Yu. P. Virchenko and A. D. Novosel’tsev, “Unimodal’nost’ raspredeleniy veroyatnostey dlya maksimumov vyborki nezavisimyykh erlangovskikh sluchaynykh velichin” [Unimodality of probability distributions for maxima of samples of independent Erlang random variables], *Prikl. mat. i fiz.* [Appl. Math. Phys.], 2019, **51**, No. 3, 366–373 (in Russian).
4. Yu. P. Virchenko and A. D. Novosel’tsev, “Bifurkatsiya raspredeleniya napryazheniy elektricheskogo proboya emal’-lakovykh polimernykh pokrytiy” [Bifurcation of the distribution of electrical breakdown voltages of enamel-varnish polymer coatings], In: *Aktual’nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki* [Current Issues in Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics], Nauch.-issl. publ., Voronezh, 2021, pp. 1530–1534 (in Russian).
5. D. F. Vysochanskii and Yu. I. Petunin, “Obosnovanie pravila 3σ dlya unimodal’nykh raspredeleniy” [Justification of the 3σ rule for unimodal distributions], *Teor. ver. i mat. stat.* [Probab. Theor. Math. Stas.], 1980, **21**, 25–36 (in Russian).



6. B. V. Gnedenko, *Kupc teopii vepoyatnoctey* [Course in Probability Theory], Librokom, Moscow, 2011 (in Russian).
7. I. A. Ibragimov, “O kompozitsii odnovershinnykh raspredeleniy” [On the composition of single-peak distributions], *Teor. ver. i ee primen.* [Probab. Theor. Appl.], 1956, **1**, No. 2, 283–288 (in Russian).
8. E. Lukach, *Kharakteristicheskie funktsii* [Characteristic Functions], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
9. A. Ya. Khinchin, “Ob unimodal’nykh raspredeleniyakh” [Ob unimodal’nykh raspredeleniyakh], *Izv. NII Tomsk. mat. in-ta* [Bull. Research Inst. Tomsk Math. Inst.], 1938, **2**, No. 2, 1–7 (in Russian).
10. P. Medgyssy, “On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distributions and of convex characteristic functions,” *Magyar Tud. Acad. Mat. Kutató Intér. Közl.*, 1963, **8**, 425–430.
11. P. Medgyssy, “On a new class of infinitely divisible functions and related topics,” *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1967, **2**, 441–446.
12. Yu. P. Virchenko and A. S. Mazmanishvili, “Unimodality of a class of distributions connected with complex Ornstein–Uhlenbeck process,” *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1988, No. 1, 55–87.
13. Yu. P. Virchenko and A. S. Mazmanishvili, “Essential unimodality of probability distributions of random quadratic functionals,” *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1990, No. 12, 3–4.
14. Yu. P. Virchenko and A. S. Mazmanishvili, “Essential unimodality of probabilistic distributions for random quadratic functionals,” *Cybernet. Systems Anal.*, 1992, **285**, No. 2, 312–315.
15. Yu. P. Virchenko and A. D. Novoseltsev, “Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, **1479**, 012104, DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012104.
16. Yu. P. Virchenko and A. D. Novoseltsev, “Bifurcation of distribution function of electric breakdown voltages of polymer enamel–lacquer coatings,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, **1902**, 012091, DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012091.

Yu. P. Virchenko

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

A. M. Tevolde

Belgorod State University, Belgorod, Russia

E-mail: amanuelmt1@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574

EDN: VXYWFZ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Д. Дж. Джосеф

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В статье представлено подробное изложение неравенства Бернштейна, неравенств разных метрик и разных размерностей для тригонометрических полиномов в периодических пространствах Морри.

Ключевые слова: пространства Морри, неравенство Бернштейна, тригонометрические полиномы.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Д. Дж. Джосеф. Интегральные неравенства для тригонометрических многочленов в периодических пространствах Морри // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 561–574. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574>

1. ВВЕДЕНИЕ

Определение 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\mu^*(\mathbb{R}^n)$ множество всех тригонометрических многочленов порядка, не превышающего μ по каждой переменной:

$$T_\mu(x) = T_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{-\mu \leq k_j \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_{k_j} e^{ik \cdot x} = \sum_{-\mu \leq k_1 \leq \mu} \cdots \sum_{-\mu \leq k_n \leq \mu} c_{k_1, \dots, k_n} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}, \quad (1.1)$$

где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $c_{k_1, \dots, k_n} \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты, такие что $c_{-k} = \bar{c}_k$ (при этом $T_\mu(x) \in \mathbb{R}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$).

Пусть далее $1 \leq p \leq \infty$. Снабдим линейное пространство $\mathfrak{M}_\mu^*(\mathbb{R}^n)$ нормой

$$\|f\|_{L_p}^* = \|f\|_{L_p(Q(0, \pi))} < \infty, \quad (1.2)$$

где $Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_j - y_j| < r, j = 1, \dots, n\}$. Обозначим получившееся нормированное пространство через $\mathfrak{M}_{\mu, p}^*(\mathbb{R}^n)$.

В книге [3] доказаны следующие неравенства для тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu, p}^*(\mathbb{R}^n)$.

1. (неравенство Бернштейна) Пусть $1 \leq p \leq \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu, p}^*(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|_{L_p}^* \leq \mu \|T_\mu\|_{L_p}^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

2. (*неравенство разных метрик*) Пусть $1 \leq p < q \leq \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|T_\mu\|_{L_q}^* \leq 3^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{L_p}^*. \quad (1.4)$$

3. (*неравенство разных измерений*) Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq m < n$, $x = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\left\| \|T_\mu(u, v)\|_{L_{\infty, v}(\mathbb{R}^{n-m})} \right\|_{L_{p, u}(\mathbb{R}^m)}^* \leq 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^*, \quad (1.5)$$

в частности,

$$\|T_\mu(u, 0)\|_{L_p(\mathbb{R}^m)}^* \leq 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^*. \quad (1.6)$$

Неравенства (1.4)–(1.6) были доказаны в книге [3] с помощью эквивалентной нормы $((T_\mu))^*_{L_p}$, определяемой следующим образом: пусть

$$1 \leq p \leq \infty, \quad x_{k_i} = k_i \frac{2\pi}{N}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad k_i \in 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, n$$

$$((T_\mu))^*_{L_p} = \max_{u \in Q(0, \pi)} \left(\left(\frac{2\pi}{N} \right)^n \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_n=1}^N |T_\mu(x_{k_1} - u_1, \dots, x_{k_n} - u_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.7)$$

Неравенства (1.4)–(1.6) можно также доказать, используя представления тригонометрических многочленов в виде свертки его с некоторым ядром, см., например, книгу [7], где используется представление в виде свертки с ядром Валле-Пуссена $\mathfrak{V}_\mu$:

$$T_\mu = \mathfrak{V}_\mu * T_\mu. \quad (1.8)$$

Целью настоящей работы является доказательство аналогичных неравенств в случае, когда пространство $(L_p)^*$ заменено на периодическое пространство Морри $(M_p^\lambda)^*$. Для их доказательства будут использованы оба подхода. Основные результаты этой работы были сформулированы без доказательства в заметке [5].

Отметим также, что неравенство Бернштейна, неравенства разных метрик и разных измерений для целых функций экспоненциального типа для пространств $L_p(\mathbb{R}^n)$ доказаны С. М. Никольским [3], а для пространств Морри M_p^λ — в работах [1, 4].

2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА МОРРИ $(M_p^\lambda)^*$

Пространства $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, называемые теперь пространствами Морри, были впервые рассмотрены Чарльзом Морри [6] в связи с исследованием регулярности решений дифференциальных уравнений с частными производными. Их периодический аналог был рассмотрен в [2].

Определение 2.1 (см. [2]). Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда функция $f \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$, если она имеет период 2π , измерима по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|_{M_p^\lambda}^* = \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x, r))} < \infty. \quad (2.1)$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

1. Из определения сразу видно, что при $\lambda = 0$

$$\|f\|_{M_p^0}^* = \|f\|_{L_p}^*.$$

2. При $\lambda = \frac{n}{p}$

$$\|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}}^* = \|f\|_{L_\infty}^*.$$

3. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то пространства $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ состоят только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$.

4. Отметим, что пространство $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ обладает свойством монотонности по параметру λ :

$$(M_p^\mu)^* \subset (M_p^\lambda)^*, \quad 0 \leq \lambda < \mu \leq \frac{n}{p}, \quad 0 < p < \infty. \quad (2.2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|g\|_{M_p^\lambda}^* &= \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x, r))} = \\ &= \pi^{-\lambda} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^\lambda \|f\|_{L_p(Q(x, r))} \leq \\ &\leq \pi^{-\lambda} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^\mu \|f\|_{L_p(Q(x, r))} = \\ &= \pi^{\mu-\lambda} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\mu} \|f\|_{L_p(Q(x, r))} = \pi^{\mu-\lambda} \|f\|_{M_p^\mu}^*, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\|f\|_{M_p^\lambda}^* \leq \pi^{\mu-\lambda} \|f\|_{M_p^\mu}^*. \quad (2.3)$$

5. В [2] доказано, что для любых $p > 0$ и $f \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|f\|_{M_p^\lambda}^* = \|f\|_{M_p^\lambda}^{**} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x, r))}^*. \quad (2.4)$$

6. Инвариантность относительно сдвига: для любых $f \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|f(y+h)\|_{M_p^\lambda}^* = \|f(y)\|_{M_p^\lambda}^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f(y+h)\|_{M_p^\lambda}^* &= \|f(y+h)\|_{M_p^\lambda}^{**} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \|f(y+h)\|_{L_p(Q(x, r))}^* = \\ &\stackrel{(z=y+h)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \|f(z)\|_{L_p(Q(x+h, r))}^* = \\ &\stackrel{(x+h=u)}{=} \sup_{u \in \mathbb{R}^n} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \|f(z)\|_{L_p(Q(u, r))}^* = \|f\|_{M_p^\lambda}^*. \end{aligned}$$

7. $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n) \subset (L_p)^*(\mathbb{R}^n)$, причем для любых $f \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{L_p}^* \leq \pi^\lambda \|f\|_{M_p^\lambda}^*. \quad (2.6)$$

Действительно,

$$\|f\|_{M_p^\lambda}^* \geq \sup_{0 < r < \pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(0, r))} \geq \pi^{-\lambda} \sup_{0 < r < \pi} \|f\|_{L_p(Q(0, r))} = \pi^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(0, \pi))} = \pi^{-\lambda} \|f\|_{L_p}^*.$$

3. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПРОСТРАНСТВАХ $(M_p^\lambda)^*$

3.1. Неравенство Бернштейна. В одномерном случае интерполяционная формула для произвольного тригонометрического многочлена T_μ порядка $\mu \in \mathbb{N}$ имеет вид (см. [3]):

$$T'_\mu(x) = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu(x + x_k), \quad (3.1)$$

где x_k — нули многочлена $\cos(nx)$.

Если положить здесь $T_\mu(x) = \sin(\mu x)$ и $x = 0$, то получим

$$\mu = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}}. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. Пусть Z^* — нормированное пространство периодических функций периода 2π по каждой переменной, причем норма $\|\cdot\|_Z^*$ инвариантна относительно сдвига, т. е. для любой функции $f \in Z^*$

$$\|f(x+h)\|_Z^* = \|f\|_Z^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in Z^*(\mathbb{R}^n)$ порядка $\mu \in \mathbb{N}$ по каждой переменной

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|_Z^* \leq \mu \|T_\mu\|_Z^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Доказательство. Согласно формулам (3.1) и (3.2)

$$\|T'(x)\|_Z^* = \left\| \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^k \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu(x+x_k) \right\|_Z^* \leq \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} \|T_\mu(x+x_k)\|_Z^* = \mu \|T(x)\|_Z^*.$$

В многомерном случае функция $T(x) = T(x_1, \dots, x_n)$ при фиксированных $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ является тригонометрическим многочленом по переменной x_j , поэтому в силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^k \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu \left(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \frac{\pi}{\mu} \left(k - \frac{1}{2} \right), x_{j+1}, \dots, x_n \right) = \\ &= \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^k \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu \left(x + \frac{\pi}{\mu} \left(k - \frac{1}{2} \right) e_j \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где $e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j}, 1, 0, \dots, 0)$. Следовательно, согласно (3.3)

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|_Z^* \leq \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} \left\| T_\mu \left(x + \frac{\pi}{\mu} \left(k - \frac{1}{2} \right) e_j \right) \right\|_Z^* = \mu \|T_\mu\|_Z^*.$$

□

Следствие 3.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда согласно (2.5) $\forall T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|_{M_p^\lambda}^* \leq \mu \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

3.2. Неравенство разных метрик для пространств Морри.

Определение 3.1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $\mu, N \in \mathbb{N}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*(\mathbb{R}^n)$ и

$$((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left(\left(\frac{r}{N} \right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left| T_\mu \left(x_1 + \frac{r}{N} k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N} k_n \right) \right|^p \right)^{1/p}. \quad (3.6)$$

Лемма 3.1. Пусть $n = 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $x_k = x + \frac{r}{N} k$, $x_k < \xi_k < x_{k+1}$, $k = -N, \dots, N-1$. Тогда для любых функций $f: Q(x, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $f' \in L_p(Q(x, r))$

$$\left| \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |f(\xi_k)|^p \right)^{1/p} - \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f \left(x + \frac{r}{N} k \right) \right|^p \right)^{1/p} \right| \leq \frac{r}{N} \|f'\|_{L_p(Q(x,r))}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Положим $x_k = x + \frac{r}{N} k$, $k = -N, \dots, N-1$. Применяя обратное неравенство треугольника и неравенство Гёльдера, получим, что

$$\left| \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |f(\xi_k)|^p \right)^{1/p} - \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |f(x_k)|^p \right)^{1/p} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left| \left(\sum_{k=-N}^{N-1} |f(\xi_k)|^p \right)^{1/p} - \left(\sum_{k=-N}^{N-1} |f(x_k)|^p \right)^{1/p} \right| \leq \\
&\leq \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} |f(\xi_k) - f(x_k)|^p \right)^{1/p} = \\
&= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \int_{x_k}^{\xi_k} f'(t) dt \right|^p \right)^{1/p} \leq \\
&\leq \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int_{x_k}^{\xi_k} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{x_k}^{\xi_k} dt \right)^{1/p'} \right|^p \right)^{1/p} \leq \\
&\leq \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} dt \right)^{1/p'} \right|^p \right)^{1/p} = \\
&= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p'} \right|^p \right)^{1/p} = \\
&= \frac{r}{N} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt \right)^{1/p} = \frac{r}{N} \|f'\|_{L_p(Q(x,r))}.
\end{aligned}$$

□

Лемма 3.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая, 2π -периодическая функция по каждой переменной такая, что

$$\sup_{x \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x_1 + \frac{r}{N}k, \dots, x_n + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\sup_{x \in Q(0,\pi)} \|f\|_{L_p(Q(0,r))} \leq \sup_{x \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x_1, \dots, x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Действительно, при $n = 1$

$$\begin{aligned}
\sup_{-\pi < x < \pi} \|f\|_{L_p(x-r, x+r)} &= \sup_{-\pi < x < \pi} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int_{x + \frac{r}{N}k}^{x + \frac{r}{N}(k+1)} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\
\{t = x + \frac{r}{N}k + \tau\} &= \sup_{-\pi < x < \pi} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int_0^{\frac{r}{N}} \left| f(x + \frac{r}{N}k + \tau) \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \sup_{-\pi < x < \pi} \left(\sup_{0 < \tau < \frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x + \frac{r}{N}k + \tau) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\
\{y = x + \tau\} &= \sup_{-\pi < x < \pi} \left(\sup_{x < y < x + \frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \left(\sup_{-\pi < y < \pi + \frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =
\end{aligned}$$

$$\{\text{в силу } 2\pi\text{-периодичности } f\} = \left(\sup_{-\pi < y < \pi} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.10)$$

Многомерный случай следует n -кратным применением одномерного случая. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $n = 1, N, \mu \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{p}$, тогда для любых $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* \leq ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda} \leq (1 + \frac{\pi}{N}\mu) \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть $r > 0$, $k = -N, \dots, N-1$, $u \in Q(0, \pi)$, $x_k = x + \frac{r}{N}k - u$ и $x_k < \xi_k < x_{k+1}$, таковы, что

$$\int_{x-r}^{x+r} |T_\mu(y)|^p dy = \sum_{k=-N}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |T_\mu(y)|^p dy = \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p. \quad (3.12)$$

Согласно лемме 3.1, неравенству Бернштейна для пространств $(M_p^\lambda)^*$ и равенству (3.12)

$$\begin{aligned} & \sup_{-\pi < x < \pi} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(x_k)|^p \right)^{1/p} = \\ &= \sup_{-\pi < x < \pi} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left[\left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(x_k)|^p \right)^{1/p} - \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p \right)^{1/p} + \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p \right)^{1/p} \right] \leq \\ &\leq \sup_{-\pi < x < \pi} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left[\frac{r}{N} \|T'_\mu\|_{L_p(Q(x,r))} + \left(\frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} |T_\mu(\xi_k)|^p \right)^{1/p} \right] = \\ &= \sup_{-\pi < x < \pi} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left[\frac{\pi}{N} \|T'_\mu\|_{L_p(Q(x,r))} + \|T_\mu\|_{L_p(x-r, x+r)} \right] \leq \\ &\leq \frac{\pi}{N} \|T'_\mu\|_{M_p^\lambda}^* + \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* = (1 + \frac{\pi}{N}\mu) \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \end{aligned}$$

Доказательство левого неравенства (3.11) следует непосредственно из леммы 3.2. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*(\mathbb{R}^n)$, тогда имеет место неравенство

$$\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* \leq ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda} \leq (1 + \frac{\pi}{N}\mu)^n \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \quad (3.13)$$

Доказательство. Согласно лемме 3.2

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* &= \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left(\int_{x_1-r}^{x_1+r} \dots \int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1 \dots x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left(\left(\frac{r}{N} \right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \dots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1 + \frac{r}{N}k_1 \dots x_n + \frac{r}{N}k_n)|^p du \right)^{1/p} = ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda}, \end{aligned}$$

этим доказано первое неравенство.

Докажем второе неравенство (3.13) по индукции. При $n = 1$ оно было доказано в лемме 3.3. Пусть $n > 1$. Допустим теперь, что оно верно для $n - 1$. Зафиксируем x_1 , тогда функция T по-прежнему будет тригонометрической по $x_2 \dots x_n$ и верно неравенство

$$\begin{aligned} & (1 + \frac{\pi}{N}\mu)^{p(n-1)} \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-p\lambda} \int_{x_2-r}^{x_2+r} \dots \int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1 \dots x_n)|^p dx_2 \dots dx_n \geq \\ & \geq \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-p\lambda} \int_{x_2-r}^{x_2+r} \dots \int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1 \dots x_n)|^p dx_2 \dots dx_n \geq \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\geq \left(\frac{r}{N}\right)^{n-1} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-p\lambda} \sum_{k_2=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1, x_{k_2} \dots x_{k_n})|^p. \quad (3.15)$$

Интегрируя (3.14)-(3.15) по x_1 и возводя в степень $1/p$, получим что

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\pi}{N}\mu\right)^{n-1} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-\lambda} \left(\int_{x_1-r}^{x_1+r} \cdots \int_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1 \dots x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} \geq \\ & \geq \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-\lambda} \left(\sum_{k_2=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \int_{x_1-r}^{x_1+r} |T_\mu(x_1, x_{k_2} \dots x_{k_n})|^p dx_1 \right)^{1/p} \geq \\ & \geq \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{(1 + \frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-\lambda} \left(\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \int_{x_1-r}^{x_1+r} |T_\mu(x_1, x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p dx_1 \right)^{1/p} \geq \\ & \geq \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{(1 + \frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-\lambda} \left(\frac{\pi}{N} \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1, x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p \right)^{1/p} \geq \\ & \geq \frac{1}{(1 + \frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r < \pi} r^{-\lambda} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.4. При $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{q}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu, p}^*(\mathbb{R}^n)$

$$((T_\mu))^*_{M_{q, N}^{\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}} \leq N^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} ((T_\mu))^*_{M_{p, N}^\lambda}. \quad (3.16)$$

Доказательство. В силу неравенства Йенсена и определения 3.1:

$$\begin{aligned} ((T_\mu))^*_{M_{q, N}^{\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}} &= \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-(\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \times \right. \\ & \quad \times \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left| T_\mu \left(x_1 + \frac{r}{N} k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N} k_n \right) \right|^q \Big)^{1/q} \leq \\ & \leq \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-(\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))} \left(\frac{r}{N} \right)^{\frac{n}{q}} \left(\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left| T_\mu \left(x_1 + \frac{r}{N} k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N} k_n \right) \right|^p \right)^{1/p} = \\ & = \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-(\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))} \left(\frac{r}{N} \right)^{\frac{n}{q} - \frac{n}{p}} \times \\ & \quad \times \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left| T_\mu \left(x_1 + \frac{r}{N} k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N} k_n \right) \right|^p \right)^{1/p} = \\ & = N^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}} \sup_{x \in Q(0, \pi)} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left| T_\mu \left(x_1 + \frac{r}{N} k_1, \dots, x_n + \frac{r}{N} k_n \right) \right|^p \right)^{1/p} = \\ & = N^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} ((T_\mu))^*_{M_{p, N}^\lambda}. \end{aligned}$$

□

Теорема 3.3. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu, p}^*(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\lambda - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}}^* \leq (1 + \pi)^n \mu^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \quad (3.17)$$

Доказательство. Для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}^* &\leq ((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leq N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda} \leq N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1 + \frac{\pi}{N} \mu)^n \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* \leq \\ &\leq \left(\frac{\mu}{N}\right)^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} (1 + \frac{\pi}{N} \mu)^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \end{aligned}$$

Полагая здесь $N = \mu$, получим неравенство (3.17). $\square$

Рассмотрим свёртку функций $\varphi, g \in L_1(Q(0, \pi))$, 2π -периодических по каждой переменной:

$$(\varphi * g)(x) = \int_{Q(0, \pi)} \varphi(x - y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.18)$$

Напомним, что $\forall k \in \mathbb{Z}^n$:

$$c_k(\varphi * g) = (2\pi)^n c_k(\varphi)c_k(g). \quad (3.19)$$

Если $c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n}$ для $k \in \mathbb{Z}^n$, для которых $c_k(g) \neq 0$, то

$$c_k(g) = c_k(\varphi * g). \quad (3.20)$$

Лемма 3.5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L_1(Q(0, \pi))$ — 2π -периодическая функция по каждой переменной. Для того, чтобы для любого тригонометрического многочлена T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, выполнялось равенство

$$T_\mu = \varphi * T_\mu, \quad (3.21)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \leq \mu, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть равенство (3.21) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной. Согласно (3.19)

$$(2\pi)c_k(\varphi)c_k(T_\mu) = c_k(T_\mu)$$

для любых $k \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $|k_j| \leq \mu$, $j = 1, \dots, n$. Для каждого такого k существует тригонометрический многочлен T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, для которого $c_k(T_\mu) \neq 0$, откуда следует, что выполняется равенство (3.22).

Достаточность. Пусть выполняется равенство (3.22) для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной:

$$T_\mu(x) = \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k e^{ik \cdot x} = \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu) e^{ik \cdot x}.$$

тогда

$$\begin{aligned} (\varphi * T_\mu)(x) &= \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu)(\varphi * e^{ik \cdot x})(x) = \\ &= \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu) \left(\int_{Q(0, \pi)} \varphi(x - \xi) e^{ik \cdot \xi} d\xi \right) = \\ &= \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu) \left(\int_{Q(0, \pi)} \varphi(x - \xi) e^{ik \cdot (x - \xi)} d\xi \right) e^{ik \cdot x} = \\ &= \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu) \left(\int_{Q(x, \pi)} \varphi(y) e^{ik \cdot y} dy \right) e^{ik \cdot x} = \\ &= \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu) (2\pi)^n c_k(\varphi) e^{ik \cdot x} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} c_k(T_\mu) e^{ik \cdot x} = (T_\mu)(x).$$

□

Определение 3.2 (ядро Дирихле). Для $\mu \in \mathbb{N}$

$$D_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\mu}^{\mu} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\mu} \cos(kx) = \frac{\sin(\mu + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad (3.23)$$

$$\tilde{D}_\mu(x) = \frac{1}{\pi} D_\mu(x). \quad (3.24)$$

Отметим, что

$$\|\tilde{D}_\mu\|_{L_2}^* = \sqrt{\frac{2\mu+1}{2\pi}} \quad (3.25)$$

и

$$\|\tilde{D}_\mu\|_{L_\infty}^* = \frac{2\mu+1}{2\pi}. \quad (3.26)$$

Из неравенств (3.25) и (3.26) следует, что для любых $2 < p < \infty$

$$\|\tilde{D}_\mu\|_{L_p}^* \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi} \right)^{1-\frac{1}{p}}, \quad (3.27)$$

так как согласно интерполяционному неравенству для лебеговых пространств

$$\|\tilde{D}_\mu\|_{L_p}^* \leq \left(\|\tilde{D}_\mu\|_{L_2}^* \right)^{\frac{2}{p}} \left(\|\tilde{D}_\mu\|_{L_\infty}^* \right)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Частным случаем равенства (3.21) является хорошо известное равенство

$$T_\mu(x) = \tilde{D}_\mu(x) * T_\mu(x).$$

Замечание 3.1. Если φ — тригонометрический многочлен порядка μ по каждой переменной, то равенство (3.21) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{|k_j| \leq \mu \\ j=1, \dots, n}} e^{ik \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{|k_j| \leq \mu} e^{ik_j x_j} = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^n D_\mu(x_j) = \prod_{j=1}^n \tilde{D}_\mu(x_j).$$

Замечание 3.2. Пусть для $\alpha, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_\alpha(j) = \{k \in \mathbb{Z}^n, |k_j| \leq \alpha\} \quad \text{и} \quad \Delta_\alpha = \Delta_\alpha(1) \times \dots \times \Delta_\alpha(n).$$

Если φ — тригонометрический многочлен порядка $\nu > \mu$ по каждой переменной, то равенство (3.21) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \Delta_\nu} c_k e^{ik \cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \Delta_\mu} e^{ik \cdot x} + \sum_{k \in \Delta_\nu \setminus \Delta_\mu} c_k e^{ik \cdot x} = \prod_{j=1}^n \tilde{D}_\mu(x_j) + \sum_{k \in \Delta_\nu \setminus \Delta_\mu} c_k e^{ik \cdot x}. \quad (3.28)$$

(В частности, при $n = 1$ имеем $\varphi(x) = \tilde{D}_\mu(x) + \left(\sum_{k=-\nu}^{-\mu-1} + \sum_{k=\mu+1}^{\nu} \right) c_k e^{ik \cdot x}$.)

Определение 3.3. Для $\mu \in \mathbb{N}$ обозначим через J_μ^* множество всех 2π -периодических функций $\varphi \in L_1(Q(0, \pi))$, удовлетворяющих условию (3.22) (следовательно, имеющих вид (3.28) для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq \mu$).

Согласно лемме 3.5 для таких функций φ справедливо равенство (3.21).

Определение 3.4 (см. [7]). Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \mu$. Ядро Валье-Пуассена определяется следующим образом:

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = (\nu - \mu)^{-1} \sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x), \quad (3.29)$$

в частности,

$$\mathfrak{V}_{\mu}(x) = \mathfrak{V}_{\mu,2\mu}(x), \quad \mu \geq 1, \quad \mathfrak{V}_0(x) = 1. \quad (3.30)$$

Замечание 3.3. Для $\nu > \mu$ представим ядро Дирихле в виде

$$D_{\nu}(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos \mu x + (\cos(\mu+1)x + \cdots + \cos \nu x) = D_{\mu}(x) + D_{\mu,\nu}(x),$$

где

$$D_{\mu,\nu}(x) = \sum_{l=\mu+1}^{\nu} \cos lx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) &= \frac{1}{\nu - \mu} \sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x) = \frac{1}{\nu - \mu} \left(D_{\mu}(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_l(x) \right) = \\ &= \frac{1}{\nu - \mu} \left(D_{\mu}(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} \left(D_{\mu}(x) + D_{\mu,l}(x) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\nu - \mu} \left((\nu - \mu) D_{\mu}(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_{\mu,l}(x) \right) = \\ &= D_{\mu}(x) + \frac{1}{\nu - \mu} \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_{\mu,\nu}(x). \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x), \quad \tilde{D}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi} D_{\mu,\nu}(x), \quad (3.31)$$

тогда

$$\tilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \tilde{D}_{\mu}(x) + \frac{1}{\nu - \mu} \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} \tilde{D}_{\mu,\nu}(x). \quad (3.32)$$

Частным случаем равенства (3.21) является равенство

$$T_{\mu}(x) = \tilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) * T_{\mu}(x), \quad (3.33)$$

в частности,

$$T_{\mu}(x) = \tilde{\mathfrak{V}}_{\mu}(x) * T_{\mu}(x). \quad (3.34)$$

Теорема 3.4 (см., например [7]). Пусть $\mu \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда

$$\|\tilde{\mathfrak{V}}_{\mu}(x)\|_{L_p}^* \leq 3^n \mu^{n(1-1/p)}. \quad (3.35)$$

Теорема 3.5. (Следствие из неравенства типа Юнга для периодических пространств Морри, см. [3]). Пусть

$$0 \leq \lambda < \frac{n}{p}, \quad 1 \leq r, \quad p < q \leq \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

$f_1 \in L_r(\mathbb{R}^n)$ и $f_2 \in (M_p^{\lambda})^*$. Тогда

$$\|f_1 * f_2\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}^* \leq \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})} \|f_1\|_{L_r}^* (\|f_2\|_{M_p^{\lambda}}^*)^{\frac{p}{q}} (\|f_2\|_{L_p}^*)^{1-\frac{p}{q}}. \quad (3.36)$$

Теорема 3.6. Пусть $1 \leq r, p < q \leq \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$. Тогда

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}^* \leq c(\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*)^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|_{L_p}^*)^{1-\frac{p}{q}} \leq c\pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^* \quad (3.37)$$

для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, где

$$c = c(\mu, r) = \inf_{\varphi \in J_\mu^*} \|\varphi\|_{L_r}^*. \quad (3.38)$$

Доказательство. Используя равенство (3.21) и теорему 3.5, получим, что для любой функции $\varphi \in J_\mu^*$ и для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}^* = \|\varphi * T_\mu\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}^* \leq \|\varphi\|_{L_r}^*(\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*)^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|_{L_p}^*)^{1-\frac{p}{q}}. \quad (3.39)$$

Переходя к инфимумам по $\varphi \in J_\mu^*$, получим утверждение теоремы. $\square$

Следствие 3.2. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. Если $\varphi = \tilde{\mathfrak{V}}_\mu(x)$, $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, то из неравенства (3.35) следует, что

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}^* \leq 3^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*)^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|_{L_p}^*)^{1-\frac{p}{q}} \leq 3^n \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})} \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \quad (3.40)$$

Следствие 3.3. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. Если $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, то из неравенства (2.3) и следствия 3.2 вытекает, что

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}^* \leq \pi^{\frac{\lambda p}{q}-\lambda+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{M_q^{\frac{\lambda p}{q}}}^* \leq 3^n \pi^{\frac{n}{p}(1-\frac{p}{q})} \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*. \quad (3.41)$$

Следствие 3.4. Если $1 \leq p \leq 2$, $q \geq \frac{2p}{2-p}$, то для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}}^* \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*)^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|_{L_p}^*)^{1-\frac{p}{q}}, \quad (3.42)$$

в частности, для $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{2}$

$$\|T_\mu\|_{LM_2^{\frac{\lambda}{2}}}^* \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\|T_\mu\|_{LM_1^\lambda}^* \|T_\mu\|_{L_1}^*)^{\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

и

$$\|T_\mu\|_{L_\infty}^* \leq \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \|T_\mu\|_{L_2}^*. \quad (3.44)$$

В последнем неравенстве постоянная точная, равенство достигается для $T_\mu(x) = \prod_{l=1}^n \tilde{D}_\mu(x_l)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $r \geq 2$, в качестве функции φ в теореме 3.6 берется функция $\varphi(x) = \prod_{l=1}^n \tilde{D}_\mu(x_l)$ и используются равенства (3.25) и (3.26). $\square$

Замечание 3.4. Неравенство (3.40) — это периодический аналог неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа из работ [1, 4].

3.3. Неравенство разных измерений для пространств Морри.

Определение 3.5. Пусть

$$0 < p_1, p_2 \leq \infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p_1}, \quad 0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$(M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}))^* \times (M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}))^* \quad (3.45)$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ функций f , для которых

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}^* &= \left\| \|T_\mu(u_1, u_2)\|_{M_{p_1, u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}^* \right\|_{M_{p_2, u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}^* = \\ &= \sup_{y \in Q(0, \pi)(\mathbb{R}^{m_2})} \sup_{0 < \rho \leq \pi} \rho^{-\lambda_2} \left\| \sup_{x \in Q(0, \pi)(\mathbb{R}^{m_1})} \sup_{0 < r \leq \pi} r^{-\lambda_1} \|T_\mu(u_1, u_2)\|_{L_{p_1, u_1}(Q(x, r))} \right\|_{L_{p_2, u_2}(Q(x, r))} < \infty. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

Лемма 3.6. Пусть $0 < p \leq \infty$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_1}{p}$, $0 \leq \lambda_2 \leq \frac{m_2}{p}$. Тогда

$$(M_p^{\lambda_1})^*(\mathbb{R}^{m_1}) \times (M_p^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2}) \subset (M_p^{\lambda_1+\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), \quad (3.47)$$

причем

$$\|T_\mu\|_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})}^* \leq \|T_\mu\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}^*$$

для любых $f \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$.

Доказательство. Пусть $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $r < 0$, тогда

$$Q_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1, u_2), r) = Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r) \times Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r). \quad (3.48)$$

Используя равенство (3.48), получим, что

$$\begin{aligned} \|T_\mu\|_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})}^* &= \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r > 0} r^{-\lambda_1-\lambda_2} \|T_\mu\|_{L_p(Q_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1, u_2), r))}^* = \\ &= \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r > 0} r^{-\lambda_1-\lambda_2} \|T_\mu(v_1, v_2)\|_{L_p(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r) \times Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r))}^* = \\ &= \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r > 0} r^{-\lambda_2} \|r^{-\lambda_1} \|T_\mu(v_1, v_2)\|_{L_{p, v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r))}^* \|_{L_{p, v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r))}^* = \\ &= \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r > 0} r^{-\lambda_2} \left\| \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} r^{-\lambda_1} \|T_\mu(v_1, v_2)\|_{L_{p, v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, r))}^* \right\|_{L_{p, v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r))}^* \leq \\ &\leq \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r > 0} r^{-\lambda_2} \left\| \sup_{u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}} \sup_{\rho > 0} \rho^{-\lambda_1} \|T_\mu(v_1, v_2)\|_{L_{p, v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1, \rho))}^* \right\|_{L_{p, v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r))}^* = \\ &= \sup_{u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} \sup_{r > 0} r^{-\lambda_2} \| \|T_\mu(v_1, v_2)\|_{M_{p, v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}^* \|_{L_{p, v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2, r))}^* = \\ &= \| \|T_\mu(v_1, v_2)\|_{M_{p, v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}^* \|_{M_{p, v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}^* = \|T_\mu\|_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}^*. \end{aligned}$$

□

Теорема 3.7. Пусть $1 \leq p < \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тогда

$$\|T_\mu\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}^* \leq 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}^*. \quad (3.49)$$

Доказательство. Пусть $x = (u, v)$. Так как для любого $u \in Q_{\mathbb{R}^m}(0, \pi)$ имеет место $T_\mu(u, v) \in \mathfrak{M}_{\mu, p}^*(\mathbb{R}^{n-m})$, то согласно неравенству (3.37) с $q = \infty$

$$\|T_\mu(u, v)\|_{L_{\infty, v}(\mathbb{R}^{n-m})}^* \leq 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu(u, v)\|_{L_{p, v}(\mathbb{R}^{n-m})}^*.$$

Следовательно,

$$\|T_\mu\|_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}^* = \| \|T_\mu(u, v)\|_{L_{\infty, v}(\mathbb{R}^{n-m})}^* \|_{M_{p, u}^\lambda(\mathbb{R}^m)}^* \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \| \|T_\mu(u, v)\|_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}^* \|_{M_{p,u}^\lambda(\mathbb{R}^m)}^* = \\
&= 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}^*.
\end{aligned}$$

□

Замечание 3.5. Если $\lambda = 0$, то очевидно, что

$$L_p^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^0)^*(\mathbb{R}^m) = L_p^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times L_p^*(\mathbb{R}^m) = L_p^*(\mathbb{R}^n), \quad (3.50)$$

однако, при $0 < \lambda \leq \frac{m}{p}$ согласно лемме 3.6

$$L_p^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m) \subset (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n), \quad (3.51)$$

но

$$L_p^*(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^m) \neq (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n). \quad (3.52)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буренков В. И., Джосеф Д. Д. Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри // Тр. МИАН. — 2023. — 323. — С. 87–106.
2. Буренков В. И., Тарарыкова Т. В. Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри // Тр. МИАН. — 2016. — 293. — С. 113–132.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
4. Burenkov V. I., Joseph D. J. Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces // Eurasian Math. J. — 2022. — 13, № 3. — С. 92–99.
5. Burenkov V. I., Joseph D. J. Inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces // Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 2. — С. 92–100.
6. Morrey C. D. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Am. Math. Soc. — 1938. — 43, № 1. — С. 126–166.
7. Temlyakov V. Multivariate approximation. — Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

Д. Дж. Джосеф

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: dj_144life@hotmail.com

UDC 517.518

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574

EDN: VXYWFZ

Integral inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces

D. J. Joseph

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we present a detailed exposition of Bernstein's inequality, inequalities of different metrics and different dimensions for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces.

Keywords: Morrey spaces, Bernstein inequality, trigonometric polynomials.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: D. J. Joseph, "Integral inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 561–574. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574>

REFERENCES

1. V. I. Burenkov and D. J. Joseph, "Integral'nye neravenstva dlya tselykh funktsiy eksponentsial'nogo tipa v prostranstvakh Morri" [Integral inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2023, **323**, 87–106 (in Russian).
2. V. I. Burenkov and T. V. Tararykova, "Analog neravenstva Yunga dlya svertok funktsiy dlya obshchikh prostranstv tipa Morri" [Analogue of Young's inequality for convolutions of functions for general Morrey-type spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 113–132 (in Russian).
3. S. M. Nikol'skii, *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
4. V. I. Burenkov and D. J. Joseph, "Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces," *Eurasian Math. J.*, 2022, **13**, No. 3, 92–99.
5. V. I. Burenkov and D. J. Joseph, "Inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces," *Eurasian Math. J.*, 2024, **15**, No. 2, 92–100.
6. C. D. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1938, **43**, No. 1, 126–166.
7. V. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

D. J. Joseph
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: dj_144life@hotmail.com



УДК 517.583 + 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585

EDN: VZNTSH

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ РАВНОМЕРНЫХ СДВИГОВ ТЕТА-ФУНКЦИИ

М. Л. ЖАДАНОВА

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматриваются задачи интерполяции периодических функций и построения биортогональных систем. В качестве базиса используются равномерные сдвиги третьей тета-функции Якоби. Получены явные формулы для узловой функции и функции, порождающей биортогональную систему. Найдены точные значения нижней и верхней констант Рисса.

Ключевые слова: периодическая функция, биортогональная система, интерполяция, тета-функция, целочисленный сдвиг, узловая функция, константа Рисса.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: М. Л. Жаданова. Интерполяция периодических функций и построение биортогональных систем с помощью равномерных сдвигов тета-функции // Соврем. мат. Фундам. на-
правл. 2024. Т. 70, № 4. С. 575–585. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585>

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерполяция с помощью системы целочисленных сдвигов фиксированной базисной функции широко применяется в вычислительной математике и в цифровой обработке сигналов. Для решения задачи интерполяции обычно строится узловая функция, представляющая собой линейную комбинацию сдвигов базисной функции, равная единице в нулевой точке и обращающаяся в ноль во всех остальных целых точках.

Нахождение коэффициентов линейной комбинации сводится к обращению ряда Фурье, построенного с помощью значений в целочисленных точках исходной базисной функции. Реализация данной процедуры для базисных сплайнов описана в [9, гл. 4]. В теории сплайнов вместо термина узловая функция обычно используется название кардинальная функция. Теория интерполяции по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса дана в [15, гл. 7]. При интерполяции периодических функций с помощью тригонометрических полиномов степени не выше заданной роль узловой функции выполняет ядро Дирихле [1, гл. 4]. Таким образом, здесь также можно говорить о системе целочисленных сдвигов.

В настоящее время довольно хорошо изучены системы равномерных сдвигов функций, заданных на всей оси. Ярким примером служат семейства сдвигов, порожденные базисными сплайнами

и функцией Гаусса. Поскольку в прикладных задачах очень часто используются равномерные сетки отсчетов, подобные математические конструкции являются очень удобными и нашли широкое применение [4, 11, 17].

Большой практический интерес представляет ситуация, когда исследуемый сигнал является периодическим. Тогда использовать для аппроксимации быстроубывающие функции не слишком удобно. Логичнее представляется сначала провести их периодизацию. Данная процедура, примененная к функции Гаусса, приводит к третьей тета-функции Якоби, о которой и пойдет речь в этой статье.

Так как тета-функцию можно представить в виде суммы сдвигов функции Гаусса [8, гл. 21], то ее можно рассматривать как периодизацию функции Гаусса (примеры периодизации различных базисных функций см. в [10]). Наличие явных формул построения узловой функции для сдвигов функции Гаусса [15, гл. 7] позволяет сравнительно просто изучить процедуру интерполяции по сдвигам тета-функции.

Тета-функции играют важную роль в теории эллиптических функций [14]. В прикладных задачах в первую очередь используется третья тета-функция Якоби. Хотя она является периодической с периодом π по одной из переменных, ранее ее для интерполяции периодических функций использовали редко, находя коэффициенты разложения численно, не используя явных формул. Однако решение дифференциального уравнения баротропной завихренности при помощи радиальных базисных функций на основе функции Гаусса приводит к необходимости интерполяции именно по сдвигам третьей тета-функции Якоби [10].

Целью данной работы является исследование конечных систем равномерных сдвигов третьей тета-функции Якоби, заданной на своем вещественном периоде. Рассматриваются вопросы интерполяции периодических функций с помощью таких систем, построения биортогональных систем и получения явных формул для констант Рисса, позволяющих оценить устойчивость аппроксимации.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Существует четыре тета-функции Якоби [8, гл. 21], [16, (20.1.1)–(20.1.4)]:

$$\begin{aligned}\theta_1(z, q) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}, \\ \theta_2(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}, \\ \theta_3(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz}, \\ \theta_4(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь $z, q \in \mathbb{C}$, причем $|q| < 1$. Мы, однако, сосредоточим свое внимание на $\theta_3(z, q)$. Это вызвано целым рядом причин. Во-первых, как уже упоминалось, она естественным образом возникает при периодизации функции Гаусса:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+kT)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{T} \theta_3\left(\frac{\pi x}{T}, q_1\right), \quad x \in \mathbb{R},\tag{2.2}$$

где $T > 0$, $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/T^2)$. Соотношение (2.2) называется *формулой тета-преобразования* [4, 9]. Во-вторых, третья тета-функция нашла наиболее широкое применение в математической физике, например, в задачах о теплопроводности [14], [16, (20.13)]. В-третьих, все тета-функции выражаются друг через друга с помощью операции сдвига аргумента, поэтому перенести полученные далее результаты на этот случай не составит никакого труда [16, (20.2.10)–(20.2.14)].

Перейдем к более строгой постановке задачи. Рассматривается пространство $L_2[0, 2\pi]$ комплекснозначных функций. Скалярное произведение и связанная с ним норма задаются стандартным образом:

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Здесь $\overline{g(x)}$ обозначает комплексное сопряжение функции $g(x)$.

Обозначим через $\varphi(x)$ 2π -периодическую функцию, с помощью которой будет строиться система равномерных сдвигов. В нашем случае это третья тета-функция Якоби

$$\varphi(x) = \theta_3\left(\frac{x}{2}, q\right), \quad 0 < q < 1. \quad (2.3)$$

Зададим некоторое натуральное число N . Тогда исследуемое семейство функций выглядит следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \varphi(x - nh), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

где $h = 2\pi/N$. Данное обозначение будет использовано и во всех дальнейших формулах. Такой выбор параметра сдвига h продиктован желанием получить конструкцию, напоминающую по своим свойствам дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [1, гл. 4].

Если $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ — некоторый заданный набор значений, то его прямое ДПФ мы определим следующим образом:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-ikmh}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Обратное ДПФ тогда имеет вид:

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{ikmh}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Отметим одно важное свойство ДПФ — *равенство Парсеваля*, так как оно потребуется нам в дальнейшем:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}_k|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |f_m|^2.$$

Также для удобства будем полагать, что исходный набор значений и его ДПФ периодизированы:

$$f_{m+N} = f_m, \quad \hat{f}_{k+N} = \hat{f}_k.$$

Начнем с задачи об интерполяции. Пусть задана 2π -периодическая функция $f(x)$. Требуется построить интерполирующую функцию

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi(x - nh)$$

с некоторыми коэффициентами c_n , значения которой совпадают с соответствующими значениями $f(x)$ в точках $x_m = mh$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Отметим, что в силу периодичности $f(x)$ и $\varphi(x)$ они будут совпадать также и в точке $x = Nh = 2\pi$. Для решения этой задачи удобно использовать вспомогательную конструкцию под названием узловая функция.

Определение 2.1. Функция $\tilde{\varphi}(x)$, являющаяся линейной комбинацией сдвигов $\varphi(x)$ вида

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \varphi(x - nh),$$

называется *узловой функцией*, если для нее выполнена система равенств

$$\tilde{\varphi}(mh) = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

где $\delta_{0,m}$ — символ Кронекера.

Из определения 2.1 видно, что узловая функция также будет периодической с тем же периодом, что и $\varphi(x)$. Если узловая функция известна, то решение интерполяционной задачи тогда легко построить следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) \tilde{\varphi}(x - nh).$$

Рассмотрим теперь другой подход к представлению функций в виде суммы равномерных сдвигов. Пусть требуется найти ортогональную проекцию некоторой функции $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ на подпространство, образованное $\varphi(x - nh)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Одним из способов решения данной задачи является построение биортогональной системы [7, гл. 1], [3, гл. 1]. Ниже дано соответствующее определение, причем оно сразу адаптировано для рассматриваемого частного случая.

Определение 2.2. Два набора функций $\varphi(x - nh)$ и $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ образуют *биортогональную систему*, если они удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$(\varphi(\cdot - mh), \psi(\cdot - nh)) = \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Поскольку мы имеем дело с семейством сдвигов, для получения биортогональной системы достаточно построить всего одну функцию $\psi_0(x)$, которую в дальнейшем мы будем обозначать просто $\psi(x)$. После этого остается только положить $\psi_n(x) = \psi(x - nh)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Для оценки устойчивости процедуры разложения в ряд по неортогональным системам функций часто применяются константы Рисса [9, гл. 3], [11, гл. 3].

Определение 2.3. Набор функций $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ называется *системой Рисса* в $L_2[0, 2\pi]$, если $\forall c = \{c_n\}$ таких, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1,$$

выполняются неравенства

$$A \leq \left\| \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n \right\|^2 \leq B,$$

где $0 < A, B < \infty$ — постоянные, именуемые *константами Рисса*.

Введем обозначения $A_R = \sup\{A\}$ и $B_R = \inf\{B\}$. Для ортонормированных систем функций $A_R = B_R = 1$. Если функции линейно зависимы, то $A_R = 0$. Ключевую роль играет отношение B_R/A_R . Это, по сути, число обусловленности матрицы Грама, построенной с помощью попарных скалярных произведений функций $\varphi_n(x)$. Чем ближе оно к 1, тем быстрее сходятся итерационные алгоритмы разложения. Также величина B_R/A_R косвенно показывает чувствительность алгоритмов к малым изменениям входных данных [11, гл. 3].

3. УЗЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

Хотя мы имеем дело с конечным набором целочисленных сдвигов одной функции, узловая функция представляется в виде бесконечного ряда Фурье. В этом состоит отличие от процедуры ДПФ.

Теорема 3.1. *Функция*

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} e^{ikx},$$

где $q = \exp(-1/(2\sigma^2))$, $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$, $\sigma > 0$, является узловой для набора точек $x_m = mh$, $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Доказательство. Будем искать $\tilde{\varphi}(x)$ в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \varphi(x - nh),$$

где d_n — неопределенные коэффициенты. Запишем данное выражение в форме ряда Фурье. Для этого подставим в него явный вид третьей тета-функции Якоби:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \theta_3 \left(\frac{x - nh}{2}, q \right) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{ik(x-nh)}.$$

Затем поменяем порядок суммирования:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{ikx} \left(\sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{-iknh} \right).$$

Выражение в скобках представляет собой не что иное, как $\sqrt{N} \hat{d}_k$. С учетом этого имеем:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_k q^{k^2} e^{ikx}. \quad (3.1)$$

Зная $\hat{d}_k$, всегда можно найти и d_n , выполнив обратное ДПФ. Поэтому в дальнейшем основной целью является нахождение $\hat{d}_k$.

Чтобы функция $\tilde{\varphi}(x)$ являлась узловой, она должна удовлетворять набору соотношений (2.5). Это приводит к следующей системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{d}_k$:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_k q^{k^2} e^{ikmh} = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Придадим этой формуле структуру ДПФ с помощью замены $k = Np + n$ и сведения однократной суммы к двойной:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{d}_{Np+n} q^{(Np+n)^2} e^{-i(Np+n)mh}.$$

Поскольку $\hat{d}_{Np+n} = \hat{d}_n$, $e^{-iNpnh} = e^{-i2\pi pm} = 1$, имеем:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{d}_n \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{(Np+n)^2} \right) e^{-inmh} = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{d}_n \alpha_n e^{-inmh},$$

где

$$\alpha_n = \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{(Np+n)^2} \right).$$

Коэффициенты α_n можно выразить через третью тета-функцию Якоби. Для этого сделаем подстановку $q = \exp(-1/(2\sigma^2))$, $\sigma > 0$ и воспользуемся формулой тета-преобразования, положив в ней $T = N$:

$$\alpha_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(pN+n)^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{N} \theta_3 \left(\frac{\pi n}{N}, q_1 \right),$$

где $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$. В результате имеем следующий набор уравнений:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{d}_n \theta_3 \left(\frac{\pi n}{N}, q_1 \right) e^{-inmh} = \delta_{0,m}.$$

Чтобы найти $\hat{d}_n$, осталось только применить обратное ДПФ:

$$\hat{d}_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N} \theta_3 \left(\frac{\pi n}{N}, q_1 \right)}.$$

Подставив это равенство в формулу (3.1), придем непосредственно к утверждению теоремы. $\square$

Замечание 3.1. Из четности третьей тета-функции следует, что

$$\frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} = \frac{q^{(-k)^2}}{\theta_3\left(-\frac{\pi k}{N}, q_1\right)}.$$

Отсюда узловая функция может быть записана в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\theta_3(0, q_1)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} \cos kx \right).$$

4. БИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА

Как следует из доказываемой ниже теоремы, формулы для узловой функции и для функции, порождающей биортогональную систему, отличаются только параметром q и нормировочной константой.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi(x)$ задается формулой (2.3), а $\psi(x)$ определяется выражением

$$\psi(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{3/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} e^{ikx},$$

где $q = \exp(-1/(4\sigma^2))$, $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$, $\sigma > 0$. Тогда функции $\varphi(x - nh)$ и $\psi(x - nh)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ образуют биортогональную систему.

Доказательство. Будем искать функцию

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \varphi(x - nh),$$

где s_n — неопределенные коэффициенты, удовлетворяющую условию ортогональности

$$(\varphi(\cdot - mh), \psi) = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1, представим $\psi(x)$ в виде ряда Фурье:

$$\psi(x) = \sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{s}_k q^{k^2} e^{ikx}. \quad (4.1)$$

Запишем условие ортогональности в терминах коэффициентов Фурье $\sqrt{N}\hat{s}_k q^{k^2}$ и $q^{k^2} e^{-ikmh}$ функций $\psi(x)$ и $\varphi(x - mh)$, соответственно:

$$(\varphi(\cdot - mh), \psi) = 2\pi\sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}_k} q^{2k^2} e^{-ikmh} = \delta_{0,m}.$$

Приведем эту формулу к двойной сумме с помощью замены $k = Np + n$:

$$\begin{aligned} (\varphi(\cdot - mh), \psi) &= 2\pi\sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}_{Np+n}} q^{2(Np+n)^2} e^{-i(Np+n)mh} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{s}_n} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2(Np+n)^2} \right) e^{-inmh} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{s}_n} \beta_n e^{-inmh}, \end{aligned}$$

где

$$\beta_n = \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2(Np+n)^2} \right).$$

Коэффициенты β_n , как и α_n ранее, могут быть выражены через третью тета-функцию Якоби. Если ввести обозначение $q = \exp(-1/(4\sigma^2))$, то соответствующая формула будет иметь вид:

$$\beta_n = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{N} \theta_3\left(\frac{\pi n}{N}, q_1\right),$$

где $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$. В результате имеем набор уравнений:

$$\sigma(2\pi)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\widehat{s}_n} \theta_3\left(\frac{\pi n}{N}, q_1\right) e^{-imnh} = \delta_{0,m}.$$

Для завершения доказательства осталось применить обратное ДПФ:

$$\overline{\widehat{s}_n} = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{3/2} \sqrt{N} \theta_3\left(\frac{\pi n}{N}, q_1\right)},$$

заметить, что $\widehat{s}_n \in \mathbb{R}$, и подставить результат в (4.1). $\square$

5. КОНСТАНТЫ РИССА

Теорема 5.1. *Набор функций $\varphi_n(x) = \varphi(x - nh)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, где $\varphi(x)$ задается формулой (2.3), образует систему Рисса с точными константами*

$$A_R = \sigma(2\pi)^{3/2} \theta_3\left(\frac{\pi}{N} \left[\frac{N}{2}\right], q_1\right), \quad B_R = \sigma(2\pi)^{3/2} \theta_3(0, q_1),$$

где $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$, а $[N/2]$ — целая часть $N/2$.

Доказательство. Для оценки констант Рисса рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n(x).$$

Подставим сюда явный вид $\varphi_n(x)$, используя формулы (2.1), (2.3) и (2.4):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{ik(x-nh)}.$$

Поменяв суммы местами, в результате получаем ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

с коэффициентами

$$d_k = q^{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-iknh}.$$

Запишем сумму в последней формуле через ДПФ:

$$d_k = \sqrt{N} q^{k^2} \widehat{c}_k.$$

Здесь предполагается, что $\widehat{c}_{k+N} = \widehat{c}_k$.

Требуется получить точную оценку вида

$$A_R \leq \|f\|^2 \leq B_R$$

на сфере

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1.$$

С этой целью воспользуемся равенством Парсеваля для рядов Фурье:

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2 = 2\pi N \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{2k^2} |\widehat{c}_k|^2.$$

Преобразуем полученную сумму:

$$\|f\|^2 = 2\pi N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=mN}^{mN+N-1} q^{2k^2} |\widehat{c}_k|^2.$$

Сделаем замену индекса $k = p + mN$, а также поменяем порядок суммирования

$$\|f\|^2 = 2\pi N \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2(p+mN)^2} |\hat{c}_p|^2.$$

Здесь учтено, что $\hat{c}_{k+N} = \hat{c}_k$. В результате имеем

$$\|f\|^2 = 2\pi N \sum_{p=0}^{N-1} \beta_p |\hat{c}_p|^2,$$

где

$$\beta_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2(p+mN)^2}.$$

В силу равенства Парсеваля для ДПФ

$$\sum_{p=0}^{N-1} |\hat{c}_p|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1.$$

Кроме того, ДПФ дает взаимно однозначное отображение. Отсюда можно сделать вывод, что

$$A_R = 2\pi N \min_{p=0,1,\dots,N-1} \beta_p, \quad B_R = 2\pi N \max_{p=0,1,\dots,N-1} \beta_p.$$

Для завершения доказательства осталось записать β_p через третью тета-функцию Якоби и заметить, что $\theta_3(x, q)$ на вещественной оси не обращается в нуль, достигает минимального значения в точке $x = \pi/2$, а максимального при $x = 0$ (см. [4, 6, 16]). $\square$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результат, полученный в теореме 3.1, позволяет построить целое семейство узловых функций на основе бесконечных тригонометрических рядов, не используя ядро Дирихле. Свойства этого семейства могут регулироваться при помощи двух параметров σ и N , которые могут уменьшать влияние комплексных экспонент с высокими частотами. Это может быть использовано для одновременной процедуры интерполяции и фильтрации.

Теорема 4.1 дает аналитический способ аппроксимации при помощи сдвигов тета-функции Якоби. Причем и здесь есть параметры σ и N , влияющие на данную процедуру. Их можно подобрать таким образом, чтобы изменение числа узлов не меняло исходной тета-функции. Возможность использования семейства сдвигов тета-функции обосновывается теоремой 5.1. Отношение констант Рисса в случае четного числа узлов совпадает с тем же отношением для системы целочисленных сдвигов функции Гаусса, а в случае нечетного — не больше [6].

В качестве примеров применения систем сдвигов из тета-функций при численном решении дифференциальных уравнений можно указать работы [10, 13]. При задании разностных аналогов дифференциальных операторов можно использовать технику эрмитовой интерполяции [2]. В указанной работе рассматривается система равномерных сдвигов функции Гаусса, домноженных на тригонометрические полиномы невысоких степеней. Замена тригонометрических функций тета-функциями позволит улучшить локализацию базисных функций.

В работе [5] изучена скорость убывания коэффициентов, задающих узловую функции для системы сдвигов функции Гаусса на всей оси. Эти результаты с помощью процедуры периодизации легко переносятся на случай системы сдвигов тета-функции, что позволит, следуя технике [12], провести оптимизацию по параметрам требуемых свойств узловых функций и биортогональных систем.

Следует отметить, что полученные с помощью аналитических соотношений факты для конкретных функций далеко не всегда можно получить с помощью общих свойств систем целочисленных сдвигов. Приведем два примера. В работе [6] показано, что коэффициенты, задающие узловую функцию для системы сдвигов функции Гаусса, знакопередаются и монотонно убывают по модулю. Аналогичные же коэффициенты для системы сдвигов функции Лоренца имеют постоянный знак, начиная с некоторого номера. При этом обе функции используются при описании атомных спектров. В работе [4] показано, что коэффициенты, задающие узловую функцию для

системы сдвигов функции Гаусса, и константы Рисса для биортогональных систем очень быстро растут с увеличением параметра σ . Критическим при расчетах на компьютере с обычной точностью является уже значение $\sigma = 2$. Поэтому точные формулы играют важную роль при оценке используемых приближенных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Жаданова М. Л., Киселев Е. А., Новиков И. Я., Ушаков С. Н. Эрмитова интерполяция с помощью оконных систем, порожденных равномерными сдвигами функции Гаусса // Мат. заметки. — 2023. — 114, № 6. — С. 936–939.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ, 1999.
4. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Мат. заметки. — 2014. — 96, № 2. — С. 239–250.
5. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ушаков С. Н. Локализация оконных функций двойственных и жестких фреймов Габора, порожденных функцией Гаусса // Мат. сб. — 2024. — 215, № 3. — С. 80–99.
6. Минин Л. А., Ситник С. М., Ушаков С. Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца // Науч. вед. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2014. — 183, № 12. — С. 214–217.
7. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного Анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. — М.: Физматлит, 1963.
9. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001.
10. Boyd J. P., Xiao J. Periodized radial basis functions. I: Theory // Appl. Numer. Math. — 2013. — 86. — С. 43–73.
11. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2016.
12. Faulhuber M., Steinerberger S. Maximal polarization for periodic configurations on the real line // Int. Math. Res. Not. IMRN. — 2024. — С. 1–30.
13. Hubbert S., Mueller S. Interpolation with circular basis functions // Numer. Algorithms. — 2006. — 42, № 1. — С. 75–90.
14. Lawden D. F. Elliptic functions and applications. — New York: Springer, 1989.
15. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. — New York: Am. Math. Soc., 2007.
16. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. NIST handbook of mathematical functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
17. Schlumprecht Th., Sivakumar N. On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian // J. Approx. Theory. — 2009. — 151, № 1. — С. 128–153.

М. Л. Жаданова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: masha.minina97@mail.ru

UDC 517.583 + 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585

EDN: VZNTSH

Interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems using uniform shifts of the theta function

M. L. Zhadanova

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The problems of interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems are considered. Uniform shifts of the third Jacobi theta function are used as a basis. Explicit formulas for the nodal function and the function generating the biorthogonal system are obtained. Exact values of the lower and upper Riesz constants are found.

Keywords: periodic function, biorthogonal system, interpolation, theta function, integer shift, nodal function, Riesz constant.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: M. L. Zhadanova, “Interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems using uniform shifts of the theta function,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 575–585. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585>

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Chislennye metody* [Numerical Methods], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
2. M. L. Zhadanova, E. A. Kiselev, I. Ya. Novikov, and S. N. Ushakov, “Ermitova interpolatsiya s pomoshch'yu okonnykh sistem, porozhdennykh ravnomernymi sdvigami funktsii Gaussa” [Hermitian interpolation using window systems generated by uniform shifts of the Gaussian function], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 6, 936–939 (in Russian).
3. B. S. Kashin and A. A. Saakyan, *Ortogonal'nye ryady* [Orthogonal Series], AFTs, Moscow, 1999 (in Russian).
4. E. A. Kiselev, L. A. Minin, I. Ya. Novikov, and S. M. Sitnik, “O konstantakh Rissa dlya nekotorykh sistem tselochislennykh sdvigoov” [On Riesz constants for some systems of integer shifts], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2014, **96**, No. 2, 239–250 (in Russian).
5. E. A. Kiselev, L. A. Minin, I. Ya. Novikov, and S. N. Ushakov, “Lokalizatsiya okonnykh funktsiy dvoystvennykh i zhestkikh freymov Gabora, porozhdennykh funktsiei Gaussa” [Localization of window functions of dual and rigid Gabor frames generated by a Gaussian function], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2024, **215**, No. 3, 80–99 (in Russian).
6. L. A. Minin, S. M. Sitnik, and S. N. Ushakov, “Povedenie koeffitsientov uzlovykh funktsiy, postroennykh iz ravnomernykh sdvigoov funktsiy Gaussa i Lorentsa” [Behavior of the coefficients of nodal functions constructed from uniform shifts of Gaussian and Lorentzian functions], *Nauch. ved. BelGU. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2014, **183**, No. 12, 214–217 (in Russian).
7. I. Ya. Novikov, V. Yu. Protasov, and M. A. Skopina, *Teoriya vspleskov* [Wavelet Theory], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
8. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Kurs sovremennogo Analiza. Ch. 2. Transtsendentnye funktsii* [A Course of Modern Analysis. Part 2: Transcendental Functions], Fizmatlit, Moscow, 1963 (Russian translation).



9. Ch. Chui, *Vvedenie v veyvlety* [An Introduction to Wavelets], Mir, Moscow, 2001 (Russian translation).
10. J. P. Boyd and J. Xiao, “Periodized radial basis functions. I: Theory,” *Appl. Numer. Math.*, 2013, **86**, 43–73.
11. O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2016.
12. M. Faulhuber and S. Steinerberger, “Maximal polarization for periodic configurations on the real line,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2024, 1–30.
13. S. Hubbert and S. Mueller, “Interpolation with circular basis functions,” *Numer. Algorithms*, 2006, **42**, No. 1, 75–90.
14. D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer, New York, 1989.
15. V. Maz’ya and G. Schmidt, *Approximate approximations*, Am. Math. Soc., New York, 2007.
16. F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
17. Th. Schlumprecht and N. Sivakumar, “On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian,” *J. Approx. Theory*, 2009, **151**, No. 1, 128–153.

M. L. Zhadanova
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: masha.minina97@mail.ru

УДК 517.977

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596

EDN: WBBYYF

ЗАДАЧА СУЩЕСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости с бесконечной памятью вдоль траекторий поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. При доказательстве используется аппроксимационно-топологический подход, теория регулярных лагранжевых потоков и теория топологической степени для многозначных векторных полей.

Ключевые слова: управление с обратной связью, оптимальное управление, нелинейно-вязкая жидкость, аппроксимационно-топологический подход, регулярный лагранжев поток, топологическая степень.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>.

Для цитирования: А. В. Звягин, Е. И. Костенко. Задача существования управления с обратной связью для одной нелинейно-вязкой дробной модели Фойгта // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 586–596. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время гидродинамическими задачами описывается огромное число процессов, протекающих на различных предприятиях. В данной статье рассматривается модель, описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости. Первые работы, посвященные данной тематике, появились в 50-х годах прошлого века, их появление связано с развитием таких отраслей как биомеханика, биогидродинамика, пищевая промышленность и т. д. Использование полимерных насадок и нанопорошковых присадок на предприятиях повысило интерес к такому типу гидродинамических задач (см. [1, 2]).

В настоящей работе изучается задача оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью. Вначале опишем изучаемую модель. В ограниченной области $Q_T = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается задача, описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} [2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \\ - \mu \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (1.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (1.3)$$

$$v(t, x) |_{(t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ неизвестные скорость и давление рассматриваемой среды, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, f — плотность внешних сил, $\mu \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ — константы, и $z(\tau; t, x)$ — траектория движения частицы жидкости, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt$ (см. [10]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т. е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы. Функция I_2 определяется равенством: $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$. Функция ν удовлетворяет следующим ограничениям:

$$(\nu_1) \quad 0 < C_1 \leq \nu(s) \leq C_2 < \infty; \quad (\nu_2) \quad -s\nu'(s) \leq \nu(s), \text{ при } \nu'(s) \leq 0; \quad (\nu_3) \quad |s\nu'(s)| \leq C_3 < \infty.$$

Наличие интегрального слагаемого в (1.1) отражает учет памяти сплошной среды. Различные модели с памятью возникали и изучались в большом числе работ (см., например, [1]). Но, как правило, математические постановки рассматривали вклад памяти при постоянном значении пространственной переменной x (см. [6]). На практике такие модели «не физичны». Память среды необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы. Таким образом, в (1.1) появляется $z(s; t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x . Данная траектория определяется полем скоростей v .

Заметим, что для корректной постановки задачи необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v , другими словами, чтобы уравнение (1.3) имело единственное решение для поля скоростей v . Для этого в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, в работах [12–14] была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (1.3) и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков (РЛП) — обобщения понятия классического решения. Эти результаты дают возможность корректно рассмотреть поставленную задачу.

Краевая задача (1.1)–(1.4) описывает математическую модель, изучающую движение нелинейно-вязкоупругой жидкости с бесконечной памятью вдоль траектории движения частицы среды. В работах [5, 17], изучалась математическая модель (1.1)–(1.4) с постоянной вязкостью и памятью на временном интервале $[0, T]$. В работе [18] доказана слабая разрешимость изучаемой модели с постоянной вязкостью, а в работе [15] — с нелинейной вязкостью.

В данной статье для изучаемой математической модели рассматривается задача управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., например, [11] и имеющуюся там литературу). Однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье—Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются «неньютоновские жидкости»). Список работ, изучающих задачи оптимального управления, в том числе и задачи с обратной связью, для подобных моделей движения жидкости намного беднее (см. [4, 7, 19]). В настоящей работе доказывается существование оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ множество измеримых вектор-функций $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, суммируемых с p -ой степенью, а через $W_p^m(\Omega)$, $m \geq 1$, $p \geq 1$ — пространства Соболева. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω . Обозначим через $\mathcal{V}$ множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 — по норме $W_2^1(\Omega)$ и через V^2 пространство $W_2^2(\Omega) \cap V^1$.

Введем шкалу пространств V^β , $\beta \in \mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A . В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^N v_j e_j : v_j \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j , и определим пространство V^β , $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где } v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k. \quad (2.1)$$

На пространстве V^β , $\beta > -1/2$, норма (2.1) эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$ (см. [11]). Кроме того, нормы в пространствах V^1 , V^2 и V^3 могут быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|_{V^1} &= \left(\int_{\Omega} \nabla v(x) : \nabla v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^2} = \left(\int_{\Omega} \Delta v(x) \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_{V^3} &= \left(\int_{\Omega} \nabla \Delta v(x) : \nabla \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение.

Далее, через $V^{-\beta} = (V^\beta)^{-1}$, $\beta \in \mathbb{N}$, будем обозначать сопряженное пространство к V^β .

Введем пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(-\infty, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})}$.

Далее будем использовать понятие регулярного лагранжева потока (см. [12–14]).

Определение 2.1. Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при п.в. x и любом $t \in [0, T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T];$$

2. для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;
3. при всех $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, 3}$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$

$$z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x)).$$

Приведем также следующие результаты о РЛП.

Теорема 2.1. Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ и $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D; L)$, порожденный v , и

$$z(\tau; t, \bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega,$$

где $C(D, L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0, T] \times [0, T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор-функций.

Теорема 2.2. Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; W_1^p(\Omega))$, $m = 1, 2, \dots$, при некотором $p > 1$. Пусть $\operatorname{div} v(t, x) = 0$, $\operatorname{div} v^m(t, x) = 0$, $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Пусть выполняются неравенства

$$\|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} \leq C_4, \quad \|v_x^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} \leq C_5.$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1(Q_T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $z(\tau; t, x)$ и $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденные v и v^m , соответственно. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ при $t \in [0, T]$.

Здесь v_x — матрица Якоби вектор-функции v .

Таким образом, в силу теоремы 2.2 для каждого $v \in L_2(-\infty, T; V^1)$ и для почти всех $x \in \Omega$ уравнение (1.3) имеет единственное решение $z(v)$.

Перейдём к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \rightharpoonup L_2(-\infty, T; V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

- (Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;
- (Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;
- (Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(-\infty, T; V^{-1})} := \sup \left\{ \|u\|_{L_2(-\infty, T; V^{-1})} : u \in \Psi(v) \right\} \leq M \quad \text{для всех } v \in W_1;$$

- (Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

$$\text{если } \{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in \Psi(v_l) \text{ и } u_l \rightarrow u_0 \text{ в } L_2(-\infty, T; V^{-1}), \text{ тогда } u_0 \in \Psi(v_0).$$

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1.1)–(1.4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \quad (2.2)$$

Таким образом, в работе рассматривается задача управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2). Сформулируем определение слабого решения задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2).

Определение 2.2. Слабым решением задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2) называется пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$, удовлетворяющая а) условию обратной связи (2.2), б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (-\infty, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + 2 \int_{\Omega} \nu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \mu \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь z — РЛП, порожденный v .

Первым результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4). Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2).

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1.1)–(1.4), (2.2). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- (Ф1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;
 (Ф2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(-\infty, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.4. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), а функционал Φ удовлетворяет условиям (Ф1)–(Ф2), тогда задача оптимального управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.*

Доказательство данных результатов состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В. Г. Звягиным (см. [8]), доказывается существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее, для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение, показывается, что во множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач $(0 \leq \xi \leq 1)$ с малым параметром $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \xi \operatorname{Div} [2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \theta \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} - \\ - \mu \frac{\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = \xi f; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [-m, T], \quad x \in \Omega; \quad (3.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (3.3)$$

$$v(t, x)|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad v(-m, x) = 0, \quad \Delta v(t, x)|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Здесь $m = 1, 2, \dots$. Разрешимость данного семейства вспомогательных задач будет доказана в следующем функциональном пространстве: $W_2 = \{v \in L_2(-m, T; V^3), v' \in L_2(-m, T; V^3)\}$ с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{L_2(-m, T; V^3)} + \|v'\|_{L_2(-m, T; V^3)}$. Дадим определение слабого решения задачи (3.1)–(3.4).

Определение 3.1. *Слабым решением задачи (3.1)–(3.4), (2.2) называется пара функций $(v, f) \in W_2 \times L_2(-m, T; V^{-1})$, удовлетворяющих а) условию обратной связи (2.2), б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (-m, T)$ тождеству*

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + 2\xi \int_{\Omega} \nu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \mu \frac{\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \xi \langle f, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

и начальному условию $v(-m, \cdot) = 0$. Здесь z — РЛП, порожденный v .

Перейдём к операторной трактовке задачи (3.1)–(3.4). Введем операторы:

$$\begin{aligned}
 J : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\
 A : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\
 B : V^1 &\times [-m, T] \times [-m, T] \times \overline{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \\
 (B(v, z)(t), \varphi) &= \left(\int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \quad \mathcal{E}(\varphi) \right), \\
 v \in V^1, \quad z &\in [-m, T] \times [-m, T] \times \overline{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (-m, T); \\
 K : L_4(\Omega) &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1; \\
 D : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = 2 \int_{\Omega} \nu (I_2(v)) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1.
 \end{aligned}$$

Поскольку в равенстве (3.5) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, оно эквивалентно в $L_2(-m, T; V^{-1})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' - \theta Av' + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) - \xi K(v) + \xi D(v) = \xi f. \quad (3.6)$$

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 L : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A)v', v|_{t=-m}); \\
 C : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\
 G : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right); \\
 F : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad F(v) = (D(v), 0).
 \end{aligned}$$

Тогда задача о нахождении решения интегрального уравнения (3.5) при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$, удовлетворяющего начальному условию (3.4) и условию обратной связи (2.2), эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$ операторного уравнения

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) - F(v) + (f, 0)),$$

удовлетворяющего условию обратной связи (2.2).

Для введенных выше операторов справедливы следующие свойства.

Лемма 3.1. Для любой функции $v \in W_2$ функция $K(v) \in L_2(-m, T; V^{-1})$, отображение $K : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является компактным, и для него имеет место оценка

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C_6 \|v\|_{L_4(\Omega)}^2. \quad (3.7)$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично [18, лемма 5]. $\square$

Лемма 3.2. Оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ обратим, и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным оператором.

Доказательство. Доказательство данной леммы является достаточно стандартным и проводится аналогично лемме 4.4.3 монографии [8]. $\square$

Лемма 3.3. Отображение $D : L_2(-m, T; V^1) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывно, и для него справедлива оценка

$$\|D(v) - D(u)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_7 \|v - u\|_{L_2(-m, T; V^1)}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично лемме 4 статьи [15]. $\square$

Лемма 3.4. Для любого $v \in L_2(-m, T; V^1)$, $z \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$ выполнено $B(v, z) \in L_2(-m, T; V^{-1})$ и отображение $B : L_2(-m, T; V^1) \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывно и ограничено. Кроме того, для любого фиксированного $z \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$, для любого $u, v \in L_2(-m, T; V^1)$ справедлива оценка

$$\|B(v, z) - B(u, z)\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_8 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}} \|v - u\|_{k, L_2(-m, T; V^1)}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Доказательство первой части леммы описано в [6, Lemma 2.2], вторая часть доказана в [18, Lemma 3]. $\square$

Определим несколько понятий, касающихся меры некомпактности и L -уплотняющих операторов (см. [3, 9]).

Определение 3.2. Неотрицательная вещественная функция ψ , определенная на подмножестве банахова пространства F , называется *мерой некомпактности*, если для любого подмножества $\mathcal{M}$ этого пространства выполнены следующие свойства:

1. $\psi(\overline{\text{co}} \mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$;
2. для любых двух множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ из $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ следует, что $\psi(\mathcal{M}_1) \leq \psi(\mathcal{M}_2)$.

Здесь $\overline{\text{co}} \mathcal{M}$ обозначает выпуклое замыкание множества $\mathcal{M}$. В качестве примера меры некомпактности возьмём меру некомпактности Куратовского: точная нижняя граница $d > 0$, для которого множество $\mathcal{M}$ допускает разбиение на конечное число подмножеств, диаметры которых меньше d . Приведём некоторые важные свойства меры некомпактности Куратовского:

3. $\psi(\mathcal{M}) = 0$, если $\mathcal{M}$ относительно компактное подмножество;
4. $\psi(\mathcal{M} \cup K) = \psi(\mathcal{M})$, если K относительно компактное множество.

Определение 3.3. Пусть X — ограниченное подмножество банахова пространства и $L : X \rightarrow F$ — отображение X в банахово пространство F . Отображение $g : X \rightarrow F$ называется *L -уплотняющим*, если $\psi(g(\mathcal{M})) < \psi(L(\mathcal{M}))$ для любого множества $\mathcal{M} \subseteq X$ такого, что $\psi(g(\mathcal{M})) \neq 0$.

Пусть γ_k — мера некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(-m, T; V^{-1})$ с нормой $\|v\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} = \left(\int_{-m}^T \|v\|_{V^{-1}}^2 e^{-kt} dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3.5. Отображение $B : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является L -уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k .

Доказательство. Данная лемма была доказана в [18, Lemma 4]. $\square$

Используя полученные выше свойства операторов, получим следующие априорные оценки для семейства вспомогательных задач.

Лемма 3.6. Для любого решения операторного включения (3.6) имеют место оценки:

$$\|v\|_{L_2(-m, T; V^1)} \leq C_9; \quad \theta \|v'\|_{L_2(-m, T; V^3)} \leq C_{11}; \quad (3.10)$$

$$\|v\|_{C([-m, T]; V^0)} \leq C_{10}; \quad \|v'\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \leq C_{12}; \quad (3.11)$$

где константы $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ не зависят от v, ξ и m .

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится достаточно стандартно. Подробные расчеты можно посмотреть, например, в [18, Lemmas 7-8]. $\square$

Лемма 3.7. Если $v \in W_2$ — решение уравнения (3.6) для некоторого $\xi \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка $\|v\|_{W_2} \leq C_{13}$, где C_{13} зависит от θ .

Теорема 3.1. Операторное включение (3.6) при $\xi = 1$ имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [19]).

Введем оператор $\mathcal{Y} : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ следующим образом: $\mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0)$. Тогда задача существования решения $(v, f) \in W_2 \times L_2(-m, T; V^{-1})$ аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in W_2$ для следующего операторного включения:

$$v \in \xi \mathcal{M}, \quad \text{где} \quad \mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v) - F(v)). \quad (3.12)$$

Из леммы 3.7 следует, что все решения уравнения (3.12) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{13} + 1$. Согласно утверждению леммы 3.2 оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi \mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R . В силу леммы 3.2 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным. Согласно леммам 3.1, 3.3, 3.5 отображение $\mathcal{Y} + C(v) - G(v) - F(v) : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_2 \rightarrow W_2$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Таким образом, векторное поле $v \in \xi \mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi \mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ включения (3.6) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи (3.1)–(3.4), (2.2) при $\xi = 1$. $\square$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Перейдём к доказательству разрешимости исходной краевой задачи.

Лемма 4.1. Пусть $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда следующая оценка выполнена для v^m :

$$\sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0} + \sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^2} + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq C_{14} \|f^m\|_{L_2(-\infty, T; V^0)} \quad (4.1)$$

с константой C_{14} , не зависящей от m . Здесь v^m — последовательность, сходящаяся к искомой функции скорости. Существование данной последовательности вытекает из того факта, что пространство V^3 плотно в V^0 .

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично [20, Lemma 3.4]. $\square$

Оценка (4.1) означает, что последовательность v^m ограничена в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Это позволяет утверждать, что существует функция $v^* \in L_2(-\infty, T; V^1)$ такая, что v^m (с точностью до подпоследовательности) слабо сходится к v^* в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Кроме того, оценка (4.1) влечет за собой сходимость v^m к v^* (с точностью до подпоследовательности) п.в. на $[-k, T] \times \Omega$ для любого $k > 0$.

Лемма 4.2. Пусть $k < m$, $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда для функций v^m оценка

$$\left\| \frac{dv^m}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C_{15}(k) (1 + \|f^m\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} + \|f^m\|_{L_1(-k, T; V^{-1})}^2)$$

выполняется с независимой от m , но зависящей от k константой $C_{15}(k)$.

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично [20, Lemma 3.5]. $\square$

Лемма 4.2 подразумевает, что последовательность $\frac{dv^m}{dt}$ ограничена по норме пространства $L_1(-k, T; V^{-1})$ и сходится к $\frac{dv}{dt}$ в смысле распределения на $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$.

Рассмотрим задачу Коши (1.3) для предельной функции v^* . Так как $v^* \in W_1$, следовательно, v^* удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Поэтому на любом конечном интервале $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$. Тогда из теоремы 2.1 следует существование РПП $z^*(\tau; t, x)$, $-\infty < \tau, t \leq T, x \in \bar{\Omega}$, порожденного v^* . Обозначим через $z^m(\tau; t, x)$ — РПП, порожденные v^m .

Лемма 4.3. Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится по мере Лебега на $[-k, T] \times \Omega$ по (τ, x) к $z^*(\tau; t, x)$ для $t \in [-k, T], k \geq 0$.

Доказательство. Данная лемма следует из априорной оценки леммы 3.6 и теоремы 2.2. $\square$

Из леммы 4.3 следует, что последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится (с точностью до подпоследовательности) к $z^*(\tau; t, x)$ п.в. на $Q(k, T) = [-k, T] \times \Omega$ как функция переменных $(\tau, x) \in Q(k, T)$ для любого $-k \in (-\infty, T)$ для $t \in [-k, T]$ (см. [16, лемма VI.5.1]). Легко видеть, что последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; V^0)$ сильно в $L_2(Q)^n$ и п.в. на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$.

Полученные сходимости позволяют перейти к пределу при $\theta \rightarrow 0$ в каждом слагаемом интегрального равенства вспомогательной задачи для $\xi = 1$. Это подразумевает, что предельная функция v^* удовлетворяет тождеству (2.3). Таким образом, мы доказали существование хотя бы одного слабого решения задачи (1.1)–(1.4), (2.2), описывающего движение нелинейно-вязкой жидкости.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Из теоремы 2.3 мы получаем, что множество решений Σ непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (3.10)–(3.11), мы без ограничения общности, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(-\infty, T; L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(-\infty, T; V^1)$; $z_l(\tau; t, x) \rightarrow z_*(\tau; t, x)$ по норме Лебега относительно $(\tau, x) \in [0, T] \times \Omega$; $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(-\infty, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow +\infty$.

Аналогично предыдущему разделу, переходя к пределу во включении

$$Jv'_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) + D(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

мы получим следующее включение:

$$Jv'_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) + D(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Следовательно, $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leq \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f),$$

что доказывает, что (v_*, f_*) — требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астрита Дж., Маруччи Дж. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. — М.: Мир, 1978.
2. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. — М.: Химия, 1977.
3. Дмитриенко В. Т., Звягин В. Г. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений // Мат. заметки. — 1982. — 31, № 5. — С. 801–812.
4. Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье—Стокса // Докл. РАН. — 2019. — 486, № 5. — С. 527–530.
5. Звягин А. В., Костенко Е. И. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта // Дифф. уравн. — 2023. — 59, № 12. — С. 1710–1714.
6. Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифф. уравн. — 2002. — 38, № 12. — С. 1633–1645.
7. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — 477. — С. 54–86.
8. Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: КРА-САНД УРСС, 2012.
9. Садовский Б. Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы // Усп. мат. наук. — 1972. — 27, № 1. — С. 81–146.
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
12. Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields // Boll. Unione Mat. Ital. — 2008. — 1, № 2. — С. 333–348.

13. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow// *J. Reine Angew. Math.* — 2008. — 616. — C. 15–46.
14. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces// *Invent. Math.* — 1989. — 98, № 3. — C. 511–547.
15. *Kostenko E. I.* Investigation of weak solvability of one model nonlinear viscosity fluid// *Lobachevskii J. Math.* — 2024. — 45. — C. 1421–1441.
16. *Temam R.* Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1977.
17. *Zvyagin A. V., Kostenko E. I.* Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model// *Mathematics.* — 2023. — 21, № 11. — 2272.
18. *Zvyagin V. G., Kostenko E. I.* Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory// *Lobachevskii J. Math.* — 2023. — 44, № 3. — C. 969–988.
19. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems// *J. Fixed Point Theory Appl.* — 2014. — 16. — C. 27–82.
20. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity// *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2018. — 23, № 8. — C. 3855–3877.

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: ekaterinarshina@mail.ru

UDC 517.977

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596

EDN: WBBYYF

The problem of existence of feedback control for one nonlinear viscous fractional Voigt model

A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we study the feedback control problem for a mathematical model describing the motion of a nonlinear viscous fluid with infinite memory along the trajectories of the velocity field. The existence of an optimal control that gives a minimum to a given bounded and lower semicontinuous quality functional is proved. The proof uses the approximation-topological approach, the theory of regular Lagrangian flows, and the theory of topological degree for multivalued vector fields.

Keywords: feedback control, optimal control, nonlinear viscous fluid, approximation-topological approach, regular Lagrangian flow, topological degree.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by the grant from the Russian Science Foundation № 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>.

For citation: A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko, “The problem of existence of feedback control for one nonlinear viscous fractional Voigt model,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 586–596. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596>



REFERENCES

1. G. Astarita and G. Marrucci, *Osnovy gidrodinamiki nen'yutonovskikh zhidkostey* [Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
2. G. V. Vinogradov and A. Ya. Malkin, *Reologiya polimerov* [Rheology of Polymers], Khimiya, Moscow, 1977 (in Russian).
3. V. T. Dmitrienko and V. G. Zvyagin, “Gomotopicheskaya klassifikatsiya odnogo klassa nepreryvnykh otobrazheniy” [Homotopy classification of one class of continuous mappings], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1982, **31**, No. 5, 801–812 (in Russian).
4. A. V. Zvyagin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya al’fa-modeli Lere i al’fa-modeli Nav’e—Stoksa” [Optimal feedback control for the Leray alpha model and the Navier–Stokes alpha model], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **486**, No. 5, 527–530 (in Russian).
5. A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko, “O sushchestvovanii upravleniya s obratnoy svyaz’yu dlya odnoy drobnoy modeli Foygta” [On the existence of feedback control for a fractional Voigt model], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2023, **59**, No. 12, 1710–1714 (in Russian).
6. V. G. Zvyagin and V. T. Dmitrienko, “O slabykh resheniyakh regulyarizovannoy modeli vyazkouprugoy zhidkosti” [On weak solutions of a regularized model of viscoelastic fluid], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 12, 1633–1645 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, and M. V. Turbin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya modeli Bingama s periodicheskimi usloviyami po prostranstvennym peremennym” [Optimal feedback control for the Bingham model with periodic conditions on spatial variables], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 54–86 (in Russian).
8. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* [Mathematical Issues of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], KRASAND URSS, Moscow, 2012 (in Russian).
9. B. N. Sadovskiy, “Predel’no kompaktnye i uplotnyayushchie operatory” [Limit-compact and condensing operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1972, **27**, No. 1, 81–146 (in Russian).
10. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
11. A. V. Fursikov, *Optimal’noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1999 (in Russian).
12. G. Crippa, “The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields,” *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2008, **1**, No. 2, 333–348.
13. G. Crippa and C. de Lellis, “Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow,” *J. Reine Angew. Math.*, 2008, **616**, 15–46.
14. R. J. DiPerna and P. L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces,” *Invent. Math.*, 1989, **98**, No. 3, 511–547.
15. E. I. Kostenko, “Investigation of weak solvability of one model nonlinear viscosity fluid,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, 1421–1441.
16. R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
17. A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko, “Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model,” *Mathematics*, 2023, **21**, No. 11, 2272.
18. V. G. Zvyagin and E. I. Kostenko, “Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 3, 969–988.
19. V. Zvyagin, V. Obukhovskii, and A. Zvyagin, “On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems,” *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2014, **16**, 27–82.
20. V. Zvyagin and V. Orlov, “Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, **23**, No. 8, 3855–3877.

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

E. I. Kostenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: ekaterinalarshina@mail.ru

УДК 517.53

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609

EDN: WBOQMN

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЭРЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ПОЛУФОРМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

М. В. КАБАНКО, К. Г. МАЛЮТИН

Курский государственный университет, Курск, Россия

Аннотация. Рассматривается задача простой свободной интерполяции в пространстве функций конечного порядка и нормального типа в полуплоскости. Предложено ее решение методом сдвига узлов интерполяции. Такое решение основано на методе Эрла, который решал задачу свободной интерполяции в пространстве аналитических ограниченных функций в единичном круге.

Ключевые слова: свободная интерполяция, функция конечного порядка, сдвиг узлов интерполяции, метод Эрла.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы выражают признательность рецензенту за замечания, которые, на наш взгляд, значительно улучшили содержание статьи. Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>.

Для цитирования: М. В. Кабанко, К. Г. Малютин. Интерполирование методом Эрла в пространстве функций полуформального порядка // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 597–609. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609>

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем использовать следующие определения и терминологию. Обозначим через $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$ и положительной полуосью $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Так, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \pm\infty$ и $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup +\infty$ — расширенные, соответственно, вещественная ось и положительная полуось с обычным модулем $|\cdot|$ как и для $\mathbb{C}$, и $|\pm\infty| := +\infty$, ∞ — это бесконечность в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т. е. последовательность точек $\{z_n\} \subset \mathbb{C}_+$ сходится к ∞ при $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$. По определению считаем, что $\infty \in \mathbb{R}$, $\overline{n_1, n_2}$ — множество целых чисел $n : n_1 \leq n \leq n_2$. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, G_+ означает пересечение множества G с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, т. е. $G_+ := G \cap \mathbb{C}_+$, $\overline{G}$ — замыкание множества G .

Через a^+ обозначаем $(|a| + a)/2$, в частности, $\ln^+ 0 := 0$. Через $[\cdot]$ мы обозначаем целую часть числа, $\emptyset$ — пустое множество, $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+$ — последовательность точек без повторений, все предельные точки которой на вещественной оси и ∞ . Всюду далее, если не оговорено противное, считаем $r_n = |a_n|$, $\theta_n = \arg a_n$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$, где $0 \leq \arg z \leq \pi$ для $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $n_A^+(G) := n^+(G) =$

$\sum_{a_n \in G} \sin \theta_n$, в частности, $n_A^+(R) := n^+(C(0, R))$. Для точек $a, b \in \mathbb{C}_+$ через

$$l(a, b) = \left| \frac{a - b}{\bar{a} - \bar{b}} \right|$$

обозначим неевклидово расстояние. Через C, K, M обозначаем положительные константы, которые могут принимать различные значения в процессе доказательства одного утверждения.

Цель нашей работы — представить решение задачи простой свободной интерполяции в пространстве функций конечного порядка и нормального типа в полуплоскости методом сдвига узлов интерполяции, основанное на идеях Эрла [12].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\rho(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, — уточненный порядок в смысле Валирона [5], $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho > 0$, $V(r) \stackrel{\text{def}}{=} r^{\rho(r)}$. Для функций, аналитических в полуплоскости, следуя работе [4] (см. также [9]), введем понятия формального и полуформального порядка.

Пусть функция $f(z)$, аналитическая в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, такова, что для всех $z \in \mathbb{C}_+$ неравенство

$$|f(z)| < \exp(M_f V(|z|))$$

выполняется с некоторой константой M_f , зависящей только от $f(z)$. В этом случае уточненный порядок $\rho(r)$ называется *формальным порядком функции* $f(z)$.

Если понятие формального порядка вводится для описания роста функции в окрестности бесконечной точки (как в случае целых, так и в случае аналитических в полуплоскости функций), то более тонким является понятие полуформального порядка, характеризующее не только рост, но и убывание функции, аналитической в полуплоскости.

Пусть уточненный порядок $\rho(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, является формальным порядком аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функции $f(z)$, причем выполняется условие Левина [5, гл. 2]:

существуют числа C , $0 < C < 1$, и θ_0 , $0 < \theta_0 < \pi/2$, зависящие только от функции $f(z)$, такие, что в каждой области

$$\{z = re^{i\theta} : Cr \leq r \leq C^{-1}r, \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0\}$$

найдется точка $\bar{z}$ такая, что

$$|f(\bar{z})| \geq \exp(-M_f V(|\bar{z}|)).$$

Тогда $\rho(r)$ называется *полуформальным порядком функции* $f(z)$.

Заметим, если $\varrho > 1$, то понятия формального и полуформального порядков эквивалентны. Отличие между этими определениями имеет место только при $\varrho \leq 1$.

Пространство аналитических функций в $\mathbb{C}_+$, для которых $\rho(r)$ является полуформальным порядком, обозначим через $[\rho, \infty)^+$.

Определение 2.1. Последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой принадлежат $\mathbb{R}$, называется *интерполяционной в пространстве* $[\rho, \infty)^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей условию

$$\sup_n \frac{\ln^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty, \quad (2.1)$$

существует функция $f(z) \in [\rho, \infty)^+$, которая решает интерполяционную задачу

$$f(a_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первичный множитель Неванлинны $E_p(u, v)$ при $p \in \mathbb{N}$ определяется как

$$E_p(u, v) = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \left(1 - \frac{u}{\bar{v}}\right)^{-1} \exp \sum_{k=1}^p \frac{u^k}{k} \left(\frac{1}{v^k} - \frac{1}{\bar{v}^k}\right),$$

а при $p = 0$

$$E_0(u, v) = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \left(1 - \frac{u}{\bar{v}}\right)^{-1}.$$

Определение 2.2. Последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, имеет *конечную верхнюю плотность* при уточненном порядке $\rho(r)$, если

$$n^+(r) = O(V(r)). \quad (2.2)$$

В этом случае при нецелом $\rho > 0$ *каноническое произведение последовательности* A

$$E(z, A) = \prod_{r_n \leq 1} E_0(z, a_n) \prod_{r_n > 1} E_p(z, a_n)$$

принадлежит пространству $[\rho, \infty)^+$ (см. [4]).

Случай целого ρ сложнее. В этом случае для того, чтобы каноническое произведение последовательности A принадлежало пространству $[\rho, \infty)^+$, необходимо и достаточно, чтобы она имела *аргументно-граничную симметрию* (см. [4]). В работе [10] для последовательности A , удовлетворяющей условию (2.2), при целом $\rho > 1$ строится присоединенная последовательность At , точки которой распределены на двух лучах, обеспечивающая аргументную симметрию последовательности $A \cup At$. Точки последовательности At расположены достаточно «далеко» от точек последовательности A так, что объединенная последовательность $A \cup At$ удовлетворяет условиям интерполяционности в пространстве $[\rho, \infty)^+$ (конечно, если этим условиям изначально удовлетворяет последовательность A). В работе [8] рассматривается общий случай целого $\rho \geq 1$. В отличие от работы [10] показано, что существует вещественная измеримая функция $u(x)$ такая, что функция $E_a(z) = E(z)E_u(z)$, где

$$E_u(z) = \exp \left\{ \frac{1}{i\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{u(t) dt}{t-z} + z^{\rho+1} \int_{|t| \geq 1} \frac{u(t) dt}{(t-z)t^{\rho+1}} \right] \right\},$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)^+$. Функция $E_a(z)$ называется *присоединенной функцией последовательности* A . Кроме того, подчеркнем, что присоединенная функция при целом $\rho \geq 1$ и выполнении условия (2.2) определяется неоднозначно, причем ее сингулярная граничная мера равна нулю почти всюду на вещественной оси, $\ln |E_a(x)| = u(x)$ и

$$|\ln |E_u(z)|| \leq MV(r), \quad |\ln |E_a(x)|| \leq MV(x), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad (2.3)$$

с некоторой константой $M > 0$. Заметим, что функция $u(z)$ не имеет нулей. Это упрощает некоторые рассуждения, избавляя от необходимости оценивать дополнительные нули At . Этот факт и неравенство (2.3), в частности, обеспечивают сохранение условий интерполяционности. Другими словами, функция $E_u(z)$ не влияет на эти условия. Далее мы будем фиксировать функцию $E_u(z)$, а под присоединенной функцией последовательности A понимать при нецелом $\rho > 0$ функцию $E(z)$, а при целом $\rho \geq 1$ — функцию $E_a(z)$, обозначая ее также $E(z)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.1. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{C}_+$, $0 < \delta < 1$. Положим

$$u = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}, \quad v = \frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}}.$$

Если

$$l(a, d) \leq \frac{\delta}{4}, \quad l(b, c) \leq \frac{\delta}{4}, \quad |u| \geq \delta,$$

то $|v| \geq |u|^\beta$, где $\beta = \frac{\ln(\delta/4)}{\ln \delta}$.

Доказательство. Доказательство леммы легко получить, применяя конформное отображение $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на единичный круг $C(0, 1)$ и аналогичную лемму для круга (см. [1, лемма 8]). $\square$

Лемма 2.2. Пусть $a, b \in \mathbb{C}_+$, $|a| > 1$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ при $l(a, b) \leq \varepsilon$ будут выполняться следующие неравенства:

$$1. |a-b| \leq \frac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}; \quad 2. \left| \sin \arg \frac{a}{b} \right| \leq \frac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}.$$

Доказательство. По условию леммы имеем $\left| \frac{\bar{a}-b}{a-b} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда получаем $\left| 1 - \frac{2 \operatorname{Im} a}{a-b} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Из последнего неравенства следует, что $|a-b| + 2 \operatorname{Im} a \geq \frac{|a-b|}{\varepsilon}$. Отсюда получаем неравенство 1 леммы.

Неравенство 2 следует из неравенства 1. Действительно, из теоремы синусов для треугольника с вершинами в точках O , a , b и неравенств $|a| > 1$ и $|a-b| \leq r$ выполняется соотношение $|\sin(\arg a - \arg b)| \leq r$. $\square$

Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$. Определим монотонную последовательность положительных чисел $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $l_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Обозначим через $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ исчерпывающую последовательность конечных подмножеств из A таких, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$,

$$A_n = \left\{ a_k \in A \mid r_k \leq l_n, \operatorname{Im} a_k \geq \frac{1}{l_n} \right\}, \quad a_k = r_k e^{i\theta_k}. \quad (2.4)$$

Без ограничения общности будем считать, что A_n состоит из n точек.

Обозначим через $\Omega(a, K, \rho(|a|))$ круг $\Omega(a, K, \rho(|a|)) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : l(z) \leq \exp(-KV(|a|))\}$. Множество E' называется K -сдвинутым множеством относительно множества E ($E \subset \mathbb{C}_+$) при уточненном порядке ρ , при некотором $K > 0$, если существует отображение ω множества E на множество E' такое, что $\omega(\xi) \in \Omega(\xi, K, \rho(|\xi|))$ при любом $\xi \in E$. В этом случае будем говорить, что отображение ω есть K -сдвиг множества E при уточненном порядке ρ .

Пусть $A' = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — K -сдвиг при уточненном порядке $\rho(r)$ множества A .

Определение 2.3. Обобщенной присоединенной функцией множеств $\{A', A\}$ при целом $\varrho \in \mathbb{N}$ будем называть функцию

$$L(z, A', A) = E_u(z) \prod_{r_k \leq 1} E_p(z, a_k) \prod_{r_k > 1} E_p(z, \lambda_k, a_k),$$

где величины $E_p(z, u, v)$ при $p \geq 1$ определяются как

$$E_p(z, u, v) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \left(1 - \frac{z}{v}\right)^{-1} \exp \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{v^k} - \frac{1}{u^k}\right).$$

При нецелом $\varrho > 0$ сомножитель $E_u(z)$ в определении опускаем.

Аналогично определим семейство функций

$$L(z, A'_n, A_n) = E_u(z) \prod_{r_k \leq 1} E_p(z, a_k) \prod_{r_k > 1, a_k \in A_n} E_p(z, \lambda_k, a_k).$$

Справедлива следующая лемма (см. [7]), в которой сформулировано необходимое условие интерполяционности последовательности в пространстве $[\rho, \infty)^+$.

Лемма 2.3. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является интерполяционной в пространстве $[\rho, \infty)^+$. Тогда для любой присоединенной функции $E(z)$ последовательности A справедливо соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(r_n)} \ln \frac{1}{\operatorname{Im} a_n |E'(a_n)|} < \infty. \quad (2.5)$$

На самом деле, как доказано в работах [7, 8], условие (2.5) является и достаточным. В настоящей работе мы дадим другое доказательство, основанное на идеях работы Эрла [12].

Лемма 2.4. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$. Тогда существует такое число $K > 0$, что при любом K -сдвиге при уточненном порядке $\rho(r)$ последовательности A для сдвинутой последовательности $A' = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda_k = r'_k e^{i\theta'_k}$, верно соотношение:

$$\sum_{r'_k \leq r} \sin \theta'_k \leq CV(r),$$

где константа $C > 0$ не зависит от сдвига.

Доказательство. Для $\lambda_k = r'_k e^{i\theta'_k}$ и $a_k = r_k e^{i\theta_k}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r'_k \leq r} \sin \theta'_k &= \sum_{r'_k \leq r} \sin(\theta'_k - \theta_k + \theta_k) = \sum_{r'_k \leq r} (\sin(\theta'_k - \theta_k) \cos \theta_k + \cos(\theta'_k - \theta_k) \sin \theta_k) \leq \\ &\leq \sum_{r'_k \leq r} \sin \theta_k + \sum_{r'_k \leq r} |\sin(\theta'_k - \theta_k)|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку последовательность A имеет конечную верхнюю плотность при уточнённом порядке $\rho(r)$, то существует такая константа $C_1 > 0$, что

$$\sum_{r_k \leq r} \sin \theta_k \leq C_1 V(r). \quad (2.7)$$

Из пункта 2 леммы 2.2 получаем

$$|\sin \theta'_k - \sin \theta_k| \leq \sin \theta_k \exp(-C_2 V(r_k)).$$

с некоторой постоянной $C_2 > 0$.

Из неравенства (2.7) следует, что ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin \theta_n \exp(-C_2 V(r_n))$$

сходится.

Учитывая выражения (2.6) и (2.7), получаем утверждение леммы. $\square$

Далее, положим

$$L_k(z, A'_n, A_n) = \frac{\lambda_k}{\overline{\lambda_k}} \cdot \frac{z - \overline{\lambda_k}}{z - \lambda_k} \cdot L(z, A'_n, A_n).$$

Лемма 2.5. Пусть последовательность A имеет конечную верхнюю плотность при уточнённом порядке $\rho(r)$, и для любой присоединенной функции $E(z)$ выполняется соотношение (2.5). Тогда существует такое число $K > 0$, что справедливы утверждения:

1. При любом K -сдвиге при уточнённом порядке $\rho(r)$ последовательности $A_n = \{a_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ верны соотношения:

$$\ln |L_k(t, A'_n, A_n)| \geq -KV(r_n)$$

для любого $t \in \Omega(a_k, K, \rho(r_k))$.

2. $\Omega(a_k, K, \rho(r_k)) \cap \Omega(a_j, K, \rho(r_j)) = \emptyset$, если $k \neq j$.
3. Любой K -сдвиг при уточнённом порядке $\rho(r)$ множества A_n , $n \geq 1$, взаимно однозначен.
4. При любом K -сдвиге при уточнённом порядке $\rho(r)$ множества A_n последовательность функций $\{L(z, A'_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно ограничена на любом компактном множестве в $\mathbb{C}_+$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует $K_1 > 0$, для которого справедливо неравенство

$$\ln |L_k(a_k, A, A)| \geq -K_1 V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Представим $L_k(a_k, A, A)$ в виде произведения $L_k(a_k, A, A) = L_k^{(1)}(a_k, A, A) \cdot L_k^{(2)}(a_k, A, A)$, где

$$L_k^{(1)}(a_k, A, A) = \prod_{\frac{r_k}{2} \leq r_j \leq \frac{3r_k}{2}} \frac{\overline{a_j}}{a_j} \cdot \frac{a_k - a_j}{a_k - \overline{a_j}}.$$

Для $L_k^{(2)}(a_k, A, A)$, используя неравенство (2.3), можно получить следующую оценку при некотором $K_2 > 0$ (см., например, [3]):

$$\ln |L_k^{(2)}(a_k, A, A)| \geq -K_2 V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Из неравенств (2.8) и (2.9) получаем, что

$$\ln |L_k^{(1)}(a_k, A, A)| \geq -(K_1 + K_2) V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Представляя аналогичным образом функцию $L_k(a_k, A_n, A_n) = L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n) \cdot L_k^{(2)}(a_k, A_n, A_n)$, из (2.10) получаем

$$\ln |L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)| \geq \ln |L_k^{(1)}(a_k, A, A)| \geq -(K_1 + K_2)V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\ln \left| \frac{a_k - a_j}{a_k - \bar{a}_j} \right| \geq -(K_1 + K_2)V(r_k), \quad j \neq k.$$

Выберем $K_3 > K_1 + K_2$ таким образом, чтобы при $\frac{r_k}{2} \leq r_j \leq \frac{3r_k}{2}$ выполнялись соотношения

$$\exp(-K_3V(r_j)) \leq \frac{1}{4} \exp(-(K_1 + K_2)V(r_k)).$$

Применяя лемму 2.1, получим, что если $t \in \Omega(a_k, K, \rho(r_k))$, $\lambda_j \in \Omega(a_j, K_3, \rho(r_j))$, то выполняется неравенство

$$\left| \frac{t - \lambda_j}{t - \bar{\lambda}_j} \right| \geq \left| \frac{a_k - a_j}{a_k - \bar{a}_j} \right|^{\beta_k} \quad \text{для } \lambda_j \in A'_n,$$

где $\beta_k = 1 + (\ln 4)(K_3V(r_k))^{-1}$. Поэтому

$$|L_k^{(1)}(t, A'_n, A_n)| \geq |L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)|^{\beta_k} \geq \frac{1}{4} \exp(-K_3V(r_k)). \quad (2.11)$$

Оценим теперь функцию $L_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)$, представив ее предварительно в виде произведения

$$L_k^{(2)}(t, A'_n, A_n) = \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n) \cdot \tilde{\tilde{L}}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n),$$

где

$$\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n) = \prod_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} E_p(t, \lambda_n, a_n) \cdot E_u(z).$$

Имеем

$$|\ln \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)| \leq |\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A'_n)| + \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=1}^{\rho} \left| \frac{t^i}{i} \left(\frac{1}{a_j^i} - \frac{1}{\lambda_j^i} + \frac{1}{\bar{a}_j^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_j^i} \right) \right| + |\ln E_u(t)|. \quad (2.12)$$

Оценим функцию $\ln \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A'_n)$, используя лемму 2.4:

$$|\ln \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A'_n)| \leq \left| \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=\rho+1}^{\infty} \frac{t^i}{i} \left(\frac{1}{\lambda_j^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_j^i} \right) \right| = S.$$

Оценим сумму S :

$$S \leq \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=\rho+1}^{\infty} \frac{t^i}{i} \frac{|\sin i\theta'_j|}{(r'_j)^i} \leq \sum_{r_j \geq \frac{r_k}{2}} \frac{|t|^{\rho+1} \sin \theta'_j}{(r'_j)^{\rho+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^i = 3|t|^{\rho+1} \int_{\frac{3t}{2}}^{\infty} \frac{d\tilde{\mu}(r)}{r^{\rho+1}},$$

где $\tilde{\mu}(r) = \sum_{r'_j \leq r} \sin \theta'_j$ для $\lambda_j = r'_j e^{i\theta'_j}$. Воспользовавшись асимптотическим равенством (15.3') из [5], получаем:

$$S \leq K_4 V(t). \quad (2.13)$$

Оценим теперь второе слагаемое в (2.12). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=1}^{\rho} \left| \frac{t^i}{i} \left(\frac{1}{a_j^i} - \frac{1}{\lambda_j^i} + \frac{1}{\bar{a}_j^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_j^i} \right) \right| &\leq 2 \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=1}^{\rho} |t|^i \frac{|a_k - \lambda_k|}{r_k^{i+1}} \leq \\ &\leq \frac{2\rho(\rho+1)}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \theta_j \exp(-C_2 V(r_j)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из соотношений (2.3), (2.13) и (2.14) следует, что существует такая константа $K_6 > 0$, что выполняется

$$\ln |\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)| \leq K_6 V(|a_k|).$$

Аналогично можно показать, что

$$\ln |\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)| \leq K_7 V(|r_k|). \quad (2.15)$$

Из неравенств (2.3), (2.11) и (2.15) получаем утверждение 1 леммы.

Из утверждения 1 следует, что для любых $t \in \Omega(a_k, K_3, \rho(r_k))$ и $\lambda_j \in \Omega(a_j, K_3, \rho(r_j))$ выполняется неравенство $\left| \frac{t - \lambda_j}{t - \bar{\lambda}_j} \right| > 0$, а значит, $\Omega(a_k, K, \rho(r_k)) \cap \Omega(a_j, K, \rho(r_j)) = \emptyset$. Таким образом, пункты 2 и 3 доказаны.

При доказательстве пункта 1 мы получили неравенство

$$\ln |L_k^{(2)}(z, A'_n, A_n)| \leq K_1 V(r),$$

из которого следует утверждение пункта 4 леммы. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Заметим, что функции $L(z, A'_n, A_n)$ отличаются от канонических произведений Неванлинны. Модифицированные таким образом канонические произведения лучше приспособлены к дальнейшим рассуждениям. Дело в том, что если равенство

$$L(z, A'_n, A_n) = L(z, A''_n, A_n) \quad (3.1)$$

выполняется для n попарно различных точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, то равенство (3.1) автоматически выполняется еще в $n + 1$ попарно различных точках $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n, 0$. В то же время степень многочлена, стоящего в числителе дроби, получающейся после сокращения разности

$$L(z, A'_n, A_n) - L(z, A''_n, A_n)$$

на общий множитель, не имеющий корней, не превышает $2n$. Поэтому модифицированное каноническое произведение вполне определяется своими значениями в точках n -элементного подмножества верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Точнее говоря, нами доказана лемма.

Лемма 3.1. Если равенство (3.1) выполняется в n попарно различных точках верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, то $A'_n = A''_n$.

Положим далее

$$q_j \stackrel{\text{def}}{=} q_j(A_n, K, \rho) = \inf\{|L_j(\lambda_j, A'_n, A_n)| : \lambda_j \in \Omega(a_j, K, \rho(r_j))\}.$$

Лемма 3.2. Пусть положительное число K таково, что $\Omega(a_j, K, \rho(r_j)) \cap \Omega(a_k, K, \rho(r_k)) = \emptyset$, $j \neq k; j, k \in \overline{1, n}$. Предположим, что функция ψ , заданная на множестве A_n , удовлетворяет условию:

$$|\psi(a_k)| \leq q_k \exp(-KV(r_k)) \quad (r_k > 1), \quad \psi(a_k) = 0 \quad (r_k \leq 1). \quad (3.2)$$

Тогда существует такое множество A'_n , являющееся K -сдвигом при порядке относительно множества A_n , что

$$L(a_k, A'_n, A_n) = \psi(a_k), \quad k \in \overline{1, n}.$$

В основе доказательства лежит следующее топологическое соображение [2]: если J — взаимно однозначное и непрерывное отображение замкнутого круга $\overline{\Omega}$ на плоскость $\mathbb{C}$, и J -образ граничной окружности $\partial\Omega$ удален от начала не менее, чем на r ($r > 0$), и $0 \in J(\overline{\Omega})$, то $J(\overline{\Omega})$ содержит весь замкнутый круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Доказательство. Будем использовать индукцию по n . Обозначим через λ вектор, координатами которого являются точки множества A'_n : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Кроме того, положим

$$L(z, \lambda, A_n) \stackrel{\text{def}}{=} L(z, A'_n, A_n).$$

Пусть сначала $n = 1$. По лемме 3.1 отображение

$$\lambda_1 \mapsto L(\lambda_1, A'_1, A_1)$$

непрерывно и взаимно однозначно в замкнутом круге $\overline{\Omega(a_1, K, \rho(r_1))}$. Его значение в точке a_1 равно нулю, а окружность $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega(a_1, K, \rho(r_1))$ оно отображает в кривую, расстояние d_1 которой до начала координат удовлетворяет неравенству:

$$d_1 \geq \inf_{\lambda_1 \in \Omega_1} |L(\lambda_1, A'_1, A_1)| \geq \inf_{\lambda_1 \in \Omega_1} \left\{ \left| \frac{a_1 - \lambda_1}{a_1 - \overline{\lambda_1}} \right| \cdot |E_1(z, \lambda_1, a_1)| \right\} \geq q_1 \exp(-KV(r_1)).$$

Значит, если $\psi(a_1)$ удовлетворяет неравенству (3.2), то по замечанию, сделанному перед доказательством, найдется точка $\lambda_1 \in \Omega(a_1, K, \rho(r_1))$, удовлетворяющая условиям леммы.

Пусть теперь $n \geq 2$. Предположим, что утверждение доказано для всех множеств A_k , содержащих не более $n-1$ точек a_j ($j \in \overline{1, k}$). Вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ обозначим символом $\tilde{\lambda}$.

Система уравнений

$$L(a_k, \lambda, A_n) = \psi(a_k), \quad k \in \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} L(a_k, \tilde{\lambda}, A_{n-1}) = (E_p(a_k, \lambda_k, a_n))^{-1} \psi(a_k), & k \in \overline{1, n-1}, \\ L(a_n, \lambda, A_n) = \psi(a_n) \end{cases} \quad (3.4)$$

(заметим, что $\lambda_n \neq a_k$, $k \in \overline{1, n-1}$, если $\lambda_n \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$).

Предположим, что заданная на множестве A_n функция ψ удовлетворяет условию (3.2). Из индукционного предположения следует, что для любой точки $t \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ существует единственная точка $\tilde{\lambda}(t)$, обладающая следующими свойствами:

$$\tilde{\lambda}(t) \in \Omega(a_1, K, \rho(r_1)) \times \dots \times \Omega(a_{n-1}, K, \rho(r_{n-1})), \quad (3.5)$$

$$L(a_k, \tilde{\lambda}, A_{n-1}) = (E_p(a_k, \lambda_k, a_n))^{-1} \psi(a_k) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\psi}(a_k), \quad k \in \overline{1, n-1}.$$

В самом деле, из (3.2) следует, что $|\tilde{\psi}(a_k)| \leq q_k \exp(-KV(r_k))$. Единственность решения $\tilde{\lambda}$ следует из леммы 3.1.

Поставим теперь в соответствие точке $t \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ число

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} L(a_n, \lambda(t), A_n), \quad \lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t), t) \in \mathbb{C}^n.$$

Если мы установим, что функция $h(t)$ непрерывна, то доказательство будет закончено. Ведь если t находится на границе круга $\Omega(a_n, K, \rho(r_n))$, то

$$|h(t)| \geq \left| \frac{a_n - t}{a_n - \overline{t}} \right| \exp \left(- \sum_{j=1}^p \frac{1}{j} \right) |L_n(a_n, \lambda(t), A_n)| \geq q_n \exp(-KV(r_n))$$

(мы воспользовались условием (3.5) и определением числа q_n).

Взаимная однозначность функции $h(t)$ следует из леммы 3.1 и равносильности систем (3.3) и (3.4). По замечанию, сделанному перед доказательством леммы,

$$h(\Omega(a_n, K, \rho(r_n))) \supset \overline{C(0, q_n \exp(-KV(r_n)))}.$$

Выбрав $t \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ так, чтобы $h(t) = \psi(a_n)$, а затем решив систему (3.4), мы и найдем искомую точку $\lambda \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющую системе (3.3).

Проверим, что функция $h(t)$ непрерывна. Для этого убедимся в том, что всякая последовательность $\{h(\eta_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$, где $\eta_m \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ при любом $m \in \mathbb{N}$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m = \eta$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к $h(\eta)$. Пусть $\{m(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ — такая строго возрастающая последовательность номеров, что последовательность точек $\{\tilde{\lambda}(\eta_{m(j)})\}_{j \in \mathbb{N}}$ сходится в $\mathbb{C}^{n-1}$ к точке $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$. Полагая в (3.4) $t = \eta_{m(j)}$ и переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$L(a_n, \nu, A_{n-1}) = (E(a_k, \eta, a_n))^{-1} \psi(a_k), \quad k \in \overline{1, n-1},$$

$$h(\eta) = L(a_n, (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \eta), A_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} L(a_n, (\tilde{\lambda}_1(\eta_{m(j)}) \tilde{\lambda}_{n-1}(\eta_{m(j)}), \eta_{m(j)}), A_n),$$

так как $L(a_n, \lambda, A_n)$ непрерывно зависит от λ в $\mathbb{C}^n$. □

Из леммы 3.2 и леммы 2.5 легко получить следующую лемму.

Лемма 3.3. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$ и удовлетворяет условию (2.5), множества A_n определены соотношением (2.4), функция Ψ , заданная на множестве A , удовлетворяет неравенству

$$|\Psi(a_k)| \leq \exp(-2KV(r_k)) \text{ при } r_k > 1, \text{ и } \Psi(a_k) = 0, \text{ если } r_k \leq 1,$$

число $K > 0$ удовлетворяет условиям леммы 2.5. Тогда существует последовательность отображений $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и отображение ω_∞ , обладающие следующими свойствами:

1. ω_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) является K -сдвигом при уточненном порядке $\rho(r)$ множества A_n , при $n \geq 1$.
2. Все отображения ω_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) взаимно однозначны.
3. Последовательность функций $\{L(z, A'_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($A'_n \stackrel{\text{def}}{=} \omega_n(A_n)$) сходится равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(a_k) = \omega_\infty(a_k)$ ($a_k \in A$).
5. $L(a_k, A'_n, A_n) = \Psi(a_k)$ для $a_k \in A_n$.

Докажем теперь теорему, которая является аналогом теоремы Эрла в пространстве $[\rho, \infty)^+$.

Теорема 3.1. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой лежат на вещественной оси, имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$ и удовлетворяет условию (2.5). Тогда существует такое число $K > 0$, что для любой функции Ψ , заданной на последовательности A , и удовлетворяющей условиям

$$|\Psi(a_k)| \leq \exp(-KV(r_k)) \text{ при } r_k > 1, \text{ и } \Psi(a_k) = 0, \text{ если } r_k \leq 1,$$

можно поставить в соответствие последовательность A' , такую, что

1. $\Psi(a_k) = L(a_k, A', A)$, для $a_k \in A$,
2. последовательность A' — K -сдвинута при уточненном порядке $\rho(r)$ относительно последовательности A .

Доказательство. Докажем теорему, используя обозначения леммы 3.3. Положим $A' = \omega_\infty(A)$. Теорема будет доказана, если мы проверим, что из последовательности $\{L(z, A'_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ к функции $L(z, A', A)$.

Итак, пусть $G = \left\{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{R}\right\}$. Обозначим через $\{\tilde{A}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность подмножеств последовательности A' , исчерпывающих A' :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}'_n = A', \quad \tilde{A}'_n = \left\{\lambda_j \in A' : r'_j \leq l_n, \operatorname{Im} \lambda_j \geq \frac{1}{l_n}\right\},$$

где последовательность $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ введена в определении множеств A_n .

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое натуральное число n_ε , что при всех $n > n_\varepsilon$ и $z \in G$ будет выполняться неравенство

$$|L(z, \tilde{A}'_n, A_n) - L(z, A', A)| < \varepsilon. \quad (3.6)$$

Обозначим через $A'_{n,m}$ подмножество множества A'_m для $n < m$, имеющее столько же элементов, сколько и множество A'_n . Поскольку последовательность отображений-сдвигов $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится поточечно, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $m(n, \varepsilon)$, что при всех $m > m(n, \varepsilon)$ и $z \in G$ будет выполняться неравенство

$$|L(z, \tilde{A}'_n, A_n) - L(z, A'_{n,m}, A_n)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Оценим далее отношение:

$$\begin{aligned} \frac{L(z, A'_m, A_m)}{L(z, A'_{n,m}, A_n)} &= \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, \lambda_{k,m}, a_k) = \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, a_k) \times \\ &\times \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{k,m}}\right) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\bar{a}_k}\right) \left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_{k,m}}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $A_m = \{\lambda_{k,m}\}_{k \in \overline{1,m}}$.

Последнее произведение в соотношении (3.8) стремится к единице, если $n \rightarrow \infty$ и $z \in G$. Действительно, при достаточно больших n и $m > n$ для точек $a_k \in A_m \setminus A_n$ выполняется неравенство $|z - a_k| \geq \delta > 0$, а значит,

$$\left| \ln \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{k,m}}\right) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\bar{a}_k}\right) \left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_{k,m}}\right)^{-1} \right| \leq \\ \leq \frac{2R}{\delta} \sum_{a_k \in A_m \setminus A_n} \sin \theta_k \exp(-CV(r_k)) \text{ при некотором } C > 0,$$

так как

$$\left| \ln \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \leq \left| \ln \left| \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \right| + \left| \arg \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right|,$$

и каждое слагаемое в правой части предыдущего неравенства можно оценить следующим образом:

$$\left| \ln \left| \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \right| \leq R \frac{|a_k - \lambda_{k,m}|}{|\lambda_{k,m}| \cdot |a_k - z|} \leq \frac{R}{\delta} \sin \theta_k \exp(-CV(r_k)); \\ \left| \arg \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \leq \frac{R}{\delta} \sin \theta_k \exp(-CV(r_k)).$$

Произведение

$$\prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, a_k)$$

также стремится к единице при $z \in G$ и $n \rightarrow \infty$, так как бесконечное произведение $E(z)$ сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}_+$.

Тогда, применяя (3.6) и (3.7), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого натурального m

$$|L(z, A', A) - L(z, A'_m, A_m)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана. $\square$

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма, которая может быть получена из [5, теорема 5] и [6, теорема 1.3.2].

Лемма 3.4. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет все предельные точки на вещественной оси и удовлетворяет условию (2.5). Тогда можно построить функцию $\varphi(z)$ вполне регулярного роста порядка $\rho(r)$ и нормального типа с индикатором $h_\varphi(\theta) > C$, где C — любое положительное число, нули которой образуют R -множество, и исключительные кружки, содержащие ее нули, не пересекаются с последовательностью $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Для этой функции $\varphi(z)$ имеет место следующая оценка вне исключительных кружков:

$$\ln |\varphi(z)| > \frac{h_\varphi}{2} V(|z|),$$

где $h_\varphi = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} h_\varphi(\theta)$ — положительная постоянная.

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 3.2. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет все предельные точки на вещественной оси. Для того, чтобы последовательность A была интерполяционной в пространстве $[\rho, \infty)^+$, необходимо и достаточно, чтобы любая ее присоединенная функция $E(z)$ удовлетворяла условию (2.5).

Доказательство. Необходимость доказана в работе [7] (см. лемму 2.3).

Докажем достаточность. Прежде всего, используя результат Эрла, методом сдвига узлов a_n ($r_n \leq 1$) построим аналитическую ограниченную в $\mathbb{C}_+$ функцию $f \in H^\infty$, которая решает интерполяционную задачу

$$f(a_n) = b_n, \quad r_n \leq 1.$$

Действительно, для таких точек a_n значения b_n ограничены в совокупности, а из (2.5) следует, что произведение Бляшке

$$\prod_{r_n \leq 1} E_0(z, a_n)$$

удовлетворяет условию интерполяционности Карлесона [11] в пространстве H^∞ :

$$\left| \prod_{r_k \leq 1, a_k \neq a_n} E_0(a_n, a_k) \right| > \delta > 0.$$

Пусть теперь последовательность $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (2.1). Определим последовательность $\{b'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равенством $b'_n = b_n - f(a_n)$, если $r_n > 1$, и $b'_n = b_n$, если $r_n \leq 1$. Так как функция $f(z)$ ограничена, то b'_n удовлетворяют условию (2.1). Пусть K из теоремы 3.1. Используя лемму 3.4, построим целую функцию φ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta) \geq K_1$ такую, что исключительные кружки не покрывают узлы интерполяции и вне исключительных кружков выполняется неравенство $|\varphi(re^{i\theta})| \geq \exp[(h(\theta) - \varepsilon)V(r)] > \exp[K_1 V(r)]$. Число K_1 выберем так, чтобы $|b'_n| \exp(-K_1 V(r)) \leq K$. Используя теорему 3.1, построим множество A' , такое, что функция $F_1(z) = L(z, A', A)$ решает интерполяционную задачу $F_1(a_k) = b'_k / \varphi(a_k)$ для всех a_k таких, что $r_k > 1$ и $F_1(a_k) = 0$ для всех a_k таких, что $r_k \leq 1$.

Общее решение можно получить теперь в виде $F(z) = F_1(z)\varphi(z) + f(z)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. I // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1974. — 47. — С. 15–54.
2. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. II // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1974. — 56. — С. 12–58.
3. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986.
4. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Мат. физ., анализ, геом. — 1994. — 1, № 2. — С. 193–215.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
6. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
7. Малютин К. Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Мат. сб. — 1993. — 184, № 2. — С. 129–144.
8. Малютин К. Г. Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости // В сб.: «Математический форум. Исследования по математическому анализу». — Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009. — 3. — С. 143–164.
9. Малютин К. Г., Боженко О. А. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости // Уфимский мат. ж. — 2014. — 6, № 1. — С. 18–29.
10. Уен Н. Т. Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Теор. функций, функц. анализ и их прил. — 1979. — 31. — С. 119–129.
11. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // Am. J. Math. — 1958. — 80. — С. 921–930.
12. Earl J. P. On the interpolation of bounded sequences by bounded functions // J. London Math. Soc. — 1970. — 2, № 3. — С. 544–548.

М. В. Кабанко

Курский государственный университет, Курск, Россия
E-mail: kabankom@gmail.com

К. Г. Малютин

Курский государственный университет, Курск, Россия
E-mail: malyutinkg@gmail.com

UDC 517.53

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609

EDN: WBOQMN

Interpolation by Earl's method in the space of functions of semi-formal order

M. V. Kabanko and K. G. Malyutin

Kursk State University, Kursk, Russia

Abstract. We consider the problem of simple free interpolation in the space of functions of finite order and normal type in a half-plane. We propose its solution by the method of shifting interpolation nodes. This solution is based on Earl's method, who solved the problem of free interpolation in the space of analytic bounded functions in a unit circle.

Keywords: free interpolation, finite order function, shift of interpolation nodes, Earl's method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The second author's research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>.

For citation: M. V. Kabanko, K. G. Malyutin, "Interpolation by Earl's method in the space of functions of semi-formal order," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 597–609. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609>

REFERENCES

1. S. A. Vinogradov and V. P. Khavin, "Svobodnaya interpolatsiya v H^∞ i v nekotorykh drugikh klassakh funktsiy. I" [Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions. I], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1974, **47**, 15–54 (in Russian).
2. S. A. Vinogradov and V. P. Khavin, "Svobodnaya interpolatsiya v H^∞ i v nekotorykh drugikh klassakh funktsiy. II" [Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions. II], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1974, **56**, 12–58 (in Russian).
3. N. V. Govorov, *Kraevaya zadacha Rimana s beskonечnym indeksom* [Riemann Boundary-Value Problem with Infinite Index], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. A. F. Grishin, "Nepřeryvnost' i asimptoticheskaya nepřeryvnost' subgarmonicheskikh funktsiy" [Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions], *Mat. fiz., analiz, geom.* [Math. Phys. Anal. Geom.], 1994, **1**, No. 2, 193–215 (in Russian).
5. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
6. A. F. Leont'ev, *Ryady eksponent* [Exponent Series], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
7. K. G. Malyutin, "Zadacha kratnoy interpolatsii v poluploskosti v klasse analiticheskikh funktsiy konechnogo poryadka i normal'nogo tipa" [The problem of multiple interpolation in a half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1993, **184**, No. 2, 129–144 (in Russian).
8. K. G. Malyutin, "Modifitsirovanny metod Dzhonsa dlya resheniya zadach kratnoy interpolatsii v poluploskosti" [Modified Johns method for solving problems of multiple interpolation in a half-plane], In: *Matematicheskii forum. Issledovaniya po matematicheskomu analizu* [Mathematical Forum. Research in Mathematical Analysis], VNTs RAN and RSO-A, Vladikavkaz, 2009, **3**, pp. 143–164 (in Russian).



9. K. G. Malyutin and O. A. Bozhenko, “Zadacha kratnoy interpolatsii v klasse analiticheskikh funktsiy nulevogo poryadka v poluploskosti” [The problem of multiple interpolation in the class of analytic functions of zero order in a half-plane], *Ufmskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2014, **6**, No. 1, 18–29 (in Russian).
10. N. T. Uyen, “Interpolirovanie s kratnymi uzlami v poluploskosti v klasse analiticheskikh funktsiy konechnogo poryadka i normal’nogo tipa” [Interpolation with multiple nodes in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type], *Teor. funktsiy, funkts. analiz i ikh pril.* [Theor. Funct. Funct. Anal. Appl.], 1979, **31**, 119–129 (in Russian).
11. L. Carleson, “An interpolation problem for bounded analytic functions,” *Am. J. Math.*, 1958, **80**, 921–930.
12. J. P. Earl, “On the interpolation of bounded sequences by bounded functions,” *J. London Math. Soc.*, 1970, **2**, No. 3, 544–548.

M. V. Kabanko
Kursk State University, Kursk, Russia
E-mail: kabankom@gmail.com

K. G. Malyutin
Kursk State University, Kursk, Russia
E-mail: malyutinkg@gmail.com

УДК 517.938.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625

EDN: WGSHP

УПОРЯДОЧЕННЫЕ БИЛЛИАРДНЫЕ ИГРЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК

В. А. Кибкало^{1,2}, Д. А. Туниянц^{1,2}¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Аннотация. Обсуждается недавно отмеченная В. Драговичем и М. Раднович связь между введенной ими ранее конструкцией упорядоченной бильярдной игры и предложенным В. В. Ведюшкиной классом бильярдных книжек. В работе предложено обобщение понятия реализации некоторой игры при помощи бильярдной книжки и доказан аналог теоремы В. Драговича и М. Раднович для такой реализации. В рамках обзора изложены недавние результаты авторов, К. Е. Тюриной и В. Н. Завьялова о топологических свойствах изоэнергетических многообразий круговых бильярдных книжек и топологических инвариантах конкретных серий эллиптических бильярдных книжек.

Ключевые слова: упорядоченная бильярдная игра, бильярдная книжка, изоэнергетическое многообразие, топологический инвариант.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для цитирования: В. А. Кибкало, Д. А. Туниянц. Упорядоченные бильярдные игры и топологические свойства бильярдных книжек // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 610–625. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625>

1. ВВЕДЕНИЕ

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам, предложенный А. Т. Фоменко, его учениками и соавторами [1, 18, 19, 24], подробнее см. [3], позволил описывать качественные свойства таких систем с двумя степенями свободы в их неособых зонах энергии при помощи классифицирующих комбинаторных инвариантов. Фазовое пространство (M^4, ω) системы разбивается на совместные уровни энергии H и независимого с ней первого интеграла F , т. е. возникает структура слоения Лиувилля. Почти все его слои являются лагранжевыми регулярными торами и замыканиями фазовых траекторий системы. Послойный гомеоморфизм двух систем в их неособых зонах энергии (т. е. на трехмерных изоэнергетических поверхностях $Q_h^3 : H = h$, в точках которых $dH \neq 0$) означает возможность перевести друг в друга замыкания почти всех траекторий двух систем.

Классифицирующим инвариантом такой эквивалентности является инвариант Фоменко—Цишанга (меченая молекула). Ребра этого графа отвечают семействам регулярных торов, а вершины — бифуркациям такого слоения. Если слои слоения компактны, а критические точки отображения (H, F) невырождены, то классификация таких особенностей (называемых 3-атомами)

была получена А. Т. Фоменко. Атом A является произведением расслоенного 2-диска (окрестности точки минимума или максимума функции) на окружность. Седловые 3-атомы получаются как произведение двумерной расслоенной базы с морсовскими седлами (окрестности графа с вершинами степени 4, вложенного в ориентируемую 2-поверхность) на окружность, возможно, с факторизацией по группе $\mathbb{Z}_2$.

Граф-молекулу с атомами-бифуркациями в вершинах требуется дополнительно оснастить числовыми метками r, ε, n , отвечающими за склейку Q^3 из 3-атомов по диффеоморфизмам их граничных торов. Топологическое описание, включая бифуркационный анализ и вычисление инвариантов Фоменко—Цишанга, было выполнено для многих известных задач геометрии, механики и математической физики, см., например, [2, 3, 11–13, 25, 30]: для геодезических потоков с линейными и квадратичными по импульсам интегралами, волчков Эйлера и Лагранжа, системы Жуковского, волчка Ковалевской и его аналогов на алгебрах Ли. Важную роль в данном направлении сыграли работы М. П. Харламова, П. Е. Рябова и их коллег.

Были обнаружены нетривиальные эквивалентности систем разной природы, например, ливиллево эквивалентными (и даже непрерывно траекторно эквивалентными при соответствующих значениях параметров систем) оказались геодезический поток на трехосном эллипсоиде и знаменитый волчок Эйлера, т. е. движение тяжелого твердого тела, закрепленного на шарнире в своем центре масс, см. [3]. Эквивалентность двух систем означает, помимо прочего, возможность промоделировать поведение сложной системы при помощи другой, более простой и наглядной.

Как оказалось, предложенное В. В. Ведюшкиной [9, 22] обобщение класса интегрируемых бильярдов в плоских областях, ограниченных софокусными квадратами семейства

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda) \quad (1.1)$$

или концентрическими окружностями, позволяет промоделировать широкий класс слоений интегрируемых систем и их особенностей, т. е. верен ряд положений гипотезы А. Т. Фоменко о бильярдах [20].

Для плоской области $\Omega \subset Oxy$, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma = \partial\Omega$, системой бильярда в этой области называют гамильтонову систему с энергией $H = |v|^2/2 = (v_x^2 + v_y^2)/2$. Фазовое пространство M^4 получается из $T^*\Omega$ (отождествив его с множеством пар точка—вектор $T\Omega$, поскольку метрика единичная) после введения эквивалентности пар точка—вектор (x, v) для граничных $x \in \partial\Omega$, отвечающей отражению бильярдного шара от границы:

$$M^4 := \{(x, v) | x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim: (x, v) \sim (\tilde{x}, \tilde{v}) \Leftrightarrow x = \tilde{x} \in \gamma = \partial\Omega, |v| = |\tilde{v}|, v - \tilde{v} \perp T_x\Omega.$$

Движение частицы в области является прямолинейным и равномерным. Отражение от граничной кривой γ сохраняет $|\vec{v}|$ и задается равенством углов падения и отражения. В нашей работе рассматриваются бильярды в областях, ограниченных одной или двумя гладкими кривыми.

Классом бильярдных книжек, введенных В. В. Ведюшкиной [9, 22], называют кусочно-плоские двумерные столы-комплексы X^2 с проекцией $\pi: X^2 \rightarrow Oxy$. Проекция задает гомеоморфизм каждого листа книжки (двумерной клетки e_i^2) на плоскость, что позволяет поднять плоскую метрику с Oxy на объединение листов книжки. При ударе о корешок книжки e^1 (гладкую дугу границы листа книжки) частица может перейти с одного листа на другой, если по этому корешку склеено несколько 2-клеток, или стандартно отразиться, если такой лист один. В проекции на плоскость звенья траектории до и после удара либо лежат на одной прямой, либо получаются отражением от кривой $\gamma = \pi(e^1)$. Если по корешку склеено $k \geq 2$ листов, то правило перехода с листа i на лист $\sigma(i)$ задается циклической перестановкой σ длины k , приписанной этому корешку и действующей транзитивно на всех инцидентных ему листах. Отметим, что если границы листов кусочно-гладкие, например, дуги софокусных эллипсов и гипербол, то на отвечающие им перестановки требуется наложить условие коммутирования (для непрерывности фазового потока).

Пусть все корешки книжки проецируются на эллипсы семейства (1.1) или концентрические окружности. Тогда для любых перестановок на 1-ребрах движение шара по столу (книжке) интегрируемо с тем же интегралом, что и плоский бильярд. В проекции на плоскость фазовая траектория имеет *каустыку* — кривую, которой касаются прямые, содержащие звенья траектории.

Для софокусных билиардов она является квадрикой с параметром λ , равным значению квадратичного по импульсам интеграла Λ с условиями $0 < b < a$ на паре точка—вектор (x, y, v_x, v_y)

$$\Lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_1x - v_2y)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Для билиарда в круге или кольце, ограниченном концентрическими окружностями, интеграл равен $\dot{\phi} = x\dot{y} - y\dot{x}$, т. е. является линейным по импульсам. Каждая каустика является окружностью с тем же центром, что и окружности границы.

Поверхность Q_h^3 уровня $H = h > 0$ в M^4 билиардной книжки, согласно результату И. С. Харчевой [26], гомеоморфна замкнутому трехмерному многообразию. Для плоских столов это ранее было показано В. В. Ведюшкиной в [17].

Вычисление топологических инвариантов плоских софокусных билиардов было выполнено В. Драговичем и М. Раднович в [28] и В. В. Ведюшкиной в [15]. Расширение класса рассматриваемых столов до топологических билиардов [16] (их столы являются кусочно-плоскими двумерными многообразиями) и билиардных книжек (клеточных комплексов с перестановками) позволило реализовать широкий класс инвариантов интегрируемых систем и их особенностей. В частности, произвольные боттовские особенности-атомы [9], базы слоения Лиувилля [10] и числовые метки, которыми оснащаются ребра и подграфы-семьи в инвариантах Фоменко—Цишанга [5, 7]. Последние результаты отвечают локальной версии гипотезы А. Т. Фоменко [21] о реализации «элементарных» подграфов графа-инварианта. Также были обнаружены неочевидные эквивалентности билиардов и систем из геометрии и динамики твердого тела [4, 8, 23].

1.1. Упорядоченные билиардные игры. В работе [27] В. Драговичем и М. Раднович были введены *упорядоченные билиардные игры*, т. е. системы движения частицы «с памятью», которые задаются двумя упорядоченными наборами: набор из n софокусных эллипсов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и *сигнатура* игры, т. е. набор из n знаков $\delta_1, \dots, \delta_n : \delta_j \in \{\pm 1\}$.

Рассмотрев все эллипсы $\mathcal{E}_s$ как представителей семейства (1.1) при $\lambda = \lambda_s$ для $0 \leq \lambda_s < b$, опишем траекторию системы в терминах чисел λ_s . Траектория билиардной игры является ломаной $\dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots$, вершины которой A_k принадлежат эллипсу $\mathcal{E}_s$ для $s \equiv k \pmod{n}, k \in \mathbb{Z}$. Если знак $\delta_s = 1$, то отражение от эллипса $\mathcal{E}_s$ в вершине A_k является внутренним, а если $\delta_s = -1$, то внешним. На рис. 1 приведен пример такой упорядоченной билиардной игры.

Отметим, что для *корректности* упорядоченной билиардной игры необходимо и достаточно, чтобы для сигнатуры $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ было верно:

- отсутствует два последовательных элемента $\delta_s = \delta_{s+1} = -1$ (здесь $\delta_{n+1} = \delta_1$), поскольку два последовательных внешних отражения от эллипса в $\mathbb{R}^2$ невозможны;
- если $\delta_s = -1$, то эллипс $\mathcal{E}_s$ лежит внутри эллипсов $\mathcal{E}_{s-1}$ и $\mathcal{E}_{s+1}$ (т. е. $\lambda_{s-1} < \lambda_s < b$ и $\lambda_{s+1} < \lambda_s$).

Поскольку при отражении от эллипсов семейства (1.1) и движении вдоль прямой сохраняется значение λ интеграла Λ , то вдоль траекторий упорядоченной билиардной игры сохраняются энергия и интеграл Λ плоских билиардов и книжек. Отметим, что при замене софокусных эллипсов, вложенных друг в друга на плоскости, на набор концентрических окружностей, данное свойство сохранится (для линейного интеграла).

В работе [29] для произвольной билиардной игры строится билиардная книжка, система на которой реализует игру в следующем смысле.

Определение 1.1. Интегрируемый билиард на столе Ω реализует упорядоченную билиардную игру $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ с сигнатурой $\delta_1, \dots, \delta_n$, если для каждого значения интеграла $\Lambda = \lambda : \max_s \lambda_s < \lambda \leq a$ билиард имеет траекторию, лежащую на уровне λ и отвечающую данной игре.

Прямая, содержащая произвольное звено траектории, лежащей на уровне $\Lambda = \lambda \in \left(\max_s \lambda_s, a \right]$, будет пересекать каждый эллипс билиардной игры. Для круговых билиардов то же верно для траекторий, каустика которых имеет меньший радиус, чем остальные корешки-окружности игры.

Билиард в эллипсе $\mathcal{E}_1 = \{x^2/a + y^2/b = 1\}$ с параметром $\lambda_1 = 0$ реализует игру $(\mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $\delta_1 = 1$, т. к. для всех $0 < \lambda \leq a$ на уровне $\Lambda = \lambda$ имеется траектория, отражающаяся

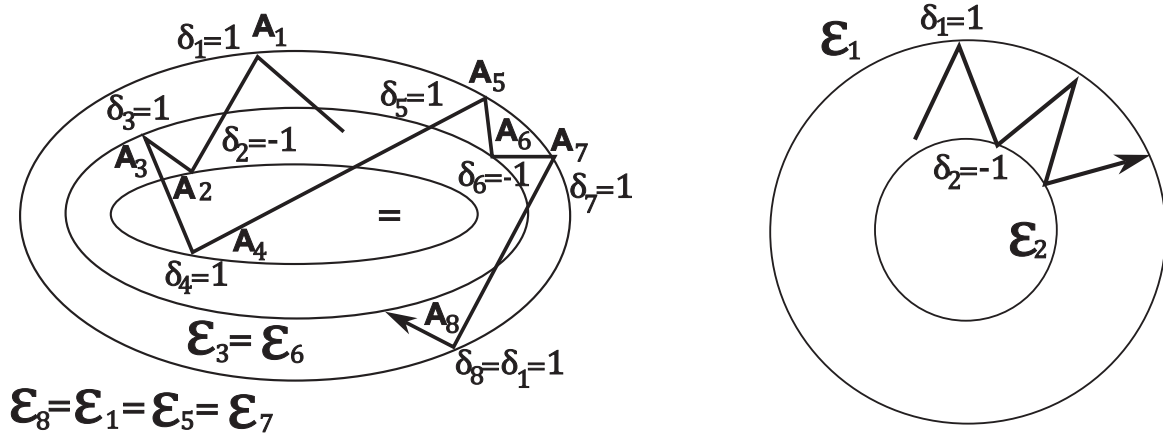


РИС. 1. Упорядоченная бильярдная игра, заданная наборами $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7)$ и $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7) = (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1)$ с совпадающими эллипсами $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_7$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4$ и $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_6$. В силу $\delta_4 = +1$ частица завершает движение по звену A_3A_4 отражением от эллипса $\mathcal{E}_4$ не в первой точке пересечения прямой с эллипсом $\mathcal{E}_4$, а во второй: отражение должно быть внутренним, а точка A_3 лежит вне него.

FIG. 1. An ordered billiard game defined by the sets $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7)$ and $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7) = (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1)$ with coinciding ellipses $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_7$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4$ and $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_6$. Due to $\delta_4 = +1$ the particle completes its motion along the edge A_3A_4 with reflection from the ellipse $\mathcal{E}_4$ not at the first point of intersection of the line with the ellipse $\mathcal{E}_4$, but at the second one: the reflection must be internal, and the point A_3 lies outside of it.

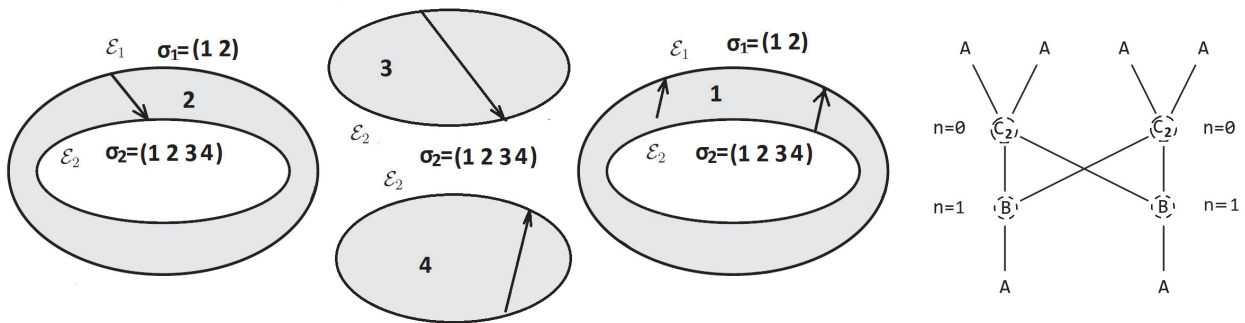


РИС. 2. Бильярдная книжка, реализующая игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, 1)$ и инвариант Фоменко—Цишанга бильярда на ней.

FIG. 2. A billiard book implementing the game $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ with the signature $(1, 1)$ and the Fomenko—Zieschang invariant of the billiard on it.

от $\mathcal{E}_1$ внутренне. Бильярд в кольце между эллипсами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ с параметрами $\lambda_1 < \lambda_2 < b$ реализует игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, -1)$. На уровне $\max(\lambda_1, \lambda_2) < \lambda \leq a$ интеграла Λ есть траектория, удовлетворяющая игре.

Для реализации произвольной бильярдной игры В. Драговичем и М. Раднович были применены [29] динамические системы на кусочно-плоских бильярдных книжках. Нетрудно видеть, что бильярдами из более простого класса (на плоских столах) нельзя реализовать, например, игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, 1)$, изображенную на рис. 2.

В пределах каждого листа L траектория частицы является поднятием траектории бильярда в плоской области $\pi(L)$. При трансверсальном ударе о гладкую границу листа L (корешок книжки) частица продолжит движение по листу $\sigma_k(L)$, причем если проекции $\pi(L)$ и $\pi(\sigma_k(L))$ лежат

1. по одну сторону от проекции граничной кривой $\pi(\gamma)$, то для проекции траектории выполнен закон отражения от $\pi(\gamma)$;

2. по разные стороны от проекции граничной кривой $\pi(\gamma)$, то проекции двух звеньев (до и после отражения) попадают на одну прямую, пересекающую $\pi(\gamma)$, т. е. отражение отсутствует.

Для реализации произвольной корректной упорядоченной бильярдной игры с эллипсами $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и сигнатурой $\delta_1, \dots, \delta_n$ В. Драгович и М. Раднович алгоритмически построили книжки, склеенные из эллиптических колец и дисков. Далее ограничимся случаем, когда соседние эллипсы в наборе не совпадают: $\lambda_s \neq \lambda_{s+1}$. Тогда построенная книжка имеет n корешков с перестановками $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — гладких кривых, проецирующихся на эти эллипсы $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$.

Теорема 1.1 (В. Драгович, М. Раднович). *Корректная упорядоченная бильярдная игра с софокусными эллипсами $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ и сигнатурой $(\delta_1, \dots, \delta_n)$, где $\mathcal{E}_s \neq \mathcal{E}_{s+1}$ (считаем, что $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_1$) реализуется книжкой, склеенной из следующих листов для $\forall s \in \{1, \dots, n\}$:*

- (A) кольцо A_s , ограниченное эллипсами $\mathcal{E}_s$ и $\mathcal{E}_{s+1}$;
- (D1) диск D_s с границей $\mathcal{E}_s$, если знак $\delta_s = 1$ и эллипс $\mathcal{E}_s$ лежит между двумя соседними эллипсами $\mathcal{E}_{s-1}$ и $\mathcal{E}_{s+1}$;
- (D2) пара дисков D'_s и D''_s с границей $\mathcal{E}_s$, если знак $\delta_s = -1$ и эллипс $\mathcal{E}_s$ лежит внутри обоих соседних эллипсов $\mathcal{E}_{s-1}$ и $\mathcal{E}_{s+1}$.

Перестановка σ_s , соответствующая корешку $s = 1, \dots, n$ на эллипсе склейки $\mathcal{E}_s$, равна

1. $(A_{s-1}D_sA_s)$ в случае (D1);
2. $(A_{s-1}D'_sD''_sA_s)$ в случае (D2);
3. $(A_{s-1}A_s)$ иначе.

В той же работе доказана более общая теорема для класса игр, содержащих среди соседних эллипсов $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i+1} = \dots = \mathcal{E}_{i+k-1}$ равные. Набору соседних равных эллипсов соответствует вклейка некоторого количества дисков, причем во всех возникающих случаях перестановки на корешках имеют тот же вид: кольцо с меньшим номером, набор дисков, кольцо с большим номером. При этом количество вклеиваемых дисков должно быть на k больше, чем в теореме для игр без таких повторов, сформулированной выше.

Отметим следующий общий факт: книжка может реализовывать некоторый набор бильярдных игр, не обязательно одну или две. Построенные по алгоритму из работы [29] бильярдные книжки реализуют ровно две игры: после удаления листов-дисков стол оказывается гомеоморфен двумерному тору, склеенному из плоских колец. Переход от траектории, реализующей одну бильярдную игру, к траектории, реализующей другую, происходит при изменении направления движения на противоположное в точке одного из колец A_k .

Пусть одна игра отвечает заданным наперед наборам $(\dots \mathcal{E}_k \dots)$ и $(\dots \delta_k \dots)$. Введем понятие *обратной игры* — запишем в обратном порядке последовательность эллипсов, задававших данную упорядоченную бильярдную игру, и запишем в обратном порядке сигнатуру. В общем случае, построенная в [29] бильярдная книжка не является обратимой системой в следующем смысле: проекция на плоскость траектории шара, запущенного в обратном направлении с некоторого листа, не будет задаваться (как бильярдная игра) ни данной, ни обратной игрой.

Покажем, что следующая модификация алгоритма путем вклейки дисков позволяет сделать вторую игру, реализуемую книжкой, обратной к первой. Иначе говоря, можно дать более сильное определение реализации упорядоченной бильярдной игры бильярдными книжками:

Определение 1.2. Бильярдная книжка, склеенная из эллиптических колец и дисков с корешками, проецирующимися на эллипсы с параметрами λ_k , *реализует упорядоченную бильярдную игру*, если произвольная траектория на уровнях интеграла $\Lambda = \lambda : \max_k \lambda_k < \lambda \leq a$ реализуют либо данную игру, либо ей обратную.

Теорема 1.2 (Кибкало, Туниянц). *Произвольная упорядоченная бильярдная игра реализуется в смысле определения 1.2 алгоритмически задаваемой бильярдной книжкой Ω' . Последняя получается из книжки Ω , построенной по алгоритму [29] В. Драговича и М. Раднович для данной игры, путем добавления второго экземпляра диска $\tilde{D}_k^i$ для каждого листа-диска D_k^i , входящего в Ω и соответствующего изменению перестановки на корешке, инцидентном листу D_k^i . Если включающая лист D_k^i перестановка книжки Ω имеет вид $(A_{k-1}, D_k^1, \dots, D_k^s, A_k)$, то перестановка новой книжки Ω' будет иметь вид $(A_{k-1}, D_k^{(1)}, \dots, D_k^{(s)}, A_k, \tilde{D}_k^1, \dots, \tilde{D}_k^s)$.*

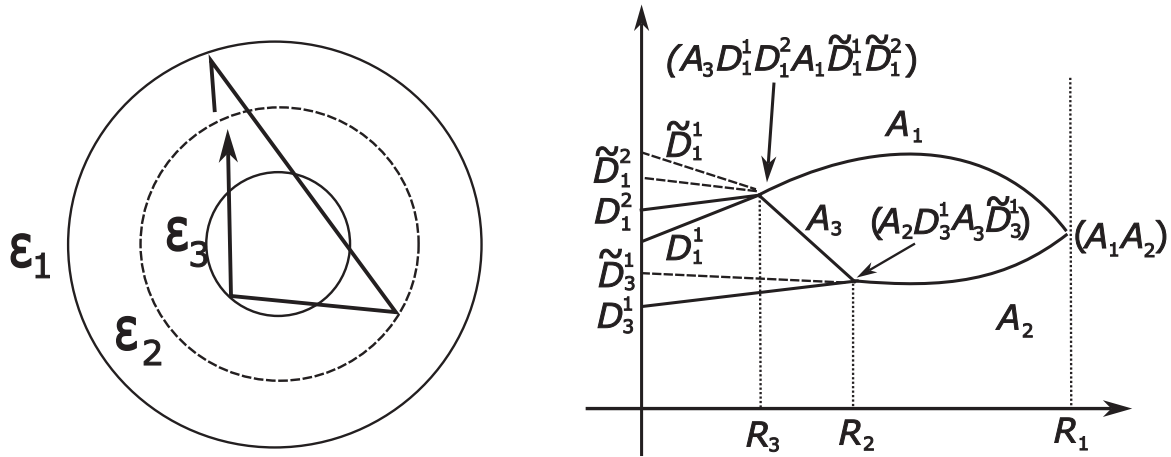


РИС. 3. Биллиардная игра $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $(1, 1, 1)$, реализующая ее по алгоритму из [29] книжка и ее модификация путем вклейки дисков $\tilde{D}_k^i$ для каждого диска D_k^i исходной книжки.

FIG. 3. Billiard game $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ with the signature $(1, 1, 1)$, the book implementing it according to the algorithm from [29], and its modification by gluing disks $\tilde{D}_k^i$ for each disk D_k^i of the original book.

Доказательство.

1. Рассмотрим на биллиардной книжке из исходного алгоритма В. Драговича и М. Раднович траекторию, реализующую требуемую игру. Она последовательно проходит по кольцам A_i , а перед переходом с листа A_i на лист A_{i+1} по перестановке $\sigma_i = (A_i, \dots, A_{i+1})$ проходит по листам D_i в имеющемся количестве (в записи перестановки σ_i они стоят на месте многоточия). В частности, добавление дисков в перестановку σ_i после кольца A_{i+1} не влияет на то, какую игру реализует рассмотренная траектория.

2. Изменим направление на звене траектории, лежащем на кольце A_{i+1} . В этом случае она перейдет на кольцо A_i , и в конце пути вернется на данный лист A_{i+1} с кольца A_{i+2} . При ударе об общий корешок листов A_{i+1} и A_i отражение будет иметь тот же тип (внешнее или внутреннее), а количество дисков позволяет реализовать нужное число последовательных внутренних отражений от повторяемого k раз эллипса. При этом эллипсы игры проходятся в обратном порядке. Теорема доказана. $\square$

На рис. 3 приведен пример игры и реализующей ее книжки, которая после вклейки дополнительных листов (обозначены штриховыми линиями на рис. 3 справа) согласно теореме 1.2 начинает реализовывать одновременно игру $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $(1, 1, 1)$ и обратную ей игру вместо реализации исходной игры вместе с игрой $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $(-1, 1)$.

Теперь укажем, какие корректные биллиардные игры невозможно реализовать (книжкой, склеенной из эллиптических или круговых колец и дисков) при дополнительном условии: траектория проходит хотя бы по одному диску. Иными словами, реализующая такую игру траектория биллиарда (на книжке) может проходить только по ее кольцам. Отметим, что реализуемость без данного условия следует из теоремы 1.1.

Утверждение 1.1 (Туниянц). *Корректная упорядоченная биллиардная игра не может быть реализована компактной биллиардной книжкой (склеенной из колец и дисков) с условием, что реализующие игру траектории проходят хотя бы по одному диску, тогда и только тогда, когда игра содержит четное количество эллипсов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{2n}$, а сигнатура знакопеременна: $\delta_s = -\delta_{s+1}$ для $s = 1, \dots, 2n$.*

Доказательство. Поскольку книжка корректна, а сигнатура знакопеременна, то соседние эллипсы $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}$ не могут совпадать. Выберем некоторое звено траектории. Пусть оно проходит по листу-диску L_k книжки. Тогда после удара о границу траектория покидает этот лист (иначе игра имеет вид $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}, \delta_1 = 1$).

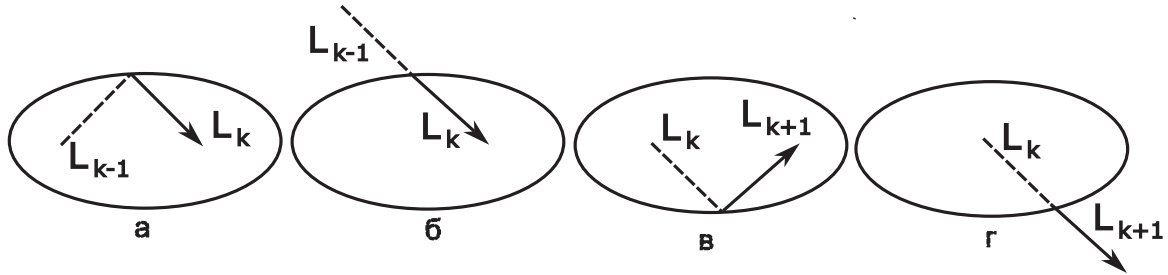


РИС. 4. Возможные варианты движения частицы (в проекции на плоскость) при переходе с листа L_{k-1} на гомеоморфный диску и ограниченный эллипсом $\mathcal{E}$ лист L_k (а, б) и при переходе с такого листа L_k на лист L_{k+1} (в, г).

FIG. 4. Possible variants of particle motion (in projection onto a plane) when moving from the sheet L_{k-1} to the sheet L_k , which is homeomorphic to a disk and bounded by an ellipse $\mathcal{E}$ (а, б) and when moving from such sheet L_k to sheet L_{k+1} (в, г).

Обозначим листы, по которым проходят предыдущее и следующее звенья траектории, через L_{k-1} и L_{k+1} . Вместе с L_k они имеют общий корешок. На рис. 4 приведены варианты расположения проекции листов L_{k-1} и L_{k+1} и эллипса $\mathcal{E} = \pi(\partial L_k)$. Сплошная стрелка отвечает звену траектории на листе L_k и L_{k+1} на рис. 4 (а, б) и на рис. 4 (в, г), соответственно.

Для каждого из четырех случаев такое невозможно: или два отражения подряд будут внутренними, или после прохождения по диску отражение должно было бы быть внешним.

Покажем, что если книжка склеена только из колец, то сигнатура каждой из реализуемых ею игр знакопеременная. Для удобства рассмотрим уровень $\Lambda = a$ для софокусного бильярда и $r = 0$ для кругового бильярда: при этом проекция всей траектории лежит на одной прямой. После внешнего отражения должно быть внутреннее: иначе траектория (и книжка) будет неограниченной. После внутреннего отражения имеем внешнее: иначе частица проходила бы через центр семейства каустик, что для колец невозможно. Утверждение доказано. $\square$

2. ТОПОЛОГИЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК И УПОРЯДОЧЕННЫХ БИЛЛИАРДНЫХ ИГР

В данном разделе приведем несколько утверждений о топологии изоэнергетических поверхностей Q^3 бильярдных книжек, склеенных из колец и дисков. Согласно результату И. С. Харчевой, для корректной книжки уровень Q^3 будет замкнутым топологическим 3-многообразием.

Отметим, что в недавней работе В. В. Ведюшкиной [6] были алгоритмически реализованы бильярдными книжками связные суммы произвольного набора линзовых пространств $L(p_i, q_i)$ и прямых произведений $S^1 \times S^2$. Корешки склейки и свободные границы таких столов проектируются как на софокусные эллипсы $\lambda < b$, так и на гиперболы $b < \lambda < a$.

Будем говорить о *кольцевой* бильярдной книжке, если она склеена из плоских областей, гомеоморфных кольцам, причем корешки книжки являются регулярными замкнутыми кривыми без самопересечений, а их проекции $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2(x, y)$ либо совпадают, либо не пересекаются. Тогда на множестве корешков задается порядок: проекция одного из двух корешков находится внутри замкнутого диска, ограниченного проекцией другой.

Скажем, что две кольцевые книжки Ω_1 и Ω_2 *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ этих книжек, переводящий лист в лист, корешок в корешок с сохранением перестановки на корешке, а также сохраняющий порядок на корешках, описанный выше.

Это понятие корректно. Набор корешков произвольной кольцевой книжки (точнее, их проекций на плоскость) можно путем регулярной гомотопии привести к набору концентрических окружностей. Поднятие гомотопии с плоскости на бильярдную книжку (с учетом перестановок) порождает для каждого значения параметра гомотопии бильярдные книжки, эквивалентные исходной. В итоге получается некоторая круговая книжка, эквивалентная исходной.

Добавление к кольцевой книжке листов, гомеоморфных дискам и ограниченных корешками кольцевой книжки, не препятствует ее приведению к *каноническому виду*, т. е. к эквивалентной ей

книжке, склеенной из круговых колец и листов-дисков. Последняя имеет S^1 -симметрию, $\pi^{-1} \circ \alpha$, где α — поворот в плоскости.

Определение 2.1. Профилем $P(\Omega)$ бильярдной книжки Ω , склеенной из колец и дисков, назовем факторпространство канонического вида Ω по S^1 -симметрии $\pi^{-1} \circ \alpha$ с проекцией на ось Or .

Если книжка Ω кольцевая, то она гомеоморфна $P(\Omega) \times S^1$. Профиль имеет структуру графа: его ребру отвечает лист книжки Ω , а вершине — центр листа-диска или корешок склейки книжки Ω . Пример профиля круговой книжки, склеенной из двух колец и диска, приведен на рис. 5.

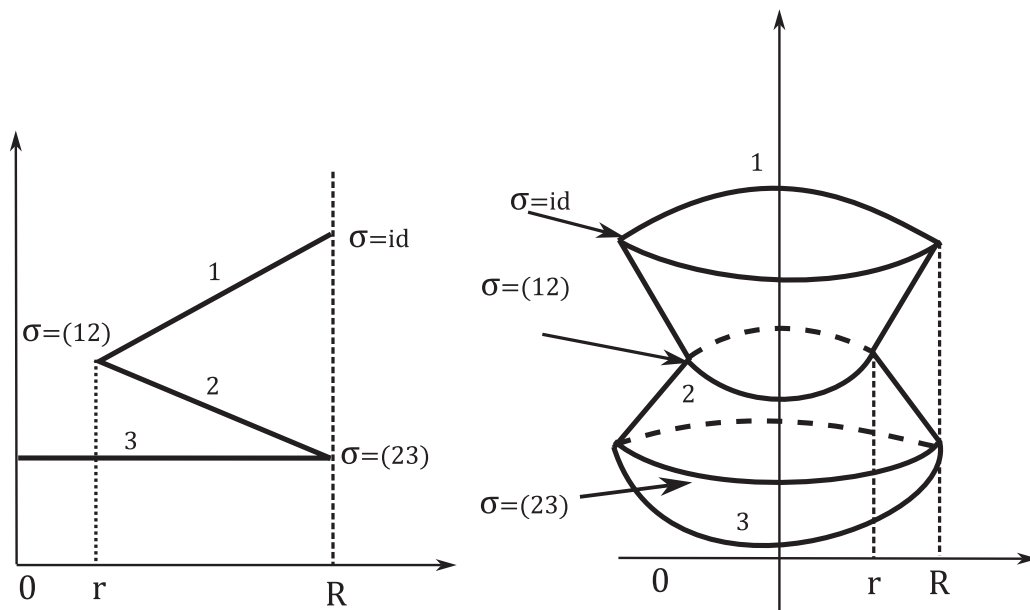


Рис. 5. Профиль бильярдной книжки, склеенной из двух колец и диска

FIG. 5. Profile of a billiard book glued from two rings and a disc

Сформулируем условие эквивалентности двух круговых книжек в терминах их профилей. Для каждой точки A профиля определен радиус r окружности с центром в точке O , на которой лежит $\pi^{-1}(A)$. Две круговые книжки эквивалентны, если имеется гомеоморфизм f между ними, сохраняющий отношение порядка: из $r(A) < r(B)$ следует, что $r(f(A)) < r(f(B))$.

2.1. Кольцевые книжки. Класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности Q^3 кольцевой бильярдной книжки определяется цикломатическим числом (первым числом Бетти) ее графа-профиля. Оно равно минимальному количеству ребер, удаление которого превращает граф в дерево. Для связного графа с V вершинами и E ребрами оно равно $E - V + 1$.

Теорема 2.1 (Туниянц). *Изоэнергетическая поверхность Q^3 кольцевой бильярдной книжки гомеоморфна прямому произведению окружности и сферы с g ручками: $Q^3 \cong S^1 \times (S^2 + g \text{ ручек})$, где g — цикломатическое число графа-профиля книжки.*

Комментарий. Класс гомеоморфности Q^3 кольцевой книжки не зависит от выбора циклических перестановок на корешках, т. е. определяется только свойствами комплекса, а не его оснащением перестановками.

Следствие. Пусть бильярдная книжка из алгоритма теоремы 1.1 склеена из колец. Тогда ее изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерному тору T^3 .

Доказательство. Для канонического вида кольцевой книжки Ω имеем, что трехмерное ориентируемое многообразие Q^3 есть произведение S^1 на двумерный прообраз M^2 ее профиля (как подмножества конфигурационного пространства) в фазовом Q^3 . Отсюда имеем, что M^2 является двумерным ориентируемым многообразием.

1. Покажем, что прообраз в фазовом Q^3 окрестности вершины V_i графа-профиля $U(V_i) \subset M^2$ есть сфера S^2 с k_i вырезанными дисками D^2 , где $k_i = \deg V_i$. Напомним, что прообраз внутренней точки x ребра в Q^3 есть окружность, состоящая из пар «точка x и вектор скорости $|\vec{v}| = 1$ ». Два вектора скорости направлены по касательной к окружности-каустике в данной точке x (по и против часовой стрелки). Такие пары точка—вектор разбивают прообраз ребра в Q^3 (т. е. цилиндр) на два прямоугольника.

Прообраз вершины V_i графа-профиля степени $k_i = \deg V_i$ есть пара точек A_1 и A_2 (вектор скорости касается корешка склейки) и k_i соединяющих их дуг. К каждой дуге приклеено ровно два из $2k_i$ прямоугольников, на которые разбиваются k_i цилиндров, склеиваемых в прообразе вершины. Окрестности точек A_1, A_2 в многообразии M_i^2 гомеоморфны дискам.

Тем самым M_i^2 разбито на $2 + 2k_i$ вершин, $2k_i$ граней, гомеоморфных дискам, и $5k_i$ ребер. $2k_i$ ребер лежат (вместе с $2k_i$ вершинами) в прообразе $\partial U(V_i)$, другие $2k_i$ разбивают цилиндры (прообразы ребер, инцидентных V_i) на пары прямоугольников, а k_i ребер отвечают дугам между точками A_1, A_2 в прообразе вершины V_i . Эйлера характеристика $\chi_i = 2 + 2k_i - 5k_i + 2k_i = 2 - k_i$, т. е. из ориентируемости M_i^2 это сфера S^2 без k_i дисков.

2. Цикломатическое число графа-профиля равно $g = E - V + 1$, где E — число ребер в графе-профиле, V — число вершин в нем. Поскольку $\sum_{i=1}^V k_i = \sum_{i=1}^V \deg V_i = 2E$, то эйлера характеристика замкнутой $\chi(M^2)$ как склейки V сфер с дырками равна

$$\chi(M^2) = \sum_{i=1}^V \chi_i = \sum_{i=1}^V (2 - k_i) = 2V - \sum_{i=1}^V k_i = 2V - 2E = 2 - 2(E - V + 1) = 2 - 2g.$$

Отсюда $M^2 \cong S^2 + (g \text{ ручек})$, т. е. $Q^3 \cong (S^2 + g \text{ ручек}) \times S^1$. Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что при следующих преобразованиях круговой кольцевой книжки топологический тип ее изоэнергетической поверхности Q^3 не меняется. Книжка остается круговой кольцевой книжкой, но граф-профиль, количество корешков и листов может меняться.

Выберем корешок γ_0 радиуса r_0 книжки, по которому склеено $n > 3$ листов с перестановкой $\sigma_0 = (L_1, \dots, L_n)$. Для листа L_1 и листа $L_2 = \sigma_0(L_1)$ изменим радиус колец L_1, L_2 с r_0 на r_1 , вклеим кольцо A_0 с радиусами r_0, r_1 и зададим перестановки $\sigma = (A_0, L_3, \dots, L_n)$ и $\sigma_1 = (A_0 L_1 L_2)$ на корешках радиусов r_0 и r_1 . При этом траектория шара, пришедшая в окрестность замыкания нового листа A_0 по листу L_i , покидает ее по тому же листу $L_{i+1} = \sigma_0(L_i)$, что до преобразования.

Таковыми преобразованиями произвольную кольцевую книжку с цикломатическим числом g можно преобразовать к книжке, изображенной на рис. 6 (в). Она склеена из $2g$ колец так, что все кольца имеют общий корешок, а по оставшимся корешкам склеены по парам. Многообразие Q^3 такой книжки гомеоморфно произведению сферы S^2 с g ручками на окружность S^1 . Это можно проверить и явно: прообраз окрестности вершины есть сфера с $2g$ дырками, а прообраз пары колец отвечает ручке.

2.2. Круговые бильiardные книжки, содержащие диски. Если книжка содержит диск, то класс гомеоморфности ее изоэнергетической поверхности Q^3 устроен сложнее. Для его изучения оказывается полезным использовать слоение Лиувилля соответствующего кругового бильiardа. В качестве интеграла F , независимого с H , выберем не радиус окружности-каустики, а ориентированный угол, отсчитываемый от вектора скорости траектории к направляющему вектору каустики (направленной по часовой стрелке). Тогда интеграл F меняется от 0 до π , и его уровень $\pi/2$ отвечает случаю, когда траектория проходит через центр диска. В. А. Кибкало совместно с В. Н. Завьяловым недавно был получен следующий результат, который мы приведем с коротким обоснованием.

Утверждение 2.1. *Класс гомеоморфности Q^3 связной бильiardной книжки, разные корешки которой не имеют общих точек, не зависит от того, к каким именно корешкам книжки приклеены листы-диски.*

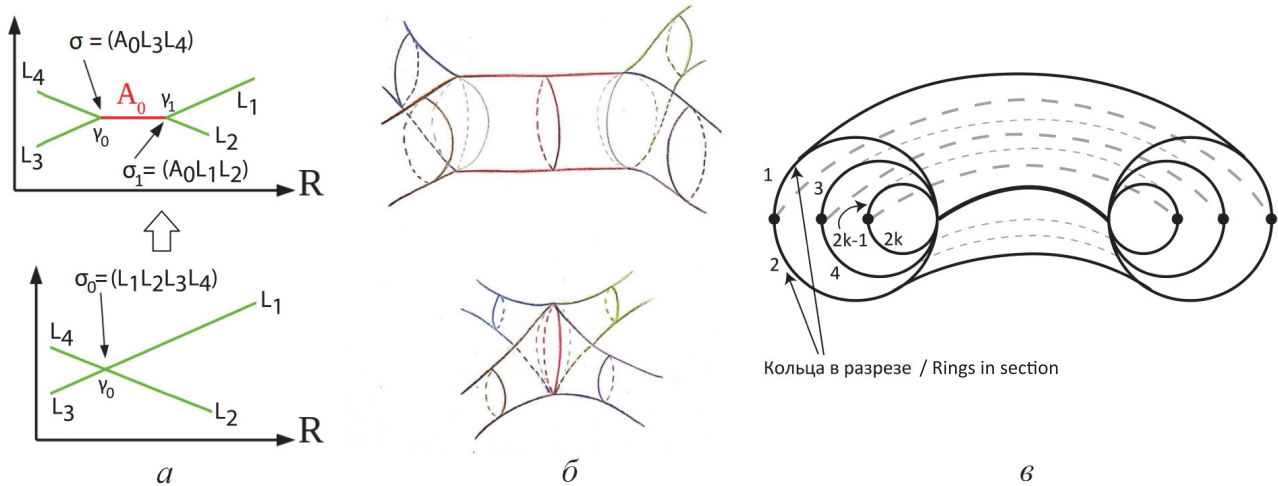


РИС. 6. Граф-профиль книжки (а) и прообраз окрестности вершины (б) до преобразования (снизу) и после него (сверху). Вид, к которому таким преобразованием приводится произвольная круговая книжка.

FIG. 6. The profile graph of a book (a) and the preimage of the neighborhood of a vertex (б) before the transformation (bottom) and after it (top). The form to which such a transformation reduces an arbitrary circular book.

Доказательство. Вычислим инвариант Фоменко—Цишанга кругового биллиарда с выбранным графом-профилем. Этот биллиард интегрируем с интегралом $F : f \in [\pi/2]$. Данный граф, напомним, является базой слоения Лиувилля на изоэнергетической Q^3 . Его вершины отвечают бифуркациям слоения, а ребра — семействам регулярных торов. Висячие вершины графа отвечают минимальным и максимальным атомам A , т. е. полноториям, расслоенным на торы и их общую ось (особую окружность системы). Остальные вершины отвечают седловым 3-атомам. Состоящий из них подграф связан, а в его прообразе имеем многообразие Зейферта со слоем-окружностью, не стягиваемой во всем Q^3 . Особые окружности седловых 3-атомов также отвечают корешкам склейки с учетом направления обхода.

Инвариант Фоменко—Цишанга симметричен относительно уровня интеграла $F = \pi/2$, т. е. имеет вид $W = W$ для некоторого подграфа W . Две компоненты (выше и ниже уровня $F = \pi/2$) соединяются некоторым количеством ребер, середина которых отвечает уровню $F = \pi/2$, траектории на котором проходят через центр стола. Уровни выше и ниже него отвечают движению шара, происходящему по или против часовой стрелки вокруг центра стола.

Числовые метки равны $r = \infty$ на ребрах между седловыми атомами и равны $r = 0$ между атомом A и седловым атомом. При этом седловые атомы не имеют вершин-звездочек, т. е. многообразие Зейферта имеет вид прямого произведения расслоенной 2-базы M^2 с морсовскими седловыми точками на окружность.

Вклад в целочисленную метку n дают те ребра, которые соединяют два подграфа W и регулярные торы которых проецируются, в том числе, на диски. При этом вклад каждого ребра определяется количеством вклеенных дисков, т. е. числом раз, при которых цикл касается каустики при прохождении по этому диску при значении f , близком к $\pi/2$. Далее вклады каждого ребра складываются, т. е. имеет значение лишь количество дисков. Утверждение доказано. $\square$

3. ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ КОНКРЕТНЫХ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК

В работе [29] были подсчитаны инварианты Фоменко (молекулы без меток) нескольких серий биллиардных книжек, реализующих определенные биллиардные игры. Вопрос вычисления для них более тонких топологических инвариантов Фоменко—Цишанга (молекул, к которым добавлены числовые метки) является открытой проблемой. При наличии на листах стола фокусов

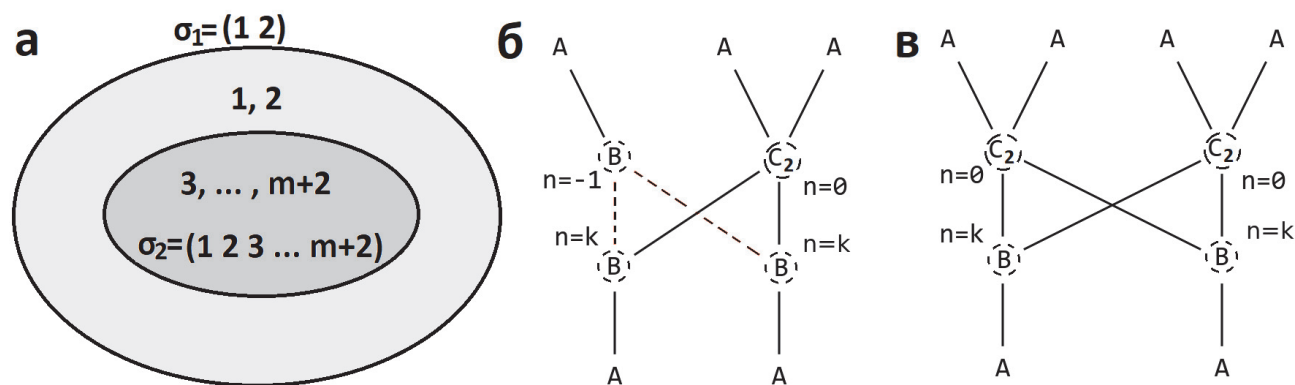


РИС. 7. Бильярдная книжка, склеенная из двух колец и m дисков, (а). Инвариант Фоменко—Цишанга бильярдной системы на ней при (б) $m = 2k + 1$ и (в) $m = 2k$.

FIG. 7. A billiard book glued together from two rings and m disks, (a). The Fomenko—Zieschang invariant of the billiard system on it for (б) $m = 2k + 1$ and (в) $m = 2k$.

квадрик семейства (1.1), т. е. при наличии у книжки листов-дисков, нахождение как типов атомов, так и числовых меток r, ε, n становится весьма нетривиальной задачей. Приведем далее ряд результатов о таких книжках, полученных недавно К. Е. Тюриной [14].

Пусть книжка склеена из кольца 1 с граничными эллипсами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и двух равных эллиптических дисков 2 и 3 по общему граничному эллипсу $\mathcal{E}_2$. В этом случае инвариант Фоменко—Цишанга не будет отличаться от вычисленного в [16] инварианта топологического бильярда, склеенного из двух эллиптических дисков. Он содержит один седловой 3-атом C_2 с меткой $n = 2$ на нем.

Метки на четырех ребрах имеют вид $C_2 \frac{r=0}{\varepsilon=1} A$. Если корешок $\mathcal{E}_2$ является меньшим граничным эллипсом кольца, то как отмечено в [29], такая книжка реализует игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, 1)$.

Рассмотрим игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_2)$ с m отражениями от меньшего эллипса $\mathcal{E}_2$ подряд и сигнатурой $(1, \dots, 1)$. Склеим книжку $\Omega_{2,m}$ из двух колец 1, 2 и m эллиптических дисков 3, $\dots, m+2$ по меньшему эллипсу $\mathcal{E}_2$ с перестановкой $\sigma_2 = (1234 \dots m+2)$ и по большему эллипсу $\mathcal{E}_1$ с перестановкой $\sigma_1 = (12)$. Она изображена на рис. 6 (а). Параметры эллипсов обозначим λ_1, λ_2 . Движение шара по такой книжке реализует описанную выше игру и игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, -1)$.

Молекула без меток для частного случая $m = 2$ была найдена в [29, пример 3.1]. Она изображена на рис. 2. Отметим также, что топология слоения Лиувилля бильярдной книжки, склеенной из m эллипсов, была вычислена ранее В. В. Ведюшкиной.

Утверждение 3.1 (Тюрина). *Инвариант Фоменко—Цишанга книжки $\Omega_{2,m}$ при $m = 2k$ и $m = 2k + 1$ имеет вид, изображенный на рис. 7 (б) и рис. 7 (в), соответственно. Метка r равна $1/2$ на штрихованных ребрах и нулю на сплошных ребрах. Все метки ε равны 1.*

За исключением уровня $\lambda = b$ (отвечающего «верхней» паре атомов B или C_2 на рис. 7), количество регулярных торов или тип 3-атома нетрудно определить. На уровне $\lambda = b$ одна пара торов Лиувилля, отвечающих игре $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, -1)$ и проецирующихся на кольцо между эллипсами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, перестраивается через две критические окружности через атом C_2 . Для изображенных инвариантов это «правый» из двух «верхних» седловых атомов. Два других тора в пределе $\lambda \rightarrow b - 0$ пересекутся либо по одной (при нечетном m) или по двум (при четном m) окружностям. Атом не имеет звездочек и имеет симметрии, т. е. это либо атом B , либо атом C_2 .

Для вычисления меток на граничных торах 3-атомов строится пара циклов (λ, μ) , которые образуют на торе базис в его группе π_1 . Цикл λ при этом гомологичен в седловом 3-атоме (как 3-многообразию с границей) особым окружностям этого 3-атома и имеет то же направление, а набор циклов μ на всех граничных торах 3-атома должен продолжаться внутрь атома до его сечения (слой которого есть λ цикл). Ребру молекулы отвечает матрица перехода между базисами, идущими с двух соединяемых им атомов. Ее определитель равен -1 , что задает направления оставшихся циклов.

Сформулируем ответ о циклах в терминах матриц склейки: на нижних ребрах имеем

$$\begin{pmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mu_A \end{pmatrix}.$$

Аналогично имеем для верхних ребер между атомами A и C_2 , а также между «нижними» 3-атомами B и «верхними» атомами C_2 , отвечающими торам, проекция которых принадлежит кольцу между эллипсами с параметрами λ_1 и λ_2 .

В случае нечетного $m = 2k + 1$ имеем на верхних ребрах между 3-атомом A и седловым 3-атомом B , отвечающим перестройке через фокусы, матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm(2k+1) & 1 \\ \pm k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mu_A \end{pmatrix}.$$

На ребрах между двумя «верхним» и «нижним» атомами B матрица равна

$$\begin{pmatrix} \lambda_B^+ \\ \mu_B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2k+1) & 2 \\ \pm k & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \end{pmatrix},$$

где (λ_B^+, μ_B^+) — базис верхнего 3-атома B , лежащего на уровне $\lambda = b$.

4. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

В настоящем разделе сформулируем несколько открытых вопросов об интегрируемых бильярдных книжках. Ответы на них, как нам представляется, позволят получить более глубокую информацию о связи двух недавно открытых обобщений классических плоских бильярдных.

1. Можно ли для произвольной упорядоченной бильярдной игры построить бильярдную книжку, реализующую данную игру и только ее?
2. Какой класс инвариантов Фоменко (Фоменко—Цишанга) интегрируемых систем реализуется бильярдными книжками, реализующими данную упорядоченную бильярдную игру?
3. Можно ли подходящей связной бильярдной книжкой реализовать наперед заданный набор упорядоченных бильярдных игр и только их?
4. Чему равна сложность реализации бильярдной игры в классе книжек, т. е. минимальное количество листов у книжки, реализующей эту игру? Как связана сложность с количеством листов книжки, реализующей игру по алгоритму В. Драговича и М. Раднович?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Усп. мат. наук. — 1990. — 45, № 2. — С. 49–77.
2. Болсинов А. В., Ризтер П. Х., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Мат. сб. — 2000. — 191, № 2. — С. 3–42.
3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
4. Ведюшкина В. В. Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева—Чаплыгина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2020. — № 1. — С. 64–68.
5. Ведюшкина В. В. Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2021. — № 2. — С. 28–32.
6. Ведюшкина В. В. Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек // Мат. сб. — 2021. — 212, № 12. — С. 3–19.
7. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2020. — № 2. — С. 22–28.
8. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды // Изв. РАН. Сер. мат. — 2019. — 83, № 6. — С. 63–103.
9. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. — 2018. — 209, № 12. — С. 17–56.
10. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. — 2021. — 212, № 8. — С. 89–150.
11. Кибкало В. А. Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ // Мат. сб. — 2019. — 210, № 5. — С. 3–40.

12. Морозов П. В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа// Мат. сб. — 2004. — 195, № 3. — С. 69–114.
13. Рябов П. Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова// Теор. и мат. физ. — 2003. — 134, № 2. — С. 207–226.
14. Тюрин К. Е. Топологические инварианты некоторых бильярдных упорядоченных игр// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 3. — С. 19–25.
15. Фокичева В. В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2014. — 1, № 4. — С. 18–27.
16. Фокичева В. В. Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// Мат. сб. — 2015. — 206, № 10. — С. 127–176.
17. Фокичева В. В. Топологическая классификация интегрируемых билиардов// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 2016.
18. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1986. — 50, № 6. — С. 1276–1307.
19. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю// Функци. анализ и его прилож. — 1988. — 22, № 4. — С. 38–51.
20. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — 1, № 3. — С. 15–25.
21. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Топологическое моделирование интегрируемых систем билиардами: реализация числовых инвариантов// Докл. РАН. Мат., информ., проц. управл. — 2020. — 493. — С. 9–12.
22. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замкнутых решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими билиардами// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 6. — С. 607–610.
23. Фоменко А. Т., Фокичева В. В. Интегрируемые билиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела// Докл. РАН. — 2015. — 465, № 2. — С. 1–4.
24. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1990. — 54, № 3. — С. 546–575.
25. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988.
26. Харчева И. С. Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2020. — 1, № 4. — С. 12–22.
27. Dragovic V., Radnovic M. Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbb{R}^d$ // J. Phys. A. Math. General. — 2004. — 37, № 4. — С. 1269–1276.
28. Dragovic V., Radnovic M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regul. Chaotic Dyn. — 2009. — 14, № 4-5. — С. 479–494.
29. Dragovic V., Radnovic M., Gasiorek S. Billiard ordered games and books// Regul. Chaot. Dyn. — 2022. — 27, № 2. — С. 132–150.
30. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations// В сб.: «Topological classification of integrable systems». — Providence: Am. Math. Soc., 1991. — С. 67–146.

В. А. Кибкало

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Д. А. Туниянц

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: 2001dat@inbox.ru

UDC 517.938.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625

EDN: WGSHP

Ordered billiard games and topological properties of billiard books

V. A. Kibkalo^{1,2} and D. A. Tuniyants^{1,2}

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

²*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. We discuss the connection between the construction of an ordered billiard game introduced earlier by Dragovic and Radnovic and the class of billiard books proposed by Vedyushkina. In this paper, we propose a generalization of the concept of realization of a certain game using a billiard book and prove an analogue of the Dragovic–Radnovic theorem for such a realization. We present recent results by the authors, Tyurina, and Zav’ialov on topological properties of isoenergy manifolds of circular billiard books and topological invariants of specific series of elliptic billiard books.

Keywords: ordered billiard game, billiard book, isoenergy manifold, topological invariant.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out in the Lomonosov Moscow State University with financial support from the Russian Science Foundation, grant 22-71-10106.

For citation: V. A. Kibkalo, D. A. Tuniyants, “Ordered billiard games and topological properties of billiard books,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 610–625. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625>

REFERENCES

1. А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, and А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности” [Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of low complexity systems], *Усп. мат. наук* [Progr. Math. Sci.], 1990, **45**, No. 2, 49–77 (in Russian).
2. А. В. Болсинов, П. Х. Richter, and А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской” [The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 2, 3–42 (in Russian).
3. А. В. Болсинов and А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы* [Integrable Hamiltonian Systems], Удмуртский Univ., Ижевск, 1999 (in Russian).
4. В. В. Ведюшкина, “Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина” [The Liouville foliation of the billiard book modelling the Goryachev–Chaplygin case], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2020, No. 1, 64–68 (in Russian).
5. В. В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов” [Local modeling of Liouville foliations by billiards: implementation of edge invariants], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2021, No. 2, 28–32 (in Russian).
6. В. В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек” [Topological type of isoenergy surfaces of billiard books], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 12, 3–19 (in Russian).
7. В. В. Ведюшкина and В. А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейфerta интегрируемых систем” [Realization of numerical invariant of the Siefert bundle of integrable



- systems by billiards], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2020, No. 2, 22–28 (in Russian).
8. В. В. Ведюшкина and А. Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды” [Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards], *Изв. РАН. Сер. мат.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2019, **83**, No. 6, 63–103 (in Russian).
 9. В. В. Ведюшкина and И. С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” [Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2018, **209**, No. 12, 17–56 (in Russian).
 10. В. В. Ведюшкина and И. С. Харчева, “Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем” [Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 8, 89–150 (in Russian).
 11. В. А. Кибкало, “Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ ” [Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 5, 3–40 (in Russian).
 12. П. В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа” [Topology of Liouville foliations of Steklov and Sokolov integrability cases of Kirchhoff equations], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2004, **195**, No. 3, 69–114 (in Russian).
 13. П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова” [Bifurcations of first integrals in the Sokolov case], *Теор. и мат. физ.* [Theor. Math. Phys.], 2003, **134**, No. 2, 207–226 (in Russian).
 14. К. Е. Тюрина, “Топологические инварианты некоторых бильярдных упорядоченных игр” [Topological invariants of some ordered billiard games], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2024, No. 3, 19–25 (in Russian).
 15. В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами” [Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2014, **1**, No. 4, 18–27 (in Russian).
 16. В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик” [A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 10, 127–176 (in Russian).
 17. В. В. Фокичева, *Топологическая классификация интегрируемых бильярдных систем* [Topological Classification of Integrable Billiards], PhD Thesis, MSU, Moscow, 2016 (in Russian).
 18. А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости” [Topology of constant energy surfaces of some integrable Hamiltonian systems and obstructions to integrability], *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1986, **50**, No. 6, 1276–1307 (in Russian).
 19. А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю” [Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems] *Функц. анализ и его прилож.* [Funct. Anal. Appl.], 1988, **22**, No. 4, 38–51 (in Russian).
 20. А. Т. Фоменко and В. В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности” [Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2019, **1**, No. 3, 15–25 (in Russian).
 21. А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, and В. А. Кибкало, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов” [Topological modeling of integrable systems by billiards: realization of numerical invariants] *Докл. РАН. Мат., информ., проц. управл.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inform. Control], 2020, **493**, 9–12 (in Russian).
 22. А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, and И. С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами” [Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards], *Докл. РАН* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2018, **479**, No. 6, 607–610 (in Russian).
 23. В. В. Фокичева and А. Т. Фоменко, “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела” [Integrable billiards model important integrable cases of rigid body dynamics], *Докл. РАН* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **465**, No. 2, 1–4 (in Russian).
 24. А. Т. Фоменко and Х. Ципанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы” [A topological invariant and a criterion for the

- equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom], *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1990, **54**, No. 3, 546–575 (in Russian).
25. М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела* [Topological Analysis of Integrable Problems of Rigid Body Dynamics], ЛГУ, Ленинград, 1988 (in Russian).
 26. И. С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек” [Isoenergy manifolds of integrable billiard books], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2020, **1**, No. 4, 12–22 (in Russian).
 27. V. Dragovic and M. Radnovic, “Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbb{R}^d$,” *J. Phys. A. Math. General.*, 2004, **37**, No. 4, 1269–1276.
 28. V. Dragovic and M. Radnovic, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2009, **14**, No. 4–5, 479–494.
 29. V. Dragovic, M. Radnovic, and S. Gasiorek, “Billiard ordered games and books,” *Regul. Chaot. Dyn.*, 2022, **27**, No. 2, 132–150.
 30. A. A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations,” In: *Topological classification of integrable systems*, Am. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 67–146.

V. A. Kibkalo

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

D. A. Tuniyants

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: 2001dat@inbox.ru

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635

EDN: WGXSNU

ОБРАЩЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С СИМВОЛОМ МАСЛОВА—ЧЕБЫШЕВА

А. В. Костин

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия**АО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия*

Аннотация. Метод Маслова—Хевисайда применяется к обращению полиномиального оператора символом Маслова—Чебышева, введенного в работе. Результат применяется к доказательству теоремы об операторе Бесселя в пространствах Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Это существенно расширяет область применения операторных методов к исследованию с корректной разрешимости уравнений с оператором Лапласа, обычно исследуемых в пространствах L_p .

Ключевые слова: пространства Степанова, оператор Бесселя, символ оператора Максвелла—Фейера, полугруппа Вейерштрасса, корректная разрешимость, многочлены Чебышева, сильно непрерывная полугруппа, полигармоническое уравнение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. В. Костин. Обращение полиномиального оператора с символом Маслова—Чебышева // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 626–635. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635>

1. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Пусть E — банахово пространство и A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(A) \subset E$. Для $f \in E$ исследуется корректная разрешимость задачи нахождения элемента $u \in D(A^N)$, $N = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{A}u = \sum_{m=0}^N a_m A^m u = f, \quad a_m \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

В соответствии с Ж. Адамаром это означает, что уравнение (1.1) должно быть однозначно разрешимо при любых $f \in E$, оператор $\mathbb{A}^{-1}$ определен на всех $f \in E$ и непрерывен, т. е. справедливо неравенство $\|\mathbb{A}^{-1}f\|_E \leq M\|f\|_E$, где константа M не зависит от f .

В соответствии с [5] для оператора A определены многочлены

$$P_n(A)u = \sum_{k=0}^n a_k A^k u, \quad u \in D(A^n), \quad a_m \in \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость.

Следуя подходу В. П. Маслова, примененного в [9, с. 12] к операции $A = \frac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (1.1) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$.

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_n \neq 0$. Так же, как и в [9, с. 12], полином $P_n(x)$, отвечающий оператору $P_n(A)$, будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Рассматривается применение результатов работы [9] к случаю, когда операторный символ $\mathbb{P}_n(x)$ является ортогональным многочленом Чебышева 1-го рода, т. е.

$$\mathbb{P}_n(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

а оператор A является генератором полугруппы $U(t, A)$ класса C_0 в E . Это значит, что область определения $D(A)$ плотна в E , а область его значений $\mathfrak{R}(A) = E$. Резольвентное множество $\rho(A)$ содержит комплексную полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Семейство $U(t, A)$ удовлетворяет соотношениям:

1. $U(0, A) = I$ — тождественный оператор в E ,
2. $U(t + s, A) = U(t, A)U(s, A) = U(s, A)U(t, A)$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t, A)\| \leq M \exp \omega t$,
- 4.

$$\begin{aligned} \|U(t, A)\| &\leq M \exp \omega t, \\ \left. \frac{dU(t, A)}{dt} \right|_{t=0} \varphi &= A\varphi, \quad \varphi \in D(A). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если операторному полиному $\mathbb{P}_N(A)$ соответствует символ Маслова—Чебышева, то оператор A является генератором полугруппы $U(t, A)$ с оценкой (1.3). При этом оператор $\mathbb{A}_N$ имеет ограниченный в E оператор $\mathbb{A}^{-1}$ и справедлива оценка*

$$\|\mathbb{A}_N^{-1} f\|_E \leq \frac{M \|f\|_E}{2^N \prod_{k=1}^N \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4N}}. \quad (1.4)$$

При этом решение имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^N \frac{1}{T'_N(\alpha_k)} \int_0^\infty e^{\alpha_k x} U(x, A) f dx, \quad (1.5)$$

α_k — корни многочлена $T_N(x)$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы корректности [8], согласно которой если корни многочлена $\mathbb{P}_N(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A , то задача (1.1) равномерно корректна и для ее решения справедливо представление

$$u = \int_0^\infty q(x) U(x, A) f dx, \quad (1.6)$$

где функция $q(x)$ является решением скалярной задачи

$$\mathbb{P}_N \left(-\frac{d}{dx} \right) q(x) = \delta, \quad (1.7)$$

$$q(0) = q'(0) = \dots = q^{N-1}(0) = 0. \quad (1.8)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а $q(x) = T_N(x)$.

Рассматривая случай с символами Маслова—Чебышева, имеем $P_0(x) = T_0(x) = 1$ и $P_1(x) = T_1(x) = x$, которые соответствуют операциям

$$\mathbb{A}_0 u = P_0(A)u = A^0 u = u, \quad (1.9)$$

и соответственно

$$\mathbb{A}_1 u = P_1(A)u = Au. \quad (1.10)$$

В случае $N = 0$ и уравнение (1.7) имеет вид

$$(-1)^0 q(x) = q(x) = \delta(x).$$

Следовательно,

$$\mathbb{A}_0^{-1} f = u = \int_0^\infty \delta(x) U(x, A) f dx = U(0, A) f = f.$$

Это соответствует обратимости тождественного оператора $I = \mathbb{A}_0$.

В случае (1.10) $N = 1$, $q(x)$ является решением задачи

$$-\frac{dq}{dx} = \delta x, \quad (1.11)$$

$$q(0) = 0. \quad (1.12)$$

То есть, $q(x)$ является функцией Хевисайда, в соответствии с [3, с. 194] и [6, с. 197]. И, таким образом, если $f \in D(A)$ и $U(x, A)$ удовлетворяют оценке (1.3) при $\omega < 0$, то

$$u = \mathbb{A}_1^{-1} f = - \int_0^\infty q(x) U(x, A) f dx = - \int_0^\infty U(x, A) f dx,$$

так как

$$Au = - \int_0^\infty AU(x, A) f dx = - \int_0^\infty \frac{dU(x, A)}{dx} f dx = f.$$

□

2. ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОБОЛЕВА В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

Применим теорему 1.1 к уравнению

$$T_N(\Delta_n)u = \sum_{m=0}^N a_m \Delta_n^m u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x_i^2}$ — лапласиан в $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (2.1) относится к классу полигармонических уравнений Соболева, и исследованию связанных с ними задач посвящена монография [12].

Для формулировки нашего результата воспользуемся следующими фактами.

Известно (см., например, [4, §16]), что дифференциальный оператор, заданный дифференциальным выражением

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и областью определения

$$D(\Delta) = W_p^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

где $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3)$$

при каждом $p \in (1, \infty)$ задает эллиптический оператор Δ_p , являющийся генератором полугруппы класса C_0 в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Также известно (см. [11, с. 316]), что оператор, действующий в $C(\mathbb{R}^n)$ (пространстве непрерывных и ограниченных функций $u(x)$ с нормой $\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$), с областью определения

$C^2(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right\|_{C(\mathbb{R}^n)}$, таким свойством не обладает.

В связи с этим теорема об операторе Лапласа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ переносится на случай пространств В. В. Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, которые содержат пространства $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Показывается, что оператор Δ , определенный во введенных здесь пространствах Соболева—Степанова, является генератором C_0 -полугруппы Гаусса—Вейерштрасса.

3. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА—СТЕПАНОВА $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$

Пусть K_n — единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с гранями $0 \leq x_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $K_{n,a}$ — куб K_n , сдвинутый на вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $(T_a u)(x) = u(x + a)$.

Определение 3.1 (см. [7, с. 99]). Обозначим через $S_p(\mathbb{R}^n)$ множество локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{K_n} |(T_a u)(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1). \quad (3.1)$$

Очевидно, что при $n = 1$ они совпадают с классическими пространствами Степанова $S_p(\mathbb{R}^1)$ (см. [7], [13, с. 197]).

$S_p(\mathbb{R}^n)$ -пространства — банаховы.

Будем рассматривать подпространство $S_p(\overline{\mathbb{R}^n}) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$ как множество функций $u \in S_p(\mathbb{R}^n)$, для которых справедливо соотношение непрерывности нормы (см. [7, (5.2.1)]).

Известно (см. [7, с. 110]), что эти пространства являются банаховыми. Они получаются замыканием в классе $C(\overline{\mathbb{R}^n})$ равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций.

Далее, используя нормы с пространствами $W_p^l(\Omega)$, введем следующее определение.

Определение 3.2. Множества локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$ со степенью $p \geq 1$ функций $u(x)$ вместе со всеми производными до порядка l ($l \in \mathbb{N}$) включительно, для которых конечна норма

$$\|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|T_a u\|_{W_p^l(K_n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|u\|_{W_p^l(K_{n,a})}, \quad (3.2)$$

назовем *функциональными пространствами Соболева—Степанова* и обозначим $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, пространства $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$ — линейные и нормированные с нормой (2.3).

Лемма 3.1. Пространства $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$ банаховы.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся утверждением, приведенным в [14, с. 103], о том, что если $f(\sigma)$ — векторнозначная функция, заданная на некотором абстрактном множестве $\mathfrak{G}$ со значениями в банаховом пространстве E , является сильно измеримой на $\mathfrak{G}$ и $\|f(\sigma)\|_E$ ограничена всюду, за исключением некоторого множества меры нуль, то множество таких функций образует банахово пространство $L_\infty(\sigma, E)$ с нормой $\|f\|_\infty = \text{vrai sup}_{\sigma \in \mathfrak{G}} \|f(\sigma)\|_E$. Если $\|f(\sigma)\|_E$ непрерывна, то $\|f\| = \sup_{\sigma \in \mathfrak{G}} \|f(\sigma)\|_E$, а $L_\infty(\sigma, E)$ переходит в $C(\sigma, E)$.

В нашем случае, полагая $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^n$, $E = W_p^l(K_n)$, получаем доказательство леммы. $\square$

Теорема 3.1. Если $0 \leq m < l$ и $ln \leq n$, то справедливо вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset W^m S_p(\mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|u\|_{W^m S_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.3)$$

где константа C_3 зависит лишь от m, n, l, p .

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться равенством (2.3) для каждого куба $K_{n,a}$

$$\|u\|_{W^m S_p(K_{n,a})} \leq C_4 \|u\|_{W^l S_p(K_{n,a})}, \quad (3.4)$$

а затем, учитывая, что диаметры кубов $K_{n,a}$ от a не зависят, перейти в (3.4) к $\sup$ по $a \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Отметим, что из (3.4) при $m = 0$ из (3.4) следует вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$ и неравенство

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_5 \|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.5)$$

Однако этот результат можно усилить, так как справедлива

Лемма 3.2. *Если выполняется неравенство $lp \leq n$, то имеет место вложение $W^l S_p(\overline{\mathbb{R}^n}) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Для доказательства этого факта воспользуемся формулой конечных приращений (см. [2, с. 248])

$$u(x+h) - u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x_i + \Theta h_i)}{\partial x_i} h_i, \quad (3.6)$$

где $h = (h_1, \dots, h_n)$, $0 < \Theta < 1$.

Отсюда, пользуясь инвариантностью нормы в $S_p(\mathbb{R}^n)$ относительно сдвига T_a функции $u(x)$, из (3.6) получаем неравенство

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \max_{0 \leq i \leq n} |h_i| \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.7)$$

Далее, учитывая, что вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset W^1 S_p(\mathbb{R}^n)$ дает оценку $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq M_i$, применяя которую в (3.7), получаем выполнение условия (3.2). Это доказывает лемму. $\square$

Следующий результат справедлив для класса $C_\mu^m(\mathbb{R}^n)$, состоящего из всех функций, производные m -го порядка которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ на каждом кубе $K_{n,t}$, и для которых конечна норма

$$\|u\|_{C_\mu^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0 \leq r \leq m} |D^r u(0)| + \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x, y \in K_{n,t} \\ |\bar{\alpha}| = m}} \frac{|D^{\bar{\alpha}} u(x) - D^{\bar{\alpha}} u(y)|}{|(x-y)^\mu|}, \quad (3.8)$$

где $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Так же, как и в случае пространств $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$, доказывается, что пространства $C_\mu^m(\mathbb{R}^n)$ — банаховы с нормой (3.8).

4. ПОЛУГРУППА ГАУССА—ВЕЙЕРШТРАССА В ПРОСТРАНСТВАХ $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$

Интеграл вида

$$\begin{aligned} u(t, x) = (U(t)\varphi)(x) &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} \varphi(s) ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \mathbb{T}(\xi) \varphi d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \varphi(x + \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$t > 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $ds = ds_1, \dots, ds_n$ в теории уравнений с частными производными носит название *поверхностного теплового потенциала* (см. [1]).

В [10] интеграл (4.1) называется *потенциалом Гаусса—Вейерштрасса*. В [2, с. 325] для $n = 1$ доказывается, что семейство операторов $U(t)$ является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $L_p(\mathbb{R}^1)$ ($p \geq 1$) и $C_{[-\infty, \infty]}$ — пространствах равномерно непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций. В [7] этот интеграл называется *полугруппой Вейерштрасса*.

Инвариантность нормы в $S_p(\mathbb{R}^n)$ относительно $\mathbb{T}(a)$ -переноса позволяет получить оценку

$$\|\mathbb{T}(a)U(t)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = \|U(t)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.2)$$

В [7] показано, что оператор A , заданный дифференциальным выражением

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$$

с областью определения $D(A) = W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ является генератором полугруппы Гаусса—Вейерштрасса в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$.

5. ОПЕРАТОР УСРЕДНЕННОГО СДВИГА В $\mathbb{R}^n$

Пусть $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ — функция, определенная в $\mathbb{R}^n$, и вектор $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$ такой, что $h_i > 0$, ($i = 1, \dots, n$).

Введем операторы левого и правого сдвига по каждой координате x_i :

$$\begin{aligned} (T_i^+(h_i)u)(x) &= u(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n), \\ (T_i^-(h_i)u)(x) &= u(x_1, \dots, x_i - h_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

Наряду с ними введем усредняющий оператор по координате x_i :

$$(T_i(h_i)u)(x) = \left[\frac{T_i^+(h_i) + T_i^-(h_i)}{2} \right] u(x). \quad (5.1)$$

Определение 5.1. Оператор $\Pi^{(n)}(\bar{h})$, заданный выражением

$$(\Pi^{(n)}(\bar{h})u)(x) = \left(\prod_{i=1}^n T_i(h_i)u \right)(x), \quad (5.2)$$

будем называть *оператором усредненного сдвига* в $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что все приведенные операторы коммутируют.

Далее, пусть

$$T_n^{(k)}(\bar{h}) = \prod_{i=1}^k T_{m_i}^+(h_{m_i}) \prod_{j=k+1}^n T_{m_j}^-(h_{m_j}) \quad (5.3)$$

— оператор, осуществляющий по k координатам левые сдвиги и по $(n-k)$ координатам — правые. Тогда нетрудно видеть, что справедливо представление

$$\Pi_n(\bar{h}) = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n [T_i^+(h_i) + T_i^-(h_i)] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} T_n^{(k)}(\bar{h}). \quad (5.4)$$

Например, в случае $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ операторы усредненного сдвига имеют вид

$$(\Pi_1(\bar{h})u)(x) = \frac{u(x+h) + u(x-h)}{2},$$

$$\begin{aligned} (\Pi_2(\bar{h})u)(x) &= \frac{1}{4} [u(x_1 + h_1, x_2 + h_2) + u(x_1 - h_1, x_2 - h_2) + \\ &\quad + u(x_1 - h_1, x_2 + h_2) + u(x_1 + h_1, x_2 - h_2)]. \end{aligned}$$

Приведем некоторые необходимые нам в дальнейшем свойства оператора усредненного сдвига.

Лемма 5.1. Пусть для функций $g(x)$ и $f(x)$ определена свертка

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) f(x - \xi) d\xi, \quad (5.5)$$

тогда, если $g(\xi) = g(-\xi)$ — четная функция по каждой координате ξ_i ($i = 1, \dots, n$), то справедливо равенство

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Pi(\xi)f)(x) g(\xi) d\xi. \quad (5.6)$$

Доказательство. Доказательство следует из инвариантности представления (5.5) относительно смены знака у координаты ξ_i ($i = 1, \dots, n$) под знаком интеграла. Пользуясь этим, запишем 2^n соответствующих равенств (5.5), сложив которые, с учетом равенства (5.4) получаем (5.6). $\square$

Следствие. Для полугруппы Гаусса–Вейерштрасса справедливо представление

$$(U(t)\varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} (\Pi_n(\xi)\varphi)(x) d\xi, \quad (5.7)$$

так как в этом случае функция $g(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}$ удовлетворяет условиям леммы 5.1.

Легко доказывается, что для функции $u \in W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ справедливо представление

$$(\Pi_n(h)u)(x) - u(x) - \frac{h^2}{2} \Delta u(x) = \alpha(h, x) h^2, \quad (5.8)$$

где $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$, функция $\alpha(h, x)$ такова, что $\alpha(h, x) \in S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ при каждом $h_0 > h > 0$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \|\alpha(h, x)\|_{S_p(\overline{\mathbb{R}^n})} = 0$.

6. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ ГАУССА–ВЕЙЕРШТРАССА

Здесь мы применим полученные результаты для определения оператора Лапласа в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ как производящего оператора Гаусса–Вейерштрасса в этом классе функций.

Теорема 6.1. Оператор A , заданный дифференциальным выражением $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ с областью определения $D(A) = W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$, является генератором полугруппы Гаусса–Вейерштрасса в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$.

Доказательство. Используя равенство (4.1) для $\varphi \in W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$, оценим

$$\begin{aligned} \left| \frac{(U(t)\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - \Delta \varphi(x) \right| &= \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n t} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \left[(\Pi_n(\xi)\varphi)(x) - \varphi(x) - \frac{|\xi|^2}{2} \Delta u(x) \right] d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2(2\sqrt{\pi t})^n t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} |\xi|^2 |\alpha(\xi, x)| d\xi = \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mu|^2} |\mu|^2 |\alpha(2\sqrt{t}\mu, x)| d\mu. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\left[\int_{K_{\overline{\pi}}} \left| \frac{(U(t)\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - \Delta \varphi(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mu|^2} |\mu|^2 \left[\int_{K_a} |\alpha(2\sqrt{t}\mu, x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} d\mu, \quad (6.2)$$

где K_a — единичный куб, сдвинутый на произвольный вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Так как функция $|\alpha(\xi, x)|$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\overline{\Omega}} \alpha(h, x) dx = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\overline{\Omega}} \alpha_m(h, x) dx = 0,$$

то интеграл (6.2) абсолютно сходится и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_N} e^{-|\mu|^2} \left[\int_{K_{\bar{a}}} |\alpha(2\sqrt{t}\mu, x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} d\mu < \varepsilon, \quad (6.3)$$

где $K_N \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса N с центром в нуле.

Разбивая интеграл в (6.2) на два:

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_N} + \int_{K_N} \quad (6.4)$$

и замечая, что свойства функции $|\alpha(\xi, x)|$ позволяют перейти к пределу при $t \rightarrow 0$ под знаком интеграла и, следовательно, при достаточно малом t_0 и всех $x_0 < t < t_0$ сделать его меньше ε , заключаем, с учетом (6.3), что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{K_{\bar{a}}} \left| \frac{U(t)\varphi - \varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x) \right|^p dx = 0.$$

Отсюда с учетом леммы 5.1 следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{K_{\bar{a}}} \left\| \frac{(U(t) - I)\varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x) \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

для любой функции $\varphi \in W^2 S_p(\mathbb{R}^n)$.

Учитывая плотность вложения $W^2 S_p(\mathbb{R}^n) \subset \bar{S}_p(\mathbb{R}^n)$, заключаем, что определенный таким образом оператор Лапласа является производящим оператором в пространстве $\bar{S}_p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

7. ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ СИМВОЛОМ МАСЛОВА—ЧЕБЫШЕВА В $S_p(\mathbb{R}^n)$

Напомним, что так называемое бесселево дробное интегродифференцирование (см. [10, с. 335]) обязано оператору $\Delta_n - I = A$ в связи с удобством исследования операторов $(I - A)^{-1}$ в пространствах $L_p(\mathbb{R})$.

В рамках таких исследований применим теорему 1.1 к обращению оператора $P_N(\Delta_n - I)$ в пространствах $S_p(\mathbb{R}^n)$. Оператор $\Delta_n - I$ является генератором C_0 -полугруппы $U(t, \Delta_n - I) = e^{-t}U(t, \Delta_n)$, и для нее справедлива оценка

$$\|U(t, \Delta_n - I)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq e^{-t}\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда по теореме 1.1 и неравенству (1.4) получаем оценку

$$\|P_N^{-1}(\Delta_n - I)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}}{\prod_{k=1}^N \left[\cos \frac{(2k-1)\pi}{2N} + 1 \right]} = \frac{\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}}{2^N \prod_{k=1}^N \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4N}}.$$

В заключение заметим, что если вместо $A = \Delta - I$ рассматривать оператор $A = \Delta_n - aT$, $a \in \mathbb{R}$, то оператор A имеет ограниченный в $S_p(\mathbb{R}^n)$ обратный оператор A_n^{-1} при любом символе

$$P_N(x) = T_n \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right), \quad (7.1)$$

так как в этом случае $P_N(x)$ является смещенным многочленом Чебышева [13, с. 81] с корнями $\alpha_k \in (a, b)$ при любом $a = 0$. В частности, при $a = 0$ сюда относится семейство полиномов $T_N \left(\frac{2x - b}{b} \right)$ при $b > 0$:

$$\|A_N^{-1}f\| \leq \frac{M\|f\|}{\prod_{k=1}^N (\alpha_k - a)} = \frac{M2^N\|f\|}{\prod_{k=1}^N \left[b \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4N} - a \right]},$$

$$\frac{2x_k - b}{b} = \cos \frac{2k - 1}{2N}, \quad 2x_k = b + b \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2N}, \quad x_k = \frac{b}{2} \left(1 + \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2N} \right) = \frac{b}{2} \cos^2 \frac{(2k - 1)\pi}{4N}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ: Учебник. — М.: Мир, 1967.
3. *Зельдович Я. Б.* Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1972.
4. *Красносельский М. А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1967.
5. *Крейн С. Г. (ред.)* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
6. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
7. *Костин А. В.* К теории функциональных пространств Степанова. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2007.
8. *Костин В. А.* Операторный метод Маслова—Хевисайда и C_0 -операторный интеграл Дюамеля // Докл. РАН. — 2013. — 452, № 4. — С. 367–370.
9. *Маслов В. П.* Операторные методы. — М.: Наука, 1973.
10. *Самко С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
12. *Соболев С. Л.* Кубатурные формулы. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 1996.
13. *Степанов В. В.* О метрике в пространстве почти-периодических функций S_2 // Докл. АН СССР. — 1949. — 64, № 3. — С. 171.
14. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностран. лит., 1962.

А. В. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

АО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия

E-mail: leshakostin@mail.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635

EDN: WGXSNU

Inversion of a polynomial operator with the Maslov–Chebyshev symbol

A. V. Kostin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia

Abstract. The Maslov–Heaviside method is applied to the inversion of a polynomial operator by the Maslov–Chebyshev symbol introduced in the paper. The result is applied to the proof of a theorem on the Bessel operator in the Stepanov spaces $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. This significantly expands the scope of application of operator methods to the study of the correct solvability of equations with the Laplace operator, usually studied in L_p spaces.

Keywords: Stepanov spaces, Bessel operator, Maxwell–Fejér operator symbol, Weierstrass semigroup, correct solvability, Chebyshev polynomials, strongly continuous semigroup, polyharmonic equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. V. Kostin, “Inversion of a polynomial operator with the Maslov–Chebyshev symbol,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 626–635. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635>

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
2. K. Iosida, *Funktsional'nyy analiz: Uchebnik* [Functional Analysis: Textbook], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. Ya. B. Zel'dovich, *Elementy prikladnoy matematiki* [Elements of Applied Mathematics], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
4. M. A. Krasnosel'skii, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
5. S. G. Kreyn (ed.), *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
6. A. N. Kolmogorov, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
7. A. V. Kostin, *K teorii funktsional'nykh prostranstv Stepanova* [To the Theory of Stepanov Function Spaces], VGU, Voronezh, 2007 (in Russian).
8. V. A. Kostin, “Operatornyy metod Maslova—Khevisayda i C_0 -operatornyy integral Dyumelya” [Maslov–Heaviside operator method and C_0 -operator Duhamel’s integral], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **452**, No. 4, 367–370 (in Russian).
9. V. P. Maslov, *Operatornye metody* [Operator Methods], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
10. S. G. Samko, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
11. S. L. Sobolev, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
12. S. L. Sobolev, *Kubturnye formuly* [Cubature Formulas], Inst. Mat., Novosibirsk, 1996 (in Russian).
13. V. V. Stepanov, “O metrike v prostranstve pochti-periodicheskikh funktsiy S_2 ” [On the metric in the space of almost periodic functions S_2], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1949, **64**, No. 3, 171 (in Russian).
14. E. Hille and R. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-groups], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).

A. V. Kostin
 Voronezh State University, Voronezh, Russia
 Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia
 E-mail: leshakostin@mail.ru

УДК 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642

EDN: WOEBFC

О ПОСТРОЕНИИ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Силаева

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. С использованием подхода Балакришнана—Иосиды построения дробных степеней линейных операторов в банаховом пространстве с помощью сильно непрерывных полугрупп с плотно определёнными производящими операторами, в работе приводится аналогичная схема для построения дробных степеней неплотно определённых операторов с применением полугрупп, имеющих суммируемую особенность. Выяснено, что вновь построенные полугруппы также имеют особенность в нуле, и установлена их точная оценка, связанная с порядком особенности исходной полугруппы и дробной степенью построенного оператора, в частности — квадратного корня. В качестве примера полученные результаты применяются к полугруппам с особенностью, приведённым в работе [3] и в докторской диссертации Ю. Т. Сильченко, а также строится квадратный корень для неплотно определённого оператора.

Ключевые слова: сильно непрерывные полугруппы, полугруппы с особенностью, производящие операторы, дробные степени операторов.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: В. А. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Силаева. О построении квадратного корня для некоторых дифференциальных операторов // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 636–642. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642>

1. ПОЛУГРУППЫ С ОСОБЕННОСТЬЮ И ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ИХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ОПЕРАТОРОВ

С. Г. Крейн в [2, с. 305] при рассмотрении уравнения

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad t \in [0, T] \subset [0, \infty), \quad (1.1)$$

где A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$ в банаховом пространстве E , используется понятие квадратного корня $A^{\frac{1}{2}}$ при нахождении решения уравнения (1.1) в соответствии с определением: *решением* уравнения (1.1) называется функция со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (1.1) на отрезке $[0, T]$.

Для построения решения используется сильно непрерывная полугруппа $V(t, -A^{\frac{1}{2}})$ с C_0 -условием, и всякое решение уравнения (1.1) представимо в виде

$$u(t) = V(t, -A^{\frac{1}{2}})Z_0 + V(t, -A^{\frac{1}{2}})Z_T. \quad (1.2)$$

Если $Z_0, Z_T \in D(A^{1/2})$, то $u(t)$ является *ослабленным решением* уравнения (1.1), а если $Z_0, Z_T \in E$, то решение называется *обобщённым*.

Таким образом, при решении граничных задач для уравнения (1.1) ключевую роль играют сильно непрерывные полугруппы, построенные по операторам $-A^{\frac{1}{2}}$.

Важным классом таких полугрупп являются классы, построенные по операторам с плотной областью определения $D(A)$ — классы C_0 , удовлетворяющие условиям:

1. $V(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$;
2. $V(t+s)\varphi = V(t)V(s)\varphi$, $\varphi \in E$;
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \|V(t)\varphi - \varphi\| = 0$, $\varphi \in E$.

В этом случае справедлива оценка

$$\|V(t)\varphi\| \leq M e^{\omega t} \|\varphi\|, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

где M и ω не зависят от φ , и для $\varphi \in D(A)$ выполняется равенство

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = A\varphi, \quad (1.4)$$

Таким образом, если в уравнении (1.1) оператор A такой, что $-A$ является производящим оператором C_0 -полугруппы $V(t, -A)$, то для него определен оператор $A^{\frac{1}{2}}$ в рамках общей теории дробных степеней A^α , $\alpha \in (0, 1)$, развитой в работах [1–3], где показывается, что если в оценке (1.3) $\varphi \in E$ и $\omega \leq 0$, то

$$A^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\alpha}} [V(t, -A)\varphi - \varphi] dt, \quad \varphi \in D(A), \quad (1.5)$$

при этом

$$V(t, -A^\alpha)\varphi = \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) V(\xi, -A)\varphi d\xi. \quad (1.6)$$

Здесь

$$h_{t,\alpha}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\xi - tp^\alpha} dp \geq 0 \quad (1.7)$$

— функция Иосиды [1, с. 358].

Из (1.6) и (1.7) следует оценка

$$\|V(\varphi, -A^\alpha)\| \leq \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) \|V(\xi, -A)\varphi\| d\xi \leq M \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) e^{-|\omega|\xi} d\xi = M e^{-|\omega|^\alpha t} \|\varphi\|. \quad (1.8)$$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то

$$V(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4\xi}} V(\xi, -A)\varphi}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi. \quad (1.9)$$

Такое представление, в частности, для уравнения (1.1) при $t \in [0, \infty)$ с условием $u(0) = u_0$ даёт представление обобщённого ограниченного решения в форме

$$u(t) = V(t, -A^\alpha)u_0. \quad (1.10)$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Однако существуют операторы, которые могут иметь неплотную область определения, вследствие чего соответствующие полугруппы будут иметь особенность в нуле. Исследованию таких полугрупп посвящены работы многих авторов, в числе которых: С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, Ю. Т. Сильченко, А. Л. Скубачевский, А. А. Шкаликов. Согласно С. Г. Крейну [2], такие полугруппы порождаются при исследовании корректной разрешимости ослабленной задачи Коши для уравнения первого порядка с неплотно определенными операторами, решения которой имеют вид

$$u(t) = V(t)u_0, \quad (2.1)$$

где $V(t)$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных при $t > 0$ операторов.

В этом случае, если задача Коши не является равномерно корректной, а ослабленная задача Коши корректна на $D(A)$, для $V(t)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0+} V(t)u_0 = u_0, \quad (2.2)$$

однако оператор $V(t)$ не ограничен при $t = 0$, и при соответствующих условиях на резольвенту оператора A выполняется оценка [2, с. 85]

$$\|V(t)u_0\| \leq \frac{M}{t^\gamma} e^{\omega t} \|u_0\|. \quad (2.3)$$

Оказывается, что если оператор A такой, что оператор $-A$ является производящим оператором полугруппы $V(t, -A)$ с оценкой (2.3), где $\omega \leq 0$, $\gamma \in (0, 1)$, то определено семейство ограниченных операторов $\tilde{V}_\alpha(t)$ при $t > 0$ вида

$$\tilde{V}_\alpha(t)\varphi = \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) V(\xi, -A)\varphi d\xi. \quad (2.4)$$

Здесь $h_{t,\alpha}(\xi)$ — функция Иосиды.

Для доказательства, используя [1], оценим

$$\begin{aligned} \|V_\alpha(t)\varphi\| &\leq \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi) \|V(\xi, -A)\| d\xi \|\varphi\| \leq M \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi) \frac{e^{-\omega\xi}}{\xi^\gamma} d\xi \|\varphi\| = \\ &= M \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-p^\alpha\xi} dp \frac{e^{-\omega\xi}}{\xi^\gamma} d\xi = M \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \int_0^\infty \frac{e^{-(\omega+p^\alpha)\xi}}{\xi^\gamma} d\xi dp = \\ &= M\Gamma(1-\gamma) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{(p^\alpha + \omega)^{1-\gamma}} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\rho(-\omega t^\alpha) = M t^{\alpha(1-\gamma)-1} E_{\alpha,\alpha(1-\gamma)}^{1-\gamma}(-\omega t^\alpha). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь мы воспользовались формулой из [5, с. 445] преобразования Лапласа для обобщённой функции Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\alpha n + \beta)\Gamma(\rho)} \frac{z^n}{n!} \quad (2.6)$$

при $\rho = 1 - \gamma$, $\beta = \alpha(1 - \gamma)$.

Ставится задача о доказательстве того, что семейство $V_\alpha(t)$ является сильно непрерывной при $t > 0$ полугруппой, и нахождении её производящего оператора.

Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если полугруппа $V(t, -A)$ удовлетворяет оценке (2.3) и выполняется неравенство*

$$\alpha + \gamma < 1, \quad (2.7)$$

то семейство $V_\alpha(t)$ является сильно непрерывной полугруппой с оценкой (2.6) при $t > 0$ и производящим оператором

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{dV}{dt} \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty s^{-(1+\alpha)} [V(s, -A) - J] \varphi ds, \quad \varphi \in D(A). \quad (2.8)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Так как оценка (2.6) показывает ограниченность семейства $V_\alpha(t)$ при $t > 0$, то для доказательства свойства

$$V_\alpha(t+s)\varphi = V_\alpha(t)V_\alpha(s)\varphi, \quad (3.1)$$

пользуясь соотношением [1, с. 361]

$$h_{t+s,\alpha}(\xi) = \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi - \mu) f_s(\mu) d\mu, \quad (3.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} V_\alpha(t+s)\varphi &= \int_0^\infty h_{t+s,\alpha}(\xi) V(\xi, -A)\varphi d\xi = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi - \mu) h_{s,\alpha}(\mu) V(\xi, -A)\varphi d\mu d\xi = \\ &= \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\mu) \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi - \mu) V(\xi, -A)\varphi d\mu d\xi = \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\mu) \int_{-\mu}^\infty h_{t,\alpha}(\tau) V(\tau + \mu, -A)\varphi d\mu d\tau = \\ &= \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\mu) V(\mu, -A) \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\tau) V(\tau, -A)\varphi d\mu d\tau = V_\alpha(t)V_\alpha(s)\varphi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, следуя [1, с. 363], для $\varphi \in D(A)$ воспользуемся равенством (20') там же [1, с. 363], которое в нашем случае имеет вид

$$V_\alpha(t)\varphi = \int_0^\infty V(vt^{\frac{1}{\alpha}}, -A)\varphi h_{1,\alpha}(v)dv. \quad (3.4)$$

Так как в силу (2.2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|V(vt^{\frac{1}{\alpha}}, -A)\varphi\| = \|\varphi\|,$$

и при $t \rightarrow \infty$ в силу (2.3) для $\varphi \in D(A)$ имеем оценку

$$\|V(vt^{\frac{1}{\alpha}}, -A)\varphi\| \leq M\|\varphi\|. \quad (3.5)$$

Отсюда и из (3.5) так же, как и в [1], но для $\varphi \in D(A)$, следует оценка

$$\|V_\alpha(t)\varphi\| \leq \sup_{t \geq 0} \|V(t)\varphi\| \int_0^\infty h_{1,\alpha}(v)dv = \sup_{t \geq 0} \|v(t, -A)\|, \quad (3.6)$$

и, переходя в равенстве (3.4) к пределу при $t \rightarrow 0$, учитывая равенство Иосиды [1, с. 361]

$$\int_0^\infty h_{1,\alpha}(v)dv = 1,$$

получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} V_\alpha(t)\varphi = \int_0^\infty h_{1,\alpha}(v)dv\varphi = \varphi. \quad (3.7)$$

Для доказательства равенства (2.8) воспользуемся неравенством

$$\left\| \frac{1}{s^{1+\alpha}} [V(s, -A) - J]\varphi \right\| \leq \frac{1}{s^{1+\alpha}} \int_0^s \|V(\xi, -A)A\varphi\| d\xi \leq \frac{M}{s^{1+\alpha}} \int_0^s \xi^{-\gamma} e^{-\omega\xi} d\xi \|A\varphi\| \leq \frac{M}{s^{\alpha+\gamma}} \|A\varphi\|, \quad (3.8)$$

которое с учётом оценки (1.3) обеспечивает сходимость интеграла в (2.8) и установление равенства (2.8) согласно схеме [1, с. 364], что и доказывает справедливость представления оператора A^α равенством (2.8) и завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.1. Оценка (2.5) — точная, так как, если φ_λ — собственный элемент оператора A такой, что $A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, $\Re \lambda \geq 0$, то $V(t, -A)\varphi_\lambda = e^{-\lambda t}\varphi_\lambda$ и неравенство (2.5) переходит в равенство

$$\|V(t, -A^\alpha)\varphi_\lambda\| = t^{\alpha(1-\gamma)-1} |E_{\alpha,\alpha(1-\gamma)}^{1-\gamma}| \|\varphi_\lambda\|. \quad (3.9)$$

Также отметим, что для таких φ_λ справедливо представление

$$A^\alpha \varphi_\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t^{1+\alpha}} dt \varphi_\lambda = \frac{2}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}t} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}t}{t^{1+\alpha}} dt \varphi_\lambda = \lambda^\alpha \varphi_\lambda. \quad (3.10)$$

4. ПРИМЕРЫ

В качестве примера возьмём полугруппы с особенностью, приведённые в [3] и в докторской диссертации Ю. Т. Сильченко.

Пусть $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ — оператор дифференцирования с областью определения

$$D(A) = \{y(x) \in W_p^3, \quad y(0) = y(1)\}$$

в пространстве $E = W_p^1$, $y(0) = y(1) = 0$.

В этом случае соответствующая полугруппа $V(t, -A)$ не является сильно непрерывной в нуле, и для неё справедлива оценка

$$\|V(t, -A)\| \leq Mt^{-\gamma} e^{-\omega t}, \quad \omega > 0, \quad (4.1)$$

где

$$\gamma = \frac{p-1}{p+1}. \quad (4.2)$$

Таким образом, в силу теоремы 2.1 оператор A имеет дробную степень $A^{\frac{1}{2}}$ при условии

$$\frac{1}{2} + \frac{p-1}{p+1} < 1, \quad \text{т. е.} \quad 0 < p < 3,$$

и производит полугруппу $V(t, -A^{\frac{1}{2}})$ с особенностью и оценкой (2.5) при

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{p-1}{p+1}, \quad 0 < p < 3,$$

и имеющую вид

$$V(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4\xi}} V(\xi, -A)\varphi}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi. \quad (4.3)$$

В частности, при $p = 2$ справедлива оценка

$$\|V(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi\|_{W_2^1} \leq \frac{M}{t^{\frac{2}{3}}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(-\omega t^{\frac{1}{2}}) \|\varphi\|_{W_2^1}. \quad (4.4)$$

Таким образом, представление полугруппы (4.3) с учётом оценки (4.4) позволяет судить о корректной разрешимости ослабленной задачи для уравнения (1.1) и позволяет строить алгоритмы её численной реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
3. Сильченко Ю. Т. Разрешимость задачи Коши для линейного уравнения второго порядка с неплотно заданными операторными коэффициентами, порождающими полугруппы с особенностями // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1993. — № 11. — С. 40–49.
4. Соболевский П. Е. О дифференциальных уравнениях второго порядка в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. — 1962. — 146, № 4. — С. 774–777.
5. Учайкин В. В. Методы дробных производных. — Ульяновск: Логос, 2002.

В. А. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: vlkostin@mail.ru

Д. В. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: dvk605@mail.ru

М. Н. Силаева
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru

UDC 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642

EDN: WOEBFC

On the construction of the square root for some differential operators

V. A. Kostin, D. V. Kostin, and M. N. Silaeva

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Using the Balakrishnan–Yosida approach to constructing fractional powers of linear operators in a Banach space by means of strongly continuous semigroups with densely defined generating operators, in this paper, a similar scheme is presented for constructing fractional powers of nondensely defined operators by means of semigroups with a summable singularity. It is found that the newly constructed semigroups also have a singularity at zero, and their sharp estimate is established, related to the order of the singularity of the original semigroup and the fractional power of the constructed operator, in particular, the square root. As an example, the obtained results are applied to semigroups with a singularity given in the paper [3] and in the doctoral dissertation of Yu. T. Silchenko, and a square root is also constructed for a nondensely defined operator.

Keywords: strongly continuous semigroups, semigroups with singularity, generating operators, fractional powers of operators.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: V. A. Kostin, D. V. Kostin, M. N. Silaeva, “On the construction of the square root for some differential operators,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 636–642. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642>

REFERENCES

1. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
3. Yu. T. Sil'chenko, “Razreshimost' zadachi Koshi dlya lineynogo uravneniya vtorogo poryadka s neplotno zadannymi operatornymi koeffitsientami, porozhdayushchimi polugruppy s osobennostyami” [Solvability of the Cauchy problem for a second-order linear equation with nondensely defined operator coefficients generating semigroups with singularities], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1993, No. 11, 40–49 (in Russian).
4. P. E. Sobolevskiy, “O differentsial'nykh uravneniyakh vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve” [On second-order differential equations in a Banach space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, 146, No. 4, 774–777 (in Russian).

5. V. V. Uchaykin, *Metody drobnykh proizvodnykh* [Fractional Derivative Methods], Logos, Ul'yanovsk, 2002 (in Russian).

V. A. Kostin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: vlkoston@mail.ru

D. V. Kostin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: dvk605@mail.ru

M. N. Silaeva

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: marinanebolsina@yandex.ru

УДК 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653

EDN: WTQYMH

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА—КИПРИЯНОВА. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Л. Н. Ляхов^{1,2,3}, В. А. Калитвин^{2,4}, М. Г. Лапшина²¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия²Липецкий государственный педагогический университет
им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия³Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия⁴Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

Аннотация. Преобразование Радона—Киприянова (K_γ) введено в 1998 г. В теоретических и прикладных исследованиях требуется ввести двойственное к нему преобразование, которое в работе обозначено $K_\gamma^\#$. Доказаны теоремы об ограниченности преобразования $K_\gamma^\#$ в соответствующем подпространстве Л. Шварца основных функций. Получена формула представления обобщенной свертки $K_\gamma^\#$ -преобразований функций, принадлежащих соответствующим пространствам основных функций.

Ключевые слова: преобразование Радона—Киприянова, преобразование Фурье, преобразование Фурье—Бесселя, обобщенная свертка.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Результаты работы поддержаны грантом РНФ (проект № 24-21-00387).

Для цитирования: Л. Н. Ляхов, В. А. Калитвин, М. Г. Лапшина. Двойственное преобразование Радона—Киприянова. Основные свойства // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 643–653. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653>

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные задачи естествознания, порожденные сферической симметрией аргумента соответствующих функций, приводят к преобразованию Радона специального вида, которое может использоваться не только для работы с функциями, определенными в евклидовых пространствах. Более необычным оказывается возможность работы во фрактальных структурах Б. Мандельброта [8]. Изучаемое преобразование называется *преобразованием Радона—Киприянова*, введено в работах [4, 5]. В этой работе продолжены исследования, начатые в [7]. Перейдем к основным определениям.

Пусть положительное число γ фиксировано, и пусть $\mathbb{R}_n^+$ — часть евклидова пространства точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, определенная неравенством $x_1 > 0$. Через $\mathcal{P}_{x_1}^\gamma$ будем обозначать оператор Пуассона [9], действие которого на локально интегрируемую функцию f определено следующим

выражением:

$$\mathcal{P}_{x_1}^\gamma f(x) = C(\gamma_i) \int_0^\pi f(x_1 \cos \alpha, x') \sin^{\gamma-1} \alpha \, d\alpha,$$

где для удобства введено обозначение $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

Через $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим класс пробных функций Л. Шварца $\{\varphi\}$, состоящий из функций, четных по переменной x_1 . Соответствующий класс регулярных весовых распределений S'_{ev} определяется весовой билинейной формой [3]

$$(f, \varphi)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \varphi(x) x_1^\gamma dx.$$

На основе оператора Пуассона введем в пространстве распределений S'_{ev} весовую обобщенную δ -функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_n^+$ (как правило, размерности $n-1$), следующим определением:

$$(\mathcal{P}_{x_1} \delta(P(x)), \varphi)_\gamma = C(\gamma) \int_{\Gamma=\{z: P(z)=0\}} \tilde{\varphi}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (1.1)$$

где $z = (z_1, z_2, x')$, $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$ и введены обозначения $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \end{array} \right\} \quad 0 < \alpha < \pi$. При этом $-\infty < z_1 < \infty$, $0 < z_2 < \infty$. Будем называть δ -функционал (1.1) *распределением Дирака–Пуассона, сосредоточенном на поверхности $P(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_n^+$* .

Отметим, что если бы первоначально поверхность $P(x) = 0$ была бы сферой $|x| - R = 0$, то отображенная поверхность интегрирования в (1.1) — тоже сфера $|z| = R$, но уже в евклидовом пространстве большей размерности: $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z : z_2 > 0\}$. Далее рассматривается ситуация, когда поверхностью интегрирования является гиперплоскость в $\mathbb{R}_n$.

Мы следуем классическому определению преобразования Радона (см. например, [1, с. 16], [10, с. 20, формула (1.3)]). *Преобразование Радона–Киприянова* на основе введенного выше распределения (1.1) (введено в работах [4, 5]; см. также книги [6, с. 211–225] и [2, с. 483–495]) определено следующей конструкцией:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x; \theta \rangle) x_1^\gamma dx,$$

где $x = (x_1, x')$, $x_1 \in \mathbb{R}_1^+$, $x' \in \mathbb{R}_{n-1}$. Согласно определению (1.1) имеем

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma, n) \int_{\Gamma=\{z: p=\langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (1.2)$$

$$z = (z_1, z_2, x'), \quad \tilde{\theta} = (\theta_1, 0, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad \{z : p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+ = \{z : \langle z, \tilde{\theta} \rangle, z_2 > 0\}.$$

Функция $\tilde{f}$ выражается через функцию f очевидным образом: $\tilde{f}(z) = f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$.

Как видим, здесь гиперплоскость $\Gamma = \{z : p = \langle z_1, \tilde{\theta} \rangle\}^+ \subset \mathbb{R}_{n+1}^+$; при этом выражение $\langle z, \tilde{\theta} \rangle = z_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \dots + x_n \theta_n$ представляет собой скалярное произведение $(n+1)$ -мерных векторов z и $\tilde{\theta}$. Если θ — единичный вектор нормали к плоскости $\Gamma = \{x : p = \langle x, \theta \rangle, x \in \mathbb{R}_n^+\}$, то $|p|$ — расстояние от начала координат до плоскости $\langle x, \theta \rangle = p$. То же самое справедливо для уравнения $\langle z, \tilde{\theta} \rangle = p$, $z \in \mathbb{R}_{n+1}^+$.

В принятых выше обозначениях K_γ -преобразование (1.2) сводится к *специальному весовому преобразованию Радона* в $\mathbb{R}_{n+1}^+$ (см. [4, 5])

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \tilde{\theta} \rangle) z_2^{\gamma-1} dz = C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (1.3)$$

представленному в виде интеграла по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+$, которая записана в евклидовом полупространстве ($z_2 > 0$) $\mathbb{R}_{n+1}^+$ в виде $\{p = \langle z, \Theta \rangle\}^+$. Это уравнение определяет плоскость, параллельную весовой оси координат z_2 с единичным вектором нормали $\Theta \in \mathbb{R}_{n+1}^+$. Здесь и далее $C(\gamma)$ — константа, нормирующая интегральный оператор Пуассона.

Полуплоскость интегрирования в выражении (1.2) обозначим символом $\Theta_\perp^+$, т. е.

$$\Theta_\perp^+ = \{z: \langle \Theta, z \rangle = p, \quad z_2 > 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{n+1}^+}.$$

При фиксированном векторе Θ примем обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

Следуя [10, с. 17], запишем преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в евклидовом пространстве точек $\in \mathbb{R}_{n+1}^+$:

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z). \quad (1.4)$$

Отметим, что если выделить в (1.4) интегрирование по переменной z_2 , то получим смешанное преобразование Радона с преобразованием Меллина.

2. ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В $\mathbb{R}_1$

Пусть функции f и g принадлежат подпространству $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ основных функций Л. Шварца, состоящему из функций, четных по Киприянову¹ по переменной x_1 . Функция (1.4) является функцией одного переменного p , поэтому позволяет ввести линейную форму в $\mathbb{R}_1$ следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp. \quad (2.1)$$

Введем новую переменную

$$y = p\Theta + z \in \overline{\mathbb{R}_{n+1}^+} = \{y = (z_1, z_2, x') : z_2 \geq 0\}.$$

Согласно нашему построению векторы Θ и z в выражении (2.1) ортогональны: $\langle \Theta, z \rangle = 0$. Тогда $\langle y, \Theta \rangle = p\Theta^2 + \langle z, \Theta \rangle = p$, где $\Theta = (\theta_1, 0, \theta')$, $|\Theta| = 1$ (т. к. по построению $\theta_1^2 + |\theta'|^2 = 1$).

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dy = \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) z_2^{\gamma-1} dy. \quad (2.2)$$

Преобразование

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$$

будем называть *двойственным преобразованием Радона—Киприянова* в $\mathbb{R}_{n+1}^+$.

Воспользуемся цилиндрическими координатами $y \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \quad x_1 > 0, \\ x' = x', \end{array} \right. \quad y = (z_1, z_2, x') \rightarrow \{x : (x_1, x'), x_1 > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+.$$

Учитывая равенство $f(x_1, x') = \tilde{f}(z)$, из (2.1) имеем

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dy =$$

¹Так называются функции, имеющие по переменной $x_1 \geq 0$ четное продолжение на отрицательную полуось $x_1 \leq 0$ с сохранением класса своей принадлежности (см. [3, с. 21]).

$$= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_n^+} \int_0^\pi f(x_1, x') g\left(\theta, (x_1 \theta_1 \cos \alpha + x_2 \theta_2 + \dots + x_n \theta_n)\right) \sin^{2\gamma} \alpha x_1^\gamma dx.$$

Согласно определению оператора Пуассона получим следующее представление линейной формы (1.4):

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma g(\theta, \langle x, \theta \rangle) x_1^\gamma dx_1 dx'.$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 2.1. Для функций $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1 \times S_1^+(n))$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) z_2^{\gamma-1} dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma, \theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx', \quad (2.3)$$

первое из которых выполняется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+1}^+$ (в результате вращения (1.1)) с двойственным оператором

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle), \quad y \in \mathbb{R}_{n+1}^+, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta'), \quad (2.4)$$

а второе справедливо в исходном евклидовом полупространстве $\mathbb{R}_n^+$ с двойственным оператором

$$K_{\gamma, \theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^\gamma (g(\theta, \langle \theta, x \rangle)). \quad (2.5)$$

Замечание 2.1. В частности, если в (2.3) положить $g = K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$, то для преобразования Радона—Киприянова, записанного вращением (1.1), имеет место равенство

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# \left[K_{\gamma, \Theta}[f] \right] (y) = C(\gamma) K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle) = C(\gamma) K_\gamma[f](\Theta; p).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle) &= \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x_1} \left(K_\gamma[f](\theta, \langle y, \theta \rangle) \right) \theta_1^\gamma dS(\theta) = \\ &= C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dS(\theta), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\Theta = (\theta_1, 0, \theta')$, $|\theta| = 1$.

В теореме 2.1 определены виды одномерных двойственных операторов Радона—Киприянова. Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n$, определим интегрированием по взвешенной сфере в следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1 \times S_1^+(n))$. Тогда

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx',$$

где

$$\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma, \theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx = \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x_1} \left(g(\theta, \langle \theta, x \rangle) \right) \theta_1^\gamma dS(\theta). \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно равенству (2.2) имеем

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma, \theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx' dS(\theta).$$

Теперь воспользуемся определением оператора $K_{\gamma,\theta}^\#$ формулой (2.4). Тогда

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) dx_1 dx' dS(\theta).$$

Изменение порядка интегрирования здесь законно, т. к. рассматриваемые функции f и g принадлежат пространству Л. Шварца. Поменяв порядок интегрирования, получим утверждение доказываемой теоремы. $\square$

Отметим, что теорема 2.2 в теории интегральных преобразований называется *проекционной теоремой*. Также отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^\#$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^\# g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому $\mathcal{K}_\gamma^\#$ не зависит от вектора нормали к плоскости.

3. О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ И ФУРЬЕ

Напомним, что через $S_{ev} = S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$ обозначено подпространство пространства Л. Шварца основных функций, четных по Киприянову по переменной x_1 .

Смешанное преобразование Фурье—Бесселя (введено в [9] в виде преобразования Ганкеля; общее определение и свойства этого преобразования см. в [2]) определено формулой

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) j_\nu(x_1 \xi_1) e^{-i\langle x', \xi' \rangle} x_1^\gamma dx, \quad \gamma = 2\nu + 1 > 0,$$

где $j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(t)}{t^\nu}$, J_ν — функция Бесселя первого рода, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Пространство основных функций S_{ev} инвариантно относительно преобразование F_B и обратимо [2]. Обратное преобразование определено равенством

$$F_B^{-1}[\widehat{f}](x) = (2\pi)^{1-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu + 1) F_B[\widehat{f}](-x) = f(x).$$

Известно представление функции Бесселя интегралом Пуассона [4]

$$j_\nu(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-t \cos \alpha} \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Отсюда, воспользовавшись определением (1.1), получим

$$F_B[\widehat{f}](x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} e^{-i\langle z, \tilde{\xi} \rangle} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} dz, \quad \tilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x'\right). \quad (3.1)$$

Разумеется, здесь вектор $\tilde{\xi}$ произвольный, т. е. не обязательно единичный.

3.1. Преобразование Фурье в направлении вектора нормали. Пусть $\mathbb{Z}_n^+ = S_{ev}(S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1)$ — пространство основных функций Л. Шварца, заданных на единичном цилиндре $S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_{n+1}$. Очевидно, что функция $K_\gamma[f](\xi, p)$, определенная на $\mathbb{Z}_n^+$, является четной в следующем смысле:

$$K_\gamma[f](-\xi, -p) = K_\gamma[f](\xi, p).$$

Теорема 3.1. Пусть $|\theta| = 1$. Если $f \in \mathbb{Z}_n^+$, то для любой точки $\theta \in \overline{S_1^+(n)}$ выполнены равенства

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma,\theta}[f](p)](s) = F_B[f](s\theta) = F_B[f](\xi), \quad (3.2)$$

$$K_{\gamma,\theta}[f](p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1}[F_B[f](s\theta)](p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1}[F_B[f](\xi)](p), \quad (3.3)$$

где $s\theta = \xi$, $|\theta| = 1$.

Доказательство. Имеем

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = \int_{\mathbb{R}_1} e^{-ips} K_{\gamma, \theta}[f](p) dp.$$

Воспользуемся представлением K_γ -преобразования в терминах определения (1.1), тогда

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} e^{-ips} \int_{\Theta^\perp} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp,$$

где $\Theta = \tilde{\theta} = (\theta_1, 0, \theta')$.

Введем новую переменную интегрирования $y = p\Theta + z$ (при $|\Theta| = |\tilde{\theta}| = 1$), тогда $p = \langle \Theta, y \rangle$, $dy = dz dp$, следовательно

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} e^{-is\langle \Theta, y \rangle} \tilde{f}(y) z_2^{\gamma-1} dy.$$

Здесь вектор $s\Theta$ произвольной длины, поэтому обозначим его так же, как в формуле (2.7), символом $s\tilde{\theta} = \xi$. Тогда, обозначая через $\tilde{y} = (z_1, 0, x')$, запишем

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} e^{-i\langle \xi, \tilde{y} \rangle} \tilde{f}(y) z_2^{\gamma-1} dy.$$

Вводя, как и раньше, цилиндрические координаты, и воспользовавшись интегралом Пуассона представления j -функций Бесселя, вернемся к классическому преобразованию Фурье—Бесселя (с j -функцией Бесселя). Имеем

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = \int_{\mathbb{R}_n^+} j_\nu(s\theta_1 x_1) e^{-i\langle s\theta', x' \rangle} f(x) x_1^\gamma dx = F_B[f](\xi),$$

где $\xi = s\theta$ — вектор нормали (не единичный) к плоскости $p = \langle x, \xi/s \rangle$.

Утверждение (3.3) теоремы 3.1 вытекает из (3.2) применением к нему обратного преобразования Фурье. $\square$

Равенства (3.2) и (3.3) другими средствами получены в [4, 5].

4. K_γ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СВЕРТКИ

Смешанной обобщенной сверткой (сверткой Пуассона) функций называется выражение

$$(f * g)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} T_{x_1}^{y_1} f(x_1, x' - y') g(y) y_1^\gamma dy_1 dy',$$

где обобщенный сдвиг Пуассона определен формулой [4]

$$T_{x_1}^{y_1} f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \alpha}, x'\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha,$$

$$C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad \gamma > 0.$$

Теорема 4.1. Если $u, v \in S_{ev}$, то справедлива формула

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[u](\xi, t) K_\gamma[v](\xi; p - t) dt. \quad (4.1)$$

Доказательство. Из равенства (3.2) имеем

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1} [F_B[(u * v)_\gamma](s\xi)](p\xi).$$

Известна формула преобразовании Фурье—Бесселя обобщенной свертки функций

$$F_B[(u * v)_\gamma](\xi) = F_B[u](\xi) F_B[v](\xi).$$

Следовательно,

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1} [F_B[u](\xi s) F_B[v](s\xi)](p\xi).$$

Теперь воспользуемся свойством преобразования Фурье: обратное преобразование Фурье произведения функций есть свертка (обычная, не обобщенная) обратных преобразований Фурье исходных функций:

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{s \rightarrow t}^{-1} [F_B[u]](\xi t) F_{(s \rightarrow p-t)}^{-1} [F_B[v]](\xi(p-t)) dt.$$

Согласно (3.2), каждая из двух функций под знаком интеграла представляют собой преобразования Радона—Киприянова. Отсюда следует (4.1). $\square$

Лемма 4.1. Для любой функции $\omega \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ справедлива формула

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \omega(p\theta). \quad (4.2)$$

Доказательство. Пространство основных функций S_{ev} инвариантно относительно смешанного преобразования Фурье—Бесселя, поэтому $\widehat{\omega} = F_B[\omega] \in S_{ev}$.

Учитывая четность преобразования Радона—Киприянова, имеем

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ips} K_\gamma[\widehat{\omega}](\theta; s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ips} K_\gamma[\widehat{\omega}](-\theta; -s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ips} K_\gamma[\widehat{\omega}](-\xi; s) ds.$$

В этом равенстве справа уже прямое преобразование Фурье по параметру s . По формуле (3.1) получим

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = (2\pi)^{-1} F_B[\widehat{\omega}](-\xi) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) F_B^{-1}[\widehat{\omega}](\xi) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) F_B^{-1}[\widehat{\omega}](\xi).$$

Но на функциях из основного пространства S_{ev} преобразование Фурье—Бесселя обратимо: $F_B^{-1}[\widehat{\omega}](x) = \omega(x)$. Отсюда следует формула (4.2). $\square$

Теорема 4.2. Если $g \in \mathbb{Z}_n^+$, то

$$F_{(p \rightarrow s)} \left[\mathcal{K}_\gamma^\# g \right] (s\theta) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) |\xi|^{1-n} \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \widehat{g} \left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right].$$

Доказательство. Условимся в этом доказательстве использовать следующие обозначения прямого и обратного преобразований Фурье: $\widehat{f}(x)$ и $\widehat{g}(\xi)$, соответственно. Разумеется, эти преобразования определены в направлении вектора нормали к плоскости интегрирования. При этом, учитывая обратимость преобразования Фурье в классе основных функций Л. Шварца, имеем равенство $\widehat{\widehat{\omega}(x)} = \omega$.

Согласно теореме 2.2

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta; p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta).$$

Отсюда, полагая $f(x) = F_B[\omega](x) = \widehat{\omega}$, запишем

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{K}_\gamma^\# [g](p) F_B[\omega](x) x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{S_1(n)} \int_{\mathbb{R}_1} g(\theta; s) \widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; s) ds \theta_1^\gamma dS(\theta).$$

По формуле Парсеваля для преобразования Фурье получим

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{K}_\gamma^\# [g] \widehat{\omega} x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} \widehat{g}(\theta, p) \widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta).$$

Согласно (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{K}_\gamma^\# [g] \widehat{\omega} x_1^\gamma dx_1 dx' &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} \widehat{g}(\theta, p) \omega(\theta p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \\ &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \int_{\mathbb{R}_n^+} \widehat{g}(\xi, p) \omega(\xi) \xi_1^\gamma d\xi = \\ &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \right] |\xi|^{1-n-\gamma} \omega(\xi) \left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)^\gamma d\xi, \end{aligned}$$

где мы положили $\xi = p\theta$ отдельно для $p > 0$ и $p < 0$. Поскольку ω — произвольная функция основного пространства S_{ev} , то имеет место равенство

$$\widetilde{\mathcal{K}^\# g}(\xi) = (2\pi)^{n-1} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \left[\widehat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \right] |\xi|^{1-n}.$$

□

Теорема 4.3. Если $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, то

$$K_\gamma^\# K_\gamma[f](x) = |S_1(n-1)| \left(\frac{1}{|x|} * f \right)_\gamma,$$

где $|S_1(n-1)|$ — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n-1}$, $(u, v)_\gamma$ — обобщенная свертка функций, порожденная смешанным обобщенным сдвигом Пуассона.

Доказательство. Согласно равенству (2.5), имеем

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} K_\gamma[\widetilde{f}](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dS(\xi)$$

(напомним, что $z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_{n+1}^+$, $\widetilde{f} = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x'\right)$, $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $|\Theta| = 1$).

Воспользуемся представлением преобразования Радона—Киприянова (1.3), тогда

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} \int_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dS(\xi).$$

Учитывая то, что $s\Theta = \langle x, \Theta \rangle \Theta = \tilde{x} = (x_1, 0, x')$ — проекция начала координат на плоскость интегрирования $\Theta_\perp^+$, запишем

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} \int_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(\tilde{x} + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dS(\xi). \quad (4.3)$$

Применением меры Лебега на группе вращений $SO(n)$ в [9, с. 217, формула (2.7)] получено равенство

$$\frac{1}{|S_1(n)|} \int_{SO(n)} f(\xi \theta_n) d\xi = \int_{S_1(n)} f(\theta) dS, \quad (4.4)$$

из которого вытекает

$$\int_{S_1(n)} \int_{\Theta_\perp} f(y) dy = |S_1(n-1)| \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(y)}{|x-y|} dy. \quad (4.5)$$

Продолжая правую часть равенства (4.3) по формулам (2.6) и (4.5), получим

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \frac{\tilde{f}(z)}{|\tilde{x} - z|} z_2^{\gamma-1} dz.$$

В левую и правую части полученного равенства введем цилиндрические координаты $y \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \quad x_1 > 0, \\ x' = x', \end{array} \right| \quad y = (z_1, z_2, x') \rightarrow \{x : (x_1, x'), x_1 > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+.$$

Учитывая, что при этом

$$C(\gamma) \frac{\tilde{f}(z)}{|\tilde{x} - z|} \rightarrow f(x) T_{x_1}^{y_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + |x' - y'|^2}} \right),$$

получим утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Граев И. М., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1952.
2. Катрахов В. В., Катрахова А. А., Ляхов Л. Н., Муравник А. Б., Ситник С. М., Хе К. Ч. Сингулярные краевые задачи. — Воронеж: Научная книга, 2024.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
4. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. АН СССР. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
5. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова—Радона// Тр. МИАН. — 2005. — 248. — С. 153–163.
6. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их применение к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
7. Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапшина М. Г. О преобразовании, двойственном к преобразованию Радона—Киприянова// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2024. — 232. — С. 70–77.
8. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха// Мат. заметки. — 2023. — 113, № 4. — С. 517–528.
9. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
10. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.

Л. Н. Ляхов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

E-mail: levnlya@mail.ru

В. А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

E-mail: kalitvin@gmail.com

М. Г. Лапшина

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: marina.lapsh@ya.ru

UDC 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653

EDN: WTQYMH

Dual Radon—Kipriyanov transformation. Basic properties

L. N. Lyakhov^{1,2,3}, V. A. Kalitvin^{2,4}, and M. G. Lapshina²¹Voronezh State University, Voronezh, Russia²Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia³Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, Russia⁴Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

Abstract. The Radon—Kipriyanov transformation (K_γ) was introduced in 1998. In theoretical and applied studies, it is necessary to introduce its dual transformation, which is denoted by $K_\gamma^\#$ in the paper. Theorems on the boundedness of the $K_\gamma^\#$ transformation in the corresponding Schwartz subspace of the main functions are proved. A formula for representing the generalized convolution of $K_\gamma^\#$ -transformations of functions belonging to the corresponding spaces of the main functions is obtained.

Keywords: Radon—Kipriyanov transformation, Fourier transformation, Fourier—Bessel transformation, generalized convolution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The results of this work were supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00387).

For citation: L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina, “Dual Radon—Kipriyanov transformation. Basic properties,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 643–653. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653>

REFERENCES

1. I. M. Gel'fand, I. M. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Integral'naya geometriya i svyazannye s ney voprosy teorii predstavleniy* [Integral Geometry and Related Topics in Representation Theory], GIFML, Moscow, 1952 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov, A. A. Katrakhova, L. N. Lyakhov, A. B. Muravnik, S. M. Sitnik, and K. Ch. Khe, *Singulyarnye kraevye zadachi* [Singular Boundary-Value Problems], Nauchnaya Kniga, Voronezh, 2024 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov and L. N. Lyakhov, “O preobrazovaniyakh Fur'e, Fur'e—Besselya i Radona” [On the Fourier, Fourier—Bessel and Radon transformations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1998, **360**, No. 2, 157–160 (in Russian).
5. L. N. Lyakhov, “Preobrazovanie Kipriyanova—Radona” [Kipriyanov—Radon transform], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 153–163 (in Russian).
6. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh primeneniye k opisaniiyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nykh uravneniyam s V-potentsial'nyimi yadrami* [B-hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of the Kipriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).



7. L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, and M. G. Lapshina, “O preobrazovanii, dvoystvennom k preobrazovaniyu Radona—Kipriyanova” [On the transformation dual to the Radon–Kipriyanov transformation], *Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Mat. i Ee Pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2024, **232**, 70–77 (in Russian).
8. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, “Differentsial’nye i integral’nye operatsii v skrytoy sfericheskoy simmetrii i razmernost’ krivoy Kokha” [Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 4, 517–528 (in Russian).
9. B. M. Levitan, “Razlozhenie v ryady i integraly Fur’e po funktsiyam Besselya” [Expansion into Fourier series and integrals with Bessel functions], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
10. F. Natterer, *Matematicheskie osnovy komp’yuternoy tomografii* [The Mathematics of Computerized Tomography], Mir, Moscow, 1990 (Russian translation).

L. N. Lyakhov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia

Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, Russia

E-mail: levnlya@mail.ru

V. A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

E-mail: kalitvin@gmail.com

M. G. Lapshina

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia

E-mail: marina.lapsh@ya.ru

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-654-668

EDN: WUNFUC

МНОГОМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РЕСПИРАТОРНОЙ ИНФЕКЦИИ С УЧЁТОМ ИММУННОГО ОТВЕТА

А. С. Мозохина, К. А. Рюмина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В данной работе представлена многомасштабная математическая модель распространения респираторной вирусной инфекции в ткани и в организме с учётом влияния врождённого и адаптивного иммунного ответа на основе систем реакционно-диффузионных уравнений с нелокальными членами. Определяющими характеристиками моделей такого типа, имеющими физиологическое значение, являются число репликации вируса, скорость распространения волны и полная вирусная нагрузка. В работе оцениваются эти характеристики и исследуется их зависимость от параметров иммунного ответа.

Ключевые слова: вирусная инфекция, уравнения реакции-диффузии, скорость распространения, вирусная нагрузка, иммунный ответ.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Результаты частично получены А. С. Мозохиной за счёт гранта Российского научного фонда № 24-11-00073 (полная вирусная нагрузка) и частично К. А. Рюминой при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115) (скорость волны, численные результаты).

Для цитирования: А. С. Мозохина, К. А. Рюмина. Многомасштабная математическая модель распространения респираторной инфекции с учётом иммунного ответа // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 654–668. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-654-668>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия наблюдается рост числа вспышек заболеваний, вызываемых новыми или уже известными вирусами, такими как вирусы гриппа, коронавирусы (в частности, SARS-CoV-2), респираторно-синцитиальный вирус. Быстрое распространение вирусов, неоднородность иммунного ответа среди популяции, а также внутри отдельных организмов, делают актуальной задачу их изучения.

После проникновения вируса в организм он начинает заражать клетки-мишени. Для респираторных вирусов клетками-мишенями служат эпителиальные клетки дыхательных путей. Вирус проникает в клетку-мишень, в которой высвобождает свой генетический материал (РНК или ДНК). Клетка-мишень становится заражённой и начинает воспроизводить вирусные частицы, а также производит химические вещества (цитокины и хемокины), запускающие иммунный ответ. В иммунном ответе выделяют две ветви — врождённый иммунный ответ, который не является патоген-специфическим, т. е. действует одинаково для разных вирусов и других патогенов,

и адаптивный иммунный ответ, который является патоген-специфическим, т. е. вырабатывается на конкретный вирус, но требует большего времени для активации. К врождённому иммунному ответу относятся интерфероны, он вырабатывается инфицированными клетками и имеет разное действие, в частности, уменьшает производство вирусных частиц заражёнными клетками и стимулируют активацию адаптивного иммунного ответа [6, 10, 17]. Адаптивный иммунный ответ, в свою очередь, делится на клеточный и гуморальный иммунный ответ. Клеточный иммунный ответ начинается с дифференциации Т-хелперных клеток в Т1-хелперные, которые стимулируют созревание цитотоксических Т-лимфоцитов (ЦТЛ). ЦТЛ, в свою очередь, непосредственно контактируют с инфицированными клетками и убивают их. Гуморальный иммунный ответ регулируется популяцией Т2-хелперных клеток, приводит к активации В-клеток и дифференциации их в плазматические клетки, производящие антитела. Антитела являются специфическими к патогену и нейтрализуют вирусные частицы [9, 14].

Многочисленные источники свидетельствуют о том, что респираторные вирусы в процессе инфекции обнаруживаются не только в области непосредственного заражения, но и в других тканях и органах. Так, вирус гриппа А обнаруживается в регионарных лимфатических узлах [5, 7, 8], вирус SARS-CoV-2 известен поражением многих органов и тканей, в том числе лёгких, печени, лимфатических узлов [1]. Обсуждаются причины нейропатологий, связанных с COVID-19, среди которых называется и непосредственное поражение клеток мозга вирусом SARS-CoV-2, однако последние исследования склоняются к тому, что причиной нейропатологий является не непосредственно вирус, реплицирующийся в тканях мозга, а скорее сопровождающий инфекцию воспалительный процесс [4]. Несмотря на то, что обнаружение вирусных частиц SARS-CoV-2 в других тканях (печени, например) является признаком тяжёлого течения заболевания, целесообразно предположить, что некоторый отток вирусных частиц в циркуляторное русло, например, по лимфатической системе, происходит на любых стадиях инфекции: и при лёгкой, и умеренной инфекции иммунный ответ в лимфе, крови и вторичных лимфоидных органах предотвращает возникновение очагов инфекции в других тканях.

Математическое моделирование играет важную роль в понимании динамики инфекционных заболеваний и разработке стратегий борьбы с ними. Этот подход позволяет выявлять параметры и условия распространения вирусной инфекции, а также оценивать влияние иммунного ответа и терапии на её распространение. Традиционные модели вирусных инфекций, основанные на обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ), характеризуют динамику концентраций вируса, а также неинфицированных и инфицированных клеток во времени, учитывая при этом специфические механизмы вирусной репликации, инфицирования клеток и иммунного ответа, например, [11, 16, 18]. Часто такие модели предполагают равномерное распределение вируса и восприимчивых клеток в пространстве, что не соответствует действительности.

В работах [2, 3, 12] было показано, что распространение инфекции в клеточной культуре может быть описано реакционно-диффузионной волной. Основными характеристиками этой волны являются скорость распространения и общая вирусная нагрузка, под которой понимается интеграл по пространству от концентрации вирусных частиц как функция от времени. Скорость распространения реакционно-диффузионной волны соотносится с вирулентностью вируса и выраженностью симптомов заболевания. Полная вирусная нагрузка в верхних дыхательных путях при респираторных инфекциях соотносится с инфекционностью вируса, т. е. со скоростью передачи инфекции между индивидами. Эти характеристики зависят от типа вируса и от клеточной культуры, в которой происходит заражение.

Особое внимание хотелось бы уделить результатам предыдущих работ [2, 3]. В них было показано, что у варианта Омикрон скорость распространения выше в верхних дыхательных путях по сравнению с Дельтой, при этом в легких, наоборот, скорость распространения выше у Дельты. Низкая скорость распространения Омикрона в легких позволила сделать предположение, что этот вариант возник путём последовательных мутаций в верхних дыхательных путях разных носителей. В ходе исследований также было выявлено, что производство интерферона на локальном уровне не замедляет распространение вирусной инфекции, хотя снижает вирусную нагрузку. Глобальный интерферон, т. е. производство интерферона не только эпителиальными клетками, но и иммунными, снижает и скорость распространения инфекции, и вирусную нагрузку. Адаптивный иммунный ответ играет важную роль: повышение уровня цитотоксических Т-лимфоцитов

более эффективно снижает распространение вируса и общую вирусную нагрузку, что открывает перспективы для разработки терапевтических стратегий, основанных на регулировании ЦТЛ без роста уровня интерферона.

В данной работе представлена многомасштабная модель распространения инфекции в ткани с учётом иммунного ответа. Здесь многомасштабность понимается в смысле разбиения модели на два взаимосвязанных иерархических блока: первого, описывающего локальную динамику развития вирусной инфекции внутри зараженной ткани, и второго, описывающего влияние иммунного ответа и попадание вирусных частиц в циркуляторное русло. Первый блок сосредоточен на описании процессов репликации вируса и инфицирования клеток с учётом пространственно-временной эволюции рассматриваемых концентраций при помощи уравнений в частных производных. В этом блоке также учтена временная задержка производства вирусных частиц заражёнными клетками. Второй блок представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику врожденного и адаптивного иммунного ответа, а также динамику вируса, попадающего в кровоток или лимфатическую систему, и, соответственно, циркулирующего далее по всему организму. Применение такого многомасштабного подхода позволяет учитывать как локальные, так и глобальные процессы, происходящие при инфекции, и их взаимное влияние.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В данной работе рассматривается модель динамики вирусной инфекции, а именно концентрации неинфицированных и зараженных клеток, вирусных частиц внутри ткани и в циркуляции, а также иммунного ответа, представленного концентрациями интерферона 1 типа, цитотоксических Т-лимфоцитов и антител. Общая схема модели представлена на рис. 1

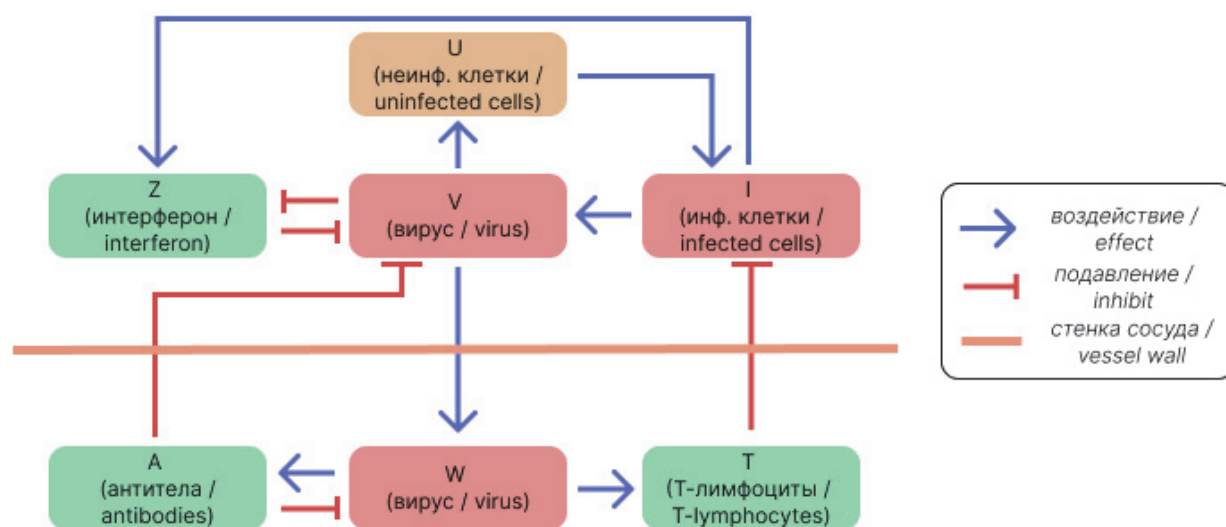


РИС. 1. Схематическое изображение иммунного ответа на респираторную вирусную инфекцию. Зеленые ячейки показывают элементы иммунного ответа. Оранжевая ячейка обозначает неинфицированные клетки. Красные ячейки показывают вирус и инфицированные клетки.

FIG. 1. Schematic representation of the immune response to a respiratory viral infection. Green cells show elements of the immune response. Orange cells represent uninfected cells. Red cells show the virus and infected cells.

Уравнение, описывающее динамику неинфицированных клеток, задается формулой:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -aUV, \quad (2.1)$$

где правая часть представляет собой скорость заражения вирусом неинфицированных клеток.

Уравнение, описывающее динамику инфицированных клеток, рассматривается в виде:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = aUV - \beta(T)I. \quad (2.2)$$

Здесь первый член правой части уравнения отражает скорость заражения неинфицированных клеток, второй член задается функцией $\beta(T) = \beta_{10} + \beta_{11}T$ и характеризует гибель инфицированных клеток и их уничтожение цитотоксическими Т-лимфоцитами (ЦТЛ) [9, 14].

Уравнение, описывающее динамику вирусных частиц в зараженной ткани, задается формулой:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{b_1}{1 + k_1 Z} I_{\tau_1} - k_2 V - \sigma_1(A)V. \quad (2.3)$$

Первый член правой части уравнения описывает случайное движение вируса во внеклеточном матриксе. Второй член отражает динамику производства вируса инфицированными клетками с учётом временного запаздывания $I_{\tau}(x, t) = I(x, t - \tau_1)$, а также подавление производства вируса интерфероном [6, 10, 17]. Третий член характеризует проникновение вируса в кровоток. Последний член с функцией $\sigma_1(A) = \sigma_{11} + \sigma_{12}A$ описывает деградацию вируса, а также его подавление антителами, которые нейтрализуют вирус, делают его неактивным и помогают распознать вирус НК-клеткам для последующего апоптоза [9].

Уравнение, описывающее динамику вирусных частиц, циркулирующих по всему организму, задается формулой:

$$\frac{dW}{dt} = b_2 J(V) - \sigma_2(A)W. \quad (2.4)$$

Первый член правой части описывает процесс попадания вируса из зараженной ткани в кровоток, $J(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) d\xi$. Это позволяет инфекции охватить не только место первоначального заражения, но и другие части тела. Второй член, где $\sigma_2(A) = \sigma_{21} + \sigma_{22}A$, описывает гибель вируса и подавление его антителами [9].

Уравнение, описывающее динамику интерферона 1 типа, задается формулой:

$$\frac{dZ}{dt} = b_3 J(I) e^{-k_3 J(V)} - \sigma_3 Z, \quad (2.5)$$

где первый член правой части отражает производство интерферона всеми инфицированными клетками интегрально по организму совокупно с подавлением его производства вирусом, находящимся в тканях. Второй член описывает деградацию интерферона. Здесь полагается, что распределение интерферона в ткани равномерно, т. е. не зависит от пространственной переменной в каждый момент времени, поскольку выравнивание концентрации интерферона в ткани за счёт кровотока происходит за характерное время (20 минут), намного меньшее среднего времени распространения инфекции (часы). Кроме того, известно, что интерферон производится не только инфицированными клетками, но и иммунными клетками, однако в обоих случаях это производство пропорционально общему количеству инфицированных клеток в каждый момент времени [6, 10, 17].

Уравнение, описывающее динамику цитотоксических Т-лимфоцитов, задается в виде:

$$\frac{dT}{dt} = b_4 W_{\tau_2} - \sigma_4 T J(I). \quad (2.6)$$

Здесь первый член правой части характеризует прирост Т-лимфоцитов в зависимости от общего количества вируса в циркуляции с учётом временного запаздывания $W_{\tau_2}(x, t) = W(x, t - \tau_2)$, второй член описывает уменьшение концентрации ЦТЛ за счёт потери цитотоксического действия, что происходит в результате связывания ЦТЛ с инфицированными клетками и программирования последних на апоптоз [9, 14].

Уравнение, описывающее динамику антител, имеет следующий вид:

$$\frac{dA}{dt} = b_5 W_{\tau_3} - \sigma_5 W A, \quad (2.7)$$

где первый член в правой части описывает производство антител пропорционально концентрации вируса с учётом временной задержки $W_{\tau_3}(x, t) = W(x, t - \tau_3)$, а второй член описывает истощение антител при взаимодействии с вирусом [9].

Таким образом, итоговая система уравнений (2.1)–(2.7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= -aUV, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= aUV - \beta(T)I, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{b_1}{1+k_1Z}I_{\tau_1} - k_2V - \sigma_1(A)V, \\ \frac{dW}{dt} &= b_2J(V) - \sigma_2(A)W, \\ \frac{dZ}{dt} &= b_3J(I)e^{-k_3J(V)} - \sigma_3Z, \\ \frac{dT}{dt} &= b_4W_{\tau_2} - \sigma_4TJ(I), \\ \frac{dA}{dt} &= b_5W_{\tau_3} - \sigma_5WA\end{aligned}$$

и дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

Для упрощения вычислений положим $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 0$. Ищем решение в виде бегущей волны, для этого запишем систему (2.1)–(2.7) в подвижной системе координат $\xi = x - ct$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$cu' = auv, \quad (3.1)$$

$$c\chi' = -auv + \beta(\theta)\chi, \quad (3.2)$$

$$Dv'' + cv' = -\frac{b_1}{1+k_1z}\chi + (k_2 + \sigma_1(y))v, \quad (3.3)$$

$$-b_2J(v) + \sigma_2(y)w = 0, \quad (3.4)$$

$$-b_3e^{-k_3J(v)}J(\chi) + \sigma_3z = 0, \quad (3.5)$$

$$-b_4w + \sigma_4\theta J(\chi) = 0, \quad (3.6)$$

$$-b_5w + \sigma_5yw = 0, \quad (3.7)$$

где $U(x, t) = u(\xi)$, $I(x, t) = \chi(\xi)$, $V(x, t) = v(\xi)$, $W(t) = w$, $Z(t) = z$, $T(t) = \theta$, $A(t) = y$,

$$J(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\xi) d\xi, \quad J(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) d\xi,$$

$$\beta(\theta) = \beta_{10} + \beta_{11}\theta, \quad \sigma_1(y) = \sigma_{10} + \sigma_{11}y, \quad \sigma_2(y) = \sigma_{20} + \sigma_{21}y.$$

3.1. Определение полной вирусной нагрузки. Определим полную вирусную нагрузку для концентраций вируса в ткани $J(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) d\xi$ и для концентрации циркулирующего вируса $w \equiv \text{const}$. Будем считать, что скорость волны c известна.

Рассмотрим систему (3.1)–(3.7) на всей вещественной оси с пределами

$$u(-\infty) = u_f, \quad u(+\infty) = u_0, \quad v(\pm\infty) = \chi(\pm\infty) = 0, \quad (3.8)$$

где u_f — неизвестная концентрация неинфицированных клеток на конец инфекции. Из уравнения (3.7) получаем следующее выражение для концентрации антител:

$$y = \frac{b_5}{\sigma_5}. \quad (3.9)$$

На основании уравнения (3.4) можно вывести формулу для концентрации циркулирующего вируса

$$w = \frac{b_2}{\sigma_2(y)} J(v). \quad (3.10)$$

Из уравнения (3.6) с учётом (3.10) находим уравнение для концентрации Т-лимфоцитов

$$\theta = \frac{b_4 w}{\sigma_4 J(\chi)} = \frac{b_2 b_4}{\sigma_2 \sigma_4} \frac{J(v)}{J(\chi)}. \quad (3.11)$$

Для концентрации интерферона, основываясь на уравнении (3.5), вычислим

$$z = \frac{b_3}{\sigma_3} J(\chi) e^{-k_3 J(v)}. \quad (3.12)$$

Разделяя переменные в уравнении (3.1) и интегрируя по всей действительной оси с учётом условий (3.8), получим

$$c \ln \frac{u_0}{u_f} = a J(v).$$

Сложим уравнения (3.1) и (3.2), а также проинтегрируем по всей действительной оси, учитывая, что $\theta = \text{const}$. В результате получим следующее уравнение:

$$c(u_0 - u_f) = \beta(\theta) J(\chi), \quad (3.13)$$

где θ определяется через $J(v)$, $J(\chi)$ и y по формулам (3.9), (3.11). Наконец, проинтегрируем уравнение (3.3) с учётом нулевых граничных условий на v и получим

$$b(J) J(\chi) = (k_2 + \sigma_1(y)) J(v), \quad (3.14)$$

где

$$b(J) = \frac{b_1}{1 + k_1 z} = \frac{b_1}{1 + \varkappa J(\chi) e^{-k_3 J(v)}}, \quad \varkappa = \frac{k_1 b_3}{\sigma_3}. \quad (3.15)$$

В результате мы получили систему следующих нелинейных алгебраических уравнений относительно u_f , $J(v)$ и $J(\chi)$:

$$c \ln \frac{u_0}{u_f} = a J(v), \quad (3.16)$$

$$c(u_0 - u_f) = \left(\beta_{10} + \beta_{11} \frac{b_2 b_4}{\sigma_2 \sigma_4} \frac{J(v)}{J(\chi)} \right) J(\chi), \quad (3.17)$$

$$\frac{b_1}{1 + \varkappa J(\chi) e^{-k_3 J(v)}} J(\chi) = (k_2 + \sigma_1) J(v). \quad (3.18)$$

Из последнего уравнения выразим $J(\chi)$ через $J(v)$:

$$J(\chi) = \frac{(k_2 + \sigma_1) J(v)}{b_1 - \varkappa (k_2 + \sigma_1) J(v) e^{-k_3 J(v)}}. \quad (3.19)$$

Из уравнения (3.16)

$$\ln \mu = -\frac{a}{c} J(v), \quad \mu = e^{-\frac{a}{c} J(v)}, \quad 0 < \mu = \frac{u_f}{u_0} < 1. \quad (3.20)$$

Подставим найденные выражения в уравнение (3.17) и окончательно получим следующее уравнение для вирусной нагрузки:

$$A \left(1 - e^{-\frac{a}{c} J(v)} \right) \left(b_1 - P J(v) e^{-k_3 J(v)} \right) = J(v) \left[1 + Q \left(b_1 - P J(v) e^{-k_3 J(v)} \right) \right], \quad (3.21)$$

$$A = \frac{c u_0}{\beta_{10} (k_2 + \sigma_1)}, \quad P = \frac{k_1 b_3}{\sigma_3} (k_2 + \sigma_1), \quad Q = \frac{\beta_{11} b_2 b_4}{\beta_{10} \sigma_2 \sigma_4 (k_2 + \sigma_1)}. \quad (3.22)$$

3.1.1. *Разрешимость уравнения (3.21).* Для анализа перепишем уравнение (3.21) относительно μ , используя формулы (3.20), и получим следующее уравнение:

$$R(\mu - 1)(1 + B\mu^\gamma \ln \mu) = \ln \mu (C + D\mu^\gamma \ln \mu), \quad (3.23)$$

где

$$R = \frac{au_0b_1}{\beta_{10}(k_2 + \sigma_1)}, \quad B = \frac{ck_1b_3(k_2 + \sigma_1)}{ab_1\sigma_3}, \quad \gamma = \frac{ck_3}{a}, \quad (3.24)$$

$$C = 1 + \frac{\beta_{11}b_1b_2b_4}{\beta_{10}\sigma_2\sigma_4(k_2 + \sigma_1)}, \quad D = \frac{c\beta_{11}k_1b_2b_3b_4}{a\beta_{10}\sigma_2\sigma_3\sigma_4}. \quad (3.25)$$

Для уравнения (3.23) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если $R/C > 1$, то уравнение (3.23) имеет решение μ в интервале $(0, 1)$.*

Доказательство. Уравнение (3.23) можно переписать в виде $f(\mu) = g(\mu)$, где

$$f(\mu) = R(\mu - 1)(1 + B\mu^\gamma \ln \mu), \\ g(\mu) = \ln \mu (C + D\mu^\gamma \ln \mu).$$

При $\mu \rightarrow +0$ $f(\mu) \sim -R$ и $g(\mu) \sim C \ln \mu$, т. е. неизбежно $g(\mu) < f(\mu)$ для достаточно малого $\mu > 0$. Также $f(1) = g(1) = 0$. Найдём углы наклона касательных для этих функций в точке $\mu = 1$:

$$f'(\mu) = R(1 + B\mu^\gamma \ln \mu) + RB\mu^{\gamma-1}(\mu - 1)(\gamma \ln \mu + 1), \quad f'(1) = R, \\ g'(\mu) = \frac{1}{\mu}(C + D\mu^\gamma \ln \mu) + D\mu^{\gamma-1} \ln \mu (\gamma \ln \mu + 1), \quad g'(1) = C.$$

В силу непрерывности обеих функций решение исходного уравнения будет существовать, если $g'(1) < f'(1)$, т. е. при $C < R$ или $\frac{R}{C} > 1$.

Теорема доказана. $\square$

Можно подобрать такие значения параметров, при которых существует решение при $R/C < 1$.

3.1.2. *Частные случаи. Случай глобально циркулирующего интерферона.* Случай, когда $b_2 = 0$, соответствует отсутствию циркулирующего вируса и, согласно кинетике системы (2.1)–(2.7), отсутствию адаптивного иммунного ответа. При этом система сводится к модели из работы [3], описывающей влияние циркулирующего в организме интерферона. В этом случае $Q = 0$ и уравнение (3.21) приводится к виду

$$J(v) = A \left(1 - e^{-\frac{a}{c}J(v)}\right) \left(b_1 - PJ(v)e^{-k_3J(v)}\right), \quad (3.26)$$

где A и P определяются согласно (3.22).

При достаточно большой вирусной нагрузке $J(v)$, которая достигается при $\mu \ll 1$, т. е. при достаточно большом числе репликации вируса, для второй скобки справедлива оценка

$$1 - e^{-\frac{a}{c}J(v)} \approx 1,$$

и уравнение (3.26) совпадает с уравнением (18) из работы [3].

Случай отсутствия влияния интерферона. В модели (2.1)–(2.7) врождённый иммунный ответ представлен динамикой интерферона. Влияние интерферона отсутствует, если $k_1 = 0$ (или $b_3 = 0$). В этом случае $B = 0$, $D = 0$, и уравнение (3.23) приводится к виду

$$\ln \mu = \frac{R}{C}(\mu - 1), \quad (3.27)$$

где R и C определяются согласно (3.24). Это уравнение имеет решение при $R/C > 1$ (модель без иммунного ответа более подробно описана в [2]).

Тогда $J(V)$ определяется из (3.21), где μ является решением (3.27), а для остальных величин получаем выражения:

$$J(\chi) = \frac{(k_2 + \sigma_1(y))J(v)}{b_1}, \quad w = \frac{b_2}{\sigma_2(y)}J(v),$$

$$z = \frac{b_3 J(\chi) e^{-k_3 J(v)}}{\sigma_3}, \quad \theta = \frac{b_4 w}{\sigma_4 J(\chi)}, \quad y = \frac{b_5}{\sigma_5}.$$

Случай отсутствия влияния иммунного ответа. При выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} k_1 = 0 \text{ или } b_3 = 0 \text{ (нет динамики интерферона),} \\ \beta_{11} = 0 \text{ или } b_4 = 0 \text{ (нет динамики ЦТЛ),} \\ \sigma_{11} = 0 \text{ или } b_5 = 0 \text{ (нет динамики антител)} \end{cases} \quad (3.28)$$

в системе уравнений (2.1)–(2.7) отсутствует иммунный ответ, и эта система сводится к модели трёх уравнений, рассмотренной ранее, например, в [2]. В этом случае $\varkappa = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, и уравнение (3.21) сводится к следующему:

$$J(v) = Ab_1 \left(1 - e^{-\frac{a}{c} J(v)}\right),$$

где A определяется из (3.22).

Перепишем это уравнение относительно μ , используя соотношения (3.20), и получим следующее уравнение:

$$\ln \mu = R_v(\mu - 1), \quad R_v = \frac{au_0 b_1}{\beta_{10}(k_2 + \sigma_1)},$$

которое имеет решение $0 < \mu < 1$ только при $R_v > 1$ (см. [2]).

Приближённая формула для вычисления $J(v)$. Ранее, в [2], при достаточно больших числах репликации вируса была получена следующая формула для вирусной нагрузки:

$$J(v) \approx \frac{cu_0}{\beta(\sigma_1 + k_2)} b(J). \quad (3.29)$$

По формулам (3.15) и (3.19) для величины $b(J)$ получаем

$$b(J) = b_1 - \varkappa(k_2 + \sigma_1)J(v)e^{-k_3 J(v)}, \quad (3.30)$$

и уравнение (3.29) для вирусной нагрузки принимает вид

$$J(v) = \frac{cu_0}{\beta(\sigma_1 + k_2)} \left(b_1 - \varkappa(k_2 + \sigma_1)J(v)e^{-k_3 J(v)} \right), \quad (3.31)$$

где σ_1 и β — линейные функции от y и θ соответственно, y — константа, определяемая по формуле (3.9), а величина θ имеет вид

$$\theta = \frac{b_2 b_4}{\sigma_2 \sigma_4 (k_2 + \sigma_1)} \left(b_1 - \varkappa(k_2 + \sigma_1)J(v)e^{-k_3 J(v)} \right). \quad (3.32)$$

3.2. Оценка скорости волны. Аппроксимируем u его значением u_0 при $+\infty$, мы получим линеаризованную систему. Введем замену $\chi = p_1 e^{-\lambda \xi}$ и $v = p_2 e^{-\lambda \xi}$ получим:

$$c\lambda p_1 - au_0 p_2 + \beta(\theta)p_1 = 0,$$

$$D\lambda^2 p_2 - c\lambda p_2 + b(J)p_1 - (\sigma_1(y) + k_2)p_2 = 0.$$

Чтобы найти минимальную скорость волны, мы должны определить минимальное значение c , для которого эта система уравнений имеет положительное решение λ . Выразим из первого уравнения этой системы p_1 и подставим во второе:

$$D\lambda^2 p_2 - c\lambda p_2 + b(J) \frac{au_0}{c\lambda + \beta(\theta)} - (\sigma_1(y) + k_2)p_2 = 0.$$

Разделим полученное уравнение на p_2 и введём замену переменных $\mu = \lambda c$, что позволяет нам получить следующую формулу (более подробно выкладки представлены в статье [2]):

$$c^2 = \min_{\mu > \mu_0} \frac{D\mu^2(\mu + \beta(\theta))}{(\mu + \sigma_1(y) + k_2)(\mu + \beta(\theta)) - au_0 b(J)}. \quad (3.33)$$

Такая функция имеет один минимум при $\mu > \mu_0 > 0$, где $\mu = \mu_0$ — ноль знаменателя. Здесь $\beta(\theta)$ — линейная функция константы θ , которая определяется через $J(v)$ по формулам (3.11) и (3.19) следующим образом:

$$\theta = \frac{b_2 b_4}{\sigma_2} \frac{(b_1 - \varkappa(k_2 + \sigma_1)J(v)e^{-k_3 J(v)})}{(k_2 + \sigma_1)J(v)}, \quad (3.34)$$

и $b(J)$ — тоже константа, зависящая от $J(v)$, согласно формулам (3.15) и (3.19), следующим образом:

$$b(J) = b_1 - \kappa(k_2 + \sigma_1)J(v)e^{-k_3 J(v)}. \quad (3.35)$$

У нас получается прямая зависимость $J(v)$ и c . При численном моделировании мы находим значение скорости волны $c = 0,028$ (рис. 3).

Таким образом, для волнового решения системы (2.1)–(2.7) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Если система (2.1)–(2.7) имеет ограниченное волновое решение, зависящее от комбинации переменных $\xi = x - ct$, то скорость волны удовлетворяет неравенству $c \geq c_0$, где минимальная скорость волны c_0 и полная вирусная нагрузка $\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi) d\xi$ удовлетворяют уравнениям (3.21), (3.33).

В случае отсутствия влияния интерферона, $k_1 = 0$, в уравнении (3.21) нет зависимости от скорости волны, и оно может быть решено независимо.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное решение системы (3.1)–(3.7) проводится на ограниченном интервале $0 \leq x \leq L$ с однородными граничными условиями Неймана для концентрации V

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

и следующими начальными условиями:

$$U(x, 0) = U_0, \quad I(x, 0) = 0, \quad W(0) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad T(0) = 0, \quad A(0) = 0, \quad -\tau_2 < t \leq 0.$$

Начальная концентрация вирусных частиц в ткани представляет собой ступенчатую функцию

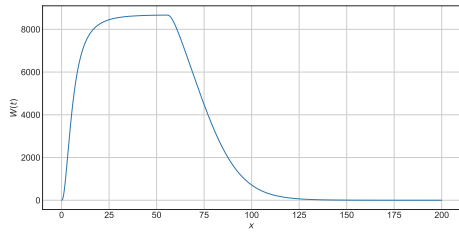
$$V(x, 0) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq x_0, \\ 0, & x_0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Для решения системы использовалась полностью неявная конечно-разностная схема. Проверка точности численного решения проводилась путём сравнения с результатами счёта предыдущих моделей [2, 3], которые могут быть получены из текущей в некоторых предположениях (см. пункт 3.1.2), а также путём сравнения полной вирусной нагрузки и скорости волны в системе с соответствующими аналитическими оценками, даваемыми уравнениями (3.21), (3.23) и (3.33).

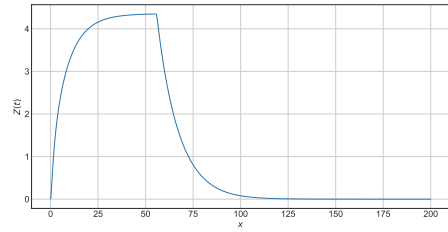
Следует отметить, что уравнения (3.21) и (3.33) представляют собой систему нелинейных трансцендентных алгебраических уравнений относительно значений полной вирусной нагрузки $J(V)$ и скорости волны c . Решение этой системы осуществлялось методом последовательных приближений: берётся начальное приближение для скорости волны $c^{(0)}$ (например, из численного решения, из решений упрощённых систем, или произвольное положительное число), это приближение подставляется в уравнение (3.21), откуда определяется начальное приближение для вирусной нагрузки $J^{(0)}$. Начальное приближение $J^{(0)}$ подставляется в уравнение для скорости волны (3.33), откуда определяется следующее приближение для скорости волны $c^{(1)}$. Это приближение используется для определения следующего приближения для вирусной нагрузки $J^{(1)}$, и т. д. Процесс повторяется, пока разность между очередным значением скорости волны $c^{(n)}$ и предыдущим значением $c^{(n-1)}$ не окажется меньше заданной точности. Вместо уравнения (3.21) можно использовать уравнение (3.26) аналогичным образом.

На рис. 2 представлены результаты численного решения системы (2.1)–(2.7). При выбранных значениях параметров, которые приведены в подписи к рис. 2, число репликации вируса R_v равно 15 000, и концентрации неинфицированных клеток, инфицированных клеток и вирусных частиц распространяются в виде бегущей волны. Концентрации вируса вне ткани W , интерферона Z , цитотоксических Т-лимфоцитов T и антител A являются функциями только времени, и при установлении течения они стремятся к постоянным значениям.

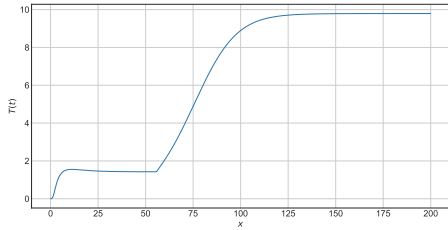
При данных значениях параметров скорость волны в расчёте равна 0,02, полная вирусная нагрузка равна 16 000, что совпадает со значениями, полученными по формулам (3.21), (3.33). Установившиеся концентрации внетканевого вируса, интерферона, цитотоксических Т-лимфоцитов и



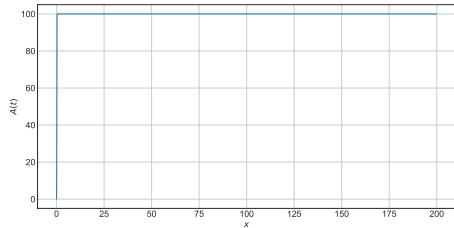
Концентрация циркулирующего вируса
/ Concentration of circulating virus



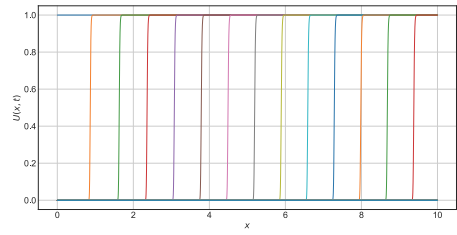
Концентрация интерферона
/ Interferon concentration



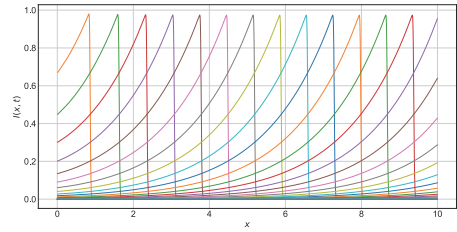
Концентрация цитотоксических
Т-лимфоцитов
/ Concentration of cytotoxic T-lymphocytes



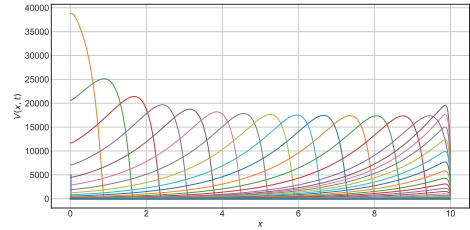
Концентрация антител
/ Antibodies concentration



Концентрация неинфицированных клеток в
разные моменты времени / Concentration of
uninfected cells at different time moments



Концентрация инфицированных клеток в
разные моменты времени / Concentration of
infected cells at different time moments



Концентрация вируса в инфицированной
ткани в разные моменты времени / Virus
concentration in infected tissue at different
time moments

РИС. 2. Численное решение системы (2.1)–(2.7). Слева: распределение концентраций как функции времени. Справа: распределение концентраций в пространстве в разные моменты времени. Значения параметров следующие: $a = 0,01$, $\beta_0 = 0,1 \text{ h}^{-1}$, $\beta_1 = 0,1 \times 10^{-5} \text{ mL}/(\text{h} \cdot \text{cell})$, $D = 10^{-3}$, $b_1 = 80\,000$, $b_2 = 350$, $b_3 = 13,5 \text{ cell}/(\text{h} \cdot \text{cm} \cdot \text{copy})$, $b_4 = 350 \text{ unit}/(\text{h} \cdot \text{cm} \cdot \text{copy})$, $b_5 = 350 \text{ unit}/(\text{h} \cdot \text{cm} \cdot \text{copy})$, $\sigma_{10} = 0,1 \text{ h}^{-1}$, $\sigma_{11} = 0,004 \text{ mL}/(\text{h} \cdot \text{unit})$, $\sigma_2 = 3,5$, $\sigma_3 = 0,1 \text{ cm}^2/(\text{h} \cdot \text{cell})$, $\sigma_4 = 3,5 \text{ cm}^2/(\text{h} \cdot \text{copy})$, $\sigma_5 = 3,5 \text{ cm}^2/(\text{h} \cdot \text{copy})$, $k_1 = 1$, $k_2 = 10^{-5}$, $u_0 = 1$.

FIG. 2. Numerical solution of the system (2.1)–(2.7). Left: distribution of concentrations as a function of time. Right: distribution of concentrations in space at different moments of time. The parameter values are as follows: $a = 0,01$, $\beta_0 = 0,1 \text{ h}^{-1}$, $\beta_1 = 0,1 \times 10^{-5} \text{ mL}/(\text{h} \cdot \text{cell})$, $D = 10^{-3}$, $b_1 = 80\,000$, $b_2 = 350$, $b_3 = 13,5 \text{ cell}/(\text{h} \cdot \text{cm} \cdot \text{copy})$, $b_4 = 350 \text{ unit}/(\text{h} \cdot \text{cm} \cdot \text{copy})$, $b_5 = 350 \text{ unit}/(\text{h} \cdot \text{cm} \cdot \text{copy})$, $\sigma_{10} = 0,1 \text{ h}^{-1}$, $\sigma_{11} = 0,004 \text{ mL}/(\text{h} \cdot \text{unit})$, $\sigma_2 = 3,5$, $\sigma_3 = 0,1 \text{ cm}^2/(\text{h} \cdot \text{cell})$, $\sigma_4 = 3,5 \text{ cm}^2/(\text{h} \cdot \text{copy})$, $\sigma_5 = 3,5 \text{ cm}^2/(\text{h} \cdot \text{copy})$, $k_1 = 1$, $k_2 = 10^{-5}$, $u_0 = 1$.

антител соответственно равны 0,16, 1,4, 0,0014 и 100, что также совпадает со значениями, получаемыми по формулам (3.10), (3.12), (3.11), (3.9).

На рис. 3 приведены графики зависимости скорости волны, вирусной нагрузки в инфицированной ткани и вирусной нагрузки для внетканевого вируса от параметров иммунного ответа. На рис. 3а показаны графики зависимости скорости волны от интерферона, а на рис. 3б — от параметров, отражающих активность адаптивного иммунитета. Представленные результаты иллюстрируют влияние параметров, регулирующих врожденный и адаптивный иммунный ответ, на ключевые характеристики распространения вирусной инфекции. Левый столбец графиков демонстрирует воздействие врожденного иммунного ответа, включая продукцию и деградацию интерферона, который подавляет вирусные частицы: увеличение параметра угнетения вируса интерфероном (k_1) снижает скорость волны и вирусную нагрузку, тогда как ослабление эффекта интерферона (k_3) может нивелировать этот эффект. Скорости производства и деградации интерферона (b_3 , σ_3) также оказывают значительное влияние на баланс вирусной инфекции. Правый столбец графиков охватывает влияние адаптивного иммунитета, включая активность цитотоксических Т-лимфоцитов и антител: увеличение скорости их продукции (b_4 , b_5) снижает вирусную нагрузку и скорость волны, однако усиленная деградация (σ_4 , σ_5) уменьшает их эффективность. Вдобавок, эффективность уничтожения инфицированных клеток антителами (β_1) играет важную роль в снижении вирусной нагрузки, особенно в заражённой ткани, что видно на рис. 3д. Результаты демонстрируют согласованность аналитических расчётов (линии) с численным моделированием (точки) и подчеркивают важность сбалансированной динамики параметров врожденного и адаптивного иммунного ответа для контроля вирусной инфекции.

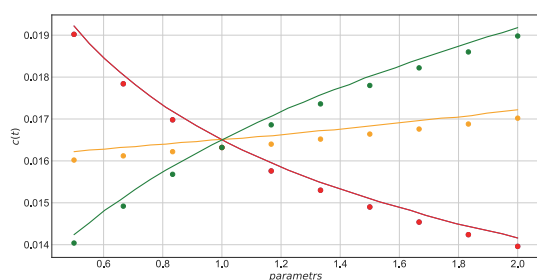
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прогрессирование инфекции в культуре клеток и тканях характеризуется скоростью распространения и вирусной нагрузкой. Первая определяет степень повреждения тканей и коррелирует с тяжестью симптомов, в то время как вторая определяет скорость передачи инфекции между различными индивидуумами. В данной работе мы исследовали влияние иммунного ответа на эти характеристики.

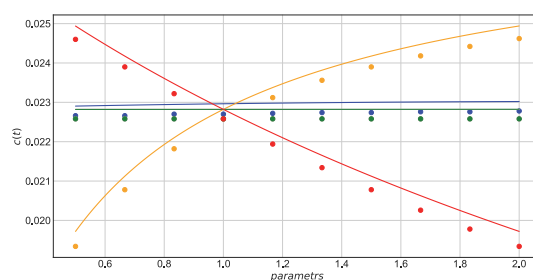
Модель распространения вируса и влияния иммунного ответа позволяет исследовать систему численно и аналитически, оценивая влияние интенсивности адаптивного иммунного ответа на скорость распространения инфекции и общую вирусную нагрузку. Было показано, что более интенсивный иммунный ответ снижает обе характеристики. Следовательно, можно сделать вывод, что интенсивный иммунный ответ уменьшает как инфекционность вируса, так и тяжесть симптомов.

Результаты моделирования показали, что различные аспекты адаптивного иммунного ответа по-разному воздействуют на конечную концентрацию интерферона. Увеличение количества антител коррелирует с увеличением общей концентрации интерферона, тогда как увеличение количества цитотоксических Т-лимфоцитов (ЦТЛ) приводит к её снижению. Учитывая возможные побочные эффекты интерферона, можно заключить, что предложенная модель позволяет выбрать предпочтительный механизм лечения для уменьшения контагиозности и тяжести симптомов без повышения глобального уровня интерферона. В данной модели такая стратегия лечения достигается повышением уровня ЦТЛ.

Конечно, любая математическая модель неизбежно является упрощением реального физиологического процесса. Не является исключением и модель, рассмотренная в настоящей работе. В частности, присутствует ряд ограничений при формулировке модели. Наиболее существенным нам видится отсутствие учёта истощения ресурсов иммунного ответа, что может возникать при продолжительном течении болезни и влиять на возникновение новых очагов инфекции. Также иммунный ответ может быть рассмотрен подробнее, в частности, могут быть учтены влияние макрофагов, воспаления, температуры на распространение инфекции в заражённой ткани и в организме. Эти и другие вопросы мы рассчитываем учесть в последующих работах.



а) скорость волны / wave speed



б) скорость волны / wave speed

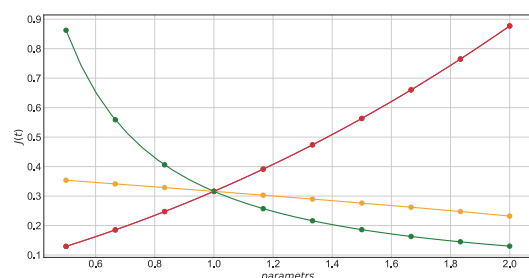
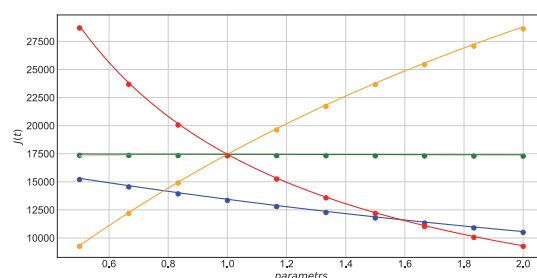
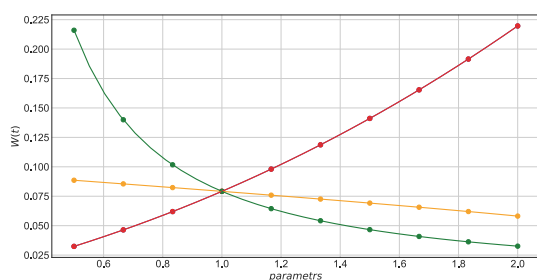
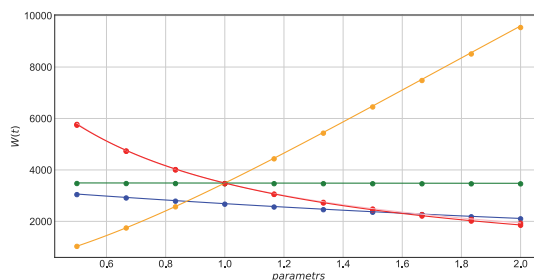
с) вирусная нагрузка в зараженной ткани
/ viral load in infected tissueд) вирусная нагрузка в зараженной ткани
/ viral load in infected tissueе) вирусная нагрузка вне зараженной ткани
/ viral load outside infected tissueф) вирусная нагрузка вне зараженной ткани
/ viral load outside infected tissue

Рис. 3. Левый столбец демонстрирует влияние параметров, связанных с врожденным иммунным ответом, в частности, интерферона. В данной модели использованы параметры: $k_1 = 1$ — угнетение вирусных частиц интерфероном (синий), $k_3 = 1$ — угнетение интерферона вирусными частицами (желтый), $b_3 = 13,5$ и $\sigma_3 = 0,1$ — скорость продукции и гибели интерферона, соответственно (красный и зеленый). Правый столбец демонстрирует влияние параметров, характеризующих адаптивный иммунный ответ, включая активность цитотоксических Т-лимфоцитов и антител. Здесь задаются параметры: $b_4 = 350$ и $\sigma_4 = 3,5$ — скорость продукции и гибели цитотоксических Т-лимфоцитов (синий и желтый), $\beta_1 = 0,1 \times 10^{-5}$ — эффективность уничтожения инфицированных клеток (зеленый), $\sigma_{11} = \sigma_{21} = 0,004$ — подавление вирусных частиц антителами (красный и розовый). Графики (а)-(б) иллюстрируют изменения в скорости волны распространения инфекции, графики (с)-(д) отражают динамику изменения вирусной нагрузки в заражённой ткани, а графики (е)-(ф) — динамику вирусной нагрузки в экстраклеточном пространстве. Линии на графиках представляют аналитические расчёты, тогда как точки — результаты численного моделирования. На горизонтальной оси представлены параметры, приведённые к безразмерному виду посредством нормирования на соответствующие базовые значения.

FIG. 3. The left column shows the influence of parameters related to the innate immune response, in particular interferon. The parameters used in this model are: $k_1 = 1$ — inhibition of viral particles by interferon (blue), $k_3 = 1$ — inhibition of interferon by viral particles (yellow), $b_3 = 13,5$ and $\sigma_3 = 0,1$ — the rate of interferon production and destruction, respectively (red and green). The right column demonstrates the influence of parameters characterizing the adaptive immune response, including the activity of cytotoxic T-lymphocytes and antibodies. Here, the parameters are: $b_4 = 350$ and $\sigma_4 = 3,5$ — the rate of production and destruction of cytotoxic T-lymphocytes (blue and yellow), $\beta_1 = 0,1 \times 10^{-5}$ — the efficiency of infected cell destruction (green), $\sigma_{11} = \sigma_{21} = 0,004$ — suppression of viral particles by antibodies (red and pink). Graphs (a)-(b) illustrate changes in the velocity of the infection wave, graphs (c)-(d) reflect the dynamics of changes in the viral load in the infected tissue, and graphs (e)-(f) — the dynamics of the viral load in the extratissue space. The lines on the graphs represent analytical calculations, while the dots — the results of numerical modeling. The horizontal axis shows the parameters reduced to dimensionless form by normalizing to the corresponding base values.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abdullaev A., Odilov A., Ershler M., Volkov A., Lipina T., Gasanova T., Lebedin Y., Babichenko I., Sudarikov A. Viral load and patterns of SARS-CoV-2 dissemination to the lungs, mediastinal lymph nodes, and spleen of patients with COVID-19 associated lymphopenia// *Viruses*. — 2021. — 13, № 7. — 1410.
2. Ait Mahiout L., Mozokhina A., Tokarev A., Volpert V. Virus replication and competition in a cell culture: Application to the SARS-CoV-2 variants// *Appl. Math. Lett.* — 2022. — 133. — 108217.
3. Ait Mahiout L., Mozokhina A., Tokarev A., Volpert V. The influence of immune response on spreading of viral infection// *Lobachevskii J. Math.* — 2022. — 43, № 10. — C. 2699–2713.
4. Aschman T., Mothes R., Heppner F., Radbruch H. What SARS-CoV-2 does to our brains// *Perspective*. — 2022. — 55, № 7. — C. 1159–1172.
5. Cyster J. G. Visualizing influenza virus capture in the lymph node following vaccination// *Immunol. Cell Biol.* — 2010. — 88. — C. 617–619.
6. Fensterl V., Sen G. Interferons and viral infections// *Biofactors*. — 2009. — 35, № 1. — C. 14–20.
7. Friedrich S. K., Schmitz R., Bergerhausen M., Lang J., Duhan V., Hardt C., Tenbusch M., Prinz M., Asano K., Bhat H., Hamdan T. A., Lang P. A., Lang K. S. Replication of influenza A virus in secondary lymphatic tissue contributes to innate immune activation// *Pathogens*. — 2021. — 10, № 5. — 622.
8. Hamilton-Easton A., Eichelberger M. Virus-specific antigen presentation by different subsets of cells from lung and mediastinal lymph node tissues of influenza virus-infected mice// *J. Virol.* — 1995. — 69, № 10. — C. 6359–6366.
9. Jordan S. Innate and adaptive immune responses to SARS-CoV-2 in humans: relevance to acquired immunity and vaccine responses// *Clinic. Experiment. Immunol.* — 2021. — 204, № 3. — C. 310–320.
10. Katze M., He Y., Gale M. Jr. Viruses and interferon: a fight for supremacy// *Nat. Rev. Immunol.* — 2002. — 2, № 9. — C. 675–687.
11. Marek K., Marciniak-Czochra A. Modelling and analysis of dynamics of viral infection of cells and of interferon resistance// *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — 344, № 2. — C. 821–850.
12. Mauricio L., Marciniak-Czochra A. A reaction-diffusion model for viral infection and immune response// *HAL*. — 2011. — hal-00546034.
13. McNab F., Mayer-Barber K., Sher A., Wack A., O'Garra A. Type I interferons in infectious disease// *Nat. Rev. Immunol.* — 2015. — 15, № 2. — C. 87–103.
14. Mohsen F., Lidsey C., Laurence C., Navin V., Meyer D. Cytotoxic T lymphocytes targeting a conserved SARS-CoV-2 spike epitope are efficient serial killers// *BioTechniques*. — 2022. — 72, № 4. — C. 113–120.
15. Nelemans T., Kikkert M. Viral innate immune evasion and the pathogenesis of emerging RNA virus infections// *Viruses*. — 2019. — 11, № 10. — 961.
16. Sean Q., Weiming Y. Mathematical modeling of interaction between innate and adaptive immune responses in COVID-19 and implications for viral pathogenesis// *J. Med. Virol.* — 2020. — 92, № 2. — C. 1615–1628.
17. Shim M., Kim J., Tenson T., Min Y., Kainov D. Influenza virus infection, interferon response, viral counter-response, and apoptosis// *Viruses*. — 2017. — 9, № 8. — 223.
18. Yin J., McCaskill J. Replication of viruses in a growing plaque: a reaction-diffusion model// *Biophys. J.* — 1992. — 61, № 6. — C. 1540–1549.

А. С. Мозохина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: mozokhina-as@rudn.ru

К. А. Рюмина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: ryumina-ka@rudn.ru

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-654-668

EDN: WUHFUC

Multiscale mathematical model of the spread of respiratory infection considering the immune response

A. S. Mozokhina and K. A. Ryumina

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. This work presents a multiscale mathematical model of the spread of respiratory viral infection in a tissue and in an organism, taking into account the influence of innate and adaptive immune responses based on systems of reaction-diffusion equations with nonlocal terms. The defining characteristics of such models, which have physiological significance, are the viral replication number, wave propagation speed, and total viral load. In this work, these characteristics are estimated and their dependence on immune response parameters is investigated.

Keywords: viral infection, reaction-diffusion equations, spreading speed, viral load, immune response.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The analytical results were obtained by A. S. Mozokhina with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 24-11-00073. The numerical results were carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115).

For citation: A. S. Mozokhina, K. A. Ryumina, “Multiscale mathematical model of the spread of respiratory infection considering the immune response,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 654–668. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-654-668>

REFERENCES

1. A. Abdullaev, A. Odilov, M. Ershler, A. Volkov, T. Lipina, T. Gasanova, Y. Lebedin, I. Babichenko, and A. Sudarikov, “Viral load and patterns of SARS-CoV-2 dissemination to the lungs, mediastinal lymph nodes, and spleen of patients with COVID-19 associated lymphopenia,” *Viruses*, 2021, **13**, No. 7, 1410.
2. L. Ait Mahiout, A. Mozokhina, A. Tokarev, and V. Volpert, “Virus replication and competition in a cell culture: Application to the SARS-CoV-2 variants,” *Appl. Math. Lett.*, 2022, **133**, 108217.
3. L. Ait Mahiout, A. Mozokhina, A. Tokarev, and V. Volpert, “The influence of immune response on spreading of viral infection,” *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 10, 2699–2713.
4. T. Aschman, R. Mothes, F. Heppner, and H. Radbruch, “What SARS-CoV-2 does to our brains,” *Perspective*, 2022, **55**, No. 7, 1159–1172.

5. J. G. Cyster, “Visualizing influenza virus capture in the lymph node following vaccination,” *Immunol. Cell Biol.*, 2010, **88**, 617–619.
6. V. Fensterl and G. Sen, “Interferons and viral infections,” *Biofactors*, 2009, **35**, No. 1, 14–20.
7. S. K. Friedrich, R. Schmitz, M. Bergerhausen, J. Lang, V. Duhan, C. Hardt, M. Tenbusch, M. Prinz, K. Asano, H. Bhat, T. A. Hamdan, P. A. Lang, and K. S. Lang, “Replication of influenza A virus in secondary lymphatic tissue contributes to innate immune activation,” *Pathogens*, 2021, **10**, No. 5, 622.
8. A. Hamilton-Easton and M. Eichelberger, “Virus-specific antigen presentation by different subsets of cells from lung and mediastinal lymph node tissues of influenza virus-infected mice,” *J. Virol.*, 1995, **69**, No. 10, 6359–6366.
9. S. Jordan, “Innate and adaptive immune responses to SARS-CoV-2 in humans: relevance to acquired immunity and vaccine responses,” *Clinic. Experiment. Immunol.*, 2021, **204**, No. 3, 310–320.
10. M. Katze, Y. He, and M. Gale Jr., “Viruses and interferon: a fight for supremacy,” *Nat. Rev. Immunol.*, 2002, **2**, No. 9, 675–687.
11. K. Marek and A. Marciniak-Czochra, “Modelling and analysis of dynamics of viral infection of cells and of interferon resistance,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **344**, No. 2, 821–850.
12. L. Mauricio and A. Marciniak-Czochra, “A reaction-diffusion model for viral infection and immune response,” *HAL*, 2011, hal-00546034.
13. F. McNab, K. Mayer-Barber, A. Sher, A. Wack, and A. O’Garra, “Type I interferons in infectious disease,” *Nat. Rev. Immunol.*, 2015, **15**, No. 2, 87–103.
14. F. Mohsen, C. Lidsey, C. Laurence, V. Navin, and D. Meyer, “Cytotoxic T lymphocytes targeting a conserved SARS-CoV-2 spike epitope are efficient serial killers,” *BioTechniques*, 2022, **72**, No. 4, 113–120.
15. T. Nelemans and M. Kikkert, “Viral innate immune evasion and the pathogenesis of emerging RNA virus infections,” *Viruses*, 2019, **11**, No. 10, 961.
16. Q. Sean and Y. Weiming, “Mathematical modeling of interaction between innate and adaptive immune responses in COVID-19 and implications for viral pathogenesis,” *J. Med. Virol.*, 2020, **92**, No. 2, 1615–1628.
17. M. Shim, J. Kim, T. Tenson, Y. Min, and D. Kainov, “Influenza virus infection, interferon response, viral counter-response, and apoptosis,” *Viruses*, 2017, **9**, No. 8, 223.
18. J. Yin and J. McCaskill, “Replication of viruses in a growing plaque: a reaction-diffusion model,” *Biophys. J.*, 1992, **61**, No. 6, 1540–1549.

A. S. Mozokhina
 RUDN University, Moscow, Russia
 E-mail: mozokhina-as@rudn.ru

K. A. Ryumina
 RUDN University, Moscow, Russia
 E-mail: ryumina-ka@rudn.ru

УДК 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678

EDN: WUYQMW

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М. В. Половинкина

Воронежский государственный университет инженерных технологий Россия, Воронеж, Россия

Аннотация. Приводятся результаты, связанные с решением проблемы о наилучшем восстановлении решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с оператором Бесселя по пространственной переменной по двум приближенно известным температурным профилям.

Ключевые слова: оператор Бесселя, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье—Бесселя, уравнение теплопроводности.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: М. В. Половинкина. О восстановлении решения начально-краевой задачи для сингулярного уравнения теплопроводности // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 669–678. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678>

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди публикаций двух последних десятилетий можно выделить серию работ, связанных с восстановлением функций, их производных, решений начальных, краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), по неполным и, возможно, неточным данным.

Работа [8] посвящена восстановлению функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. В работе [11] рассматривалась проблема восстановления функции по неточно заданному спектру. Следует отметить, что задача суммирования тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье рассматривалась в учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [2] (издание 1967 г). В работе [1] рассматривалось восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Работы [13, 18] посвящены восстановлению функций и степеней оператора Лапласа от них по значениям их преобразования Фурье, заданным на компакте с погрешностью. Восстановление температурных профилей по данным измерений рассматривалось в [10, 12, 22]. Систематизированное изложение теории и методов оптимального восстановления можно найти в монографии [14].

Некоторые из установленных в этих работах результатов перенесены в работах [16, 17, 23–25] на ситуации с участием сингулярного оператора Бесселя и Лапласа—Бесселя [3, 4, 7, 19, 21].

Особенности такого типа, которыми обладают операторы типа Бесселя и Лапласа—Бесселя, возникают в моделях математической физики в таких случаях, когда характеристики сред (например, характеристики диффузии или характеристики теплопроводности) имеют вырожденные

степенные неоднородности. Кроме того, к таким уравнениям приводят ситуации, когда исследуются изотропные диффузионные процессы с осевой или сферической симметрией.

В настоящей работе мы переносим методы и результаты работы [22] на случай сингулярного уравнения теплопроводности с оператором Бесселя.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И j -ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ

Символом $C_{ev}^\infty([0, 1])$ обозначим пространство всех функций из пространства $C^\infty([0, 1])$, удовлетворяющих условию гладкости четного продолжения (четности по И. А. Киприянову)

$$\frac{d^\kappa g}{dx^\kappa}(0) = 0, \quad \kappa = 1, 3, 5, \dots$$

Пусть $L_2^\gamma(0, 1)$ означает замыкание пространства $C_{ev}^\infty([0, 1])$ по норме

$$\|g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 x^\gamma |g(x)|^2 dx}.$$

Здесь и далее $\gamma > 0$.

Пусть $B_{x,\gamma}$ — оператор Бесселя, определенный формулой

$$B_{x,\gamma} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = x^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2.1)$$

Нормированная j -функция Бесселя порядка ν определяется формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{z^\nu} J_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \nu + 1)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера,

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m + \nu + 1)}$$

— функция Бесселя первого рода порядка ν .

Потребность в j -функциях Бесселя возникает при решении задачи Штурма—Лиувилля следующего вида (см. [5, 6])

$$B_{x,2\nu+1} \Phi = -\lambda \Phi, \quad x \in [0, 1], \quad (2.2)$$

$$d\Phi/dx(0+) = 0, \quad \Phi(1-) = 0, \quad (2.3)$$

которая имеет собственные функции $j_\nu(\epsilon_\kappa x)$, соответствующие собственным значениям ϵ_κ^2 , где $\{\epsilon_\kappa\}$, $\kappa = 1, 2, \dots$ — последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $j_\nu(\cdot)$, а значит, и функции $J_\nu(\cdot)$, пронумерованных в порядке возрастания. Функции $j_\nu(\epsilon_\kappa x)$, $\kappa = 1, 2, \dots$ образуют ортогональный базис в $L_2^\gamma(0, 1)$. Этот факт находит применение во многих прикладных задачах.

Объектом нашего исследования в настоящей статье является начально-краевая задача для сингулярного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

где $B = B_{x,\gamma}$ — оператор Бесселя, определяемый формулой (2.1), с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1], \quad (2.5)$$

и краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0+, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$u(1-, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(0, 1)$.

С помощью стандартной процедуры метода Фурье разделения переменных мы приходим к задаче Штурма—Лиувилля (2.2)–(2.3), после чего легко получить представление решения задачи (2.4)–(2.7) в виде

$$u(x, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa} e^{-\epsilon_{\kappa} t} j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x), \quad (2.8)$$

где $\nu = (\gamma - 1)/2$,

$$A_{\kappa} = \frac{\epsilon_{\kappa}^{2\nu}}{2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu+1) J_{\nu+1}^2(\epsilon_{\kappa})} \int_0^1 x^{\gamma} u_0(x) j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x) dx, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

суть коэффициенты разложения

$$u_0(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa} j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x) \quad (2.10)$$

в ряд Фурье—Бесселя (см. [5, 6]) функции $u_0(x)$. От представлений (2.8), (2.9), (2.10) для дальнейшего удобства перейдем к представлениям

$$u(x, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} e^{-\epsilon_{\kappa} t} \Lambda_{\nu, \kappa}(x), \quad a_{\kappa} = \int_0^1 x^{\gamma} u_0(x) \Lambda_{\nu, \kappa}(x) dx, \quad (2.11)$$

$$u_0(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \Lambda_{\nu, \kappa}(x), \quad \Lambda_{\nu, \kappa}(x) = \frac{j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x)}{\|j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)}} = \frac{\epsilon_{\kappa}^{\nu}}{2^{(2\nu-1)/2} \Gamma(\nu+1) J_{\nu+1}(\epsilon_{\kappa})} j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x). \quad (2.12)$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставим следующую задачу. Пусть известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2^{\gamma}(0, 1)$, являющиеся приближенными значениями решения $u(\cdot, t)$ начально-краевой задачи (2.4)–(2.7) в моменты t_1, t_2 , соответственно ($0 \leq t_1 < t_2$), причем

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)} \leq \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, 2$. Требуется каждой такой паре функций поставить в соответствие функцию из $L_2^{\gamma}(0, 1)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в промежутке $(0, 1)$ в фиксированный момент времени $\tau \in (t_1, t_2)$.

Следуя [10, 22], любое отображение $m : L_2^{\gamma}(0, 1) \times L_2^{\gamma}(0, 1) \rightarrow L_2^{\gamma}(0, 1)$ мы называем *методом восстановления* (температуры в $(0, 1)$ в момент τ согласно этой информации). Значение

$$e(\tau, \bar{\delta}, m) = \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)},$$

где $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$,

$$U = \{(u_0(\cdot), \bar{y}(\cdot)) : u_0(\cdot) \in L_2^{\gamma}(0, 1), \bar{y}(\cdot) \in (L_2^{\gamma}(0, 1))^2, \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)} \leq \delta_j, j = 1, 2\},$$

называется *ошибкой* этого метода. Значение

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \inf_{m: (L_2^{\gamma}(0,1))^2 \rightarrow L_2^{\gamma}(0,1)} e(\tau, \bar{\delta}, m)$$

называется *ошибкой оптимального восстановления*. Метод $\hat{m}$, для которого

$$E(\tau, \bar{\delta}) = e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}),$$

называется *оптимальным методом восстановления*.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА И НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

$$\|u(\cdot, t_i)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \quad u_0 \in L_2^\gamma(0, 1), \quad (4.2)$$

где u — решение задачи (2.4)–(2.7). Функция, удовлетворяющая условиям (4.2), называется *допустимой функцией* задачи (4.1)–(4.2).

Лемма 4.1. Пусть S означает верхнюю границу $\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ с условиями (4.2). Тогда

$$E(\tau, \bar{\delta}) \geq S.$$

Доказательство. Пусть $u(\cdot, \tau)$ — допустимая функция задачи (4.1)–(4.2). Тогда $-u(\cdot, \tau)$ — также допустимая функция задачи (4.1)–(4.2). Для всякого метода $m : (L_2^\gamma(0, 1))^2 \rightarrow L_2^\gamma(0, 1)$ имеем:

$$\begin{aligned} 2\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)} &= \|u(\cdot, \tau) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq \\ &\leq \|u(\cdot, \tau) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} + \|m(0)(\cdot) - u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{u(\cdot, \tau) \in L_2^\gamma(0,1), \\ \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \\ j=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq 2 \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)}. \end{aligned}$$

В левой части полученного неравенства мы переходим к верхней границе допустимых функций, а в правой — к нижней границе всех методов. Этот шаг завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 4.2. Пусть

$$\beta_\kappa = e^{-2\epsilon_\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \\ \Delta_\kappa = [\beta_{\kappa+1}^{t_2-t_1}, \beta_\kappa^{t_2-t_1}], \quad \Delta_0 = [\beta_1^{t_2-t_1}, +\infty).$$

Зафиксируем $\iota = \iota(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\delta_2^2/\delta_1^2 \in \Delta_\iota$. Пусть

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} \frac{\beta_{\iota+1}^{\tau-t_2} - \beta_\iota^{\tau-t_2}}{\beta_{\iota+1}^{t_1-t_2} - \beta_\iota^{t_1-t_2}}, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_\iota, \quad \iota \geq 1, \\ \beta_1^{\tau-t_1}, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_2(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} \frac{\beta_\iota^{\tau-t_1} - \beta_{\iota+1}^{\tau-t_1}}{\beta_{\iota+1}^{t_2-t_1} - \beta_\iota^{t_2-t_1}}, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_\iota, \quad \iota \geq 1, \\ 0, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Пусть S означает верхнюю границу $\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ с условиями (4.2). Тогда

$$S \geq \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что существует допустимая функция, норма которой в пространстве $L_2^\gamma(0, 1)$ равна (или больше) правой части неравенства (4.5). Построим такую функцию.

Введем величины $b_{1,\iota}$ и $b_{2,\iota}$ с помощью формул

$$\begin{aligned} b_{1,\iota} &= \frac{\delta_1^2}{\beta_\iota^{t_1}} \cdot \frac{\delta_2^2/\delta_1^2 - \beta_{\iota+1}^{t_2-t_1}}{\beta_\iota^{t_2-t_1} - \beta_{\iota+1}^{t_2-t_1}}, \\ b_{2,\iota} &= \frac{\delta_1^2}{\beta_{\iota+1}^{t_1}} \cdot \frac{\beta_\iota^{t_2-t_1} - \delta_2^2/\delta_1^2}{\beta_\iota^{t_2-t_1} - \beta_{\iota+1}^{t_2-t_1}}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенств

$$b_{1,\iota} \beta_\iota^{t_e} + b_{2,\iota} \beta_{\iota+1}^{t_e} = \delta_e^2, \quad e = 1, 2.$$

Рассмотрим в условии (2.5) задачи (2.4)–(2.7) начальную функцию $\widehat{u}_0(x)$, определенную условиями

$$\widehat{u}_0(x) = \begin{cases} \sqrt{b_{1,\iota}} \Lambda_{\nu,\iota}(x) + \sqrt{b_{2,\iota}} \Lambda_{\nu,\iota+1}(x), & \iota = 1, 2, \dots, \\ \delta_1 \beta_1^{-t_1/2} \Lambda_{\nu,1}(x), & \iota = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Функция (4.6) допустима (это следует отметить, поскольку по условию основной задачи $t_1 \geq 0$). Решение задачи (2.4)–(2.7) с начальной функцией (4.6) имеет вид

$$\widehat{u}(x, t) = \begin{cases} \delta_1 \beta_1^{-t_1/2} e^{-\epsilon_1 t} \Lambda_{\nu,1}(x), & \iota = 0, \\ \sqrt{b_{1,\iota}} e^{-\epsilon_\iota t} \Lambda_{\nu,\iota}(x) + \sqrt{b_{2,\iota}} e^{-\epsilon_{\iota+1} t} \Lambda_{\nu,\iota+1}(x), & \iota = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.7)$$

Для функции (4.7) имеем:

$$\|\widehat{u}(x, t_1)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 = \delta_1^2, \quad \|\widehat{u}(x, t_1)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 = \delta_1^2 \beta^{t_2-t_1} \leq \delta_2^2,$$

а значит, это допустимая функция. При $t = \tau$ непосредственным вычислением получим:

$$\|\widehat{u}(x, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 = \widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2,$$

что и требовалось. $\square$

5. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теперь построим метод оптимального восстановления. Для этого применим схему, предложенную в [12, 14, 15], подправляя ее для наших потребностей.

Пусть

$$y_\varrho(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} y_{\varrho\kappa} \Lambda_{\nu,\kappa}(x), \quad \varrho = 1, 2,$$

$$y_{\varrho\kappa} = \int_0^1 x^\gamma y_\varrho(x) \Lambda_{\nu,\kappa}(x) dx, \quad \varrho = 1, 2, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Будем искать оптимальный метод восстановления в виде

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} y_{1,\kappa} + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} y_{2,\kappa} \right) \Lambda_{\nu,\kappa}(\cdot). \quad (5.1)$$

Пусть

$$z_{j\kappa} = a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_j} - y_{\kappa j}, \quad y_{j\kappa} = a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_j} - z_{\kappa j}, \quad j = 1, 2, \quad \kappa \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Из условия (3.1) вытекает, что

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} z_{j\kappa}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда, согласно равенству Парсеваля [4, 6, 7], с учетом (5.2) получим

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) - u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 &= \int_0^1 (\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(x) - u(x, \tau))^2 x^\gamma dx = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} y_{1,\kappa} + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} y_{2,\kappa} - a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa \tau} \right)^2 = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} (a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_1} - z_{\kappa 1}) + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} (a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_2} - z_{\kappa 2}) - a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa \tau} \right)^2 = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} z_{1,\kappa} + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} z_{2,\kappa} \right)^2. \end{aligned}$$

К общему члену полученной суммы применим неравенство Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned} & \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} z_{1,\kappa} + (1-c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} z_{2,\kappa} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\sqrt{\hat{\lambda}_1}} \sqrt{\hat{\lambda}_1} z_{1,\kappa} + \frac{(1-c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\sqrt{\hat{\lambda}_2}} \sqrt{\hat{\lambda}_2} z_{2,\kappa} \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\frac{c_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-c_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} \right) (\hat{\lambda}_1 z_{1,\kappa}^2 + \hat{\lambda}_2 z_{2,\kappa}^2) \leq \\ & \leq \left(\frac{c_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-c_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} \right) (\hat{\lambda}_1 z_{1,\kappa}^2 + \hat{\lambda}_2 z_{2,\kappa}^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$e^2(\tau, \bar{\lambda}, \hat{m}) \leq \Upsilon \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{\lambda}_1 z_{1,\kappa}^2 + \hat{\lambda}_2 z_{2,\kappa}^2) \leq \Upsilon (\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2),$$

где

$$\Upsilon = \Upsilon(\{c_\kappa\}) = \sup_{\kappa \in \mathbb{N}} \left(\frac{c_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-c_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} \right). \quad (5.3)$$

Положим

$$c_\kappa = \hat{c}_\kappa = \frac{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2}}{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2} + \hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}}, \quad 1 - \hat{c}_\kappa = \frac{\hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}}{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2} + \hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Тогда

$$\frac{\hat{c}_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-\hat{c}_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} = \frac{e^{2\epsilon_\kappa(t_1+t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2} + \hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}} = \frac{1}{\hat{\lambda}_1 e^{-2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} + \hat{\lambda}_2 e^{-2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}. \quad (5.5)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(\zeta) = -1 + \hat{\lambda}_1 e^{-2\zeta(t_1-\tau)} + \hat{\lambda}_2 e^{-2\zeta(t_2-\tau)}.$$

Очевидно, что $g''(\zeta) > 0$, так что $g(\zeta)$ — выпуклая вниз функция. Из равенств

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 \beta_\iota^{t_1} + \hat{\lambda}_2 \beta_\iota^{t_2} &= \beta_\iota^\tau, \\ \hat{\lambda}_1 \beta_{\iota+1}^{t_1} + \hat{\lambda}_2 \beta_{\iota+1}^{t_2} &= \beta_{\iota+1}^\tau \end{aligned}$$

следует, что значения $\zeta_\iota = \epsilon_\iota$ и $\zeta_{\iota+1} = \epsilon_{\iota+1}$ являются нулями функции $g(\zeta)$, а в силу ее выпуклости $g(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \leq \epsilon_\iota$ и $\zeta \geq \epsilon_{\iota+1}$.

Из неравенства $g(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \leq \epsilon_\iota$ и $\zeta \geq \epsilon_{\iota+1}$ следует, что при выборе последовательности $\{c_\kappa\}$ в соответствии с формулами (5.4), с учетом (5.5), из (5.3) мы получим:

$$\Upsilon = \Upsilon(\{\hat{c}_\kappa\}) = \sup_{\kappa \in \mathbb{N}} \frac{1}{\hat{\lambda}_1 e^{-2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} + \hat{\lambda}_2 e^{-2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}} \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$e^2(\tau, \bar{\lambda}, \hat{m}) \leq \hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2 \leq E^2(\tau, \bar{\lambda}).$$

Таким образом, для метода $\hat{m}$ мы получили верхнюю оценку его ошибки, которая совпадает с нижней оценкой ошибки оптимального восстановления. Это означает, что $\hat{m}$ — оптимальный метод.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы, которая является аналогом [22, теорема 1] и основным результатом настоящей статьи.

Теорема 5.1. Для любой пары $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ выполняется равенство

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2}.$$

При этом метод

$$\widehat{m}(y_1, y_2)(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-\epsilon_{\kappa} t} \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{-\epsilon_{\kappa} t_1} y_{1\kappa} + \widehat{\lambda}_2 e^{-\epsilon_{\kappa} t_2} y_{2\kappa}}{\widehat{\lambda}_1 e^{-2\epsilon_{\kappa} t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2\epsilon_{\kappa} t_2}} \Lambda_{\nu, \kappa}(x)$$

является оптимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Мат. заметки. — 2007. — 81, № 6. — С. 803–815. — DOI: 10.4213/mzm3743.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. II. — М.: Физматлит, 1967.
3. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426. — DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
4. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
5. Кузнецов А. В., Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Райхельгауз Л. Б., Санина Е. Л., Шишкина Э. Л. j-Функции Бесселя и их применения в задачах математической физики. — Воронеж: ВГУ, 2015.
6. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
7. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб. — 2002. — 193, № 3. — С. 79–100. — DOI: 10.4213/sm637.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функци. анализ и его прилож. — 2003. — 37, № 3. — С. 51–64. — DOI: 10.4213/faa157.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. — 2009. — 200, № 5. — С. 37–54. — DOI: 10.4213/sm7301.
11. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Мат. заметки. — 2012. — 92, № 1. — С. 59–67. — DOI: 10.4213/mzm9042.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям // Тр. МИАН. — 2021. — 312. — С. 216–223. — DOI: 10.4213/tm4139.
13. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб. — 2012. — 203, № 4. — С. 119–130. — DOI: 10.4213/sm7903.
14. Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления: учебное пособие для вузов. — СПб: Лань, 2022.
15. Осипенко К. Ю. О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2024. — 88, № 1. — С. 98–120. — DOI: 10.4213/im9384.
16. Половинкина М. В. О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. — 2024. — 231. — С. 89–99. — DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-89-99.
17. Половинкина М. В., Половинкин И. П. Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений // Прикл. мат. физ. — 2023. — 55, № 4. — С. 330–338. — DOI: 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338.
18. Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавк. мат. ж. — 2012. — 14, № 4. — С. 63–72.
19. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
20. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products. — Amsterdam: Academic Press, 2007.
21. Muravnik A. B. Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2016. — 216. — С. 345–496. — DOI: 10.1007/s10958-016-2904-0.
22. Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V. Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data // J. Complexity. — 2007. — 23, № 4–6. — С. 653–661. — DOI: 10.1016/j.jco.2007.03.003.
23. Polovinkina M. V. Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image // Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 5. — С. 839–852.

24. *Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data// *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3). — 2023. — 29, № 41. — DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
25. *Sitnik S. M., Fedorov V. E., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* On recovery of the singular differential Laplace—Bessel operator from the Fourier—Bessel transform// *Mathematics*. — 2023. — 11, № 5. — 1103. — DOI: 10.3390/math11051103.

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий Россия, Воронеж, Россия

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

UDC 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678

EDN: WUYQMW

On the recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the singular heat conduction equation

М. В. Polovinkina

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Abstract. We present the results concerning the research of the problem of the best recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the heat equation with the Bessel operator in the spatial variable from two approximately known temperature profiles.

Keywords: Bessel operator, optimal recovery, extremal problem, Fourier—Bessel transform, heat equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: M. V. Polovinkina, “On the recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the singular heat conduction equation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 669–678. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678>

REFERENCES

1. N. D. Vysk and K. Yu. Osipenko, “Optimal’noe vosstanovlenie resheniya volnovogo uravneniya po netochnym nachal’nym dannym” [Optimal recovery of the solution of the wave equation from inaccurate initial data], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **81**, No. 6, 803–815, DOI: 10.4213/mzm3743 (in Russian).
2. V. A. Il’in and E. G. Poznyak, *Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. II* [Fundamentals of Mathematical Analysis. Part II], Fizmatlit, Moscow, 1967 (in Russian).
3. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, “Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy” [The transmutation method and boundary-value problems for singular differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 2, 211–426, DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).

5. A. V. Kuznetsov, L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, L. B. Raykhel'gauz, E. L. Sanina, and E. L. Shishkina, *j-Funktsii Besselya i ikh primeneniya v zadachakh matematicheskoy fiziki* [j-Bessel Functions and Their Applications in Problems of Mathematical Physics], VGU, Voronezh, 2015 (in Russian).
6. B. M. Levitan, "Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya" [Expansion into Fourier series and integrals with Bessel functions], *Usp. Mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
7. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh primeneniye k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nykh uravneniyam s V-potentsial'nyimi yadrami* [B-hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of the Kupriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
8. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal'noe vosstanovlenie funktsiy i ikh proizvodnykh po koeffitsientam Fur'e, zadannym s pogreshnost'yu" [Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 3, 79–100, DOI: 10.4213/sm637 (in Russian).
9. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal'noe vosstanovlenie funktsiy i ikh proizvodnykh po priblizhennoy informatsii o spektre i neravenstva dlya proizvodnykh" [Optimal Recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2003, **37**, No. 3, 51–64, DOI: 10.4213/faa157 (in Russian).
10. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data," *Sb. Math.*, 2009, **200**, No. 5, 665–682, DOI: 10.1016/SM2009v200n05ABEH004014.
11. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Kak nailuchshim obrazom vosstanovit' funktsiyu po netochno zadannomu spektru?" [How best to recover a function from its inaccurately given spectrum?], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **92**, No. 1, 59–67, DOI: 10.4213/mzm9042 (in Russian).
12. G. G. Magaril-II'yaev, K. Yu. Osipenko, and E. O. Sivkova, "Optimal'noe vosstanovlenie temperatury trub po netochnym izmereniyam" [Optimal recovery of pipe temperature from inaccurate measurements], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2021, **312**, 216–223, DOI: 10.4213/tm4139 (in Russian).
13. G. G. Magaril-II'yaev and E. O. Sivkova, "Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data," *Sb. Math.*, 2012, **203**, No. 4, 569–580, DOI: 10.1070/SM2012v203n04ABEH004235.
14. K. Yu. Osipenko, *Vvedenie v teoriyu optimal'nogo vosstanovleniya: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Introduction to Optimal Renewal Theory: A Textbook for Universities], Lan', SPb, 2022 (in Russian).
15. K. Yu. Osipenko, "On the construction of families of optimal recovery methods for linear operators," *Izv. Math.*, 2024, **88**, No. 1, 92–113, DOI: 10.4213/im9384e.
16. M. V. Polovinkina, "O vosstanovlenii resheniya zadachi Koshi dlya singulyarnogo uravneniya teploprovodnosti" [On the recovery of the solution of the Cauchy problem for the singular heat equation], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2024, **231**, 89–99, DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-89-99 (in Russian).
17. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, "Zamechaniya o vosstanovlenii resheniy nachal'no-kraevykh zadach dlya singulyarnykh volnovykh uravneniy" [Notes on the recovery of solutions of initial-boundary value problems for singular wave equations], *Prikl. mat. fiz.* [Appl. Math. Phys.], 2023, **55**, No. 4, 330–338, DOI: 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338 (in Russian).
18. E. O. Sivkova, "Ob optimal'nom vosstanovlenii laplasiana funktsii po ee netochno zadannomu preobrazovaniyu Fur'e" [On the optimal recovery of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2012, **14**, No. 4, 63–72 (in Russian).
19. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [The Transmutation Operators Method for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2019 (in Russian).
20. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, Amsterdam, 2007.
21. A. B. Muravnik, "Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2016, **216**, 345–496, DOI: 10.1007/s10958-016-2904-0.
22. K. Yu. Osipenko and E. V. Wedenskaya, "Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data," *J. Complexity*, 2007, **23**, No. 4–6, 653–661, DOI: 10.1016/j.jco.2007.03.003.
23. M. V. Polovinkina, "Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image," *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 839–852.

24. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data,” *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 2023, **29**, 41, DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
25. S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, M. V. Polovinkina, and I. P. Polovinkin, “On recovery of the singular differential Laplace–Bessel operator from the Fourier–Bessel transform,” *Mathematics*, 2023, **11**, No. 5, 1103, DOI: 10.3390/math11051103.

M. V. Polovinkina

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690

EDN: WWORZS

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В. Е. Федоров, А. Д. Годова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. Исследованы вопросы корректности линейных обратных задач для уравнений в банаховых пространствах с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля и ограниченным оператором при искомой функции. Найден критерий корректности для задачи с постоянным неизвестным параметром, в случае скалярного ядра свертки в интегро-дифференциальном операторе этот критерий сформулирован в виде условий необращения в нуль характеристической функции обратной задачи на спектре ограниченного оператора. Для линейной обратной задачи с переменным неизвестным параметром получены достаточные условия корректности. Абстрактные результаты использованы при исследовании модельной обратной задачи для уравнения в частных производных.

Ключевые слова: обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, оператор типа Римана—Лиувилля, корректность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана грантом РНФ и Правительства Челябинской области (проект 24-21-20015).

Для цитирования: В. Е. Федоров, А. Д. Годова. Линейные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченным оператором // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 679–690. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690>

ВВЕДЕНИЕ

Дробное интегро-дифференциальное исчисление играет заметную роль в современном анализе в силу своей содержательности для теоретических исследований и важности для задач математического моделирования [2, 4, 5, 15]. В последние десятилетия появились работы, в которых рассматриваются не классические дробные производные, а близкие к ним по форме интегро-дифференциальные операторы [16, 21–23], представляющие собой композицию оператора свертки и оператора дифференцирования целочисленного порядка (сначала свертка, а потом дифференцирование — операторы типа Римана—Лиувилля, в обратном порядке — операторы типа Герасимова). Часто при этом такие интегро-дифференциальные операторы также называют дробными дифференциальными операторами, несмотря на отсутствие у них многих свойств дробных производных [8, 9].

В связи с этим естественным шагом представляется переход к исследованию уравнений с интегро-дифференциальными операторами с абстрактным ядром оператора свертки, поскольку полученные для них результаты будут включать в себя в качестве частных случаев результаты для конкретных интегро-дифференциальных операторов, упомянутых выше. Авторами данной работы ранее исследованы вопросы разрешимости задачи Коши для линейного неоднородного уравнения с абстрактным интегро-дифференциальным оператором типа Герасимова и с ограниченным оператором при искомой функции [10], задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля в случаях ограниченного [10] и секториального [6] операторов при искомой функции. В данной работе исследуется корректность линейных обратных задач для уравнений с абстрактным интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля в случаях ограниченного оператора при искомой функции. Наиболее близкими к таким исследованиям можно считать работы, посвященные линейным обратным задачам для уравнений с различными дробными производными [7, 11–14, 17–20].

В первом разделе настоящей работы приведены и доказаны некоторые предварительные сведения о задаче типа Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Во втором разделе исследована линейная обратная задача с постоянным неизвестным параметром в уравнении. Третий раздел посвящен исследованию корректности линейной обратной задачи с переменным неизвестным параметром в рассматриваемом интегро-дифференциальном уравнении в банаховом пространстве. Наконец, в последнем разделе абстрактные результаты проиллюстрированы на примере одной обратной задачи для уравнения в частных производных.

1. ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A , $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — его спектр, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s)ds$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля

$$(D^{m,K} z)(t) := D^m(J^K z)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)z(s)ds,$$

где D^m — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.1. При $K(t) = \frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}I$ интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля является производной Римана—Лиувилля D^α порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

При $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C((0, T]; \mathcal{Z})$ рассмотрим задачу типа Коши

$$(D^{k,K} z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.1)$$

для уравнения

$$(D^{m,K} z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T]. \quad (1.2)$$

Решением задачи (1.1), (1.2) называется такая функция $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z}) \cap C((0, T]; \mathcal{Z})$, что $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1.1) и равенство (1.2).

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$ обозначим преобразование Лапласа через $\hat{h}$. Сформулируем следующее условие.

($\hat{K}$) Пусть при некотором $R_0 > 0$ существует однозначная аналитическая функция $\hat{K} : \Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \pi, |\mu| \geq R_0\} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — преобразование Лапласа для $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

При этом для любого $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует обратный оператор $\hat{K}(\lambda)^{-1}$ и выполняется условие

$$\exists \chi \in (-1, 0) \quad \exists c > 0 \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\hat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geq c|\lambda|^\chi.$$

Замечание 1.2. Из того факта, что $\chi > -1$ в условии $(\hat{K})$, следует наличие особенности в нуле типа $t^{-\chi-1}$ у функции $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$; случай $\chi \geq 0$ невозможен, так как при этом особенность в нуле была бы неинтегрируемой. Интегро-дифференциальные операторы, называемые производной Капуто—Фабрицио [9], Атанганы—Балеану [8], содержат непрерывное в нуле ядро свертки K (экспонента и функция Миттаг-Леффлера, соответственно), не удовлетворяющее условию $(\hat{K})$, и уравнения с такими операторами в рассматриваемый в данной работе класс не входят.

Теорема 1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\hat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.2), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds, \quad (1.3)$$

где

$$Z_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{m-1-k} (\lambda^m \hat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$\gamma = \gamma_R \cup \gamma_{R,+} \cup \gamma_{R,-}$ — положительно ориентированный контур, состоящий из $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\gamma_{R,\pm} := \{re^{\pm i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $R > R_0$ достаточно большое.

Доказательство. Основная часть доказательства может быть найдена в [10]. Здесь докажем лишь единственность решения.

Пусть существует решение y задачи $(D^{0,K}y)(0) = z_0 \in \mathcal{Z}$, $(D^{k,K}y)(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения $(D^{m,K}y)(t) = Ay(t)$. По определению решения $J^K y \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, поэтому $J^K y = J^m Ay + z_0$ или $z_0 = K * y - g_m * Ay$, где

$$g_\beta(t) := \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad (f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

В частности, решением такой задачи является функция $Z_0(t)z_0$, следовательно, $z_0 = (K * Z_0 - g_m * AZ_0)z_0$ или $K * Z_0 - g_m * AZ_0 = I$ — тождественный оператор. Имеем

$$1 * y = 1 * (K * Z_0 - g_m * AZ_0)y = (K * Z_0 - g_m * AZ_0) * y = Z_0 * (K - g_m A) * y = Z_0 * z_0 = 1 * Z_0 z_0.$$

Дифференцированием получаем равенство $y(t) = Z_0(t)z_0$, $t \geq 0$.

Пусть теперь y — произвольное решение задачи $(D^{k,K}y)(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения $(D^{m,K}y)(t) = Ay(t)$, тогда $y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} Z_k(t)z_k$ является решением задачи $(D^{0,K}y)(0) = z_0$,

$$(D^{k,K}y)(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad \text{для этого уравнения. По доказанному } y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} Z_k(t)z_k =$$

$Z_0(t)z_0$, что означает единственность решения задачи $(D^{k,K}y)(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для однородного уравнения $(D^{m,K}y)(t) = Ay(t)$. Отсюда следует единственность решения задачи (1.1) для неоднородного уравнения (1.2). $\square$

Замечание 1.3. В [10] при доказательстве теоремы 1.1 предполагалась непрерывность на $\mathbb{R}_+$ оператор-функции K , однако нетрудно заметить, что доказательство справедливо и для $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Замечание 1.4. В работе [10] при доказательстве теоремы 1.1 были показано, что существует такое $C > 0$, что при всех $t > 0$ $\|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\chi+k}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

При $\beta \in \mathbb{R}$ определим пространство $C_\beta((0, T]; \mathcal{Z}) := \{z \in C((0, T]; \mathcal{Z}) : t^\beta z(t) \text{ ограничена на } (0, T]\}$ с нормой $\|z\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})} := \sup_{t \in (0, T]} \|t^\beta z(t)\|_{\mathcal{Z}}$. Понятно, что при $\beta < 1$

$$C_\beta((0, T]; \mathcal{Z}) \subset C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z}).$$

Лемма 1.1. $C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})$ — банахово пространство.

Доказательство. Пусть последовательность $\{z_n\}$ фундаментальна в $C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})$, тогда для любого $\varepsilon \in (0, T)$ последовательность $\{t^\beta z_n(t)\}$ фундаментальна в $C([\varepsilon, T]; \mathcal{Z})$, а значит, имеет предел $x \in C([\varepsilon, T]; \mathcal{Z})$. Поэтому $x \in C((0, T]; \mathcal{Z})$, при этом функция x ограничена на $(0, T]$ как предел в суп-норме последовательности ограниченных функций. Следовательно, $z(t) := t^{-\beta}x(t) \in C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, T]} \|t^\beta z_n(t) - x(t)\|_{\mathcal{Z}} = 0.$$

□

Следствие 1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\hat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда для решения z задачи (1.1), (1.2) выполняется включение $z \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, при этом

$$\|z\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|f\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \right),$$

где C не зависит от $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, f$.

Доказательство. В силу замечания 1.4 для любого $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_1 \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} s^\chi \|s^{-\chi} f(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_2 t^\chi \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_1 t^{2\chi+m} \|f\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \leq C t^\chi \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|f\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое.

□

2. ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПОСТОЯННЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим задачу

$$(D^{m,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.1)$$

$$(D^{k,K}z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.2)$$

$$\int_0^T t^{-\chi} z(t) d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \quad (2.3)$$

где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $B \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $\mu \in BV([0, T]; \mathbb{C})$, т. е. μ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, T]$. Множитель $t^{-\chi}$ используется в условии переопределения (2.3) для сходимости соответствующего интеграла Римана—Стилтьеса с учетом следствия 1.1. Неизвестными в задаче являются функция z и параметр $u \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — банахово пространство. Такая задача является обратной задачей или задачей идентификации.

Решением задачи (2.1)–(2.3) называется такая пара (z, u) , что $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z}) \cap C((0, T]; \mathcal{Z})$, $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (2.2), (2.3) и равенство (2.1) при соответствующем $u \in \mathcal{U}$.

Задачу (2.1)–(2.3) будем называть *корректной*, если для любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_T \in \mathcal{Z}$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$ она имеет единственное решение (z, u) и при этом

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \right), \quad (2.4)$$

где константа C не зависит от $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_T, g$.

Замечание 2.1. Понятно, что из неравенства (2.4) и следствия 1.1 вытекает, что

$$\begin{aligned} \|z\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} + \|u\|_{\mathcal{U}} &\leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g + Bu\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} \right) + \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} + \|B\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))} \|u\|_{\mathcal{U}} \right) + \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} \right). \end{aligned}$$

Обозначим оператор

$$\Theta := \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)B(s)dsd\mu(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}).$$

Здесь сходимость интегралов понимается по операторной норме.

Теорема 2.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})$, $B \in C_{-\chi}((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $\mu \in BV([0,T];\mathbb{C})$. Тогда задача (2.1)–(2.3) корректна в том и только в том случае, когда оператор Θ непрерывно обратим. В случае корректности решение имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \Theta^{-1} \left(z_T - \int_0^T t^{-\chi} \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k d\mu(t) - \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)dsd\mu(t) \right), \\ z(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)(B(s)u + g(s))ds. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставим решение (1.3) задачи (2.1), (2.2) в соотношение (2.3) и получим равенство

$$\int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)B(s)dsd\mu(t)u = z_T - \int_0^T t^{-\chi} \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k d\mu(t) - \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)dsd\mu(t),$$

из которого следует, что корректность задачи эквивалентна непрерывной обратимости оператора $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})$. Отсюда же следует вид решения, а из него в силу замечания 1.4 — неравенство (2.4). В частности,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)dsd\mu(t) \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq C_1 V_0^T[\mu] \sup_{t \in [0,T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} s^{\chi} \|s^{-\chi} g(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_2 V_0^T[\mu] T^{\chi+m} \|g\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

где $V_0^T[\mu]$ — вариация функции μ на отрезке $[0, T]$. □

Для $b \in C((0, T]; \mathbb{C}) \cap L_1(0, T; \mathbb{C})$ определим функцию

$$\theta(\nu) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{\kappa}(\lambda) - \nu)^{-1} e^{\lambda(t-s)} d\lambda b(s) ds d\mu(t), \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, при этом $K(t) = \kappa(t)I$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, где $\kappa \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C})$; $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $\mathcal{U} = \mathcal{Z}$, $B = b \in C_{-\chi}((0, T]; \mathbb{C})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $\mu \in BV([0, T]; \mathbb{C})$. Тогда задача (2.1)–(2.3) корректна в том и

только в том случае, когда $\theta(\nu) \neq 0$ для всех $\nu \in \sigma(A)$. В случае корректности решение имеет вид

$$u = \theta(A)^{-1} \left(z_T - \int_0^T t^{-\chi} \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k d\mu(t) - \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s) g(s) ds d\mu(t) \right),$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s) (b(s)u + g(s)) ds.$$

Доказательство. Обозначим $B_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\}$. Без ограничения общности можно считать, что в условии $(\widehat{K})$ $R_0 \geq (4c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{\frac{1}{\chi+m}}$, тогда $B_{2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}} \subset B_{cR_0^{\chi+m}/2}$. В силу условия $(\widehat{K})$ при $\lambda \in \gamma$, где γ — контур из теоремы 1.1, и $\nu \in B_{cR_0^{\chi+m}/2}$ имеем

$$|\lambda^{-m} \widehat{\kappa}(\lambda)^{-1} \nu| \leq c^{-1} |\lambda|^{-\chi-m} |\nu| < c^{-1} R_0^{-\chi-m} |\nu| < 1/2.$$

Поэтому функция $(\lambda^m \widehat{\kappa}(\lambda) - \nu)^{-1}$, а значит, и функция $\theta(\nu)$, аналитична в круге $B_{2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}$, содержащем спектр $\sigma(A)$ оператора A . В таком случае определена функция от оператора $\theta(A)$ и по теореме о спектральном отображении для ограниченных операторов [1, теорема 11, с. 609] имеем $\sigma(\theta(A)) = \theta(\sigma(A))$. Поэтому непрерывная обратимость оператора $\theta(A)$, т. е. соотношение $0 \notin \sigma(\theta(A))$ в точности означает, что $\theta(\nu) \neq 0$ для всех $\nu \in \sigma(A)$.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, нетрудно показать, что задача (2.1)–(2.3) корректна в том и только в том случае, когда непрерывно обратим оператор $\theta(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. $\square$

3. ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПЕРЕМЕННЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим еще одну линейную обратную задачу

$$(D^{m,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in (0, T], \quad (3.1)$$

$$(D^{k,K}z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.2)$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t). \quad (3.3)$$

Здесь $\mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$, $\Psi \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$. Неизвестными в задаче являются функции $z \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$ и $u \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$.

Задача (3.1)–(3.3) может иметь, например, смысл поиска функции состояния системы z и такой функции управления u , чтобы z удовлетворяла дополнительному условию (3.3). Такие задачи иногда называют задачами *прогноза–управления* [3].

Решением задачи (3.1)–(3.3) называется такая пара (z, u) , что $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z}) \cap C((0, T]; \mathcal{Z})$, $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (3.2), (3.3) и равенство (3.1) при соответствующем $u \in L_1(0, T; \mathcal{U}) \cap C((0, T]; \mathcal{U})$.

Определим множество $\widehat{\Delta}_T := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, T], s \in [0, t]\}$.

Лемма 3.1. Пусть $\beta \in [0, 1]$, $h \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$, $M \in C(\widehat{\Delta}_T; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$. Тогда уравнение

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) u(s) ds + h(t)$$

имеет единственное решение $u \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$, при этом $\|u\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{U})} \leq C(M) \|h\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{U})}$, где константа $C = C(M)$ не зависит от h .

Доказательство. Рассмотрим оператор $F : C_\beta((0, T]; \mathcal{U}) \rightarrow C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$, действующий как

$$(Fu)(t) := \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) u(s) ds + h(t).$$

Заметим, что при всех $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \left\| t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) u(s) ds \right\|_{\mathcal{U}} &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^{-\beta} \|s^\beta u(s)\|_{\mathcal{U}} ds \leq \\ &\leq C_1 \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \|u\|_{C_\beta((0,T];\mathcal{U})} T^{1-\beta}, \end{aligned}$$

поэтому, действительно, $Fu \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$ для любого $u \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$.

Пусть $T_1 \leq T$, для $u, v \in C_\beta((0, T_1]; \mathcal{U})$ имеем

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{C_\beta((0,T_1];\mathcal{U})} &= \sup_{t \in (0,T_1]} t^\beta \left\| \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) (u(s) - v(s)) ds \right\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_1}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \sup_{t \in (0,T_1]} t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^{-\beta} s^\beta \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{U}} ds \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_1}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} B(1-\beta, 1-\beta) T_1^{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_1];\mathcal{U})} = \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_1];\mathcal{U})}, \end{aligned}$$

если взять

$$T_1 = \left(2 \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_1}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} B(1-\beta, 1-\beta) \right)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Здесь $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка u_0 отображения F в полном метрическом пространстве $C_\beta((0, T_1]; \mathcal{U})$.

Заметим, что существует такое $c > 1$, что $c^\beta(c-1)^{1-\beta} = (1-\beta)B(1-\beta, 1-\beta) > 0$. Действительно, функция $f(c) := c^\beta(c-1)^{1-\beta}$ непрерывна по c при $c > 1$, при этом $f(1) = 0$, $\lim_{c \rightarrow +\infty} f(c) = +\infty$.

Если $T_1 < T$, возьмем $T_2 = cT_1 \in (T_1, T]$ при таком $c > 1$ и рассмотрим оператор F в полном метрическом пространстве $C_{\beta, T_1}((0, T_2]; \mathcal{U}) := \{u \in C_\beta((0, T_2]; \mathcal{U}) : u(t) = u_0(t), t \in [0, T_1]\}$ с метрикой $d(u, v) = \|u - v\|_{C_\beta((0, T_2]; \mathcal{U})}$, тогда

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{C_{\beta, T_1}((0,T_2];\mathcal{U})} &= \sup_{t \in [T_1, T_2]} t^\beta \left\| \int_{T_1}^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) (u(s) - v(s)) ds \right\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \sup_{t \in [T_1, T_2]} t^\beta \int_{T_1}^t (t-s)^{-\beta} s^{-\beta} s^\beta \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{U}} ds \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \sup_{t \in [T_1, T_2]} t^\beta T_1^{-\beta} \frac{(t-T_1)^{1-\beta}}{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\beta \frac{(T_2 - T_1)^{1-\beta}}{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} = \\ &= \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \frac{c^\beta(c-1)^{1-\beta}}{1-\beta} T_1^{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} = \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} \end{aligned}$$

в силу выбора T_1 и c . Поэтому существует единственная неподвижная точка u_0 отображения F в $C_\beta((0, T_2]; \mathcal{U})$.

Если $T_2 < T$, возьмем $T_3 = c^2 T_1$ и повторим рассуждения. Поскольку $c > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n T_1 = \infty$, и за конечное число шагов мы исчерпаем отрезок $[0, T]$. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\hat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$, при почти всех $t \in (0, T)$ $\Phi K(t) = L(t)\Phi$ для некоторого $L \in L_1(0, T; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$, при всех $t \in [0, T]$ существует обратный оператор $(\Phi B(t))^{-1}$, при этом $(\Phi B(t))^{-1} \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $\Psi, D^{m,L}\Psi \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$, $D^{k,L}\Psi(0) = \Phi z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение $(z, u) \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z}) \times C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$, при этом

$$\|z\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|u\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \right),$$

где C не зависит от z_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, g , Ψ .

Доказательство. Подействуем оператором Φ на обе части уравнения (3.1) и получим

$$\begin{aligned} \Phi(D^{m,K}z)(t) &= (D^{m,L}\Phi z)(t) = (D^{m,L}\Psi)(t) = \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t) + \\ &+ \Phi A \left(\sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)B(s)u(s)ds + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)ds \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{\chi} M(t,s)u(s)ds + h(t), \quad (3.4)$$

где $M(t,s) := -(t-s)^{-\chi}(\Phi B(t))^{-1}\Phi A Z_{m-1}(t-s)B(s)$,

$$h(t) := (\Phi B(t))^{-1} \left[(D^{m,L}\Psi)(t) - \Phi A \left(\sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)ds \right) - \Phi g(t) \right].$$

В силу замечания 1.4 имеем $\|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\chi+k}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, в частности, $\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\chi}$, поэтому $Z_0 \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ и $h \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$. Отсюда же следует, что $M \in C(\hat{\Delta}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. По лемме 3.1 получаем существование единственного решения $u \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$ уравнения (3.4), а значит, и обратной задачи (3.1)–(3.3), и выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} &\leq C\|h\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \leq C_1\|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} + C_2\|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \\ &+ C_3 \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_4 \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} s^{\chi} \|s^{-\chi}g(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_5 \left(\|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \right) + C_5 T^{\chi+m} \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|z\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_6 \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi} s^{\chi} \|s^{-\chi}u(s)\|_{\mathcal{U}} ds + \\ &+ C_7 \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi} s^{\chi} \|s^{-\chi}g(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq C_8 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|u\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \right) \leq \\ &\leq C_9 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \right). \end{aligned}$$

□

Замечание 3.1. Ясно, что утверждение теоремы 3.1 означает корректность задачи (3.1)–(3.3).

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

При $\beta \in (0, 1)$ возьмем $K_\beta(t) := t^{\beta-1}E_{1,\beta}(t)$ и определим оператор свертки и интегро-дифференциальный оператор

$$J^\beta h(t) := \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{1,\beta}(t-s) h(s) ds, \quad \beta > 0, \quad D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t), \quad m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N},$$

где используется функция Миттаг-Леффлера

$$E_{1,\beta}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\beta)}.$$

Имеем $K(t) = K_{m-\alpha}(t)I = t^{m-\alpha-1}E_{1,m-\alpha}(t)I$, $\widehat{K}_{m-\alpha}(\lambda) = (\lambda-1)^{-1}\lambda^{1-m+\alpha}$, поэтому выполняется условие $(\widehat{K})$ с константами $R_0 \geq 1$, $\chi = \alpha - m \in (-1, 0)$.

Пусть заданы многочлены

$$P(x) = \sum_{j=0}^n p_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^n q_j x^j$$

с коэффициентами $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $p_n \neq 0$, ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\xi_0 \in \Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^k J_t^{m-\alpha} v(\xi, 0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.1)$$

$$\Delta^l v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.2)$$

$$P(\Delta) D_t^m J_t^{m-\alpha} v(\xi, t) = Q(\Delta) v(\xi, t) + b(\xi, t) w(t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (4.3)$$

$$v(\xi_0, t) = \psi(t), \quad t \in (0, T]. \quad (4.4)$$

Здесь нижний индекс t означает действие интегрального или дифференциального оператора по переменной t , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$, Δ — оператор Лапласа по переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, $b : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : (0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ — заданные функции. Определению подлежат z и w .

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе $\partial\Omega$. Если $P(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то задача (4.1)–(4.4) редуцируется к задаче (3.1)–(3.3), если взять $\mathcal{Z} = \{y \in H^{2n}(\Omega) : \Delta^l y(\xi) = 0, l = 0, 1, \dots, n-1\}$, $A := P(\Delta)^{-1}Q(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, так как степень многочлена P не меньше степени многочлена Q , $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, $B(t) = P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$ — оператор умножения на функцию $P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$, $u(t) = w(t) \in \mathbb{C}$ при $t \in (0, T]$, $z_k = v_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\Phi y = y(\xi_0)$, $\Psi(t) = \psi(t)$.

Если выполнено непрерывное вложение $\mathcal{Z} \subset C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, обозначим оператор следа $J_{\xi_0} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $J_{\xi_0} y := y(\xi_0)$ для $y \in \mathcal{Z}$.

Теорема 4.1. Пусть $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $d < 4n$, $P(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $p_n \neq 0$, $b \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $\xi_0 \in \Omega$, $J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$, $v_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\psi, D^{m,K}\psi \in C_{m-\alpha}([0, T]; \mathbb{C})$, $D^{k,K}\psi(0) = v_k(\xi_0)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (4.1)–(4.4).

Доказательство. Тот факт, что K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$ с константами $R_0 \geq 1$, $\chi = \alpha - m \in (-1, 0)$, отмечен выше, то же касается включения $A := P(\Delta)^{-1}Q(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Имеем также $B(t) = P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}; \mathcal{Z})$, поскольку $b(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ при $t \in [0, T]$, $P(\Delta)^{-1}[L_2(\Omega)] \subset \mathcal{Z}$. Для любого $y \in \mathcal{Z}$ $\Phi y = y(\xi_0)$, $|y(\xi_0)| \leq C\|y\|_{\mathcal{Z}}$ в силу теоремы вложения Соболева, выполнение которой следует из неравенства $d < 4n$. Для любого $y \in \mathcal{Z}$ $\Phi K(t)y = t^{m-\alpha-1}E_{1,m-\alpha}(t)y(\xi_0) = K_{m-\alpha}(t)\Phi y$, поэтому надо взять $L(t) = K(t) = K_{m-\alpha}(t)I$. При любом $u \in \mathbb{C}$ $\Phi B(t)u = J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$, $(\Phi B(t))^{-1}$ — оператор умножения на $1/J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$, непрерывный на $[0, T]$ в силу условий $b \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$, так как при $t_0, t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) - J_{\xi_0}P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t_0)| &\leq C_1\|P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) - P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq C_2\|b(\cdot, t) - b(\cdot, t_0)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Поэтому выполняются все условия теоремы 3.1, которая и влечет требуемое утверждение. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Иностр. лит., 1962.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
3. Прилепко А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз—управление и прогноз—наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифф. уравн. — 2005. — 41, № 11. — С. 1560–1571.
4. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
6. Федоров В. Е., Годова А. Д. Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 1. — С. 166–184.
7. Ashurov R. R., Kadirkulov B. J., Turmetov B. Kh. On the inverse problem of the Bitsadze—Samarskii type for a fractional parabolic equation // Пробл. анализа. — 2023. — 12, № 3. — С. 20–40.
8. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Sci. — 2016. — 20. — С. 763–769.
9. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progr. Fract. Differ. Appl. — 2015. — 1, № 2. — С. 1–13.
10. Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T. Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — № 2. — С. 93–107.
11. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — 20, № 3. — С. 706–721.
12. Fedorov V. E., Kostić M. Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov—Caputo derivative // Differ. Equ. — 2020. — 56, № 12. — С. 1613–1627.
13. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Aivilovich A. S. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann—Liouville derivative in the sectorial case // Math. Methods Appl. Sci. — 2021. — 44, № 15. — С. 11961–11969.
14. Glushak A. V. On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order // Math. Notes. — 2010. — 87, № 5–6. — С. 654–662.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam—Boston—Heidelberg: Elsevier Science Publ., 2006.
16. Kostić M. Abstract Volterra integro-differential equations. — Boca Raton: CRC Press, 2015.
17. Kostin A. B., Piskarev S. I. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2021. — 29, № 2. — С. 267–281.
18. Orlovsky D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann—Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. СВУ. Сер. Мат. и физ. — 2015. — 8, № 1. — С. 55–63.
19. Orlovsky D. G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1205, № 1. — 012042.
20. Orlovsky D., Piskarev S. Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2022. — 30, № 2. — С. 221–237.
21. Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. — 1971. — 19. — С. 7–15.
22. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in Banach spaces // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1980. — 62. — С. 207–219.
23. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. — Basel: Springer, 1993.

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

E-mail: kar@csu.ru

А. Д. Годова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690

EDN: WWORZS

Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator

V. E. Fedorov and A. D. Godova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. In this paper, we study the questions of well-posedness of linear inverse problems for equations in Banach spaces with an integro-differential operator of the Riemann–Liouville type and a bounded operator at the unknown function. A criterion of well-posedness is found for a problem with a constant unknown parameter; in the case of a scalar convolution kernel in an integro-differential operator, this criterion is formulated as conditions for the characteristic function of the inverse problem not to vanish on the spectrum of a bounded operator. Sufficient well-posedness conditions are obtained for a linear inverse problem with a variable unknown parameter. Abstract results are used in studying a model inverse problem for a partial differential equation.

Keywords: inverse problem, integro-differential equation, Riemann–Liouville type operator, well-posedness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Government of the Chelyabinsk Region (project 24-21-20015).

For citation: V. E. Fedorov, A. D. Godova, “Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 679–690. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690>

REFERENCES

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).
2. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primeneniye* [Fractional Calculus and Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
3. A. I. Prilepko, “Metod polugrupp resheniya obratnykh, nelokal’nykh i neklassicheskikh zadach. Prognoz-upravlenie i prognos-nablyudenie evolyutsionnykh uravneniy. I” [Semigroup method for solving inverse, nonlocal and nonclassical problems. Forecast–control and forecast–observation of evolutionary equations. I], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 11, 1560–1571 (in Russian).
4. A. V. Pskhu, *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).
5. V. E. Fedorov and A. D. Godova, “Integro-differentsial’nye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh i analiticheskie razreshayushchie semeystva operatorov” [Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 166–184 (in Russian).
6. R. R. Ashurov, B. J. Kadirkulov, and B. Kh. Turmetov, “On the inverse problem of the Bitsadze–Samarskii type for a fractional parabolic equation,” *Probl. Analiza* [Probl. Anal.], 2023, **12**, No. 3, 20–40.
7. A. Atangana and D. Baleanu, “New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model,” *Thermal Sci.*, 2016, **20**, 763–769.



8. M. Caputo and M. Fabrizio, “A new definition of fractional derivative without singular kernel,” *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2015, **1**, No. 2, 1–13.
9. V. E. Fedorov, A. D. Godova, and B. T. Kien, “Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, No. 2, 93–107.
10. V. E. Fedorov and N. D. Ivanova, “Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, **20**, No. 3, 706–721.
11. V. E. Fedorov and M. Kostić, “Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative,” *Differ. Equ.*, 2020, **56**, No. 12, 1613–1627.
12. V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, and A. S. Avilovich, “A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, **44**, No. 15, 11961–11969.
13. A. V. Glushak, “On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order,” *Math. Notes*, 2010, **87**, No. 5–6, 654–662.
14. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Science Publ., Amsterdam–Boston–Heidelberg, 2006.
15. M. Kostić, *Abstract Volterra integro-differential equations*, CRC Press, Boca Raton, 2015.
16. A. B. Kostin and S. I. Piskarev, “Inverse source problem for the abstract fractional differential equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2021, **29**, No. 2, 267–281.
17. D. G. Orlovsky, “Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.* [J. Siberian Fed. Univ. Ser. Math. Phys.], 2015, **8**, No. 1, 55–63.
18. D. G. Orlovsky, “Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, **1205**, No. 1, 012042.
19. D. Orlovsky and S. Piskarev, “Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2022, **30**, No. 2, 221–237.
20. T. R. Prabhakar, “A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel,” *Yokohama Math. J.*, 1971, **19**, 7–15.
21. G. Da Prato and M. Iannelli, “Linear integro-differential equations in Banach spaces,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1980, **62**, 207–219.
22. J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Springer, Basel, 1993.
23. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Sci. Publ., Philadelphia, 1993.

V. E. Fedorov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: kar@csu.ru

A. D. Godova
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru

УДК 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701

EDN: WZTJPS

ОБ ИЗУЧЕНИИ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ ВИЧ/СПИДА

А. И. Шашкин¹, М. В. Половинкина², И. П. Половинкин^{1,3}

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

³Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»),
Белгород, Россия

Аннотация. Целью работы является исследование достаточных условий асимптотической устойчивости стационарного решения начально-краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих рост и распространение эпидемии ВИЧ/СПИДа. Вышеупомянутая модель учитывает не только факторы, учитываемые классическими моделями, но и включает миграционные процессы.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, начально-краевая задача, стационарное решение, математическое моделирование, модель распространения эпидемии ВИЧ/СПИДа, миграционные процессы.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. И. Шашкин, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин. Об изучении модели распространения эпидемии ВИЧ/СПИДа // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 691–701. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701>

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu k - c\beta \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m + I} \right) SI - c\beta b JS - \mu S + \vartheta_1 \Delta S, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c\beta \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m + I} \right) SI + c\beta b JS - (\mu + k_1)I + \delta J + \vartheta_2 \Delta I, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = k_1 I - (\mu + k_2 + \delta)J + \vartheta_3 \Delta J, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\mu_1 S + \eta_1 \frac{\partial S}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} &= B_1, \\ \left(\mu_2 I + \eta_2 \frac{\partial I}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} &= B_2, \end{aligned}$$

$$\left(\mu_3 J + \eta_3 \frac{\partial J}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} = B_3, \quad t \geq 0; \quad (1.4)$$

$$S|_{t=0} = S_0, \quad I|_{t=0} = I_0, \quad J|_{t=0} = J_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.5)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\vec{\nu}$ — единичный внешний вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω , в краевом условии (1.4) предполагается $\mu_\kappa^2 + \eta_\kappa^2 > 0$, $\mu_\kappa \eta_\kappa \geq 0$, $\kappa = 1, 2, 3$.

Мы пользуемся моделью (1.1)–(1.3) в работе [33], в которую мы добавили условие территориального распространения (диффузии). В связи с этим мы используем обозначения, термины и описания, представленные в [33]. Модель (1.1)–(1.3) является результатом нескольких этапов модификации классической модели распространения эпидемии Кермака–Маккендрика [23] (см. [16, 33, 36, 38]).

Функции и параметры, включенные в систему (1.1)–(1.5), имеют следующий смысл:

$S = S(x_1, x_2, t)$ — количество восприимчивых лиц в данной популяции;

$I = I(x_1, x_2, t)$ — количество бессимптомных носителей инфекции;

$J = J(x_1, x_2, t)$ — численность симптоматической группы;

k — общая численность населения;

μ — уровень смертности населения;

c — частота контактов;

β — вероятность передачи заболевания при контакте с инфекционным заболеванием в бессимптомной стадии;

b — вероятность передачи заболевания при контакте с инфекционным заболеванием в симптоматической стадии;

k_1 — скорость перехода от бессимптомной стадии к симптоматической;

k_2 — скорость перехода от симптоматического состояния к СПИДу;

δ — скорость лечения от симптоматической стадии до бессимптомной;

d — уровень смертности от СПИДа;

$m > 0$ — константа полунасыщенности, отражающая влияние освещения в средствах массовой информации на контактную передачу;

β_1 — частота контактов до оповещения СМИ с $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$.

Член $\beta_2 I/(m + I)$ оценивает эффект снижения частоты контактов при информировании инфицированных лиц через средства массовой информации. Функция $I/(m + I)$ учитывает насыщенность заболевания или психологические эффекты [17, 33]. Автор работы [33] говорит, что основная причина, по которой мы включаем влияние СМИ на этапе I , заключается в том, что оно распространяется на инфицированных лиц без симптомов. Следовательно, СМИ должны предупреждать этих людей о возможности заражения и повышать их осведомленность.

Вирус иммунодефицита человека (ВИЧ) — это инфекционное хроническое заболевание, передающееся контактным путем, медленно прогрессирующее и характеризующееся поражением иммунной системы с развитием синдрома приобретенного иммунодефицита (СПИД). Число инфицированных людей в большинстве стран растет с каждым годом. Оценки распространенности ВИЧ во всем мире были даны Всемирной организацией здравоохранения (ВОЗ) и Программой Организации Объединенных Наций по ВИЧ/СПИДу (UNAIDS) с конца 1980-х годов [39, 40]. Первые больные СПИДом были зарегистрированы в 1981 году, и с тех пор это стало одной из самых разрушительных болезней, с которыми когда-либо сталкивалось человечество. По данным UNAIDS, число людей, умерших от заболеваний, связанных со СПИДом, равно 36 миллионам.

Хотя факторы, ответственные за распространение ВИЧ, признаны, нехватка медицинских услуг и нежелание населения принимать профилактические меры очень затрудняют борьбу с этим заболеванием. Еще одна серьезная проблема заключается в том, что во многих странах люди даже не подозревают, что у них ВИЧ [28].

Уже долгое время математическое моделирование применяется для изучения распространения многих серьезных заболеваний: ВИЧ/СПИД, туберкулез, малярия и многие другие заболевания. Математические модели могут дать глубокое понимание реакции пациентов на возбудителей инфекционных заболеваний, а также могут предвидеть динамику распространенности инфекции среди населения. Таким образом, изучение динамических характеристик, представленных этими

моделями, может сыграть существенную роль в понимании инфекционных заболеваний. В связи с этим было сформулировано и исследовано множество математических моделей для понимания длительного динамического поведения ВИЧ, а также для прогнозирования заболеваемости ВИЧ/СПИДом [13–16, 21, 22, 24–27, 29, 30, 34, 35, 37].

Нашим вкладом в рассматриваемую модификацию модели является добавление «диффузионных» членов, полученных действием оператора $\vartheta_\kappa \Delta$ к функциям S, I, J , $\kappa = 1, 2, 3$, чтобы принять во внимание миграционные процессы, которые, как мы считаем, подчиняются закону Фурье.

Аналогичные модификации моделей приведены в работах, посвященных математическим моделям, описывающим не только рост, но и распространение различных видов популяций. В частности, проблемы устойчивости экосистем рассматриваются в книге [11]. Модель роста и распространения опухолевых клеток описана в статье [1].

В этой статье мы исследуем диффузионную модель, а именно достаточные условия, при которых устойчивость по Ляпунову ее стационарного решения влечет за собой его асимптотическую устойчивость («устойчивость относительно малых отклонений» — на языке теории систем). В книге [11] показано, что добавление диффузионных членов может изменить стабильность стационарного решения как в лучшую, так и в худшую сторону.

Пусть H — диаметр области Ω . Далее положим

$$A_{11} = -c\beta \left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{m+I} \right) I - c\beta bJ - \mu - \frac{\vartheta_1}{H^2}, \quad (1.6)$$

$$A_{22} = c\beta\beta_1 S - \frac{c\beta\beta_2 mS}{(m+I)^2} - \mu - k_1 - \frac{\vartheta_2}{H^2}, \quad (1.7)$$

$$A_{33} = -\mu - k_2 - \delta - \frac{\vartheta_3}{H^2}, \quad (1.8)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2} \left(-c\beta\beta_1 S + \frac{c\beta\beta_2 mS}{(m+I)^2} + c\beta\beta_1 I - \frac{c\beta\beta_2 I}{m+I} + c\beta bJ \right), \quad (1.9)$$

$$A_{23} = A_{32} = \frac{1}{2}(c\beta bS + \delta + k_1), \quad (1.10)$$

$$A_{13} = A_{31} = -\frac{1}{2}c\beta bS. \quad (1.11)$$

Предложение. Пусть $w(x) = (w_1(x_1, x_2), w_2(x_1, x_2), w_3(x_1, x_2))$ — регулярное стационарное решение системы уравнений (1.1)–(1.3), удовлетворяющее краевым условиям (1.4). Если при $S = w_1, I = w_2, J = w_3$ квадратичная форма

$$Q(w_1, w_2, w_3; z_1, z_2, z_3) = \sum_{\kappa=1}^3 \sum_{\iota=1}^3 A_{\kappa\iota} z_\kappa z_\iota \quad (1.12)$$

отрицательно определена, то стационарное решение w асимптотически устойчиво при малых отклонениях (т. е. из устойчивости по Ляпунову вытекает асимптотическая устойчивость).

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Методы исследования, использованные для доказательства основного результата в настоящей работе, были использованы ранее в работах [6, 8–10, 18, 20, 31]. В [32] методика исследования скорректирована в связи с тем, что уравнение содержит оператор Бесселя (см. [2, 3, 5, 12] в связи с этим).

Рассмотрим начально-краевую задачу (см. также [8, 9])

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial\Omega} = B_s(x), \quad (2.2)$$

$$u_s(x, 0) = u_s^0(x), \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где Ω — область, ограниченная кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\nu = \vec{\nu}$ — единичный внешний вектор нормали к $\partial\Omega$, $u = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$, $\vartheta_s \geq 0$, $B_s(x) \in C(\partial\Omega)$, $u_s^0(x) \in C(\bar{\Omega})$, $s =$

$1, \dots, m$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, заданный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Безусловно, мы должны требовать выполнения условий согласования исходных и граничных данных. Однако в рамках настоящей статьи мы отходим от этого вопроса. Будем считать, что все условия существования классических (регулярных) решений рассматриваемой задачи выполнены, и, кроме того, все исходные функции обладают необходимыми свойствами, позволяющими нам выполнять все операции, которые мы выполняем ниже.

Если

$$\vartheta_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

мы получаем модель с сосредоточенными параметрами без диффузионных членов. В этом случае переменные $x_1, \dots, x_n$ включены в уравнения (2.1) как параметры и производные по этим переменным в уравнениях (2.1) не содержатся. Если

$$\sum_{s=1}^m \vartheta_s^2 > 0, \quad (2.5)$$

то мы получаем систему с распределенными параметрами.

Пусть $w = (w_1(x), \dots, w_m(x))$ — стационарное решение задачи (2.1)–(2.3), т. е. решение задачи

$$\vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$\left(\mu_s w_s + \eta_s \frac{\partial w_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial\Omega} = B_s(x), \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Пусть функции $F_s(u)$, $s = 1, \dots, m$, дифференцируемы в точке w . Тогда при достаточно малых отклонениях $z_s = z_s(x_1, \dots, x_n, t) = u_s - w_s$, $s = 1, \dots, m$, мы имеем

$$F_s(u) = F_s(w + z) = F_s(w) + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_k, \quad (2.8)$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(w)}{\partial z_k}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \epsilon_{sk}(z) = 0, \quad s, k = 1, \dots, m.$$

Подставляя представление $u_s = w_s + z_s$ в уравнение (2.1) и учитывая (2.8), мы получаем:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) + \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_k, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

Учитывая, что w является стационарным решением, мы получаем из (2.9):

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_k, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Умножим каждое s -е уравнение системы (2.1) на z_s и проинтегрируем полученное равенство по области Ω . Принимая во внимание (2.8), мы получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = \vartheta_s \int_{\Omega} z_s \Delta z_s dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} z_s z_k dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_s z_k dx, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Мы можем отбросить третье слагаемое в правой части равенства (2.11), поскольку оно не влияет на знак результирующей суммы, когда отклонения z невелики. Далее применим формулу Грина (см. [19]) к первому члену в правой части (2.11). В результате мы получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx + \vartheta_s \int_{\partial\Omega} z_s \frac{\partial z_s}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} z_s z_k dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $\partial\Omega$, т. е. второй член в правой части (2.12) является криволинейным интегралом первого рода по $\partial\Omega$ (когда $n = 2$), или поверхностным интегралом первого

рода по $\partial\Omega$ (когда $n \geq 3$), или суммой значений на концах интервала Ω (когда $n = 1$). Когда $\mu_s = 0$ или $\eta_s = 0$, подынтегральное выражение в интеграле по $\partial\Omega$ равно нулю из-за граничного условия (2.2). Из того же граничного условия, когда $\mu_s \eta_s > 0$, мы получаем:

$$\left. \frac{\partial z_s}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = - \frac{\mu_s}{\eta_s} z_s \Big|_{\partial\Omega}.$$

Следовательно, равенство (2.12) может быть переписано как

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \sigma_s z_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} z_s z_k dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.13)$$

где

$$\sigma_s = \frac{\mu_s}{\eta_s},$$

когда $\mu_s \eta_s > 0$, или $\sigma_s = 0$, когда $\mu_s \eta_s = 0$. Суммируя (2.13) по s , мы получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx = \sum_{s=1}^m \left(-\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \sigma_s z_s^2 d\Gamma \right) + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_s z_k dx, \quad (2.14)$$

где

$$\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2.$$

Знак левой части (2.14) рассматривается как показатель устойчивости тривиального решения. Следовательно, важно найти соотношение членов в правой части, приводящее к отрицательности этого выражения. В круглых скобках с правой стороны как первый член, так и второй член не больше нуля. Далее нам нужно принять во внимание знак последнего члена в правой части. Если квадратичная форма

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx \quad (2.15)$$

отрицательно определена, то левая часть (2.14) будет отрицательна, и стационарное решение будет асимптотически устойчивым.

В случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), т. е. при выполнении условий (2.4), отрицательность квадратичной формы (2.15) также является необходимым условием для того, чтобы тривиальное решение было устойчивым.

Рассмотрим диффузионную модель с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения. Для этой цели мы используем неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса (см. [4, 7])

$$\int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx \geq \frac{1}{H^2} \int_{\Omega} z_s^2 dx,$$

где H — диаметр области Ω . Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx \leq - \sum_{s=1}^m \frac{\vartheta_s}{H^2} \int_{\Omega} z_s^2 dx - \sum_{s=1}^m \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} z_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx. \quad (2.16)$$

Окончательно мы можем сказать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m A_{sk} z_k z_s, \quad (2.17)$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks} \vartheta_s / H^2. \quad (2.18)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Теперь, чтобы доказать основной результат, мы положим $m = 3$, $n = 2$ в системе (2.1):

$$u_1 = S(x_1, x_2, t), \quad u_2 = I(x_1, x_2, t), \quad u_3 = J(x_1, x_2, t), \quad (3.1)$$

$$F_1 = F_1(S, I, J) = \mu\rho - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) SI - c\beta bJS - \mu S, \quad (3.2)$$

$$F_2 = F_2(S, I, J) = \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) SI + c\beta bJS - (\mu + k_1)I, \quad (3.3)$$

$$F_3 = F_3(S, I, J) = k_1 I - (\mu + k_2 + \delta)J. \quad (3.4)$$

Частные производные функций F_s имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial S} &= \left(\frac{\beta_2 I}{m+I} - \beta_1\right) I - c\beta bJ - \mu, \\ \frac{\partial F_1}{\partial I} &= c\beta \left(\frac{\beta_2 I}{m+I} - \beta_1\right) S - \frac{c\beta\beta_2 SI}{(m+I)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial J} &= -c\beta bS; \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} &= \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) I + c\beta bJ, \\ \frac{\partial F_2}{\partial I} &= c\beta\beta_1 S - \frac{c\beta\beta_2 Sm}{(m+I)^2} - \mu - k_1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial J} &= c\beta bS + \delta; \\ \frac{\partial F_3}{\partial S} &= 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial I} = k_1, \quad \frac{\partial F_3}{\partial J} = -(\mu + k_2 + \delta). \end{aligned}$$

Подставляя частные производные в (2.18), мы получаем представления (1.6)–(1.11) для коэффициентов A_{sk} , что завершает доказательство.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Заметим, что если диаметр домена достаточно мал и $w_\kappa = \text{const} \geq 0$, тогда квадратичная форма (1.12) определена отрицательно, поэтому постоянное стационарное решение, очевидно, устойчиво в небольшой области. Следует также отметить, что любое стационарное (постоянное) решение системы (1.1)–(1.3) без учета миграций (т. е. когда $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$, и мы имеем дело с системой ОДУ) является стационарным решением этой системы (УЧП) с учетом миграций, (т. е. когда $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$), конечно, при соответствующих граничных условиях. В то же время может оказаться, что это постоянное решение не является асимптотически устойчивым в модели без учета миграции, но асимптотически устойчиво в небольшой области, если учитывать процессы миграции. Это можно продемонстрировать на простом примере. Постоянная точка (стационарное состояние) $(k, 0, 0)$ является решением системы (1.1)–(1.3) для любого набора коэффициентов диффузии. В случае $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$ это решение асимптотически устойчиво при

$$\mu < k_1 - \frac{(k_1 + \delta)^2}{4(k_2 + \mu)}$$

и только при этом условии. Если $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$, то решение $(k, 0, 0)$ с достаточно малым значением H будет асимптотически устойчивым без этого требования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жукова И. В., Колтак Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Прогр. упр. — 2014. — № 3. — С. 5–18.
2. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.

4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. *Ляхов Л. Н.* *В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами.* — Липецк: ЛСПУ, 2007.
6. *Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// *Обозр. прикл. и пром. мат.* — 2002. — 9, № 1. — С. 226–227.
7. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
8. *Половинкина М. В., Половинкин И. П.* Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами// *Прикл. мат. физ.* — 2020. — 52, № 4. — С. 255–261. — DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261.
9. *Половинкина М. В., Половинкин И. П.* Об устойчивости стационарных состояний в диффузионных моделях// *Тавр. вестн. информ. и мат.* — 2021. — 2. — С. 88–101.
10. *Половинкина М. В., Половинкин И. П., Рабеев С. А.* К вопросу об устойчивости стационарного решения в миграционных моделях// В сб.: «Современная математика и ее приложения». — Грозный: Алеф, 2021. — С. 56–62.
11. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
12. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
13. *Anderson R. M., Medly G. F., May R. M., Johnson A. M.* A preliminary study of the transmission dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the causative agent of AIDS, IMA// *J. Math. Appl. Med. Biol.* — 1986. — 3. — С. 229–263.
14. *Bachar M., Dorfmayr A.* HIV treatment models with time delay// *C. R. Biol.* — 2004. — 327. — С. 983–994.
15. *Blower S.* Calculating the consequences: HAART and risky sex// *AIDS.* — 2001. — 15. — С. 1309–1310.
16. *Cai L., Li X., Ghoshc M., Guod B.* Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment// *J. Comput. Appl. Math.* — 2009. — 229, № 1. — С. 313–323. — DOI: 10.1016/j.cam.2008.10.067.
17. *Capasso V., Serio G.* A generalization of the Kermack—McKendrick deterministic epidemic model// *Math. Biosci.* — 1978. — 42. — С. 43–62. — DOI: 10.1016/0025-5564(78)90006-8.
18. *Debbouche A., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P., Valentim C. A. Jr, David S. A.* On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes// *Eur. Phys. J. Plus.* — 2021. — 136, № 1. — С. 1–18. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-01070-8.
19. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1983.
20. *Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V., Rabeeakh S. A.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — 1203. — 012041.
21. *Hethcote H. W., Van Ark J. W.* Modelling HIV transmission and AIDS in the United States. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1992.
22. *Hsieh Y. H., Chen C. H.* Modelling the social dynamics of a sex industry: Its implications for spread of HIV/AIDS// *Bull. Math. Biol.* — 2004. — 66. — С. 143–166.
23. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics// *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.* — 1927. — 115, № 772. — С. 700–721.
24. *Leenheer P. D., Smith H. L.* Virus dynamics: A global analysis// *SIAM J. Appl. Math.* — 2003. — 63. — С. 1313–1327.
25. *Mastahun M., Abdurahman X.* Optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with infective immigration and behavioral change// *Appl. Math.* — 2017. — 8, № 1. — С. 87–109.
26. *McCluskey C.* A model of HIV/AIDS with staged progression and amelioration// *Math. Biosci.* — 2003. — 181. — С. 1–16.
27. *Nikolaos I. S., Dietz K., Schenzle D.* Analysis of a model for the pathogenesis of AIDS// *Math. Biosci.* — 1997. — 145. — С. 27–46.
28. *Okosun K. O., Makinde O. D., Takaidza I.* Impact of optimal control on the treatment of HIV/AIDS and screening of unaware infectives// *Appl. Math. Model.* — 2013. — 37. — С. 3802–3820.
29. *Perelson A. S., Nelson P. W.* Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo// *SIAM Rev.* — 1999. — 41, № 1. — С. 3–44.
30. *Pinto C. M. A., Carvalho A. R. M.* The impact of pre-exposure prophylaxis (PrEP) and screening on the dynamics of HIV// *J. Comput. Appl. Math.* — 2018. — 339. — С. 231–244.
31. *Polovinkina M. V.* On the effect of transition from a model with concentrated parameters to a model with distributed parameters// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1902. — 012041. — DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012041.

32. *Polovinkina M. V., Debbouche A., Polovinkin I. P., David S. A.* Stability of stationary solutions for the glioma growth equations with radial or axial symmetries// *Math. Methods Appl. Sci.* — 2021. — 44, № 15. — С. 12021–12034. — DOI: 10.1002/mma.7194.
33. *Salman S. M.* Memory and media coverage effect on an HIV/AIDS epidemic model with treatment// *J. Comput. Appl. Math.* — 2021. — 385. — 113203. — DOI: 10.1016/j.cam.2020.113203.
34. *Samanta S., Chaattopadhyay J.* Effect of awareness program in disease outbreak — a slow-fast dynamics// *Appl. Math. Comput.* — 2014. — 237. — С. 98–109.
35. *Samanta S., Rana S., Sharma A., Misra A. K., Chaattopadhyay J.* Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: a mathematical model// *Appl. Math. Comput.* — 2013. — 219, № 12. — С. 6965–6977.
36. *Tchuenche J. M., Dube N., Bhunu C. P., Smith R. J., Bauch C. T.* The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza// *BMC Public Health.* — 2011. — 11, № 1. — S5. — DOI: 10.1186/1471-2458-11-S1-S5.
37. *Wang K., Wang W., Liu X.* Viral infection model with periodic lytic immune response// *Chaos Solitons Fractals.* — 2006. — 28, № 1. — С. 90–99.
38. *Zhao H., Zhao M.* Global Hopf bifurcation analysis of an susceptible-infective-removed epidemic model incorporating media coverage with time delay// *J. Bio. Dyn.* — 2017. — 11, № 1. — С. 8–24. — DOI: 10.1080/17513758.2016.1229050.
39. AIDS Epidemic Update 2009// UNAIDS [электронный ресурс]. — Режим доступа: https://unaids.org/en/resources/documents/2009/20091124_jc1700_epi_update_2009_en.pdf (дата обращения: 12.12.2024).
40. Uganda: epidemiological fact sheets on HIV/AIDS and sexually transmitted infections// UNAIDS [электронный ресурс]. — Режим доступа: https://data.unaids.org/publications/fact-sheets01/uganda_en.pdf (дата обращения: 12.12.2024).

Шашкин Александр Иванович

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия

E-mail: polovinkin@yandex.ru

UDC 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701

EDN: WZTJPS

On studying the spread model of the HIV/AIDS epidemic

A. I. Shashkin¹, M. V. Polovinkina², and I. P. Polovinkin^{1,3}

¹*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

²*Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia*

³*Belgorod State National Research University (BelGU), Belgorod, Russia*

Abstract. The aim of this work is to study sufficient conditions for the asymptotic stability of the stationary solution of the initial-boundary value problem for a system of nonlinear partial differential equations describing the growth and spread of the HIV/AIDS epidemic. The above-mentioned model takes into account not only the factors taken into account by classical models, but also includes migration processes.

Keywords: system of nonlinear partial differential equations, initial-boundary value problem, stationary solution, mathematical modeling, spread model of the HIV/AIDS epidemic, migration processes.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. I. Shashkin, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, “On studying the spread model of the HIV/AIDS epidemic,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 691–701. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701>

REFERENCES

1. I. V. Zhukova and E. P. Kolpak, “Matematicheskie modeli zlokachestvennoy opukholi” [Mathematical models of malignant tumour], *Vestn. S.-Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. mat. Inform. Prots. upr.* [Bull. S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Appl. Math. Inf. Control], 2014, No. 3, 5–18 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, “Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy” [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 2, 211–426 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
4. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
5. L. N. Lyakhov, *B-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nykh uravneniyam s B-potentsial'nyimi yadrami* [B-hypersingular integrals and their applications to the description of Kipriyanov functional classes and to integral equations with B-potential kernels], LSPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
6. V. Z. Meshkov, I. P. Polovinkin, and M. E. Semenov, “Ob ustoychivosti statsionarnogo resheniya uravneniya Khotellinga” [On the stability of the stationary solution of the Hotelling equation], *Obozr. prikl. i prom. mat.* [Surv. Appl. Industr. Math.], 2002, **9**, No. 1, 226–227 (in Russian).
7. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).



8. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Ob izmenenii kharaktera ustoychivosti trivial’nogo resheniya pri perekhode ot modeli s sosredotochennymi parametrami k modeli s raspredelennymi parametrami” [About change in the stability character of the trivial solution at the transition from a model with concentrated parameters to a model with distributed parameters], *Prikl. mat. fiz.* [Appl. Math. Phys.], 2020, **52**, No. 4, 255–261, DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261 (in Russian).
9. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Ob ustoychivosti statsionarnykh sostoyaniy v diffuzionnykh modelyakh” [On the stability of stationary states in diffusion models], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavr. vestn. inform. i mat.], 2021, **2**, 88–101 (in Russian).
10. M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, and S. A. Rabeeakh, “K voprosu ob ustoychivosti statsionarnogo resheniya v migratsionnykh modelyakh” [On the issue of stability of stationary solution in migration models], In: *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya* [Contemporary Mathematics and Its Applications], Alef, Groznyy, 2021, pp. 56–62 (in Russian).
11. Yu. M. Svirezhev and D. O. Logofet, *Ustoychivost’ biologicheskikh soobshchestv* [Stability of Biological Communities], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
12. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial’nykh uravneniy s operatorami Besselya* [Method of Transmutation Operators for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2019 (in Russian).
13. R. M. Anderson, G. F. Medly, R. M. May, and A. M. Johnson, “A preliminary study of the transmission dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the causative agent of AIDS, IMA,” *J. Math. Appl. Med. Biol.*, 1986, **3**, 229–263.
14. M. Bachar and A. Dorfinayr, “HIV treatment models with time delay,” *C. R. Biol.*, 2004, **327**, 983–994.
15. S. Blower, “Calculating the consequences: HAART and risky sex,” *AIDS*, 2001, **15**, 1309–1310.
16. L. Cai, X. Li, M. Ghoshc, and B. Guod, “Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, **229**, No. 1, 313–323, DOI: 10.1016/j.cam.2008.10.067.
17. V. Capasso and G. Serio, “A generalization of the Kermack–McKendrick deterministic epidemic model,” *Math. Biosci.*, 1978, **42**, 43–62, DOI: 10.1016/0025-5564(78)90006-8.
18. A. Debbouche, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, C. A. Valentim Jr, and S. A. David, “On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, No. 1, 1–18, DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-01070-8.
19. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1983.
20. T. N. Gogoleva, I. N. Shchepina, M. V. Polovinkina, and S. A. Rabeeakh, “On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, **1203**, 012041.
21. H. W. Hethcote and J. W. Van Ark, *Modelling HIV transmission and AIDS in the United States*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1992.
22. Y. H. Hsieh and C. H. Chen, “Modelling the social dynamics of a sex industry: Its implications for spread of HIV/AIDS,” *Bull. Math. Biol.*, 2004, **66**, 143–166.
23. W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1927, **115**, No. 772, 700–721.
24. P. D. Leenheer and H. L. Smith, “Virus dynamics: A global analysis,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2003, **63**, 1313–1327.
25. M. Mastahun and X. Abdurahman, “Optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with infective immigration and behavioral change,” *Appl. Math.*, 2017, **8**, No. 1, 87–109.
26. C. McCluskey, “A model of HIV/AIDS with staged progression and amelioration,” *Math. Biosci.*, 2003, **181**, 1–16.
27. I. S. Nikolaos, K. Dietz, and D. Schenzle, “Analysis of a model for the pathogenesis of AIDS,” *Math. Biosci.*, 1997, **145**, 27–46.
28. K. O. Okosun, O. D. Makinde, and I. Takaidza, “Impact of optimal control on the treatment of HIV/AIDS and screening of unaware infectives,” *Appl. Math. Model.*, 2013, **37**, 3802–3820.
29. A. S. Perelson and P. W. Nelson, “Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo,” *SIAM Rev.*, 1999, **41**, No. 1, 3–44.
30. C. M. A. Pinto and A. R. M. Carvalho, “The impact of pre-exposure prophylaxis (PrEP) and screening on the dynamics of HIV,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, **339**, 231–244.
31. M. V. Polovinkina, “On the effect of transition from a model with concentrated parameters to a model with distributed parameters,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, **1902**, 012041, DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012041.
32. M. V. Polovinkina, A. Debbouche, I. P. Polovinkin, and S. A. David, “Stability of stationary solutions for the glioma growth equations with radial or axial symmetries,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, **44**, No. 15, 12021–12034, DOI: 10.1002/mma.7194.

33. S. M. Salman, “Memory and media coverage effect on an HIV/AIDS epidemic model with treatment,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2021, **385**, 113203, DOI: 10.1016/j.cam.2020.113203.
34. S. Samanta and J. Chaattopadhyay, “Effect of awareness program in disease outbreak — a slow-fast dynamics,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **237**, 98–109.
35. S. Samanta, S. Rana, A. Sharma, A. K. Misra, and J. Chaattopadhyay, “Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: a mathematical model,” *Appl. Math. Comput.*, 2013, **219**, No. 12, 6965–6977.
36. J. M. Tchuente, N. Dube, C. Bhunu P, R. J. Smith, and C. T. Bauch, “The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza,” *BMC Public Health*, 2011, **11**, No. 1, S5, DOI: 10.1186/1471-2458-11-S1-S5.
37. K. Wang, W. Wang, and X. Liu, “Viral infection model with periodic lytic immune response,” *Chaos Solitons Fractals*, 2006, **28**, No. 1, 90–99.
38. H. Zhao and M. Zhao, “Global Hopf bifurcation analysis of an susceptible-infective-removed epidemic model incorporating media coverage with time delay,” *J. Bio. Dyn.*, 2017, **11**, No. 1, 8–24, DOI: 10.1080/17513758.2016.1229050.
39. “AIDS Epidemic Update 2009,” *UNAIDS*. Available online: https://unaids.org/en/resources/documents/2009/20091124_jc1700_epi_update_2009_en.pdf (accessed on December 12, 2024).
40. “Uganda: epidemiological fact sheets on HIV/AIDS and sexually transmitted infections,” *UNAIDS*. Available online: https://data.unaids.org/publications/fact-sheets01/uganda_en.pdf (accessed on December 12, 2024).

Aleksander I. Shashkin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Marina V. Polovinkina

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Igor P. Polovinkin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Belgorod State National Research University (BelGU), Belgorod, Russia

E-mail: polovinkin@yandex.ru