

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 71, № 1, 2025

Нелокальные и нелинейные задачи

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,
к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Азгачев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 17.01.2025. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 25,58. Тираж 110 экз. Заказ 89.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 71, No. 1, 2025

Nonlocal and nonlinear problems

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ашыралыев А., Хамад А.</i> О нелокальной краевой задаче для эллиптических дифференциальных уравнений с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа	1
<i>Балашов О. С., Фаминский А. В.</i> Обратная начально-краевая задача для систем квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка	18
<i>Бен-Арци М.</i> Сплайны, бигармонический оператор и приближенное собственное значение .	33
<i>Бобылев А. В., Потапенко И. Ф.</i> Асимптотические решения кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау	55
<i>Будочкина С. А., Лыу Т. Х.</i> О вариационном принципе для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	71
<i>Верон Л.</i> Применение s -гармонического расширения к изучению особенностей уравнений Эмдена	85
<i>Звягин А. В.</i> Существование слабых решений стационарной альфа-модели, описывающей движение растворов полимеров	96
<i>Ибрагимов А. И., Варфоломеев Е. М., Закиров Э. С.</i> О спивании аналитического и численного решений задачи на виртуальной границе с доминированием геометрии течения в ограниченной области	110
<i>Кожеевникова Л. М.</i> Локальные ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями в неограниченных областях	125
<i>Розанова О. С.</i> О глобально гладких осциллирующих решениях нестрого гиперболических систем	147
<i>Сурнин П. С., Шишленин М. А., Бочаров Г. А.</i> Определение параметров математической модели иммунного ответа на ВИЧ	159
<i>Трахинин Ю. Л.</i> О корректности задачи со свободной границей для уравнений идеальной сжимаемой МГД и уравнений Максвелла в вакууме	176
<i>Чечкин Г. А.</i> Об усреднении уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей. Докритический, критический и закритический случаи	194

CONTENTS

<i>Ashyralyev A., Hamad A.</i> On the nonlocal boundary value problem for the elliptic differential equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions	1
<i>Balashov O. S., Faminskii A. V.</i> Inverse initial-boundary value problem for systems of quasilinear evolution equations of odd order	18
<i>Ben-Artzi M.</i> Splines, biharmonic operator and approximate eigenvalue	33
<i>Bobylev A. V., Potapenko I. F.</i> Asymptotic solutions of the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations	55
<i>Budochkina S. A., Luu T. H.</i> On the variational principle for a system of ordinary differential equations	71
<i>Véron L.</i> Applications of the s -harmonic extension to the study of singularities of Emden’s equations	85
<i>Zvyagin A. V.</i> Existence of weak solutions of the stationary alpha model describing the motion of polymer solutions	96
<i>Ibragimov A. I., Varfolomeev E. M., Zakirov E. S.</i> On the stitching of analytical and numerical solutions of the problem on a virtual boundary with the dominance of flow geometry in a bounded domain	110
<i>Kozhevnikova L. M.</i> Local renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents in unbounded domains	125
<i>Rozanova O. S.</i> On globally smooth oscillating solutions of nonstrictly hyperbolic systems . . .	147
<i>Surnin P. S., Shishlenin M. A., Bocharov G. A.</i> Determination of the parameters of the mathematical model of the immune response to HIV	159
<i>Trakhinin Yu. L.</i> On well-posedness of the free boundary problem for ideal compressible MHD equations and Maxwell equations in vacuum	176
<i>Chechkin G. A.</i> On homogenization of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain with the third boundary condition on the boundary of the cavities. Subcritical, critical and supercritical cases	194

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17

EDN: SPXFTR

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЯМИ САМАРСКОГО—ИОНКИНА ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

А. АШЫРАЛЫЕВ^{1,2,3}, А. ХАМАД⁴

¹*Bahcesehir University, Стамбул, Турция*

²*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

³*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

⁴*University of Benghazi, Бенгази, Ливия*

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию абстрактной нелокальной краевой задачи с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа для дифференциального уравнения эллиптического типа

$$-u''(t) + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = \varphi, \quad u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s) ds + \psi$$

в произвольном банаховом пространстве E с положительным оператором A . Устанавливается корректность этой задачи в различных банаховых пространствах. В приложениях доказываются теоремы о корректности ряда нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа.

Ключевые слова: эллиптическое дифференциальное уравнение, краевая задача, нелокальная задача, условия Самарского—Ионкина интегрального типа, корректность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5–100» и издано в рамках целевой программы BR05236656 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. Авторы также выражают благодарность рецензенту за полезные советы по улучшению статьи.

Для цитирования: А. Ашыралыев, А. Хамад. О нелокальной краевой задаче для эллиптических дифференциальных уравнений с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 1–17. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17>

Посвящается 70-летию профессора А. Л. Скубачевского

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические уравнения в частных производных имеют приложения почти во всех областях математики, от гармонического анализа до геометрии и теории Ли, а также многочисленные приложения в физике и технике. Корректность локальной краевой задачи для эллиптического

уравнения

$$\begin{aligned} -v''(t) + Av(t) &= f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \\ v(0) &= v_0, \quad v(T) = v_T \end{aligned} \quad (1.1)$$

в произвольном банаховом пространстве E с положительным оператором A и связанные с ним приложения изучались многими исследователями (см., например, [9, 12, 25, 34] и приведенную там библиографию).

В математическом моделировании эллиптические уравнения используются вместе с локальными граничными условиями, задающими решение на границе области. В некоторых случаях классические граничные условия не могут точно описать процесс или явление. Поэтому математические модели различных физических, химических, биологических или экологических процессов часто включают неклассические условия. Такие условия обычно определяются как нелокальные граничные условия и отражают ситуации, когда данные на границе области не могут быть измерены напрямую или когда данные на границе зависят от данных внутри области. Корректность различных нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных и разностных уравнений широко изучалась многими исследователями (см., например, [6–8, 10, 13–19, 22, 24, 26, 31–33, 35] и приведенные там ссылки).

В статье [2] Ионкина исследовалась нелокальная задача для одномерного параболического уравнения, возникающего при моделировании некоторых неклассических тепловых процессов. Было доказано существование решений, а затем установлена их устойчивость в [3]. Для параболического уравнения с одной пространственной переменной Самарский [4] предложил нелокальную постановку краевой задачи, охватывающую как классические начально-краевые задачи, так и задачу Ионкина из [2, 3]. В последнее время различные нелокальные краевые задачи с условием Самарского–Ионкина для уравнений в частных производных изучались многими исследователями (см., например, [1, 20, 21, 23, 27–30, 37, 38] и приведенные там ссылки).

В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для абстрактного дифференциального уравнения эллиптического типа с условиями Самарского–Ионкина интегрального типа

$$\begin{aligned} -u''(t) + Au(t) &= f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) &= \varphi, \quad u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s) ds + \psi \end{aligned} \quad (1.2)$$

в произвольном банаховом пространстве E с положительным оператором A .

Функция $u(t)$ называется *решением* задачи (1.2), если выполняются следующие условия:

1. $u(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ функция. Производные на концах отрезка понимаются как соответствующие односторонние производные.
2. Элемент $u(t)$ принадлежит $D(A)$ для всех $t \in [0, T]$, а функция $Au(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$.
3. $u(t)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям (1.2).

Решение задачи (1.2), определенное таким образом, в дальнейшем будет называться решением задачи (1.2) в пространстве $C(E) = C([0, T], E)$. Здесь $C(E)$ обозначает банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi(t)$, определенных на $[0, T]$ со значениями в E , снабженное нормой

$$\|\varphi\|_{C(E)} = \max_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_E.$$

Установлена корректность задачи (1.2) в различных банаховых пространствах. В приложениях доказаны теоремы о корректности ряда нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с условиями Самарского–Ионкина интегрального типа.

2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1.1)

В этом разделе мы приводим некоторые вспомогательные утверждения из [12], которые будут полезны в дальнейшем. Оператор $B = A^{\frac{1}{2}}$ имеет лучшие спектральные свойства, чем положительный оператор A . Действительно, оператор $(-B)$ является генератором аналитической

полугруппы $\exp\{-tB\}$ ($t \geq 0$) с экспоненциально убывающей нормой при $t \rightarrow +\infty$, т. е. оценки

$$\|\exp(-tB)\|_{E \rightarrow E}, \|tB \exp(-tB)\|_{E \rightarrow E} \leq M(B)e^{-\alpha(B)t} \quad (t > 0) \quad (2.1)$$

выполняются для некоторых $M(B) \in [1, +\infty)$ и $\alpha(B) \in (0, +\infty)$. Из этого следует, что оператор $I - e^{-2TB}$ имеет ограниченный обратный

$$(I - e^{-2TB})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kTB}$$

и выполняется оценка

$$\|(I - e^{-2TB})^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq M(B) \left(1 - e^{-2T\alpha(B)}\right)^{-1}. \quad (2.2)$$

Формула

$$\begin{aligned} v(t) = (I - e^{-2TB})^{-1} & \left\{ (e^{-tB} - e^{-(2T-t)B})v_0 + (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B})v_T - \right. \\ & - (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B})(2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})f(s)ds \Big\} + \\ & + (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B})f(s)ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

справедлива для точного решения задачи (1.1) при достаточно гладких данных v_0 , v_T и $f(t)$.

Обозначим через $C^\alpha(E)$ ($0 < \alpha < 1$) банахово пространство, полученное пополнением множества всех гладких E -значных функций $\varphi(t)$ на $[0, T]$ по норме

$$\|\varphi\|_{C^\alpha(E)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(t)\|_E + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} \frac{\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_E}{\tau^\alpha}.$$

Теорема 2.1. Пусть $Av_0 - f(0), Av_T - f(T) \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ ($0 < \alpha < 1$). Если A — положительный оператор в банаховом пространстве E , то краевая задача (1.1) корректно поставлена в пространстве Гёльдера $C^\alpha(E)$. Для решения $v(t)$ в $C^\alpha(E)$ краевой задачи выполняется коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|v''\|_{C^\alpha(E)} + \|Av\|_{C^\alpha(E)} + \|v''\|_{C(E_\alpha)} \leq \\ & \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} [\|Av_0 - f(0)\|_{E_\alpha} + \|Av_T - f(T)\|_{E_\alpha}], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где M не зависит от α , v_0 , v_T и $f(t)$. Здесь банахово пространство $E_\alpha = E_\alpha(B, E)$ ($0 < \alpha < 1$) состоит из тех $v \in E$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{E_\alpha} = \sup_{z>0} z^{1-\alpha} \|B \exp\{-zB\}v\|_E + \|v\|_E.$$

Более того, положительность A является необходимым условием корректности задачи (1.1) в $C(E)$. Однако задача (1.1) не корректна в $C(E)$ для всех положительных операторов. Оказывается, что банахово пространство E можно ограничить до банахова пространства E' ($D(A) \subset E' \subset E$) таким образом, что ограниченная задача (1.1) в E' будет корректна в $C(E')$. Роль E' здесь будут играть дробные пространства $E_\alpha = E_\alpha(B, E)$ ($0 < \alpha < 1$).

Теорема 2.2. Пусть A — положительный оператор в банаховом пространстве E и $f(t) \in C(E_\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), $v_0, v_T \in E_\alpha$. Тогда для решения $v(t)$ в $C(E_\alpha)$ локальной краевой задачи (1.1) выполняется коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|v''\|_{C(E_\alpha)} + \|Av\|_{C(E_\alpha)} \leq \\ & \leq M [\|Av_0\|_{E_\alpha} + \|Av_T\|_{E_\alpha} + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1} \|f\|_{C(E_\alpha)}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где M не зависит от α , v_0 , v_T и $f(t)$.

3. КОРРЕКТНОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1.2)

Рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.2). Приведем лемму, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть A — положительный оператор в банаховом пространстве E , и $\alpha(t)$ — неотрицательная непрерывная функция для любого $t \in [0, T]$. Тогда оператор

$$\left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)$$

имеет обратный

$$Q = \left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)^{-1},$$

и справедлива следующая оценка:

$$\|Q\|_{E \rightarrow E} \leq M_2(B). \quad (3.1)$$

Доказательство. Используя свойство непрерывности $\alpha(t)$, мы можем записать

$$B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds = \alpha(s^*) B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) ds = A^{-1} \alpha(s^*) (I - e^{-TB})^2.$$

Из этого следует, что

$$(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds = (I - e^{-TB})^2 A^{-1} (A + \alpha(s^*) I).$$

Тогда оператор

$$\left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)$$

имеет обратный

$$(I - e^{-TB})^{-2} A (A + \alpha(s^*) I)^{-1} = (I - e^{-TB})^{-2} (I - \alpha(s^*) (A + \alpha(s^*) I)^{-1}).$$

Лемма 3.1 доказана. $\square$

Более того, применяя формулу (2.3) для решения задачи (1.2) при $u(0) = \varphi$ и взяв производную по t , получаем

$$\begin{aligned} u'(t) = & (I - e^{-2TB})^{-1} \left\{ B \left(-e^{-tB} - e^{-(2T-t)B} \right) \varphi + B \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right) u(T) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right) \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) f(s) ds \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \left(-e^{-(t-s)B} + e^{-(t+s)B} \right) f(s) ds + \frac{1}{2} \int_t^T \left(e^{-(s-t)B} + e^{-(t+s)B} \right) f(s) ds. \end{aligned}$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} u'(0) = & -B(I - e^{-2TB})^{-1} (I + e^{-2TB}) \varphi + 2Be^{-TB} (I - e^{-2TB})^{-1} u(T) + \\ & + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T \left(e^{-sB} - e^{-(2T-s)B} \right) f(s) ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

и

$$u'(T) = -2Be^{-TB}(I - e^{-2TB})^{-1}\varphi + B(I + e^{-2TB})(I - e^{-2TB})^{-1}u(T) - \\ - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})f(s)ds. \quad (3.3)$$

Применяя формулу (2.3) для $u(0) = \varphi$, получаем

$$\int_0^T \alpha(s) u(s)ds = (I - e^{-2TB})^{-1} \left\{ \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})\alpha(s) ds \varphi + \right. \\ \left. + \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds u(T) - \right. \\ \left. - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B})f(y)dy \right\} + \\ + (2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B})f(y)dyds. \quad (3.4)$$

Применяя формулы (3.2)–(3.4) и условие Самарского–Ионкина $u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s)ds + \psi$, получаем

$$-B(I - e^{-2TB})^{-1}(I + e^{-2TB})\varphi + 2Be^{-TB}(I - e^{-2TB})^{-1}u(T) + \\ + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})f(s)ds = \\ = -2Be^{-TB}(I - e^{-2TB})^{-1}\varphi + B(I + e^{-2TB})(I - e^{-2TB})^{-1}u(T) - \\ - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})f(s)ds + \\ + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})\alpha(s) ds \varphi + \\ + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds u(T) - \\ - (2B)^{-1}(I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds \times \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B})f(y)dy + \\ + (2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B})f(y)dyds + \psi,$$

или

$$-(I - e^{-2TB})^{-1} \left[B(I - e^{-TB})^2 + \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds \right] u(T) = \\ = (I - e^{-2TB})^{-1} \left[B(I - e^{-TB})^2 + \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})\alpha(s) ds \right] \varphi -$$

$$\begin{aligned}
& - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) f(s) ds - \\
& - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) f(s) ds - \\
& - (2B)^{-1} (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \times \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\
& + (2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + \psi.
\end{aligned}$$

По лемме 3.1 существует обратный ограниченный оператор

$$Q = \left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)^{-1}$$

для оператора

$$(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds. \quad (3.5)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
u(T) = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] \varphi - \right. \\
& - B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) f(s) ds - B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) f(s) ds - \\
& - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \times B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\
& \left. + (I - e^{-2TB}) \left[(2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) B^{-1} \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + B^{-1} \psi \right] \right\}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Итак, легко показать, что функция $u(t)$, заданная на $[0, T]$ формулами (2.3) при $u(0) = \varphi$ и (3.6), дает единственное решение в $C(E)$ задачи (1.2), если, например, $\alpha(t) \in C^{(1)}[0, T]$, $\varphi \in D(A^2)$, $\psi \in D(A^{\frac{3}{2}})$ и $Af(t) \in C(E)$ или $f'(t) \in C(E)$. Достаточные условия корректности нелокальной краевой задачи (1.2) можно установить, если рассмотреть эту задачу в некоторых пространствах гладких E -значных функций, определенных на $[0, T]$.

Обратим внимание, что для решения задачи (1.2) неравенство коэрцитивности

$$\|u''\|_{C^\alpha(E)} + \|Au\|_{C^\alpha(E)} \leq M_C [\|f\|_{C^\alpha(E)} + \|A\varphi\|_E + \|A\psi\|_E]$$

не выполняется. Тем не менее, мы имеем следующие результаты о корректности.

Теорема 3.1. *Предположим, что $A\varphi = f(0)$, $A^{\frac{1}{2}}\psi \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ ($0 < \alpha < 1$). Если A — положительный оператор в банаховом пространстве E , то краевая задача (1.2) корректно поставлена в пространстве Гёльдера $C^\alpha(E)$ и для решения этой задачи $u(t)$ в $C^\alpha(E)$ выполняется коэрцитивное неравенство*

$$\|u''\|_{C^\alpha(E)} + \|Au\|_{C^\alpha(E)} + \|u''\|_{C(E_\alpha)} \leq \quad (3.7)$$

$$\leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} \left[\|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha} + \left\| A^{\frac{1}{2}}\psi \right\|_{E_\alpha} \right],$$

где M не зависит от $\alpha, \varphi, \psi, f(t)$.

Доказательство. По теореме 2.1 имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \|u''\|_{C^\alpha(E)} + \|Au\|_{C^\alpha(E)} + \|u''\|_{C(E_\alpha)} \leq \\ & \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} [\|Au(0) - f(0)\|_{E_\alpha} + \|Au(T) - f(T)\|_{E_\alpha}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

для решения задачи (1.2). Поэтому для доказательства теоремы 3.1 достаточно установить оценки для $\|Au(T) - f(T)\|_{E_\alpha}$. Применяя формулу (3.6), получаем

$$\begin{aligned} Au(T) - f(T) = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] (A\varphi - f(0)) + \right. \\ & + \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] f(0) - \\ & - (I - e^{-TB}) f(0) - B \int_0^T e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds + \\ & + \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right] f(T) - \\ & - (I - e^{-TB}) f(T) - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} (f(s) - f(T)) ds + \\ & + B \int_0^T e^{-(2T-s)B} f(s) ds + B \int_0^T e^{-(T+s)B} f(s) ds - \\ & - 2^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\ & \left. + (I - e^{-2TB}) \left[2^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + B\psi \right] \right\} = \sum_{k=1}^5 J_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] (A\varphi - f(0)) \right\}, \\ J_2 = & -Q(I - e^{-2TB})B\psi, \\ J_3 = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] f(0) - \right. \\ & - (I - e^{-TB}) f(0) - B \int_0^T e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds + \\ & \left. + \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right] f(T) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (I - e^{-TB}) f(T) - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} (f(s) - f(T))) ds \Big\}, \\
J_4 = & -Q \left\{ B \int_0^T e^{-(2T-s)B} f(s) ds + B \int_0^T e^{-(T+s)B} f(s) ds \right\}, \\
J_5 = & -Q \left\{ -2^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \right. \\
& \left. + (I - e^{-2TB}) \left[2^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Оценим J_k в норме E_α для любых $k = 1, 2, 3, 4$ и 5 по отдельности. В каждом случае будем использовать лемму 3.1 и оценки (2.1), (2.2) и (3.1). Начнем с J_1 в норме E_α . Применяя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_1 \right\|_E \leq \\
& \leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \left[\|I - e^{-TB}\|_{E \rightarrow E}^2 + \int_0^T \int_s^{2T-s} \|e^{-yB}\|_{E \rightarrow E} dy ds \max_{s \in [0, T]} |\alpha(s)| \right] \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} [A\varphi - f(0)] \right\|_E \leq \\
& \leq M_1 \sup_{\lambda > 0} \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} (A\varphi - f(0)) \right\|_E \leq M_1 \|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha}
\end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Тогда

$$\|J_1\|_{E_\alpha} \leq M_1 \|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha}.$$

Таким же образом мы можем получить

$$\|J_2\|_{E_\alpha} \leq M_2 \|B\psi\|_{E_\alpha}.$$

Теперь оценим J_3 в норме пространств E_α . Имеем, что

$$\begin{aligned}
J_3 = & -Q \left\{ B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds f(0) + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds f(T) - \right. \\
& - (I - e^{-TB}) e^{-TB} f(0) - B \int_0^T e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds - \\
& \left. - (I - e^{-TB}) e^{-TB} f(T) - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} (f(s) - f(T))) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство треугольника и оценки (2.1), (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_3 \right\|_E \leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \left\{ \lambda^{1-\alpha} \left\| e^{-\lambda B} \right\|_{E \rightarrow E} \max_{s \in [0, T]} |\alpha(s)| \times \right. \\
& \times \left[\int_0^T \left\| e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds + \int_0^T \left\| e^{-sB} - e^{-(2T-s)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds \right] \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_E + \\
& + \lambda^{1-\alpha} \int_0^T \left\| B^2 e^{-(s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} \|f(s) - f(0)\|_E ds + \lambda^{1-\alpha} \int_0^T \left\| B^2 e^{-(T-s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} \|f(s) - f(T)\|_E ds + \\
& \left. + \|I - e^{-TB}\|_{E \rightarrow E} \lambda^{1-\alpha} \left\| B e^{-(\lambda+T)B} \right\|_{E \rightarrow E} [\|f(0)\|_E + \|f(T)\|_E] \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M_{31}(\delta) \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)} + M_{32} \int_0^T \frac{\lambda^{1-\alpha} s^\alpha}{(s+\lambda)^2} ds \sup_{0 < s \leq T} \frac{\|f(s) - f(0)\|_E}{s^\alpha} + \\ &\quad + M_{33} \lambda^{1-\alpha} \int_0^T \frac{(T-s)^\alpha}{(\lambda+T-s)^2} ds \sup_{0 \leq s < T} \frac{\|f(s) - f(T)\|_E}{(T-s)^\alpha} \end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Так как

$$\int_0^T \frac{\lambda^{1-\alpha} s^\alpha}{(\lambda+s)^2} ds \leq \int_0^\infty \frac{p^\alpha}{(1+p)^2} dp \leq \int_0^1 p^\alpha dp + \int_1^\infty p^{\alpha-2} dp = \frac{2}{(1+\alpha)(1-\alpha)},$$

имеем, что

$$\|J_3\|_{E_\alpha} \leq \frac{M_3(\delta)}{1-\alpha} \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}.$$

Оценим J_4 в норме пространств E_α . Применяя неравенство треугольника и оценки (2.1), (3.1), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_4 \right\|_E \leq \\ &\leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \lambda^{1-\alpha} \left[\int_0^T \left\| B^2 e^{-(2T-s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds + \int_0^T \left\| B^2 e^{-(T+s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds \right] \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E \leq \\ &\leq M_{41} \lambda^{1-\alpha} \left[\int_0^T \frac{1}{(\lambda+2T-s)^2} ds + \int_0^T \frac{1}{(\lambda+T+s)^2} ds \right] \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)} \leq M_4 \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)} \end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Поэтому

$$\|J_4\|_{E_\alpha} \leq M_4 \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}.$$

Оценим J_5 в норме интерполяционных пространств E_α . Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_5 \right\|_E \leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \lambda^{1-\alpha} \frac{1}{2} \left\{ \max_{s \in [0,T]} |\alpha(s)| \int_0^T \left\| B e^{-(\lambda+T-s)B} \right\|_{E \rightarrow E} \|I - e^{-2sB}\|_{E \rightarrow E} ds \times \right. \\ &\quad \times \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E + \|I - e^{-2sB}\|_{E \rightarrow E} \times \\ &\quad \times \int_0^T |\alpha(s)| \left[\int_0^s \left\| B \left(e^{-(s-y)B} - e^{-(s+y)B} \right) \right\|_{E \rightarrow E} dy + \int_s^T \left\| B \left(e^{-(y-s)B} - e^{-(s+y)B} \right) \right\|_{E \rightarrow E} dy \right] ds \times \\ &\quad \times \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E \leq M_5(\delta) \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E \end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Тогда

$$\|J_5\|_{E_\alpha} \leq M_5(\delta) \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}.$$

Объединяя оценки для J_k в норме E_α для любых $k = 1, 2, 3, 4$ и 5 , получаем

$$\|Au(T) - f(T)\|_{E_\alpha} \leq M \|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha} + M \|B\psi\|_{E_\alpha} + \frac{M_3(\delta)}{1-\alpha} \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}. \quad (3.9)$$

Наконец, применяя оценки (3.8) и (3.9), получаем оценку (3.7). Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть A — положительный оператор в банаховом пространстве E и $A^{\frac{1}{2}}\psi$, $A\varphi \in E_\alpha$, $f(t) \in C(E_\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$). Тогда для решения $u(t)$ в $C(E_\alpha)$ краевой задачи (1.2) выполняется коэрцитивное неравенство

$$\|u''\|_{C(E_\alpha)} + \|Au\|_{C(E_\alpha)} \leq M(\mu) [\|A\varphi\|_{E_\alpha} + \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|_{E_\alpha} + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1} \|f\|_{C(E_\alpha)}],$$

где $M(\mu)$ не зависит от α, φ, ψ и $f(t)$.

Доказательство. По теореме 2.2 имеем оценку

$$\|u''\|_{C(E_\alpha)} + \|Au\|_{C(E_\alpha)} \leq M[\|Au(0)\|_{E_\alpha} + \|Au(T)\|_{E_\alpha} + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_{C(E_\alpha)}]$$

для решения задачи (1.2). Поэтому для доказательства теоремы 3.2 достаточно установить оценки для $\|Au(T)\|_{E_\alpha}$. Применяя формулу (3.6), получаем

$$\begin{aligned} Au(T) = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] A\varphi - \right. \\ & - B \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) f(s) ds - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) f(s) ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds B \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\ & \left. + (I - e^{-2TB}) \left[\frac{1}{2} \int_0^T \alpha(s) B \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + B\psi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Используя неравенство треугольника, оценки (2.1), (3.1) и определение пространств E_α , получаем

$$\left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} Au(T) \right\|_E \leq M_1 [\|A\varphi\|_{E_\alpha} + \|B\psi\|_{E_\alpha}] + M_3 \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C(E_\alpha)}$$

для любого $\lambda > 0$. Поэтому

$$\|Au(T)\|_{E_\alpha} \leq M_1(\mu) [\|A\varphi\|_{E_\alpha} + \|B\psi\|_{E_\alpha}] + M_3(\mu) \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C(E_\alpha)}. \quad (3.10)$$

Теорема 3.2 доказана. $\square$

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

Теперь рассмотрим приложения теорем 3.1 и 3.2 к эллиптическим уравнениям.

1. Сначала рассмотрим краевые задачи для двумерных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \delta u = f(y, x), & 0 < y < T, \quad 0 < x < l, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial y} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial y} + \int_0^T \alpha(s) u(s, x) ds + \psi(x), & 0 < x < l, \\ u(y, 0) = u(y, l), \quad u_x(y, 0) = u_x(y, l), & 0 \leq y \leq T, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $a(x)$, $\varphi(x)$ и $f(y, x)$ — заданные достаточно гладкие функции, а $a(0) = a(l)$, $a(x) > 0$, $\delta > 0$ — достаточно большие числа. Введем банаховы пространства $C^\beta[0, l]$ ($0 < \beta < 1$) всех непрерывных функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию Гёльдера, для которых конечны следующие нормы:

$$\|\varphi\|_{C^\beta[0, l]} = \|\varphi\|_{C[0, l]} + \sup_{0 \leq x < x+\tau \leq l} \frac{|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)|}{\tau^\beta},$$

где $C[0, l]$ — пространство всех непрерывных на $[0, l]$ функций $\varphi(x)$ с обычной нормой

$$\|\varphi\|_{C[0, l]} = \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi(x)|.$$

Известно, что дифференциальное выражение

$$A^x v = -(a(x)v_x(x))_x + \delta v(x)$$

определяет положительный оператор A^x , действующий в $C^\beta[0, l]$ с областью определения $C^{\beta+2}[0, l]$ и удовлетворяющий условиям $v(0) = v(l)$, $v_x(0) = v_x(l)$. Поэтому мы можем заменить краевые задачи (4.1) абстрактной краевой задачей (1.2). Используя результаты теорем 3.1 и 3.2, мы получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Для решения краевой задачи (4.1) справедливы следующие коэрцитивные неравенства:*

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{2+\alpha}(C^\mu[0, l])} + \|u\|_{C^\alpha(C^{2+\mu}[0, l])} \leq \\ & \leq M(\alpha) [\|f\|_{C^\alpha(C^\mu[0, l])} + \|-(a(\cdot)\varphi_x(\cdot))_x + \delta\varphi(\cdot) - f(0, \cdot)\|_{C^{2\alpha+\mu}[0, l]} + \|\psi(\cdot)\|_{C^{2+\mu}[0, l]}], \\ & \|u\|_{C^2(C^{2\alpha+\mu}[0, l])} + \|u\|_{C(C^{2+2\alpha+\mu}[0, l])} \leq \\ & \leq M(\alpha) [\|f\|_{C(C^{2\alpha+\mu}[0, l])} + \|\varphi\|_{C^{2+2\alpha+\mu}[0, l]} + \|\psi\|_{C^{2+\mu}[0, l]}], \quad 0 < 2\alpha + \mu < 1. \end{aligned}$$

Здесь $M(\alpha)$ не зависит от $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(y, x)$.

2. Теперь пусть Ω будет единичным открытым кубом в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($0 < x_k < 1$, $1 \leq k \leq n$) с границей $S\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. В $[0, T] \times \Omega$ рассмотрим смешанную краевую задачу для многомерного эллиптического уравнения

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(y, x)}{\partial y^2} - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 u(y, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(y, x) = f(y, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < y < T, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial y} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial y} + \int_0^T \alpha(s)u(s, x)ds + \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(y, x) = 0, \quad x \in S, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\alpha_r(x)$ ($x \in \Omega$) и $f(y, x)$ ($y \in (0, T)$, $x \in \Omega$), $\varphi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) — заданные гладкие функции, а $\alpha_r(x) > 0$, $\delta > 0$ — достаточно большое число. Введем банаховы пространства $C_{01}^\beta(\bar{\Omega})$ ($\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 < x_k < 1$, $k = 1, \dots, n$) всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с индикатором $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_k \in (0, 1)$, $1 \leq k \leq n$ и весом $x_k^{\beta_k}(1 - x_k - h_k)^{\beta_k}$, $0 \leq x_k < x_k + h_k \leq 1$, $1 \leq k \leq n$, с нормой

$$\|f\|_{C_{01}^\beta(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{0 \leq x_k < x_k + h_k \leq 1, \\ 1 \leq k \leq n}} |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)| \prod_{k=1}^n h_k^{-\beta_k} x_k^{\beta_k} (1 - x_k - h_k)^{\beta_k},$$

где $C(\bar{\Omega})$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на $\bar{\Omega}$, снабженное нормой

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

Известно, что дифференциальное выражение

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 v(y, x)}{\partial x_r^2} + \delta v(y, x)$$

определяет положительный оператор A^x , действующий на $C_{01}^\beta(\bar{\Omega})$ с областью определения $D(A^x) \subset C_{01}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющий условию $v = 0$ на S . Поэтому мы можем заменить краевые задачи (4.2) на абстрактные краевые задачи (1.2). Используя результаты теорем 3.1, мы можем получить следующий результат.

Теорема 4.2. *Предположим, что*

$$- \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_r^2} + \delta \varphi(x) - f(0, x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Тогда для решения краевой задачи (4.2) справедливо коэрцитивное неравенство

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(C_{01}^\mu(\bar{\Omega}))} + \sum_{r=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} \right\|_{C^\alpha(C_{01}^\mu(\bar{\Omega}))} \leq M(\alpha) \|f\|_{C^\alpha(C_{01}^\mu(\bar{\Omega}))},$$

$$0 < \alpha < 1, \quad \mu = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}, \quad 0 < \mu_k < 1, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $M(\alpha)$ не зависит от $f(y, x)$.

3. Перейдем к краевой задаче в диапазоне

$$\{0 \leq y \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

для многомерных эллиптических уравнений порядка $2m$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta u(y, x) = f(y, x), \\ 0 < y < T, \quad x, r \in \mathbb{R}^n, \quad |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial y} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial y} + \int_0^T \alpha(s) u(s, x) ds + \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $a_r(x)$ и $f(y, x)$, $\varphi(x), \psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, а $\alpha_r(x) > 0$, $\delta > 0$ — достаточно большие числа. Будем считать, что символ

$$B^x(\xi) = \sum_{|r|=2m} a_r(x) (i\xi_1)^{r_1} \dots (i\xi_n)^{r_n}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

дифференциального оператора вида

$$B^x = \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}, \quad (4.4)$$

действующего на функции, определенные на пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет неравенствам

$$0 < M_1 |\xi|^{2m} \leq (-1)^m B^x(\xi) \leq M_2 |\xi|^{2m} < \infty$$

при $\xi \neq 0$. Задача (4.3) имеет единственное гладкое решение. Для формулировки наших результатов мы вводим банахово пространство $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($0 < \mu < 1$) всех непрерывных функций $\varphi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию Гёльдера, для которого конечна следующая норма:

$$\|\varphi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0} \frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{|z|^\mu},$$

где $C(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непрерывных функций $\varphi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^n$ с обычной нормой

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Теперь сформулируем следующий результат о корректности.

Теорема 4.3. *Для решения краевой задачи (4.3) выполняются следующие неравенства коэрцитивности:*

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{2+\alpha}(C^\mu(\mathbb{R}^n))} + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_n^{\tau_n}} \right\|_{C^\alpha(C^\mu(\mathbb{R}^n))} + \\ & + \|u\|_{C^2(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} \leq M(\alpha) \left[\|f\|_{C^\alpha(C^\mu(\mathbb{R}^n))} + \left\| \sum_{|r|=2m} a_r(\cdot) \frac{\partial^{|r|} \psi(\cdot)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} + \right. \\ & \left. + \left\| \sum_{|r|=2m} a_r(\cdot) \frac{\partial^{|r|} \varphi(\cdot)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta \varphi(\cdot) - f(0, \cdot) \right\|_{C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n)} \right], \\ & \|u\|_{C^2(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_n^{\tau_n}} \right\|_{C(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} \leq \end{aligned}$$

$$\leq M(\alpha) \left[\|f\|_{C(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|}\varphi}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n)} + \right. \\ \left. + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|}\psi}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \right], \quad 0 < 2m\alpha + \mu < 1,$$

где $M(\alpha)$ не зависит от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, и $f(y, x)$.

Доказательство теоремы 4.3 основано на абстрактных теоремах 3.1 и 3.2, положительности оператора A^x в $C^\mu(\mathbb{R}^n)$, структуре дробных пространств $E_\alpha((A^x)^{\frac{1}{2}}, C(\mathbb{R}^n))$ и неравенстве коэрцитивности для эллиптического оператора A^x в $C^\mu(\mathbb{R}^n)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье изучается нелокальная краевая задача для эллиптических уравнений с условием Самарского—Ионкина интегрального типа. Устанавливается корректность нелокальной краевой задачи для абстрактных эллиптических уравнений с условием Самарского—Ионкина интегрального типа в банаховом пространстве. В приложениях доказана теорема о корректности нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с условием Самарского—Ионкина интегрального типа. Представлены двухшаговые разностные схемы высокого порядка точности для численного решения дифференциальной задачи с условием Самарского—Ионкина интегрального типа. Отметим, что операторный метод в [12] позволяет установить корректность этих разностных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дукенбаева А. А.* Об одной обобщенной задаче типа Самарского—Ионкина для уравнения Пуассона в круге // Мат. ж. — 2018. — 18, № 1. — С. 78–87.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифф. уравн. — 1977. — 13, № 2. — С. 294–304.
3. *Ионкин Н. И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифф. уравн. — 1979. — 15, № 7. — С. 1279–1283.
4. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 11. — С. 1925–1935.
5. *Соболевский П. Е.* Разностные методы приближенного решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: ВГУ, 1975.
6. *Ashyralyev A.* On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2003. — 24, № 1-2. — С. 1–15.
7. *Ashyralyev A.* A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 344, № 1. — С. 557–573.
8. *Ashyralyev A., Agirseven D., Agarwal R. P.* Stability estimates for delay parabolic differential and difference equations // Appl. Comput. Math. — 2020. — 19, № 2. — С. 175–204.
9. *Ashyralyev A., Hamad A.* On the well-posedness of elliptic equations with nonlocal boundary conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2025. — 16, № 1.
10. *Ashyralyev A., Ozturk E.* On a difference scheme of fourth order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem // Math. Methods Appl. Sci. — 2013. — 36, № 8. — С. 936–955.
11. *Ashyralyev A., Sarsanbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 10. — С. 1295–1305.
12. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. — Basel–Boston–Berlin : Birkhauser, 2004.
13. *Ashyralyev A., Tetikoglu F.* FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions // Abst. Appl. Anal. — 2012. — 2012. — 454831.
14. *Ashyralyev A., Tetikoglu F.* A note on Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems: well-posedness // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2013. — 34, № 9. — С. 939–975.
15. *Ashyralyev C.* Numerical solution to Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multipoint NBVP // Bound. Value Probl. — 2017. — 2017. — 74.
16. *Ashyralyev C.* Stability estimates for solution of Neumann-type overdetermined elliptic problem // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 10. — С. 1226–1243.

17. *Ashyralyev C., Akkan Y.* Numerical solution to inverse elliptic problem with neumann type over-determination and mixed boundary conditions// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2015. — 2015. — 188.
18. *Avalishvili G., Avalishvili M.* Nonclassical problem with integral boundary conditions for elliptic system// *Complex Var. Elliptic Equ.* — 2018. — 63, № 6. — С. 836–853.
19. *Ciupaila R., Sapagovas M., Štikonienė O.* Numerical solution of nonlinear elliptic equation with nonlocal condition// *Nonlinear Anal. Model. Control* — 2013. — 18, № 4. — С. 412–426.
20. *Gasimova Kh. A.* On the Dirichlet problem for a class of non-uniformly elliptic equations with measure data// *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* — 2023. — 43, № 4. — С. 72–84.
21. *Il'in V. A., Kritskov L. V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators// *J. Math. Sci. (N. Y)* — 2003. — 116, № 5. — С. 3489–3550.
22. *Kadirkulov B. J., Kirane M.* On solvability of boundary value problem for the Poisson equation with a nonlocal boundary operator// *Acta Math. Sci.* — 2016. — 35. — С. 970–980.
23. *Karachik V. V., Turmetov B. Kh.* On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation// *Math. Slovaca* — 2020. — 70, № 2. — С. 329–342.
24. *Kirane M., Torebek B. T.* On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions// *Math. Methods Appl. Sci.* — 2016. — 39. — С. 1121–1128.
25. *Lunardi A.* Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1995.
26. *Pulkina L. S.* Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2016. — 2016. — 193.
27. *Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A.* On boundary value problem of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball// *Kazakh Math. J.* — 2020. — 20, № 1. — С. 84–94.
28. *Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A.* On boundary value problems of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball// *Int. J. Complex Var. Elliptic Equ.* — 2022. — 67, № 2. — С. 369–383.
29. *Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A., Yessirkegenov N. A.,* “On a generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Poisson equation,” In: *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, Springer, Cham, pp. 207–216.
30. *Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2014. — 2014. — 157.
31. *Sapagovas M., Griskoniene V., Štikonienė O.* Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition// *Nonlinear Anal. Model. Control* — 2017. — 22, № 4. — С. 489–504.
32. *Sapagovas M., Stikonienė O., Ciupaila R., Joksiene Z.* Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2016. — 2016. — 118.
33. *Shakhmurov V., Musaev H.* Nonlocal separable elliptic equations and applications// *TWMS J. Pure Appl. Math.* — 2024. — 15, № 2. — С. 257–268.
34. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997.
35. *Stikonienė O., Sapagovas M., Ciupaila R.* On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions// *Nonlinear Anal. Model. Control* — 2014. — 19, № 3. — С. 517–535.
36. *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. — Amsterdam–New York: North-Holland, 1978.
37. *Turmetov B. Kh., Karachik V. V.* On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions// *Filomat* — 2018. — 32, № 3. — С. 947–953.
38. *Turmetov B. Kh.* Generalization of the Robin problem for the Laplace equation// *Differ. Equ.* — 2019. — 55, № 9. — С. 1134–1142.

Аллаберен Ашыралыев

Bahcesehir University, Стамбул, Турция

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

E-mail: allaberen.ashyralyev@eng.bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Айман Хамад

University of Benghazi, Бенгази, Ливия

E-mail: ayman.hamad@uob.edu.ly

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17

EDN: SPXFTP

On the nonlocal boundary value problem for the elliptic differential equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions

A. Ashyralyev^{1,2,3} and A. Hamad⁴

¹*Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye*

²*RUDN University, Moscow, Russia*

³*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

⁴*University of Benghazi, Elmarj, Libya*

Abstract. The present paper is devoted to the study of the abstract nonlocal boundary value problem with integral type Samarskii–Ionkin conditions for the differential equation of elliptic type

$$-u''(t) + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = \varphi, \quad u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s) ds + \psi.$$

in an arbitrary Banach space E with the positive operator A . The well-posedness of this problem in various Banach spaces is established. In applications, theorems on the well-posedness of several nonlocal boundary value problems for elliptic equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions are proved.

Keywords: elliptic differential equation, boundary-value problem, nonlocal problem, integral type Samarskii–Ionkin conditions, well-posedness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The publication has been prepared with the support of the “RUDN University Program 5–100” and published under target program BR05236656 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. The authors also express their gratitude to the reviewers for their useful advice on improving the article.

For citation: A. Ashyralyev, A. Hamad, “On the nonlocal boundary value problem for the elliptic differential equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 1–17. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17>

REFERENCES

1. A. A. Dukenbayeva, “Ob odnoy obobshchennoy zadache tipa Samarskogo–Ionkina dlya uravneniya Puassona v krug” [On a generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Poisson equation in the disk] *Mat. Zh.* [Math. J.], 2018, **18**, No. 1, 78–87 (in Russian).
2. N. I. Ionkin, “Reshenie odnoy kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym uslovиеm” [Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1977, **13**, No. 2, 294–304 (in Russian).
3. N. I. Ionkin, “Ob ustoychivosti odnoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym uslovиеm” [On the stability of a problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 7, 1279–1283 (in Russian).
4. A. A. Samarskii, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy” [On certain problems in the theory of differential equations] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 11, 1925–1935 (in Russian).



5. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye metody priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations] [in Russian], Voronezh State Univ., Voronezh, 1975 (in Russian).
6. A. Ashyralyev, "On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2003, **24**, No. 1-2, 1–15.
7. A. Ashyralyev, "A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space," *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **344**, No. 1, 557–573.
8. A. Ashyralyev, D. Agirseven, and R. P. Agarwal, "Stability estimates for delay parabolic differential and difference equations," *Appl. Comput. Math.*, 2020, **19**, No. 2, 175–204.
9. A. Ashyralyev and A. Hamad, "On the well-posedness of elliptic equations with nonlocal boundary conditions," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2025, **16**, No. 1.
10. A. Ashyralyev and E. Ozturk, "On a difference scheme of fourth order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2013, **36**, No. 8, 936–955.
11. A. Ashyralyev and A. Sarsanbi, "Well-posedness of a parabolic equation with involution," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 10, 1295–1305.
12. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2004.
13. A. Ashyralyev and F. Tetikoglu, "FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions," *Abst. Appl. Anal.*, 2012, **2012**, 454831.
14. A. Ashyralyev and F. Tetikoglu, "A note on Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems: well-posedness," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2013, **34**, No. 9, 939–975.
15. C. Ashyralyev, "Numerical solution to Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multipoint NBVP," *Bound. Value Probl.*, 2017, **2017**, 74.
16. C. Ashyralyev, "Stability estimates for solution of Neumann-type overdetermined elliptic problem," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 10, 1226–1243.
17. C. Ashyralyev and Y. Akkan, "Numerical solution to inverse elliptic problem with neumann type overdetermination and mixed boundary conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2015, **2015**, 188.
18. G. Avalishvili and M. Avalishvili, "Nonclassical problem with integral boundary conditions for elliptic system," *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2018, **63**, No. 6, 836–853.
19. R. Ciupaila, M. Sapagovas, and Štikonienė O., "Numerical solution of nonlinear elliptic equation with nonlocal condition," *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2013, **18**, No. 4, 412–426.
20. Kh. A. Gasimova, "On the Dirichlet problem for a class of non-uniformly elliptic equations with measure data," *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2023, **43**, No. 4, 72–84.
21. V. A. Il'in and L. V. Kritskov, "Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2003, **116**, No. 5, 3489–3550.
22. B. J. Kadirkulov and M. Kirane, "On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with a nonlocal boundary operator," *Acta Math. Sci.*, 2016, **35**, 970–980.
23. V. V. Karachik and B. Kh. Turmetov, "On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation," *Math. Slovaca*, 2020, **70**, No. 2, 329–342.
24. M. Kirane and B. T. Torebek, "On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, **39**, 1121–1128.
25. A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1995.
26. L. S. Pulkina, "Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2016, **2016**, 193.
27. M. A. Sadybekov and A. A. Dukenbayeva, "On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball," *Kazakh Math. J.*, 2020, **20**, No. 1, 84–94.
28. M. A. Sadybekov and A. A. Dukenbayeva, "On boundary value problems of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball," *Int. J. Complex Var. Elliptic Equ.*, 2022, **67**, No. 2, 369–383.
29. M. A. Sadybekov, A. A. Dukenbayeva, and N. A. Yessirkegenov, "On a generalised Samarskii-Ionkin type problem for the Poisson equation," In: *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, Springer, Cham, 2018, pp. 207–216.
30. M. A. Sadybekov, B. Kh. Turmetov, and B. T. Torebek, "Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2014, **2014**, 157.
31. M. Sapagovas and V. Griskoniene, Štikonienė O., "Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition," *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2017, **22**, No. 4, 489–504.

32. M. Sapagovas, O. Stikonienė, R. Ciupaila, and Z. Joksiene, “Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2016, **2016**, 118.
33. V. Shakhmurov and H. Musaev, “Nonlocal separable elliptic equations and applications,” *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2024, **15**, No. 2, 257–268.
34. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
35. O. Stikonienė, M. Sapagovas, and R. Ciupaila, “On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions,” *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2014, **19**, No. 3, 517–535.
36. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam–New York, 1978.
37. B. Kh. Turmetov and V. V. Karachik, “On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions,” *Filomat*, 2018, **32**, No. 3, 947–953.
38. B. Kh. Turmetov, “Generalization of the Robin problem for the Laplace equation,” *Differ. Equ.*, 2019, **55**, No. 9, 1134–1142.

Allaberen Ashyralyev

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

RUDN University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: allaberen.ashyralyev@eng.bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Ayman Hamad

University of Benghazi, Elmarj, Libya

E-mail: ayman.hamad@uob.edu.ly

УДК 517.956.6

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32

EDN: STIIBV

ОБРАТНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

О. С. БАЛАШОВ, А. В. ФАМИНСКИЙ

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена обратная начально-краевая задача на ограниченном интервале для систем квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка. В качестве переопределений выбраны интегральные условия, а в качестве управлений — краевые функции и правые части уравнений специального вида. Установлены результаты о существовании и единственности решений при малых входных данных или малом временном интервале.

Ключевые слова: квазилинейные эволюционные уравнения, нечетный порядок, обратная задача, начально-краевая задача, интегральные условия, существование решения, единственность решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Второй автор был поддержан грантом Российского научного фонда (проект № 23-11-00056).

Для цитирования: О. С. Балашов, А. В. Фаминский. Обратная начально-краевая задача для систем квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 18–32. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32>

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В статье рассматривается система квазилинейных уравнений нечетного порядка

$$u_t - (-1)^l (a_{2l+1} \partial_x^{2l+1} u + a_{2l} \partial_x^{2l} u) - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \partial_x^j [a_{2j+1}(t, x) \partial_x^{j+1} u + a_{2j}(t, x) \partial_x^j u] + \\ + \sum_{j=0}^l (-1)^j \partial_x^j [g_j(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u)] = f(t, x), \quad l \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

заданная на интервале $I = (0, R)$ ($R > 0$ произвольно). Здесь $u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_n)^T$, $n \in \mathbb{N}$, — неизвестная вектор-функция, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $g_j = (g_{j1}, \dots, g_{jn})^T$ — также вектор-функции, $a_{2l+1} = \text{diag}(a_{(2l+1)i})$, $a_{2l} = \text{diag}(a_{(2l)i})$, $i = 1, \dots, n$, — постоянные диагональные матрицы размера $n \times n$, $a_j(t, x) = (a_{jim}(t, x))$, $i, m = 1, \dots, n$, для $j = 0, \dots, 2l - 1$, — матрицы также размера $n \times n$.

В прямоугольнике $Q_T = (0, T) \times I$ для некоторого $T > 0$ рассмотрим обратную начально-краевую задачу для системы (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, R], \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\partial_x^j u(t, 0) = \mu_j(t), \quad j = 0, \dots, l-1, \quad \partial_x^j u(t, R) = \nu_j(t), \quad j = 0, \dots, l, \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

где $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n})^T$, $\mu_j = (\mu_{j1}, \dots, \mu_{jn})^T$, $\nu_j = (\nu_{j1}, \dots, \nu_{jn})^T$.

Предположим, что для любого $i = 1, \dots, n$ функция f_i представляется в виде

$$f_i(t, x) \equiv h_{0i}(t, x) + \sum_{k=1}^{m_i} F_{ki}(t) h_{ki}(t, x) \quad (1.4)$$

для некоторого неотрицательного целого числа m_i (если $m_i = 0$, то $f_i = h_{0i}$), где функции h_{ki} даны, а функции F_{ki} неизвестны. Кроме того, предположим, что часть краевых функций ν_{li} также неизвестна. Положим $n_i = 1$, если функция ν_{li} неизвестна, и $n_i = 0$, если функция ν_{li} дана. Тогда задача (1.1)–(1.3) дополнена условиями переопределения в интегральной форме: если $m_i + n_i > 0$ для некоторого i , то

$$\int_I u_i(t, x) \omega_{ki}(x) dx = \varphi_{ki}(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, \dots, m_i + n_i, \quad (1.5)$$

для некоторых заданных функций ω_{ki} и φ_{ki} . В частности, для отдельного i условия переопределения для функции u_i могут отсутствовать, но всегда предполагается, что

$$N = \sum_{i=1}^n n_i > 0, \quad (1.6)$$

так что хотя бы одна из краевых функций ν_{li} неизвестна (очевидно, что $N \leq n$). Положим также

$$M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

тогда $M \geq 0$. Задача состоит в нахождении функций ν_{li} (при $n_i > 0$) и функций F_{ki} (при $m_i > 0$), для которых соответствующее решение u задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет условиям (1.5).

В случае одного ($n = 1$) уравнения типа (1.1) обратные задачи были, например, рассмотрены в [5]. В частности, в этой статье приведены примеры физических моделей, которые могут быть описаны уравнениями подобного вида: уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ) и Кавахары с обобщениями, уравнения Кортевега—де Фриза—Бюргерса и Бенни—Лина, уравнение Каупа—Купершмидта и другие. Однако, наряду с одиночными уравнениями, в реальных физических ситуациях возникают также системы квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка. Среди подобных систем следует упомянуть систему Майды—Биелло (см. [8])

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

и более общие системы уравнений типа КдФ со спаренными нелинейностями (см. [4]). Более подробно о примерах подобных систем написано, например, в [5].

Важность условий интегрального переопределения в обратных задачах обсуждена, например, в книге [9]. Изучение обратных задач с интегральным условием переопределения для уравнений типа КдФ было начато в статье [2] на основе, в частности, идей из [9]. В статье [5] для задачи (1.1)–(1.3) в случае одного уравнения были рассмотрены две обратные задачи с одним интегральным условием переопределения типа (1.5). В первой из них в качестве управления была выбрана правая часть уравнения типа (1.4) (тогда $M = 1$, $N = 0$), во второй — граничная функция ν_l (тогда $M = 0$, $N = 1$). Были установлены результаты о корректности подобных задач либо в случае малых входных данных, либо малого временного интервала. В статье [6] была рассмотрена

начально-краевая задача на ограниченном интервале для нелинейного уравнения Шрёдингера высокого порядка

$$iu_t + au_{xx} + ibu_x + iu_{xxx} + \lambda|u|^p u + i\beta(|u|^p u)_x + i\gamma(|u|^p)_x u = f(t, x)$$

(u — комплекснозначная функция) с начальными и краевыми условиями, аналогичными (1.2)–(1.3), и изучены три обратные задачи с интегральными условиями переопределения. Первые две из них аналогичны задачам, рассмотренным в [5], с похожими результатами. В третьей задаче были введены два условия переопределения типа (1.5), а в качестве управлений были рассмотрены как правая часть уравнения, так и граничная функция ($M = N = 1$). Результаты были аналогичны первым двум случаям.

Заметим также, что обратная задача с двумя интегральными условиями переопределения для уравнения типа КдФ

$$u_t + u_{xxx} + uu_x + \alpha(t)u = F(t)g(t)$$

в периодическом случае при неизвестных функциях α и F была рассмотрена в [7], где были установлены результаты об однозначной разрешимости для малого временного интервала.

В статье [3] была рассмотрена обратная начально-краевая задача (1.1)–(1.3) с интегральными условиями переопределения (1.5) в случае, когда управлениями были правые части уравнений типа (1.4) ($M > 0$ — произвольно, $N = 0$). Аналогично [5] были установлены результаты о корректности либо в случае малых входных данных, либо малого временного интервала. Заметим, что в [3] также была рассмотрена и прямая начально-краевая задача (1.1)–(1.3).

Настоящая работа является продолжением статьи [3] на случай произвольных $M \geq 0$ и $N \in (0, n]$ с аналогичными результатами о корректности. Эти результаты являются новыми даже в случае одного уравнения (тогда $N = n = 1$) в силу произвола в выборе M . Условия, накладываемые на систему, начальные и краевые данные, аналогичны условиям из [3], но с более сильными ограничениями на порядок роста нелинейностей (см. замечание 1.2).

Решения рассматриваемой задачи, как и в [3], строятся в специальном пространстве вектор-функций $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in (X(Q_T))^n$, где для любого $i = 1, \dots, n$

$$u_i(t, x) \in X(Q_T) = C([0, T]; L_2(I)) \cap L_2(0, T; H^l(I)),$$

с нормой

$$\|u\|_{(X(Q_T))^n} = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{t \in (0, T)} \|u_i(t, \cdot)\|_{L_2(I)} + \|\partial_x^l u_i\|_{L_2(Q_T)} \right).$$

Для $r > 0$ через $\bar{X}_{rn}(Q_T)$ обозначим замкнутый шар $\{u \in (X(Q_T))^n : \|u\|_{(X(Q_T))^n} \leq r\}$.

Слабое решение задачи (1.1)–(1.3) понимается так же, как в [3], в смысле следующего определения.

Определение 1.1. Пусть $u_0 \in (L_2(I))^n$, $\mu_j, \nu_j \in (L_2(0, T))^n \forall j$, $f \in (L_1(Q_T))^n$, $a_j \in (C(\bar{Q}_T))^{n^2} \forall j$. Функция $u \in (X(Q_T))^n$ называется *слабым решением* задачи (1.1)–(1.3), если $\partial_x^j u(t, 0) \equiv \mu_j(t)$, $\partial_x^j u(t, R) \equiv \nu_j(t)$, $j = 0, \dots, l-1$, и для любой пробной функции $\phi(t, x)$, такой что $\phi \in (L_2(0, T; H^{l+1}(I)))^n$, $\phi_t \in (L_2(Q_T))^n$, $\phi|_{t=T} \equiv 0$, $\partial_x^j \phi|_{x=0} = \partial_x^j \phi|_{x=R} \equiv 0$, $j = 0, \dots, l-1$, $\partial_x^l \phi|_{x=0} \equiv 0$, справедливо свойство $(g_j(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u), \partial_x^j \phi) \in L_1(Q_T)$, $j = 0, \dots, l$, и выполнено интегральное тождество:

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left[(u, \phi_t) - (a_{2l+1} \partial_x^l u, \partial_x^{l+1} \phi) + (a_{2l} \partial_x^l u, \partial_x^l \phi) + \sum_{j=0}^{l-1} ((a_{2j+1} \partial_x^{j+1} u + a_{2j} \partial_x^j u), \partial_x^j \phi) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^l (g_j(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u), \partial_x^j \phi) + (f, \phi) \right] dx dt + \int_I (u_0, \phi|_{t=0}) dx + \int_0^T (a_{2l+1} \nu_l, \partial_x^l \phi|_{x=R}) dt = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть символы $\widehat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}[f](\xi)$ и $\mathcal{F}^{-1}[f](x)$, как обычно, обозначают соответственно прямое и обратное преобразования Фурье функции f . В частности, для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) d\xi.$$

Для $s \in \mathbb{R}$ стандартным образом введем пространство Соболева дробного порядка

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f : \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^s)\widehat{f}(\xi)] \in L_2(\mathbb{R})\}$$

и для любого $T > 0$ обозначим через $H^s(0, T)$ пространство сужений на интервал $(0, T)$ функций из $H^s(\mathbb{R})$ с естественной нормой. Для описания свойств граничных функций μ_j, ν_j при $j < l$ будем использовать следующее функциональное пространство также с естественной нормой:

$$(\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n = \left(\prod_{j=0}^{l-1} H^{(l-j)/(2l+1)}(0, T) \right)^n.$$

На коэффициенты линейной части системы будем накладывать следующие условия:

$$a_{(2l+1)i} > 0, \quad a_{(2l)i} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

и для любых $0 \leq j \leq l-1, i, m = 1, \dots, n$

$$\partial_x^k a_{(2j+1)im} \in C(\overline{Q}_T), \quad k = 0, \dots, j+1, \quad \partial_x^k a_{(2j)im} \in C(\overline{Q}_T), \quad k = 0, \dots, j. \quad (1.9)$$

Пусть $y_m = (y_{m1}, \dots, y_{mn})$ для $m = 0, \dots, l-1$. На функции $g_j(t, x, y_0, \dots, y_{l-1})$ при любом $0 \leq j \leq l$ будем накладывать следующие условия: для $i = 1, \dots, n$

$$g_{ji}, \text{grad}_{y_k} g_{ji} \in C(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{ln}), \quad j = 0, \dots, l-1, \quad g_{ji}(t, x, 0, \dots, 0) \equiv 0, \quad (1.10)$$

$$|\text{grad}_{y_k} g_{ji}(t, x, y_0, \dots, y_{l-1})| \leq c \sum_{m=0}^{l-1} (|y_m|^{b_1(j,k,m)} + |y_m|^{b_2(j,k,m)}), \quad k = 0, \dots, l-1,$$

$$\forall (t, x, y_0, \dots, y_{l-1}) \in Q_T \times \mathbb{R}^{ln}, \quad (1.11)$$

где $0 < b_1(j, k, m) \leq b_2(j, k, m)$, $|y_m| = (y_m, y_m)^{1/2}$.

Наконец, функции ω_{ki} будут всегда удовлетворять следующим условиям:

$$\omega \in H^{2l+1}(I), \quad \omega^{(m)}(0) = 0, \quad m = 0, \dots, l, \quad \omega^{(m)}(R) = 0, \quad m = 0, \dots, l-1, \quad (1.12)$$

для всех ω_{ki} (где здесь $\omega \equiv \omega_{ki}$).

Теперь сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1.1. Пусть матрицы $a_j, j = 0, \dots, 2l+1$, удовлетворяют условиям (1.8), (1.9), а функции $g_j, j = 0, \dots, l$, удовлетворяют условиям (1.10), (1.11), где при $j < l$

$$b_2(j, k, m) \leq \begin{cases} \frac{2l-2k+1}{2m+1}, & m+k < l, \\ \frac{l-k}{m}, & m+k \geq l, \end{cases} \quad (1.13)$$

а при $j = l$

$$b_2(l, k, m) \leq \frac{2l-2k}{2m+1}. \quad (1.14)$$

Пусть $u_0 \in (L_2(I))^n, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}) \in (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n, \nu_{li} \in L_2(0, T)$, если $n_i = 0, h_0 = (h_{01}, \dots, h_{0n})^T \in (L_1(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n$ для некоторого $T > 0$. Предположим, что выполнено условие (1.6) и для любого $i = 1, \dots, n$, для которого $m_i + n_i > 0$, при $k = 1, \dots, m_i + n_i$ функции ω_{ki} удовлетворяют условию (1.12); $\varphi_{ki} \in H^1(0, T)$ и

$$\varphi_{ki}(0) = \int_I u_{0i}(x) \omega_{ki}(x) dx; \quad (1.15)$$

$h_{ki} \in C([0, T]; L_2(I))$ для $k = 1, \dots, m_i$ если $m_i > 0$. Положим для $k = 1, \dots, m_i + n_i$ в случае $m_i > 0$

$$\psi_{kji}(t) \equiv \int_I h_{ji}(t, x) \omega_{ki}(x) dx, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad (1.16)$$

а в случае $n_i = 1$

$$\psi_{k(m_i+1)i}(t) = \psi_{k(m_i+1)i} \equiv a_{(2l+1)i} \omega_{ki}^{(l)}(R), \quad (1.17)$$

и предположим, что

$$\Delta_i(t) \equiv \det(\psi_{kji}(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad k, j = 1, \dots, m_i + n_i. \quad (1.18)$$

Положим

$$\begin{aligned} c_0 = & \|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n} + \sum_{i: n_i=0} \|\nu_{li}\|_{L_2(0, T)} + \\ & + \|h_0\|_{(L_1(0, T; L_2(I)))^n} + \|h_0\|_{(L_2(0, T; L_1(I)))^n} + \sum_{i: m_i+n_i>0} \sum_{k=1}^{m_i+n_i} \|\varphi'_{ki}\|_{L_2(0, T)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тогда существует $\delta > 0$, для которого при условии $c_0 \leq \delta$ существуют функции $F_{ki} \in L_2(0, T)$, $i : m_i > 0$, $k = 1, \dots, m_i$, функции $\nu_{li} \in L_2(0, T)$, $i : n_i = 1$, и соответствующее слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее свойствам (1.5), где функция f задана формулой (1.4). Более того, существует $r > 0$, для которого это решение u единственно в шаре $\bar{X}_{rn}(Q_T)$ с соответствующими единственными функциями $F_{ki} \in L_2(0, T)$ и $\nu_{li} \in L_2(0, T)$, причем отображение

$$(u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}), \{\nu_{li} : n_i = 0\}, h_0, \{\varphi'_{ki}\}) \rightarrow (u, \{F_{ki}\}, \{\nu_{li} : n_i = 1\}) \quad (1.20)$$

Липшиц-непрерывно в замкнутом шаре радиуса δ в пространстве $(L_2(I))^n \times (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n \times (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n \times (L_2(0, T))^{n-N} \times (L_1(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n \times (L_2(0, T))^{M+N}$ в пространство $(X(Q_T))^n \times (L_2(0, T))^{M+N}$.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1, более того, в (1.13), (1.14) нестрогие неравенства при оценках b_2 заменены на строгие. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для фиксированного произвольного $\delta > 0$ существует $T_0 > 0$, для которого при $c_0 \leq \delta$ и $T \in (0, T_0]$ существуют единственные функции $F_{ki} \in L_2(0, T)$, $i : m_i > 0$, $k = 1, \dots, m_i$, единственные функции $\nu_{li} \in L_2(0, T)$, $i : n_i = 1$, и соответствующее единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее условиям (1.5), где функция f задана формулой (1.4).
2. Для фиксированного произвольного $T > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при условии $c_0 \leq \delta$ существуют единственные функции $F_{ki} \in L_2(0, T)$, $i : m_i > 0$, $k = 1, \dots, m_i$, единственные функции $\nu_{li} \in L_2(0, T)$, $i : n_i = 1$, и соответствующее единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее условиям (1.5), где функция f задана формулой (1.4).

Более того, отображение (1.20) Липшиц-непрерывно в замкнутом шаре радиуса δ аналогично теореме 1.1.

Замечание 1.1. Теорема 1.2 справедлива для неоднородного аналога приведенной выше системы Майды–Биелло. Теорема 1.1 справедлива, например, для ее обобщения вида

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + (g_{11}(u, v))_x + g_{01}(u, v) = f_1, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (g_{12}(u, v))_x + g_{02}(u, v) = f_2, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

при

$$|\partial_{y_k} g_{1i}(y_1, y_2)| \leq c(|y_1|^{b_1} + |y_2|^{b_1} + |y_1|^{b_2} + |y_2|^{b_2}), \quad k, i = 1, 2,$$

где $0 < b_1 \leq b_2 \leq 2$, например, если $g_{11}(y_1, y_2) = cy_2^3$, $g_{12}(y_1, y_2) = c_1 y_1^2 y_2 + c_2 y_1 y_2^2$,

$$|\partial_{y_k} g_{0i}(y_1, y_2)| \leq c(|y_1|^{b_1} + |y_2|^{b_1} + |y_1|^{b_2} + |y_2|^{b_2}), \quad k, i = 1, 2,$$

где $0 < b_1 \leq b_2 \leq 3$.

Замечание 1.2. По сравнению с результатами настоящей работы аналогичные результаты в статье [3] в случае $N = 0$ получены при более слабых условиях на нелинейность

$$b_2(j, k, m) \leq \frac{4l - 2j - 2k}{2m + 1}$$

для любого $0 \leq j \leq l$ (с аналогичной заменой на строгое неравенство в аналоге теоремы 1.2).

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит некоторые интерполяционные неравенства и вспомогательные результаты для соответствующей линейной задачи, в разделе 3 приведены доказательства основных результатов.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В дальнейшем мы будем использовать следующие интерполяционные неравенства: для некоторой константы $c = c(R, l, b)$ и любых функций $v, w \in X(Q_T)$

1. если $j \in [0, l]$, $k, m \in [0, l - 1]$, $b \in (0, (4l - 2j - 2k)/(2m + 1)]$, то

$$\| |\partial_x^m v|^b \partial_x^k w \|_{L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I))} \leq c(T^{((4l-2j-2k)-(2m+1)b)/(4l)} + T^{(2l-j)/(2l)}) \|v\|_{X(Q_T)}^b \|w\|_{X(Q_T)}; \quad (2.1)$$

2. если $k, m \in [0, l - 1]$, $m + k < l$, $b \in (1, (2l - 2k + 1)/(2m + 1)]$, то

$$\| |\partial_x^m v|^b \partial_x^k w \|_{L_2(0, T; L_1(I))} \leq c(T^{2l-2k+1-(2m+1)b/(4l)} + T^{1/2}) \|v\|_{X(Q_T)}^b \|w\|_{X(Q_T)}; \quad (2.2)$$

3. если $k, m \in [0, l - 1]$ и либо $m + k < l$, $b \in (0, 1]$, либо $m + k \geq l$, $b \in (0, (l - k)/m]$, то

$$\| |\partial_x^m v|^b \partial_x^k w \|_{L_2(0, T; L_1(I))} \leq c(T^{(l-k-mb)/(2l)} + T^{1/2}) \|v\|_{X(Q_T)}^b \|w\|_{X(Q_T)}, \quad (2.3)$$

которые доказаны в [5, лемма 3.3] (неравенство (2.1)) и [5, леммы 4.3, 4.4] (неравенства (2.2), (2.3)) на основе следующего простого неравенства (см., например, [1]): для некоторой константы $c = c(R, l, p)$ и любых $\varphi \in H^l(I)$, целого $m \in [0, l]$ и $p \in [2, +\infty]$

$$\|\varphi^{(m)}\|_{L_p(I)} \leq c\|\varphi^{(l)}\|_{L_2(I)}^{2s} \|\varphi\|_{L_2(I)}^{1-2s} + c\|\varphi\|_{L_2(I)}, \quad s = s(p, l, m) = \frac{2m + 1}{4l} - \frac{1}{2lp}.$$

Кроме нелинейной системы (1.1) рассмотрим ее линейный аналог

$$\begin{aligned} u_t - (-1)^l (a_{2l+1} \partial_x^{2l+1} u + a_{2l} \partial_x^{2l} u) - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \partial_x^j [a_{2j+1}(t, x) \partial_x^{j+1} u + a_{2j}(t, x) \partial_x^j u] = \\ = f(t, x) + \sum_{j=0}^l (-1)^j \partial_x^j G_j(t, x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$G_j = (G_{j1}, \dots, G_{jn})^T$. Понятие слабого решения соответствующей начально-краевой задачи аналогично определению 1.1. В частности, соответствующее интегральное тождество (для тех же пробных функций, что и в определении 1.1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left[(u, \phi_t) - (a_{2l+1} \partial_x^l u, \partial_x^{l+1} \phi) + (a_{2l} \partial_x^l u, \partial_x^l \phi) + \sum_{j=0}^{l-1} ((a_{2j+1} \partial_x^{j+1} u + a_{2j} \partial_x^j u), \partial_x^j \phi) + \right. \\ \left. + (f(t, x), \phi) + \sum_{j=0}^l (G_j(t, x), \partial_x^j \phi) \right] dx dt + \int_I (u_0, \phi|_{t=0}) dx + \int_0^T (a_{2l+1} \nu_l, \partial_x^l \phi|_{x=R}) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теорема 2.1. Пусть матрицы a_j удовлетворяют условиям (1.8), (1.9), $u_0 \in (L_2(I))^n$, $(\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}) \in (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n$, $\nu_l \in (L_2(0, T))^n$, $f \in (L_1(0, T; L_2(I)))^n$, $G_j \in (L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n$, $j = 0, \dots, l$. Тогда существует единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (2.4), (1.2), (1.3) и для любого $t \in (0, T]$

$$\|u\|_{(X(Q_t))^n} \leq c(T) \left[\|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, t))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, t))^n} + \right]$$

$$+ \|\nu_l\|_{(L_2(0,t))^n} + \|f\|_{(L_1(0,t;L_2(I)))^n} + \sum_{j=0}^l \|G_j\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,t;L_2(I)))^n}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Это утверждение доказано в [3, теорема 2.3]. $\square$

Введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$u = S(u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}), \nu_l, f, (G_0, \dots, G_l))$$

является слабым решением задачи (2.4), (1.2), (1.3) из пространства $(X(Q_T))^n$ в условиях теоремы 2.1. Положим также

$$\begin{aligned} W &= (u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1})), \\ \tilde{S}W &= S(W, 0, 0, (0, \dots, 0)), \quad \tilde{S} : (L_2(I) \times \mathcal{B}^{l-1}(0, T) \times \mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ S_l \nu_l &= S(0, (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), \nu_l, 0, (0, \dots, 0)), \quad S_l : (L_2(0, T))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ S_0 f &= S(0, (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), 0, f, (0, \dots, 0)), \quad S_0 : (L_1(0, T; L_2(I)))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ \tilde{S}_j G_j &= S(0, (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), 0, 0, (0, \dots, G_j, \dots, 0)), \quad S_j : (L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ &\quad j = 0, \dots, l. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{H}^1(0, T) = \{\varphi \in H^1(0, T) : \varphi(0) = 0\}$. Очевидно, что $\|\varphi'\|_{L_2(0, T)}$ является эквивалентной нормой в этом пространстве.

Пусть $\omega \in C(\bar{I})$. На пространстве функций $u(t, x)$, лежащих в $L_1(I)$ для всех $t \in [0, T]$, определим линейный оператор $Q(\omega)$ формулой $(Q(\omega)u)(t) = q(t; u, \omega)$, где

$$q(t; u, \omega) \equiv \int_I u(t, x) \omega(x) dx, \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и дополнительно $f \in (L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $G_j \in (L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $j = 0, \dots, l$, а функция ω удовлетворяет условиям (1.12). Тогда для функции $u = (u_1, \dots, u_n)^T = S(W, \nu_l, f, (G_0, \dots, G_l))$ соответствующая функция $q(\cdot; u_i, \omega) = Q(\omega)u_i$, заданная формулой (2.7), принадлежит пространству $H^1(0, T)$, $i = 1, \dots, n$, и для почти всех $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} q'(t; u_i, \omega) &= r(t; u_i, \omega) \equiv \nu_{li}(t) a_{(2l+1)i} \omega^{(l)}(R) + \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{l+k} \left[\nu_{ki}(t) \left(a_{(2l+1)i} \omega^{(2l-k)}(R) - a_{(2l)i} \omega^{(2l-k-1)}(R) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{ki}(t) \left(a_{(2l+1)i} \omega^{(2l-k)}(0) - a_{(2l)i} \omega^{(2l-k-1)}(0) \right) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j+k} \left[\nu_{km}(t) \left((a_{(2j+1)im} \omega^{(j)})^{(j-k)}(R) - (a_{(2j)im} \omega^{(j)})^{(j-k-1)}(R) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{km}(t) \left((a_{(2j+1)im} \omega^{(j)})^{(j-k)}(0) - (a_{(2j)im} \omega^{(j)})^{(j-k-1)}(0) \right) \right] + \\ &\quad + (-1)^{l+1} \int_I u_i(t, x) \left(a_{(2l+1)i} \omega^{(2l+1)} - a_{(2l)i} \omega^{(2l)} \right) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{j+1} \int_I u_m(t, x) \left[(a_{(2j+1)im} \omega^{(j)})^{(j+1)} - (a_{(2j)im} \omega^{(j)})^{(j)} \right] dx + \\ &\quad + \int_I f_i(t, x) \omega dx + \sum_{j=0}^l \int_I G_{ji}(t, x) \omega^{(j)} dx. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|q'(\cdot; u_i, \omega)\|_{L_2(0,T)} &\leq c(T) \left[\|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \right. \\ &\quad + \|\nu_l\|_{(L_2(0,T))^n} + \|f\|_{(L_1(0,T;L_2(I)))^n} + \|f\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^l (\|G_j\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,T;L_2(I)))^n} + \|G_j\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n}) \right], \quad (2.9) \end{aligned}$$

где константа c не убывает по T .

Доказательство. Формула (2.8) была доказана при более слабых предположениях в [3, лемма 2.4]. Так как в условиях настоящей леммы, поскольку $\omega \in C^{2l}[0, R]$, то $r \in L_2(0, T)$, и в силу (2.8) $q'(t; u_i, \omega) = r(t; u_i, \omega) \in L_2(0, T)$,

$$\begin{aligned} \|q'\|_{L_2(0,T)} &\leq c \left[\sum_{j=0}^{l-1} \|\mu_j\|_{(L_2(0,T))^n} + \sum_{j=0}^l \|\nu_j\|_{(L_2(0,T))^n} + \|f\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^l \|G_j\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \|u\|_{(L_2(0,T;L_2(I)))^n} \right]. \end{aligned}$$

Так как $\|u\|_{(L_2(0,T;L_2(I))^n} \leq T^{1/2} \|u\|_{(C([0,T];L_2(I)))^n} \leq T^{1/2} \|u\|_{(X(Q_T))^n}$, применяя неравенство (2.6), завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 2.2. Пусть для матриц a_j выполнены условия (1.8), (1.9) и условие (1.6). Пусть для любого $i = 1, \dots, n$, для которого $m_i + n_i > 0$, при $k = 1, \dots, m_i + n_i$ функции ω_{ki} удовлетворяют условию (1.12), $\varphi_{ki} \in \tilde{H}^1(0, T)$, функции $h_{ki} \in C([0, T]; L_2(I))$ в случае $m_i > 0$ и для соответствующих функций ψ_{kji} выполнены условия (1.18). Тогда существуют единственное множество M функций $F = \{F_{ki}(t) \in L_2(0, T), i : m_i > 0, k = 1, \dots, m_i\}$ и единственное множество N функций $\Phi = \{\nu_{li}(t) \in L_2(0, T), i : n_i > 0\}$, таких что для функций $f = (f_1, \dots, f_n)^T \equiv HF$ и $\nu_l = (\nu_{l1}, \dots, \nu_{ln})^T \equiv J\Phi$, где при $m_i > 0$

$$f_i(t, x) = \sum_{k=1}^{m_i} F_{ki}(t) h_{ki}(t, x),$$

$f_i(t, x) \equiv 0$ при $m_i = 0$, $\nu_{li}(t) \equiv 0$ при $n_i = 0$, соответствующая функция

$$u = S_0 f + S_l \nu_l = (S_0 \circ H)F + (S_l \circ J)\Phi \quad (2.10)$$

удовлетворяет всем условиям (1.5). Более того, если положить

$$(F, \Phi) = \Gamma \{\varphi_{ki}, i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i\},$$

то линейный оператор $\Gamma : (\tilde{H}^1(0, T))^{M+N} \rightarrow (L_2(0, T))^{M+N}$ ограничен и его норма не убывает по T .

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (1.16)–(1.18) $\psi_{kji} \in C[0, T]$ и

$$|\Delta_i(t)| \geq \Delta_0 > 0, \quad |\psi_{kji}(t)| \leq \psi_0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

На пространстве $(L_2(0, T))^{M+N}$ введем $M + N$ линейных операторов $\Lambda_{ki}(F, \Phi) = Q(\omega_{ki}) \circ [(S_0 \circ H)F + (S_l \circ J)\Phi]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_{ki}\}$. Тогда, поскольку $HF \in (L_2(0, T; L_2(I)))^n$, $J\Phi \in (L_2(0, T))^n$, из теоремы 2.1 и леммы 2.1 следует, что оператор Λ действует из пространства $(L_2(0, T))^{M+N}$ в пространство $(\tilde{H}^1(0, T))^{M+N}$ и ограничен.

Заметим, что набор равенств $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$, $i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i$, для $(F, \Phi) \in (L_2(0, T))^{M+N}$ очевидно означает, что набор функций (F, Φ) является искомым.

Положим для каждого i , для которого $m_i + n_i > 0$,

$$\tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) \equiv (-1)^{l+1} \int_I u_i(t, x) \left(a_{(2l+1)i} \omega_{ki}^{(2l+1)} - a_{2l} \omega_{ki}^{(2l)} \right) dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{j+1} \int_I u_m(t, x) \left[(a_{(2j+1)im} \omega_{ki}^{(j)})^{(j+1)} - (a_{(2j)im} \omega_{ki}^{(j)})^{(j)} \right] dx \in C[0, T], \quad (2.12)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T = (S_0 \circ H)F + (S_l \circ J)\Phi$. Тогда из равенства (2.8) следует, что для $q(t; u_i, \omega_{ki}) = (\Lambda_{ki}(F, \Phi))(t)$

$$q'(t; u_i, \omega_{ki}) = \tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) + \sum_{j=1}^{m_i} F_{ji}(t) \psi_{kji}(t) + n_i \nu_{li}(t) \psi_{k(m_i+1)i}(t) \in L_2(0, T), \quad (2.13)$$

где функции ψ_{kji} заданы формулами (1.16), (1.17). Положим

$$y_{ki}(t) \equiv q'(t; u_i, \omega_{ki}) - \tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) \in L_2(0, T), \quad k = 1, \dots, m_i + n_i \quad (2.14)$$

и обозначим через $\tilde{\Delta}_{ki}(t)$ определитель матрицы размера $(m_i + n_i) \times (m_i + n_i)$, где по сравнению с матрицей $(\psi_{kji}(t))$ k -й столбец заменен столбцом $(y_{1i}(t), \dots, y_{(m_i+n_i)i}(t))^T$. Тогда из равенства (2.13) следует, что

$$F_{ki}(t) = \frac{\tilde{\Delta}_{ki}(t)}{\Delta_i(t)}, \quad k = 1, \dots, m_i, \quad \nu_{li}(t) = \frac{\tilde{\Delta}_{(m_i+1)i}(t)}{\Delta_i(t)}, \quad n_i = 1. \quad (2.15)$$

Положим

$$z_{ki}(t) \equiv \varphi'_{ki}(t) - \tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) \in L_2(0, T), \quad k = 1, \dots, m_i + n_i, \quad (2.16)$$

и обозначим через $\Delta_{ki}(t)$ определитель матрицы размера $(m_i + n_i) \times (m_i + n_i)$, где по сравнению с $\tilde{\Delta}_{ki}(t)$ k -й столбец $(y_{1i}(t), \dots, y_{(m_i+n_i)i}(t))^T$ заменен столбцом $(z_{1i}(t), \dots, z_{(m_i+n_i)i}(t))^T$.

Введем операторы $A_{ki} : L_2(0, T) \rightarrow L_2(0, T)$ формулой

$$(A_{ki}(F, \Phi))(t) \equiv \frac{\Delta_{ki}(t)}{\Delta_i(t)}, \quad i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i, \quad (2.17)$$

и пусть $A(F, \Phi) = \{A_{ki}(F, \Phi)\}$, $A : (L_2(0, T))^{M+N} \rightarrow (L_2(0, T))^{M+N}$.

Докажем, что $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$, $i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i$, тогда и только тогда, когда $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$.

Действительно, если $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$, то $\varphi'_{ki}(t) \equiv q'(t; u_i, \omega_{ki})$ для функции $q(t; u_i, \omega_{ki}) \equiv (\Lambda_{ki}(F, \Phi))(t)$, и тогда из равенств (2.14)–(2.17) следует, что $\Delta_{ki}(t) \equiv \tilde{\Delta}_{ki}(t)$. Поэтому $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$.

Обратно, если $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$, то $\Delta_{ki}(t) \equiv \tilde{\Delta}_{ki}(t)$ и из условия $\Delta_i(t) \neq 0$ следует, что $z_{ki}(t) \equiv y_{ki}(t)$, а тогда $\varphi'_{ki}(t) \equiv q'(t; u_i, \omega_{ki})$. Поскольку $\varphi_{ki}(0) = q(0; u_i, \omega_{ki}) = 0$, мы получаем, что $q(t; u_i, \omega_{ki}) \equiv \varphi_{ki}(t)$.

Теперь покажем, что оператор A является сжимающим при подходящем выборе специальной нормы в пространстве $(L_2(0, T))^{M+N}$.

Пусть $(F_1, \Phi_1), (F_2, \Phi_2) \in (L_2(0, T))^{M+N}$, $u_m \equiv (S_0 \circ H)F_m + (S_l \circ J)\Phi_m$, $m = 1, 2$. Обозначим через $\Delta_{ki}^*(t)$ определитель матрицы размера $(m_i + n_i) \times (m_i + n_i)$, где по сравнению с матрицей $(\psi_{kji}(t))$ k -й столбец заменен на столбец, в котором на j -й строке стоит элемент $\tilde{r}(t; u_{1i}, \omega_{ji}) - \tilde{r}(t; u_{2i}, \omega_{ji}) = \tilde{r}(t; u_{1i} - u_{2i}, \omega_{ji})$. Тогда

$$(A_{ki}(F_1, \Phi_1))(t) - (A_{ki}(F_2, \Phi_2))(t) = -\frac{\Delta_{ki}^*(t)}{\Delta_i(t)}. \quad (2.18)$$

В силу неравенства (2.6) для $t \in [0, T]$

$$\|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{(L_2(I))^n} \leq c(T) \left[\sum_{i: m_i > 0} \sum_{j=1}^{m_i} \|h_{ji}\|_{C([0, T]; L_2(I))} \|F_{1ji} - F_{2ji}\|_{L_2(0, t)} + \sum_{i: n_i > 0} \|\nu_{1li} - \nu_{2li}\|_{L_2(0, t)} \right]. \quad (2.19)$$

Пусть $\gamma > 0$, тогда с учетом (2.11), (2.12), (2.18) и (2.19)

$$\|e^{-\gamma t} (A(F_1, \Phi_1) - A(F_2, \Phi_2))\|_{(L_2(0, T))^{M+N}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(\{\|\omega_{ji}\|_{H^{2l+1}(I)}\}, \psi_0)}{\Delta_0} \left(\int_0^T e^{-2\gamma t} \|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{(L_2(I))^n}^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq c(T, (\{\|\omega_{ji}\|_{H^{2l+1}(I)}\}, \psi_0, \Delta_0^{-1}, \{\|h_{ji}\|_{C([0,T]; L_2(I))}\}) \left[\int_0^T e^{-2\gamma t} \int_0^t \left(\sum_{i:m_i>0} \sum_{j=1}^{m_i} (F_{1ji}(\tau) - F_{2ji}(\tau))^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i:n_i>0} (\nu_{1li}(\tau) - \nu_{2li}(\tau))^2 \right) d\tau dt \right]^{1/2} = \\
&= c \left[\int_0^T \left(\sum_{i:m_i>0} \sum_{j=1}^{m_i} (F_{1ji}(\tau) - F_{2ji}(\tau))^2 + \sum_{i:n_i>0} (\nu_{1li}(\tau) - \nu_{2li}(\tau))^2 \right) \left(\int_\tau^T e^{-2\gamma t} dt \right) d\tau \right]^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{c}{(2\gamma)^{1/2}} \|e^{-\gamma \tau} ((F_1, \Phi_1) - (F_2, \Phi_2))\|_{(L_2(0,T))^{M+N}}. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Осталось выбрать достаточно большое γ .

Таким образом, для любого набора функций $\varphi_{ki} \in (\tilde{H}^1(0, T))^{M+N}$ существует единственный набор функций $(F, \Phi) \in (L_2(0, T))^{M+N}$, для которого $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$, т. е. $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$. Это означает, что оператор Λ обратим, и тогда из теоремы Банаха следует, что обратный оператор $\Gamma = \Lambda^{-1} : (\tilde{H}^1(0, T))^{M+N} \rightarrow (L_2(0, T))^{M+N}$ непрерывен. В частности,

$$\|\Gamma\{\varphi_{ki}\}\|_{(L_2(0,T))^{M+N}} \leq c(T) \|\{\varphi'_{ki}\}\|_{(L_2(0,T))^{M+N}}. \quad (2.21)$$

Наконец, если для произвольного $T_1 > T$ продолжить функции φ_{ki} константами $\varphi_{ki}(T)$ на интервал (T, T_1) , то аналог неравенства (2.21) на интервале $(0, T_1)$ для таких функций очевидно выполнен для константы $c(T_1) \geq c(T)$. Это означает, что норма оператора Γ не убывает по T . $\square$

В следующей теореме приводится решение обратной задачи для линейной системы в общем случае.

Теорема 2.2. Пусть для матриц a_j выполнены условия (1.8), (1.9) для некоторого $T > 0$. Предположим, что $u_0 \in (L_2(I))^n$, $(\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}) \in (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n$, $\nu_{li} \in L_2(0, T)$ если $n_i = 0$ и положим $\tilde{\nu}_l = (\tilde{\nu}_{l1}, \dots, \tilde{\nu}_{ln})^T$, где $\tilde{\nu}_{li} = 0$ при $n_i = 1$, $\tilde{\nu}_{li} = \nu_{li}$ при $n_i = 0$. Пусть $h_0 = (h_{01}, \dots, h_{0n})^T \in (L_1(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $G_j \in (L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $j = 0, \dots, l$. Предположим, что выполнено условие (1.6) и для любого $i = 1, \dots, n$, для которого $m_i + n_i > 0$, при $k = 1, \dots, m_i + n_i$ функции ω_{ki} удовлетворяют условию (1.12); $\varphi_{ki} \in H^1(0, T)$ и выполнено условие (1.15); $h_{ki} \in C([0, T]; L_2(I))$ для $k = 1, \dots, m_i$ если $m_i > 0$. Предположим, что выполнено условие (1.18), где функции ψ_{kji} заданы формулами (1.16), (1.17). Тогда существуют единственное множество M функций $F = \{F_{ki}(t) \in L_2(0, T), i : m_i > 0, k = 1, \dots, m_i\}$, единственное множество N функций $\nu_i(t) \in L_2(0, T), i : n_i = 1\}$ и соответствующее единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (2.4), (1.2), (1.3), удовлетворяющее условиям (1.5), где

$$f \equiv h_0 + HF, \quad \nu_l \equiv \tilde{\nu}_l + J\Phi, \quad (2.22)$$

$$(F, \Phi) = \Gamma \left\{ \varphi_{ki} - Q(\omega_{ki}) (\tilde{S}W + S_l \tilde{\nu}_l + S_0 h_0 + \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j G_j)_i, i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i \right\}, \quad (2.23)$$

$$u = \tilde{S}W + S_l \nu_l + S_0 f + \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j G_j. \quad (2.24)$$

Доказательство. Положим

$$v \equiv S(u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}), \tilde{\nu}_l, h_0, (G_0, \dots, G_l)) = \tilde{S}W + S_l \tilde{\nu}_l + S_0 h_0 + \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j G_j.$$

В силу леммы 2.1 $Q(\omega_{ki})v_i \in H^1(0, T)$. Более того, согласно (1.15) $Q(\omega_{ki})v_i|_{t=0} = \varphi_{ki}(0)$. Положим

$$\tilde{\varphi}_{ki} \equiv \varphi_{ki} - Q(\omega_{ki})v_i,$$

тогда $\tilde{\varphi}_{ki} \in \tilde{H}^1(0, T)$. В свою очередь, из леммы 2.2 следует, что функции $(F, \Phi) \equiv \Gamma\{\tilde{\varphi}_{ki}\}$ и $u \equiv v + (S_l \circ J)\Phi + (S_0 \circ H)F$ по формулам (2.22) и (2.24) дают искомое решение рассматриваемой задачи. Единственность также следует из леммы 2.2. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. На пространстве $(X(Q_T))^n$ введем отображение Θ

$$u = \Theta v \equiv \tilde{S}W + S_l \tilde{v}_l + S_0 h_0 - \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v) + (S_l \circ J)\Phi + (S_0 \circ H)F, \quad (3.1)$$

$$(F, \Phi) \equiv \Gamma\left\{\varphi_{ki} - Q(\omega_{ki})(\tilde{S}W + S_l \tilde{v}_l + S_0 h_0 - \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v))_i\right\}. \quad (3.2)$$

Заметим, что в силу условий (1.10), (1.11) для $i = 1, \dots, n$

$$|g_{ji}(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)| \leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} (|\partial_x^m v|^{b_1(j,k,m)} + |\partial_x^m v|^{b_2(j,k,m)}) |\partial_x^k v|. \quad (3.3)$$

Положим при $j < l$

$$e(b_i(j, k, m)) = \begin{cases} \frac{2l - 2k + 1 - (2m + 1)b_i(j, k, m)}{4l}, & b_i(j, k, m) > 1, \\ \frac{l - k - mb_i(j, k, m)}{2l}, & b_i(j, k, m) \leq 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

а при $j = l$

$$e(b_i(l, k, m)) = \frac{2l - 2k - (2m + 1)b_i(l, k, m)}{4l}; \quad (3.5)$$

в частности, в силу (1.13), (1.14) все величины $e(b_i(j, k, m)) \geq 0$. Заметим, что если $j < l$, то

$$\frac{2l - 2k + 1}{2m + 1} < \frac{4l - 2j - 2k}{2m + 1},$$

более того, если $m + k \geq l$, то

$$\frac{l - k}{m} \leq \frac{2l - 2k + 1}{2m + 1}.$$

Тогда из условий (1.13), (1.14) и неравенства (2.1) следует, что

$$g_{ji}(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v) \in L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)),$$

более того,

$$\|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n} \leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^2 (T^{e(b_i(j,k,m))} + T^{(2l-j)/(2l)}) \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_i(j,k,m)+1}. \quad (3.6)$$

В свою очередь, из условий (1.13)-(1.14) и неравенств (2.2)-(2.3) следует, что $g_{ji}(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v) \in L_2(0, T; L_1(I))$, более того,

$$\|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_2(0, T; L_1(I)))^n} \leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^2 (T^{e(b_i(j,k,m))} + T^{1/2}) \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_i(j,k,m)+1}. \quad (3.7)$$

Тогда в силу теоремы 2.2 отображение Θ существует. Пусть

$$b_1 = \min_{j,k,m} b_1(j, k, m), \quad b_2 = \max_{j,k,m} b_2(j, k, m), \quad 0 < b_1 \leq b_2, \quad (3.8)$$

тогда из неравенств (3.6) и (3.7) следует, что при $0 \leq j \leq l$

$$\|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n} + \|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_2(0, T; L_1(I)))^n} \leq$$

$$\leq c(T) \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right). \quad (3.9)$$

Применим леммы 2.1 и 2.2, тогда для функций (F, Φ) из равенства (3.2) следует оценка

$$\begin{aligned} \|(F, \Phi)\|_{(L_2(0,T))^{M+N}} &\leq c(T) \left[\|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \right. \\ &\quad + \|\tilde{\nu}_l\|_{(L_2(0,T))^n} + \|h_0\|_{(L_1(0,T;L_2(I)))^n} + \|h_0\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \|\{\varphi'_{ki}\}\|_{(L_2(0,T))^{M+N}} + \\ &\quad \left. + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right]. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Поскольку также очевидно, что

$$\begin{aligned} \|HF\|_{(L_2(0,T;L_2(I)))^n} &\leq \max_{i:m_i>0, k=1, \dots, m_i} (\|h_{ki}\|_{C([0,T];L_2(I))}) \|F\|_{(L_2(0,T))^M}, \\ \|J\Phi\|_{(L_2(0,T))^n} &= \|\Phi\|_{(L_2(0,T))^N}, \end{aligned}$$

то из неравенства (2.6) следует, что

$$\|\Theta v\|_{(X(Q_T))^n} \leq c(T)c_0 + c(T) \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right). \quad (3.11)$$

Далее, для произвольных функций $v_1, v_2 \in (X(Q_T))^n$

$$\begin{aligned} |g_{ji}(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_{ji}(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2)| &\leq \\ &\leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \left(|\partial_x^m v_1|^{b_1(j,k,m)} + |\partial_x^m v_2|^{b_1(j,k,m)} + |\partial_x^m v_1|^{b_2(j,k,m)} + |\partial_x^m v_2|^{b_2(j,k,m)} \right) |\partial_x^k (v_1 - v_2)|, \quad (3.12) \end{aligned}$$

поэтому, аналогично (3.9)

$$\begin{aligned} \|g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,T;L_2(I)))^n} + \\ + \|g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2)\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} \leq \\ \leq c(T) \left(\|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} \right) \|v_1 - v_2\|_{(X(Q_T))^n}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Theta v_1 - \Theta v_2 &= - \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j \left[g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2) \right] + \\ &\quad + (S_l \circ J)(\Phi_1 - \Phi_2) + (S_0 \circ H)(F_1 - F_2), \quad (3.14) \end{aligned}$$

где

$$(F_1, \Phi_1) - (F_2, \Phi_2) = \Gamma \left\{ Q(\omega_{ki}) \left(\sum_{j=0}^l \tilde{S}_j \left[g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2) \right] \right) \right\}_i, \quad (3.15)$$

то аналогично (3.11)

$$\begin{aligned} \|\Theta v_1 - \Theta v_2\|_{(X(Q_T))^n} &\leq \\ &\leq c(T) \left(\|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} \right) \|v_1 - v_2\|_{(X(Q_T))^n}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Теперь выберем $r > 0$ так, чтобы

$$r^{b_1} + r^{b_2} \leq \frac{1}{4c(T)}, \quad (3.17)$$

а затем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta \leq \frac{r}{2c(T)}. \quad (3.18)$$

Тогда из неравенств (3.11) и (3.16) следует, что на шаре $\overline{X}_{rn}(Q_T)$ отображение Θ является сжимающим. Его единственная неподвижная точка $u \in (X(Q_T))^n$ является искомым решением. Более того, в силу теоремы 2.2 функции (F, Φ) в (3.2) (для $v \equiv u$) определяются единственным образом.

Липшиц-непрерывная зависимость решения от входных данных устанавливается аналогично (3.11), (3.16). $\square$

Доказательство теоремы 1.2. В основном, доказательство повторяет доказательство теоремы 1.1. Искомое решение строится как неподвижная точка отображения Θ , заданного формулами (3.1), (3.2). Однако в силу того, что в условиях (1.13), (1.14) нестрогие неравенства заменены на строгие, здесь все величины $e(b_i(j, k, m)) > 0$. Положим

$$\sigma = \min_{j,k,m} e(b_2(j, k, m)) > 0. \quad (3.19)$$

Тогда из неравенств (3.6), (3.7) получаем, что в отличие от (3.9)

$$\begin{aligned} \|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,T;L_2(I)))^n} + \|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} \leq \\ \leq c(T)T^\sigma \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

а тогда, используя также оценку (3.10), выводим аналогично (3.11), что

$$\|\Theta v\|_{(X(Q_T))^n} \leq c(T)c_0 + c(T)T^\sigma \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right). \quad (3.21)$$

Также аналогично (3.16) находим, что

$$\begin{aligned} \|\Theta v_1 - \Theta v_2\|_{(X(Q_T))^n} \leq \\ \leq c(T)T^\sigma \left(\|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} \right) \|v_1 - v_2\|_{(X(Q_T))^n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее для доказательства первого утверждения теоремы при фиксированном δ выберем $T_0 > 0$ так, чтобы

$$4c(T_0)T_0^\sigma \left((2c(T_0)\delta)^{b_1} + (2c(T_0)\delta)^{b_2} \right) \leq 1, \quad (3.23)$$

а затем для любого $T \in (0, T_0]$ выберем произвольное r , для которого

$$r \geq 2c(T)\delta, \quad 4c(T)T^\sigma (r^{b_1} + r^{b_2}) \leq 1 \quad (3.24)$$

(это множество непусто согласно (3.23), поскольку величина $c(T)$ не убывает по T). Тогда отображение Θ является сжимающим на шаре $\overline{X}_{rn}(Q_T)$.

Для второго утверждения теоремы доказательство того факта, что в случае фиксированного T отображение Θ является сжимающим на шаре $\overline{X}_{rn}(Q_T)$, ничем не отличается от аналогичного доказательства для теоремы 1.1.

Для того, чтобы доказать единственность решения во всем пространстве в обоих случаях, заметим, что для достаточно большого r величина T_0 может быть выбрана настолько малой, что решение рассматриваемой задачи $u \in (X(Q_{T_0}))^n$ будет единственной неподвижной точкой сжимающего отображения Θ в шаре $\overline{X}_{rn}(Q_{T_0})$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
2. Фаминский А. В. О задачах управляемости для уравнения Кортевега—де Фриза с интегральным переопределением // Дифф. уравн. — 2019. — 55, № 1. — С. 123–133.
3. Balashov O. S., Faminskii A. V. On direct and inverse problems for systems of odd-order quasilinear evolution equations // Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 4. — С. 33–53.
4. Bona J. L., Cohen J., Wang G. Global well-posedness for a system of KdV-type equations with coupled quadratic nonlinearities // Nagoya Math. J. — 2014. — 215. — С. 67–149.
5. Faminskii A. V. On inverse problems for odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2023. — 271, № 3. — С. 281–299.
6. Faminskii A. V., Martynov E. V. Inverse problems for the higher order nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2023. — 274, № 4. — С. 475–492.
7. Lu S., Chen M., Lui Q. A nonlinear inverse problem of the Korteweg–de Vries equation // Bull. Math. Sci. — 2019. — 9, № 3. — 1950014.
8. Majda A. J., Biello J. A. The nonlinear interaction of barotropic and equatorial baroclinic Rossby waves // J. Atmos. Sci. — 2003. — 60. — С. 1809–1821.

9. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York—Basel: Marcel Dekker Inc., 1999.

О. С. Балашов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: balashovos@s1238.ru

А. В. Фаминский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: faminskiy-av@pfur.ru

UDC 517.956.6

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32

EDN: STIIBB

Inverse initial-boundary value problem for systems of quasilinear evolution equations of odd order

O. S. Balashov and A. V. Faminskii

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. An inverse initial-boundary value problem on a bounded interval for systems of quasilinear evolution equations of odd order is considered. Integral conditions are chosen as overdeterminations, and boundary functions and right-hand sides of equations of a special type are chosen as controls. Results on the existence and uniqueness of solutions for small initial data or a small time interval are established.

Keywords: quasilinear evolution equations, odd order, inverse problem, initial-boundary value problem, integral conditions, existence, uniqueness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The second author was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00056).

For citation: O. S. Balashov, A. V. Faminskii, “Inverse initial-boundary value problem for systems of quasilinear evolution equations of odd order,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 18–32. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32>

REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vloženiya* [Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vloženiya], Nauka, Moscow, 1996 (in Russian).
2. A. V. Faminskii, “O zadachakh upravlyaemosti dlya uravneniya Kortevaga—de Friza s integral'nym pereopredeleniem” [On controllability problems for the Korteweg—de Vries equation with integral overdetermination], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 1, 123–133 (in Russian).
3. O. S. Balashov and A. V. Faminskii, “On direct and inverse problems for systems of odd-order quasilinear evolution equations,” *Eurasian Math. J.*, 2024, **15**, No. 4, 33–53.
4. J. L. Bona, J. Cohen, and G. Wang, “Global well-posedness for a system of KdV-type equations with coupled quadratic nonlinearities,” *Nagoya Math. J.*, 2014, **215**, 67–149.

5. A. V. Faminskii, “On inverse problems for odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **271**, No. 3, 281–299.
6. A. V. Faminskii and E. V. Martynov, “Inverse problems for the higher order nonlinear Schrödinger equation,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **274**, No. 4, 475–492.
7. S. Lu, M. Chen, and Q. Lui, “A nonlinear inverse problem of the Korteweg–de Vries equation,” *Bull. Math. Sci.*, 2019, **9**, No. 3, 1950014.
8. A. J. Majda and J. A. Biello, “The nonlinear interaction of barotropic and equatorial baroclinic Rossby waves,” *J. Atmos. Sci.*, 2003, **60**, 1809–1821.
9. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, and I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker Inc., New York–Basel, 1999.

O. S. Balashov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: balashovos@s1238.ru

A. V. Faminskii
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: faminskiy-av@pfur.ru

УДК 517.984.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54

EDN: TPUIIY

СПЛАЙНЫ, БИГАРМОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР И ПРИБЛИЖЕННОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

М. БЕН-АРЦИ

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Иерусалим, Израиль

Аннотация. Бигармонический оператор играет центральную роль в широком спектре физических моделей, таких как теория упругости и формулировка функции потока уравнений Навье—Стокса. Его спектральная теория была тщательно изучена. В частности, одномерный случай (на интервале) служит базовой моделью задачи Штурма—Лиувилля высокого порядка. Потребность в соответствующих численных симуляциях привела к многочисленным работам. Этот обзор фокусируется на дискретном бигармоническом исчислении. Основным объектом этого исчисления является компактный дискретный бигармонический оператор (ДБО) высокого порядка. ДБО строится в терминах дискретной эрмитовой производной. Отмечается удивительно сильная связь между кубическими сплайн-функциями (на интервале) и ДБО. В частности, ядро обратного дискретного оператора (с точностью до масштабирования) равно сеточной оценке ядра $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^4\right]^{-1}$. Этот факт влечет за собой вывод о том, что собственные значения ДБО сходятся (с «оптимальной» скоростью $O(h^4)$) к непрерывным. Другим следствием является справедливость *принципа сравнения*. Хорошо известно, что для уравнения четвертого порядка не существует принципа максимума. Однако имеет место положительность как для непрерывного, так и для дискретного бигармонического уравнения, а это означает, что в обоих случаях ядра сохраняют порядок.

Ключевые слова: кубические сплайны, эрмитова производная, дискретный бигармонический оператор, собственные значения, ядро Грина.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. С удовольствием выражаем благодарность Жану-Пьеру Круазилло, Далии Фишелов и Гаю Катриэлю за весьма плодотворные дискуссии.

Для цитирования: М. Бен-Арци. Сплайны, бигармонический оператор и приближенное собственное значение // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 33–54. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54>

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной статьи является обзор некоторых недавних результатов, касающихся удивительной связи между кубическими сплайн-функциями и дискретным приближением одномерного бигармонического оператора.

Оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ на интервале $[0, 1]$, безусловно, является простейшим мыслимым примером эллиптического одномерного оператора четвертого порядка. Как таковая, его спектральная теория очень хорошо изучена [10, гл. 5] или [14]. В классической терминологии его изучение обозначается как «теория Штурма—Лиувилля четвертого порядка». В более общем смысле можно рассмотреть

спектральную структуру операторов вида $\left(\frac{d}{dx}\right)^4 + \frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{d}{dx}\right) + B(x)$. Для таких операторов было доказано в [8], что изоспектральное множество (коэффициентов $A(x)$, $B(x)$) является бесконечномерным вещественно-аналитическим многообразием (при условии, что спектр является простым).

Эллиптические операторы четвертого порядка, и в частности бигармонический оператор, играют важную роль в различных физических моделях, таких как теория упругости, формулировка функции потока уравнений Навье—Стокса [4] или квази-геострофические течения в океане [21].

Существует обширная литература, посвященная различным дискретным приближениям к решениям уравнений четвертого порядка. Поскольку в этом обзоре мы сосредоточимся на *одномерной задаче на собственные значения*, мы будем ссылаться только на исследования, которые тесно связаны с этой проблемой.

Численная оценка собственных значений была фундаментальной целью в развитии численного анализа и, как таковая, предметом многочисленных исследований. В качестве показательных примеров можно упомянуть метод выборки «типа Шеннона» в [7], «матричные методы» в [24], методы конечных элементов в [2] и 7-диагональный метод конечных разностей в [9]. Целью этих работ было получение собственных значений непрерывного оператора с помощью подходящей процедуры аппроксимации.

Здесь мы выделяем приближение «высокого порядка» собственных значений одномерного бигармонического оператора. Однако подход, адаптированный здесь, основан на «дискретной эллиптической теории», как недавно было изложено в [5]. Он включает в себя построение дискретных эллиптических операторов, которые, как можно показать, обладают классическими эллиптическими свойствами, такими как коэрцитивность и регулярность. Фундаментальным дискретным оператором здесь является *дискретный бигармонический оператор* (ДБО) δ_x^4 (см. (2.9)). Идея состоит в том, чтобы рассматривать этот ДБО как конечномерное *операторное* приближение к $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ и сделать вывод, что собственные значения последнего являются пределами (при измельчении сетки) собственных значений первого.

Хорошо известно, что сходимость конечномерных приближений к бесконечномерному, неограниченному дифференциальному оператору не влечет за собой сходимости соответствующих спектров. Поэтому требуется более глубокая связь между дискретными и непрерывными операторами. Мост между двумя операторами достигается с помощью классических кубических сплайн-функций.

Базовым инструментом дискретного эллиптического исчисления является *дискретная эрмитова производная* на интервале, которая дает точную аппроксимацию четвертого порядка производной гладкой функции. Она стала краеугольным камнем в построении ДБО [15] и ее расширения до полной задачи Штурма—Лиувилля четвертого порядка [5].

Структура данной обзорной статьи следующая.

В разделе 2 мы напомним определения дискретных конечно-разностных операторов и, в частности, вводим эрмитову производную и дискретный бигармонический оператор δ_x^4 .

В пункте 3.1 мы напомним базовую (классическую) конструкцию кубических сплайн-функций на интервале.

В пункте 3.2 мы впервые устанавливаем равенство эрмитовой производной и производной интерполяционного кубического сплайна. Это фундаментальный факт, связывающий два нелокальных приближения четвертого порядка производной.

Затем представлена связь между дискретным бигармоническим оператором δ_x^4 и интерполирующей кубической сплайн-функцией. Фактически, это главная цель данной статьи. Напомним, что кубические сплайны являются функциями C^2 с конечными скачками производных третьего порядка в точках сетки. Основной результат здесь (предложение 3.2) состоит в том, что размеры этих скачков определяются ДБО, действующим на значения сетки. Мы не смогли найти такой результат в «литературе по сплайнам», возможно, из-за того, что ДБО там явно не рассматривается.

Эта связь позволяет нам вспомнить в разделе 4 результаты о положительности для непрерывных и дискретных операторов четвертого порядка (см. предложение 4.1 и предложение 4.2).

Напомним, что для оператора четвертого порядка не существует принципа максимума-минимума, так что свойство «сохранения порядка» может служить заменой в некоторых случаях.

В разделе 5 мы сначала приводим явный вид ядра (функции Грина) непрерывного оператора. В первом случае это ядро действует в $L^2(0,1)$. Затем мы представляем его расширение на отрицательное пространство Соболева $H^{-2}(0,1)$. Это пространство включает все конечные меры и, в частности, все сеточные функции (идентифицированные как линейные комбинации дельта-функций в узлах сетки). Используя связь с кубическими сплайн-функциями, получаем замечательный результат: дискретная резольвента (а именно, ядро $(\delta_x^4)^{-1}$) является просто сеточной оценкой непрерывного ядра с точностью до масштабирования. Действительно, это можно рассматривать как альтернативное, очень естественное определение компактного дискретного бигармонического оператора.

Наконец, раздел 6 посвящен предмету данного обзора, а именно, взаимосвязи между *собственными значениями* непрерывных и дискретных операторов. Связь между дискретными и непрерывными ядрами подразумевает, что дискретные собственные значения фактически получаются с помощью метода Нистрома [26].

Именно вышеупомянутая связь между ядрами влечет за собой не только простую сходимость дискретных собственных значений к непрерывным, но и то, что эта сходимость происходит с «оптимальной» скоростью четвертого порядка (теорема 6.1). Хотя мы не приводим полных деталей доказательства, мы указываем, как этот результат получается путем объединения двух ингредиентов:

1. Подходящая адаптация (лемма 6.1) более общей абстрактной теоремы о сходимости [18,20]. Однако мы решили предоставить самодостаточное, гораздо более простое доказательство, которое строится на аналитической теории конечномерных возмущений, изложенной в классической книге Като [17].
2. Возможность оценки разностей непрерывных и дискретных операторов, включая оптимальные скорости сходимости, в терминах разностей их соответствующих ядер, см. предложение 6.2.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Снабдим интервал $\Omega = [0,1]$ равномерной сеткой

$$x_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Аппроксимация осуществляется сеточными функциями $\mathbf{v}$, определенными на $\{x_j, 0 \leq j \leq N\}$. Пространство этих сеточных функций обозначим через l_h^2 . Для их компонент используем либо $\mathbf{v}_j$, либо $\mathbf{v}(x_j)$.

Для каждой гладкой функции $f(x)$ мы определяем связанную с ней сеточную функцию

$$f_j^* = f(x_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2.1)$$

Дискретное скалярное произведение l_h^2 определяется как

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_h = h \sum_{j=0}^N \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j,$$

а соответствующая норма

$$|\mathbf{v}|_h^2 = h \sum_{j=0}^N \mathbf{v}_j^2. \quad (2.2)$$

Для линейных операторов $\mathcal{A} : l_h^2 \rightarrow l_h^2$ мы используем $|\mathcal{A}|_h$ для обозначения нормы оператора. Дискретная sup-норма определяется как

$$|\mathbf{v}|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} \{|\mathbf{v}_j|\}. \quad (2.3)$$

Дискретное однородное пространство сеточных функций определяется как

$$l_{h,0}^2 = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_N = 0\}. \quad (2.4)$$

Учитывая $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$, введем основные (центральные) операторы конечных разностей

$$\begin{aligned} (\delta_x \mathbf{v})_j &= \frac{1}{2h}(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ (\delta_x^2 \mathbf{v})_j &= \frac{1}{h^2}(\mathbf{v}_{j+1} - 2\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq N-1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Краеугольным камнем нашего подхода к операторам конечных разностей является введение *эрмитовой производной* [5] $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$, которая заменит δ_x . Она будет служить не только для аппроксимации (до четвертого порядка точности) производных первого порядка, но и в качестве фундаментального строительного блока при построении аппроксимаций конечных разностей для производных более высокого порядка.

Сначала мы введем оператор Симпсона

$$(\sigma_x \mathbf{v})_j = \frac{1}{6}\mathbf{v}_{j-1} + \frac{2}{3}\mathbf{v}_j + \frac{1}{6}\mathbf{v}_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2.6)$$

Обратите внимание на операторное отношение (действительно в $l_{h,0}^2$)

$$\sigma_x = I + \frac{h^2}{6}\delta_x^2, \quad (2.7)$$

так что σ_x является «приближением к тождеству».

Эрмитова производная $\mathbf{v}_x$ теперь определяется как

$$(\sigma_x \mathbf{v}_x)_j = (\delta_x \mathbf{v})_j, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2.8)$$

Замечание 2.1. В определении (2.8) необходимо указать значения $(\mathbf{v}_x)_j$, $j = 0, N$, чтобы левая часть имела смысл (для $j = 1, N-1$). Если не указано иное, в дальнейшем мы будем предполагать, что $\mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$, а именно

$$(\mathbf{v}_x)_0 = (\mathbf{v}_x)_N = 0.$$

В частности, линейное соответствие $l_{h,0}^2 \ni \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$ корректно определено, но δ_x имеет нетривиальное ядро.

Дискретный бигармонический оператор (ДБО) задается выражением (при $\mathbf{v}, \mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$)

$$\delta_x^4 \mathbf{v} = \frac{12}{h^2}[\delta_x \mathbf{v}_x - \delta_x^2 \mathbf{v}]. \quad (2.9)$$

Погрешность усечения ДБО составляет $O(h^4)$ во внутренних точках, но только $O(h)$ в точках вблизи границы [4, предложение 10.8]. Однако полная («оптимальная») точность четвертого порядка достигается обратным оператором (см. (2.15) ниже). Это фундаментальный факт в настоящем исследовании.

Далее мы вводим замену четвертого порядка для оператора δ_x^2 (см. [4, уравнение (10.50)(с)]),

$$(\tilde{\delta}_x^2 \mathbf{v})_j = 2(\delta_x^2 \mathbf{v})_j - (\delta_x \mathbf{v}_x)_j, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2.10)$$

Обратите внимание, что в соответствии с замечанием 2.1 оператор $\tilde{\delta}_x^2$ определен на сеточных функциях $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$, так что также $\mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$.

Связь между двумя операторами разности для производной второго порядка определяется соотношением

$$-\tilde{\delta}_x^2 = -\delta_x^2 + \frac{h^2}{12}\delta_x^4. \quad (2.11)$$

Замечание 2.2. Очевидно, что операторы δ_x , δ_x^2 , δ_x^4 зависят от h , но для простоты записи эта зависимость явно не указывается.

Тот факт, что бигармонический дискретный оператор δ_x^4 является положительным (в частности, симметричным), доказан в [4, леммы 10.9, 10.10]. Следовательно, его обратный оператор $(\delta_x^4)^{-1}$ также является положительным. Фактически, он удовлетворяет свойству сильной коэрцитивности, что также установлено в вышеупомянутой ссылке.

Другой способ (ближе к эрмитовому подходу) определения операторов конечных разностей $\tilde{\delta}_x^2$ и δ_x^4 заключается в использовании «полиномиального подхода» [4, пункт 10.3] следующим образом.

Пусть $q(x)$ — многочлен четвертого порядка, такой что

$$q(x_j) = \mathbf{v}_j, \quad q(x_{j\pm 1}) = \mathbf{v}_{j\pm 1}, \quad q'(x_{j\pm 1}) = (\mathbf{v}_x)_{j\pm 1}.$$

Тогда

$$(\tilde{\delta}_x^2 \mathbf{v})_j = q''(x_j), \quad (\delta_x^4 \mathbf{v})_j = q^{(4)}(x_j). \quad (2.12)$$

Дискретный бигармонический оператор дает очень точное приближение к непрерывному оператору («оптимальная точность 4-го порядка»), как видно из следующего утверждения [4, теорема 10.19].

Утверждение 2.1. Пусть $f(x) \in C^4(\Omega)$, $\Omega = [0, 1]$. Пусть $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x) \quad (2.13)$$

с однородными граничными условиями

$$u(0) = \frac{d}{dx}u(0) = u(1) = \frac{d}{dx}u(1) = 0. \quad (2.14)$$

Тогда

$$|u^* - (\delta_x^4)^{-1} f^*|_\infty = O(h^4). \quad (2.15)$$

Замечание 2.3. Запись « $O(h^4)$ » здесь означает, что существует константа $C > 0$, зависящая только от f , такая, что для всех целых чисел $N > 1$

$$|u^* - (\delta_x^4)^{-1} f^*|_\infty \leq Ch^4, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Заметим, что сеточные функции в этой оценке определены на сетке с (переменным) размером ячейки h .

3. СПЛАЙНЫ, ЭРМИТОВЫ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЙ БИГАРМОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

3.1. Необходимые сведения о кубических сплайнах. В этом подразделе мы напомним основные факты о кубических сплайнах, которые будут иметь важное значение в данном исследовании.

Как и в разделе 2, рассмотрим интервал $\Omega = [0, 1]$ с равномерной сеткой

$$x_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{f} = \{f_j\}_{j=0}^N$ так, что $f_0 = f_N = 0$, а именно $\mathbf{f} \in l_{h,0}^2$ (см. (2.4)), и рассмотрим семейство

$$\mathcal{A} = \{u \in H_0^2(\Omega), \quad u_j = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, N\}.$$

Пространство $H_0^2(\Omega)$ представляет собой пространство функций, имеющих первую и вторую (дистрибутивную) производные в $L^2(\Omega)$ и обращающихся в нуль вместе со своими производными первого порядка в конечных точках.

Хорошо известно, что норму в $H_0^2(\Omega)$ можно определить как

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = \int_0^1 |u''(x)|^2 dx,$$

и в дальнейшем мы будем использовать эту норму.

Мы рассматриваем функционал

$$I(u) = \int_0^1 |u''(x)|^2 dx, \quad u \in H_0^2(\Omega).$$

Нас интересует минимизатор этого функционала на множестве $\mathcal{A}$.

Утверждение 3.1. Функционал имеет единственный минимизатор на $\mathcal{A}$, который мы обозначаем как s_f ,

$$I(s_f) < I(g), \quad s_f \neq g \in \mathcal{A}.$$

Доказательство этого классического факта может быть получено стандартными методами вариационного исчисления [13, 23]. Чисто алгебраическое доказательство можно найти в [1, теорема 3.4.3] или [11, гл. IV]. Читатель также может найти доказательство следующего утверждения в этих последних ссылках.

Утверждение 3.2.

1. s_f — кубический полином в каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$.
2. $s_f \in C_0^2(\Omega)$.
3. Предыдущие два свойства, дополненные ограничениями $s_f(x_j) = f_j$, $j = 1, \dots, N-1$, и $s_f(x_0) = s'_f(x_0) = s_f(x_N) = s'_f(x_N) = 0$, определяют s_f однозначно.

Определение 3.1. Функция s_f называется *кубическим сплайном* (первого типа), соответствующим ограничениям

$$s_f(x_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad s_f(x_0) = s'_f(x_0) = s_f(x_N) = s'_f(x_N) = 0.$$

Утверждение 3.3. Рассмотрим векторы $f = \{f_j\}_{j=0}^N$ такие, что $f_0 = f_N = 0$, а именно $f \in l_{h,0}^2$ (см. (2.4)). Тогда отображение $f \mapsto s_f \in H_0^2(\Omega)$ является взаимно однозначным и линейным.

Замечание 3.1. Свойство положительности кубического сплайна установлено в следствии 4.1 ниже.

3.2. Кубические сплайны и дискретный бигармонический оператор. Используем здесь обозначения раздела 2.

Пусть $u \in l_{h,0}^2$ — сеточная функция, обращающаяся в нуль в конечных точках, а $s_u \in H_0^2(\Omega)$ — соответствующая сплайн-функция (утверждение 3.3).

Мы используем такое же обозначение $u_j = u(x_j)$.

Пусть u_x — эрмитова производная u , и в конечных точках положим

$$u_x(x_0) = s'_u(x_0) = 0, \quad u_x(x_N) = s'_u(x_N) = 0. \quad (3.1)$$

Замечательный факт о равенстве эрмитовой производной и производной сплайн-функции сформулирован в следующем предложении (доказательство см. в [6]).

Предложение 3.1. Для всех внутренних узлов выполняется $s'_u(x_j) = u_x(x_j)$, $1 \leq j \leq N-1$.

Аналогично $u \in l_{h,0}^2$, пусть $v \in l_{h,0}^2$ будет сеточной функцией, равной нулю в конечных точках, и пусть s_v будет соответствующей сплайн-функцией. В конечных точках мы снова накладываем граничные условия (3.1).

Утверждение 3.4. Отображение $(u, v) \rightarrow \int_0^1 s''_u(x) s''_v(x) dx$ является скалярным произведением на $l_{h,0}^2$.

Доказательство. Ввиду утверждения 3.3 отображение является билинейным. Более того, если $\int_0^1 |s''_u(x)|^2 dx = 0$, то $s''_u \equiv 0$, и поскольку $s_u \in H_0^2$, то также $s_u \equiv 0$, что влечёт $u = 0$. $\square$

Обозначим через $\delta_x^4 u$ действие ДБО на u (см. (2.9)). Глубокая связь между $\delta_x^4 u$ и производными s_u дается в следующем предложении (см. доказательство в [6]).

Предложение 3.2. Пусть $u, u_x, v, v_x \in l_{h,0}^2$.

1. Дискретное скалярное произведение $\delta_x^4 u$ и v удовлетворяет условию

$$(\delta_x^4 u, v)_h = \int_0^1 s''_u(x) s''_v(x) dx. \quad (3.2)$$

2. Скачок производных третьего порядка кубических сплайнов в узлах определяется выражением

$$s_u'''(x_j^+) - s_u'''(x_j^-) = h(\delta_x^4 u)_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Замечание 3.2. В литературе (например, [1, 11]) можно найти различные выражения для скачка производных третьего порядка кубического сплайна. Однако уравнение (3.3) дает новое выражение, которое можно интерпретировать как «производную четвертого порядка» функции в узле.

3.3. Сравнение конечно-элементных и ДБО-подходов к $\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x)$. Связь ДБО с кубическими сплайн-функциями, выраженная в предложении 3.2, поднимает вопрос о связи между «дискретным функциональным исчислением» и конечно-элементными подходами к аппроксимации непрерывного бигармонического уравнения. В последующем обсуждении мы проясним различие между ними.

Если кубические сплайны взять в качестве «базисных функций», то вариационная формулировка с использованием методологии конечных элементов [19, 23] означает, что мы ищем сеточную функцию u , которая удовлетворяет

$$\int_0^1 s_u''(x) s_v''(x) dx = \int_0^1 s_{f*}(x) s_v(x) dx, \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (3.4)$$

С другой стороны, используемый здесь дискретный функциональный подход подразумевает, что мы ищем сеточную функцию u , которая удовлетворяет условию

$$(\delta_x^4 u, v)_h = (f^*, v)_h \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (3.5)$$

В то время как левые части в уравнениях (3.4) и (3.5) равны (предложение 3.2), это в общем случае неверно для правых частей. Это показывает, что, несмотря на связь между ДБО и кубическими сплайнами, изложенную выше, схема ДБО не эквивалентна конечно-элементному методу, основанному на этих сплайнах.

4. Положительность

Хорошо известно, что (в общем случае) не существует принципа максимума для эллиптических частных дифференциальных операторов порядка выше двух. Для бигармонического уравнения в многомерных областях существуют версии этого принципа, которые включают оценки градиента решения, см. [22] и приведенную там библиографию. При граничных условиях Дирихле (единственных, которые здесь рассматриваются) *свойство сохранения положительности* означает, что $\Delta^2 u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$. На самом деле это *свойство области*. Принцип максимума подразумевает сохранение положительности, но, конечно, не наоборот.

В одномерном случае общее исследование линейных дифференциальных неравенств дано в [25]. В многомерном случае (исключая одномерный случай) мы ссылаемся на [16] и приведенную там библиографию.

В нашем одномерном случае мы имеем следующее предложение. Помимо того, что оно само по себе представляет интерес, оно мотивирует требование, чтобы дискретные аппроксимации обладали тем же свойством (которому удовлетворяет ДБО, см. предложение 4.2 ниже). Доказательство этого свойства в дискретном случае, в свою очередь, подразумевает свойство положительности кубических сплайнов (следствие 4.1 ниже).

Предложение 4.1. Пусть

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x),$$

где $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Тогда справедлив следующий принцип сравнения: если $f(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, то также $u(x) \geq 0$, $x \in \Omega$.

Доказательство. Предположим противное, что для некоторого $y \in (0, 1)$ мы имеем $u(y) < 0$. Мы можем предположить, что y является точкой минимума для u , так что

$$u'(y) = 0, \quad u''(y) \geq 0.$$

Поскольку u' обращается в нуль в конечных точках, мы заключаем, что существуют точки

$$\xi \in (0, y), \quad \eta \in (y, 1),$$

такие что

$$u''(\xi) = u''(\eta) = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= \inf \left\{ \xi \in \Omega, \quad u''(\xi) = 0 \right\}, \\ b &= \sup \left\{ \eta \in \Omega, \quad u''(\eta) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Рассмотрим функцию $v(x) = u''(x)$. Она удовлетворяет в интервале $[a, b]$ неравенству

$$v''(x) = f(x) \geq 0,$$

а также $v(a) = v(b) = 0$ и $v(y) \geq 0$. Стандартный принцип максимума теперь дает

$$v(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

следовательно, также $u'(x) \equiv u'(y) = 0$, $x \in [a, b]$.

Если $a > 0$, то получаем противоречие, так как существует точка $\xi \in (0, a)$ с $u''(\xi) = 0$. Аналогично в случае $b < 1$. Мы заключаем, что $u'(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, следовательно, $u(x) \equiv u(y) < 0$, $x \in [0, 1]$. Однако это противоречит граничному условию $u(0) = u(1) = 0$. $\square$

Замечание 4.1. В разделе 5 ниже мы выводим выражение для резольвентного ядра (5.3). Поскольку легко видеть, что ядро неотрицательно, мы получаем еще одно доказательство предложения 4.1.

4.1. Положительность дискретного бигармонического оператора. Теперь покажем, что то же свойство положительности справедливо и для дискретного бигармонического оператора.

Предложение 4.2. Пусть

$$\delta_x^4 u = f,$$

где $u, u_x \in l_{h,0}^2$. Тогда справедлив следующий принцип сравнения: если $f_j \geq 0$, $0 \leq j \leq N$, то также $u_j \geq 0$, $0 \leq j \leq N$.

Доказательство. Предположим противное, что $u_{j_0} < 0$ для некоторого индекса $1 \leq j_0 \leq N-1$.

Пусть $s_u \in C_0^2(\Omega)$ будет соответствующей сплайн-функцией. Поскольку $s_u(x_{j_0}) = u_{j_0} < 0$, то отсюда следует, что существует минимальная точка $y \in \Omega$, такая что

$$s_u(y) = \min \{s_u(x), x \in \Omega\} < 0.$$

Имеем, что

$$s'_u(y) = 0, \quad s''_u(y) \geq 0. \tag{4.2}$$

Поскольку s'_u обращается в нуль в конечных точках, мы заключаем, что существуют точки

$$\xi \in (0, y), \quad \eta \in (y, 1),$$

такие, что

$$s''_u(\xi) = s''_u(\eta) = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= \inf \left\{ \xi \in \Omega, \quad s''_u(\xi) = 0 \right\}, \\ b &= \sup \left\{ \eta \in \Omega, \quad s''_u(\eta) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Пусть $w(x) = s''_u(x)$. Функция w непрерывна и линейна в интервалах сетки. Ввиду предложения 3.2 получаем, в смысле распределений,

$$w'' = h \sum_{j=1}^{N-1} f_j \delta_{x_j} \geq 0, \tag{4.4}$$

где δ_y — мера Дирака в точке y .

Поскольку $w(a) = w(b) = 0$, стандартный принцип максимума дает

$$w(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

следовательно,

$$s'_u(x) \equiv s'_u(y) = 0, \quad x \in [a, b],$$

и в частности $s'_u(a) = s'_u(b) = 0$.

Как и в доказательстве предложения 4.1, мы заключаем, что $a = 0$ и $b = 1$, и, следовательно,

$$s_u(x) \equiv s_u(y) < 0, \quad x \in [0, 1],$$

что противоречит граничным условиям. $\square$

Следствие 4.1. Пусть u удовлетворяет условиям предложения 4.2, а s_u — соответствующая сплайн-функция. Тогда

$$s_u(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Доказательство. Предположение о существовании точки $y \in (0, 1)$ такой, что $s_u(y) < 0$, приводит к противоречию; это следует из доказательства предложения 4.2. $\square$

5. НЕПРЕРЫВНОЕ И ДИСКРЕТНОЕ РЕЗОЛЬВЕНТНОЕ ЯДРО

Оператор $\mathcal{L} = d^4/dx^4$ с однородными граничными условиями ($\phi \in D(\mathcal{L}) \Rightarrow \phi(0) = \phi'(0) = \phi(1) = \phi'(1) = 0$) является положительно определенным (в частности, самосопряженным) с областью определения $D(\mathcal{L}) = H^4([0, 1]) \cap H_0^2([0, 1])$. Теперь рассмотрим ядро $\mathcal{L}^{-1}$, а именно, функцию Грина бигармонической задачи

$$\mathcal{L}u = \left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) = f(x), \quad (5.1)$$

где $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Стандартное вычисление приводит к следующему утверждению.

Утверждение 5.1. Решение (5.1) задается выражением

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy, \quad (5.2)$$

где

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(1-x)^2 y^2 [2x(1-y) + x - y], & y < x, \\ \frac{1}{6}x^2 (1-y)^2 [2y(1-x) + y - x], & x < y. \end{cases} \quad (5.3)$$

Доказательство. По общей теории мы получаем, что в смысле распределений для каждого фиксированного y как функции от x

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 K(x, y) = \delta_y,$$

где δ_y — мера Дирака в точке y . Кроме того, $K(x, y)$ симметрична относительно x, y и удовлетворяет однородным граничным условиям (как функция от x). $\square$

5.1. Расширение ядра до $H^{-2}(\Omega)$. Областью определения $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ как самосопряженного оператора в $L^2(\Omega)$, подчиненного однородным граничным условиям, является $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. При расширении (в смысле распределений) области определения до $H_0^2(\Omega)$, оператор отображает ее в двойственное пространство $H^{-2}(\Omega)$ (см. [13, гл. 5]). С другой стороны, общая теория (или прямое рассмотрение выражения (5.3)) гарантирует, что для каждого фиксированного $x \in \Omega$, мы имеем $K(x, \cdot) \in H_0^2(\Omega)$. Из этого следует, что уравнение (5.2) можно распространить на все $u \in H_0^2(\Omega)$ (или, альтернативно, на все $f \in H^{-2}(\Omega)$) следующим образом:

$$u(x) = \langle K(x, y), f(y) \rangle, \quad (5.4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание $(H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega))$.

Как следует из уравнения (3.3), действие оператора $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$ на сплайны задается комбинацией дельта-функций Дирака в узлах x_j , а именно, его можно записать в виде равенства сеточных функций

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 s_u = h\delta_x^4 u.$$

Правая часть в этом уравнении представляет собой конечную меру, и мы помним, что в силу теоремы вложения Соболева все конечные меры содержатся в $H^{-2}(\Omega)$.

Таким образом, уравнение (5.4) принимает здесь вид

$$u_j = h \sum_{i=1}^{N-1} K(x_i, x_j)(\delta_x^4 u)_i, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.5)$$

Следствие 5.1. Дискретный оператор $(\delta_x^4)^{-1} : l_{h,0}^2 \rightarrow l_{h,0}^2$ задан матрицей $\left\{K_{i,j}^h\right\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$, определенной по формуле

$$K_{i,j}^h = hK(x_i, x_j), \quad 1 \leq i, j \leq N-1, \quad (5.6)$$

где $K(x, y)$ — это резольвентное ядро $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$, как в уравнении (5.3).

6. НЕПРЕРЫВНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В этом разделе мы переходим к основной цели этой статьи, а именно, рассмотрению сходимости дискретных собственных значений (ДБО) к собственным значениям непрерывного оператора $\left(\frac{d}{dx}\right)^4$. Продолжая обсуждение из пункта 3.3, важно провести различие между нашим подходом «дискретного функционального исчисления» и тесно связанным подходом конечных элементов. Для последнего мы ссылаемся на обширный обзор [3].

В методе конечных элементов, если задан размер сетки $h = \frac{1}{N}$, собственное значение μ_h и связанная с ним собственная функция $s_{u_h}(x)$ получаются с помощью уравнения (сравним с уравнением (3.4))

$$\int_0^1 s_{u_h}''(x) s_v''(x) dx = \mu_h \int_0^1 s_{u_h}(x) s_v(x) dx \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (6.1)$$

С другой стороны, в подходе, используемом здесь, мы ищем собственное значение λ_h и сеточную функцию $u_h \in l_{h,0}^2$, которые удовлетворяют

$$(\delta_x^4 u_h, v)_h = \lambda_h (u_h, v)_h \quad \text{для всех сеточных функций } v \in l_{h,0}^2. \quad (6.2)$$

В то время как левые части равны, ввиду предложения 3.2, это неверно в общем случае для правых частей. По этой причине мы не можем ссылаться на хорошо развитую теорию спектрального приближения в конечно-элементной теории [3], чтобы получить сходимость собственных значений в нашей постановке.

6.1. Непрерывный оператор. Оператор $\mathcal{L}$, представленный в разделе 5, имеет компактную резольвенту, а ядро K оператора $\mathcal{L}^{-1}$ приведено в утверждении 5.1. Спектр оператора $\mathcal{L}$ состоит из возрастающей последовательности положительных простых собственных значений, которую мы обозначаем как $\{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\}$.

Поскольку эти собственные значения играют важную роль в дальнейшем, мы приводим ниже подробности их получения, повторяя доказательство леммы 5.5.4 из [10].

Пусть $\phi \in H^4([0, 1]) \cap H_0^2([0, 1])$ будет действительной собственной функцией

$$\frac{d^4}{dx^4} \phi = \lambda \phi, \quad \lambda \in \{0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \dots\}.$$

Очевидно, эта функция должна иметь вид

$$\phi(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x), \quad (6.3)$$

где β — действительное число, а $\beta^4 = \lambda$.

Условия $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ явно влекут

$$A = -C, \quad B = -D,$$

и $\phi(1) = 0$ дает

$$A(\cos \beta - \operatorname{ch} \beta) = -B(\sin \beta - \operatorname{sh} \beta). \quad (6.4)$$

Оставшееся условие $\phi'(1) = 0$ дает

$$-B(\cos \beta - \operatorname{ch} \beta) = A(-\sin \beta - \operatorname{sh} \beta).$$

Перемножая два уравнения и применяя стандартные тождества, получаем

$$\cos \beta \operatorname{ch} \beta = 1, \quad (6.5)$$

которое следует рассматривать как уравнение, определяющее дискретные собственные значения.

Изменяя β на $-\beta$, мы можем оставить A, C без изменений, но поменять знаки B, D . Следовательно, для $-\beta < 0$ (решение (6.5)) мы получаем ту же собственную функцию (6.3), что и для $\beta > 0$, и мы можем рассматривать только положительные β .

Таким образом, мы получаем полный набор собственных функций (для $\beta > 0$, решая (6.5))

$$\phi(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) - A \operatorname{ch}(\beta x) - B \operatorname{sh}(\beta x), \quad (6.6)$$

где A, B удовлетворяют (6.4).

Для того чтобы оценить расположение собственных значений, достаточно рассмотреть положительные решения (6.5). Следующее утверждение легко проверить.

Утверждение 6.1. Уравнение (6.5) имеет следующую последовательность положительных решений:

$$\begin{cases} \beta_0 \in (3\pi/2, 2\pi), \\ \beta_k^{(1)} \in (2k\pi, (2k+1/2)\pi), & k = 1, 2, \dots, \\ \beta_k^{(2)} \in ((2k+3/2)\pi, (2(k+1)\pi), & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.7)$$

Соответствующие собственные значения $\lambda_0 = \beta_0^4$, $\lambda_k^{(1)} = (\beta_k^{(1)})^4$, $\lambda_k^{(2)} = (\beta_k^{(2)})^4$ являются простыми.

Обозначим через $\{\phi_1, \dots, \phi_k \dots\}$ ортонормированный набор связанных собственных функций.

6.2. Оценки собственных значений. Упростим приведенную выше запись и обозначим через $\{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\}$ (бесконечную) последовательность собственных значений оператора $\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dx}\right)^4$.

При условии $h = \frac{1}{N}$ пусть

$$\Lambda_h = \{0 < \lambda_{h,1} \leq \lambda_{h,2} \leq \dots \leq \lambda_{h,N-1}\}$$

будет конечной последовательностью собственных значений δ_x^4 .

Обозначим через Γ сумму

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1},$$

и пусть

$$\Gamma_h = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{h,i}^{-1}.$$

Предложение 6.1. Существует константа $C > 0$, не зависящая от h , такая что

$$|\Gamma - \Gamma_h| \leq Ch^4. \quad (6.8)$$

Доказательство. Введем (бесконечный) набор обратных величин собственных значений $\mathcal{L}$, а именно, собственных значений ядра $K(x, y)$ (см. (5.3))

$$\Lambda^{-1} = \{\lambda_1^{-1} > \lambda_2^{-1} > \dots > \lambda_k^{-1} \dots > 0\}, \quad (6.9)$$

в то время как

$$\Lambda_h^{-1} = \{\lambda_{h,1}^{-1} \geq \lambda_{h,2}^{-1} \geq \dots \geq \lambda_{h,N-1}^{-1} > 0\} \quad (6.10)$$

— набор собственных значений $(\delta_x^4)^{-1}$, соответствующих дискретному ядру K^h (см. (5.6)).

По стандартной формуле следа следует, что

$$\Gamma = \int_0^1 K(x, x) dx, \quad \Gamma_h = h \sum_{i=1}^{N-1} K(x_i, x_i). \quad (6.11)$$

Поскольку $K(x, x) = \frac{1}{3}x^3(1-x)^3$, числовые значения Γ и C можно легко вычислить, и оказывается, что

$$\Gamma = \frac{1}{420}. \quad (6.12)$$

С другой стороны

$$\Gamma_h = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{N-1} (ih)^3 (1-ih)^3 = \frac{1}{420} + \frac{1}{180}h^4 - \frac{1}{126}h^6, \quad (6.13)$$

так что (6.8) доказано (и даже с явной константой). $\square$

Замечание 6.1. Заметим, что Γ_h — это дискретное трапецевидное приближение к интегралу для Γ . По стандартной оценке для формулы трапеций получаем

$$|\Gamma - \Gamma_h| \leq Ch^2 \quad (6.14)$$

с константой $C = \frac{1}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^2 K(x, x) \right| = \frac{1}{96}$.

Оценка четвертого порядка (6.8) очевидно является результатом особых свойств ядра K .

«Коллективная» оценка (6.8) не подразумевает, что оценка вида $\lambda_i^{-1} - \lambda_{h,i}^{-1} = O(h^4)$ верна для любого фиксированного значения индекса i . Однако следующее предложение дает более слабое утверждение в этом направлении. Оно играет ключевую роль в окончательной, более сильной теореме 6.1 ниже.

Предложение 6.2. Для любого фиксированного целого числа $i \geq 1$ существуют положительные константы $C, h_0 > 0$ такие, что для любого $0 < h = \frac{1}{N} < h_0$ имеем

$$\text{dist} \{ \lambda_i^{-1}, \Lambda_h^{-1} \} \leq Ch^4, \quad (6.15)$$

где Λ_h^{-1} — набор обратных величин, введенных в (6.10).

Доказательство. Пусть $\phi_i(x) \in H_0^2(\Omega)$ — нормализованная собственная функция $\left(\frac{d}{dx} \right)^4$, соответствующая λ_i . Вспомним, что $\phi_i \in C^\infty$ и $\left(\frac{d}{dx} \right)^4 \phi_i = \lambda_i^{-1} \phi_i$. Следовательно,

$$\lambda_i^{-1} \phi_i(x) = \int_0^1 K(x, y) \phi_i(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Для простоты обозначим через $\{x_j = jh, 0 \leq j \leq N\}$ точки сетки, опуская очевидную зависимость от h .

Пусть $\phi_i^* = \{\phi_i(x_0), \dots, \phi_i(x_k), \dots, \phi_i(x_N)\}$ будет соответствующей сеточной функцией.

Ввиду утверждения 2.1 и следствия 5.1 имеем для всех $0 \leq k \leq N$

$$\left| \lambda_i^{-1} \phi_i(x_k) - h \sum_{j=0}^N K(x_k, x_j) \phi_i(x_j) \right| \leq Ch^4,$$

где здесь и ниже $C > 0$ — константа, зависящая только от ϕ_i , которая меняется от одной оценки к другой. Используя обозначения из (5.6), это можно переписать как

$$\left| \lambda_i^{-1} \phi_i^*(x_k) - \sum_{j=0}^N K_{k,j}^h \phi_i^*(x_j) \right| \leq Ch^4, \quad (6.16)$$

то есть

$$\left| (\lambda_i^{-1} - (\delta_x^4)^{-1}) \phi_i^* \right|_h \leq Ch^4.$$

С другой стороны, гладкость нормализованного ϕ_i дает

$$|\phi_i^*|_h \geq 1 - Ch.$$

Последние две оценки влекут следующую оценку нормы оператора:

$$\left| (\lambda_i^{-1} - (\delta_x^4)^{-1})^{-1} \right|_h \geq \frac{1 - Ch}{Ch^4} \geq Ch^{-4} \quad (6.17)$$

при $h < h_0$. Стандартный результат относительно резольвент самосопряженных операторов теперь дает

$$\text{dist} \{ \lambda_i^{-1}, \Lambda_h^{-1} \} = \left| (\lambda_i^{-1} - (\delta_x^4)^{-1})^{-1} \right|_h^{-1},$$

что завершает доказательство предложения. $\square$

Замечание 6.2. Предложение 6.2 показывает, что в любой окрестности λ_i^{-1} существует дискретное собственное значение $\lambda_{h,k}^{-1}$ при условии, что $h > 0$ достаточно мало. Отметим, однако, что мы не можем утверждать, что даже наибольшее собственное значение $(\mathcal{L}^{-1}) \lambda_1^{-1}$ является пределом при $h \rightarrow 0$ наибольшего дискретного собственного значения $\lambda_{h,1}^{-1} (\delta_x^4)^{-1}$.

Замечание 6.3. Ввиду следствия 5.1 дискретные собственные значения в Λ_h^{-1} получаются «методом Нистрома» [26], а именно, собственные значения дискретизированного ядра. Тот факт, что для любого фиксированного целого числа $i \geq 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist} \{ \lambda_i^{-1}, \Lambda_h^{-1} \} = 0,$$

следует из [26, теорема 3]. Предложение 6.2 устанавливает «оптимальную» скорость $O(h^4)$ для этой сходимости.

6.3. Первое собственное значение. Наша цель — сходимость отдельных собственных значений. Начнем с общих рассуждений и применим их для первого собственного значения.

Выберем для $\phi \in \{\phi_1, \dots, \phi_k \dots\}$ нормализованную собственную функцию $\mathcal{L}$ с соответствующим собственным значением $\lambda \in \{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots\}$.

Применим оператор $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\phi = \lambda\phi, \quad \lambda \in \{0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k \dots\} \dots,$$

получаем

$$\frac{d^8}{dx^8} \phi = \lambda^2 \phi.$$

Поскольку ϕ нормализован, то имеем

$$\left\| \frac{d^8}{dx^8} \phi \right\|_{L^2[0,1]} = \lambda^2, \quad (6.18)$$

и продолжая таким образом, мы видим, что все производные ϕ ограничены некоторой степенью λ , и поэтому в приведенных ниже оценках мы имеем общую константу $C > 0$, зависящую только от λ .

Пусть ϕ^* — соответствующая сеточная функция, $\phi^*(x_i) = \phi(x_i)$, $0 \leq i \leq N$.

Пусть $\mathbf{v} \in l_{h,0}^2$ удовлетворяет

$$\delta_x^4 \mathbf{v} = \lambda \phi^*,$$

где также $\mathbf{v}_x \in l_{h,0}^2$.

Из точности четвертого порядка (2.15) мы знаем, что

$$|\mathbf{v} - \phi^*|_\infty \leq Ch^4, \quad (6.19)$$

где C не зависит от $N = h^{-1}$, но, конечно, зависит от ϕ .

Из этого следует, что

$$\delta_x^4 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad |\mathbf{w}|_h \leq Ch^4. \quad (6.20)$$

Поскольку ϕ нормализовано, погрешность усечения при интегрировании методом трапеций дает

$$|\phi^*|_h^2 = h \sum_{i=1}^{N-1} [\phi_i^*]^2 = \|\phi\|_{L^2[0,1]}^2 + O(h^2) = 1 + O(h^2), \quad (6.21)$$

следовательно,

$$|1 - |\mathbf{v}|_h^2| \leq Ch^2. \quad (6.22)$$

Пусть $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|_h}$, тогда из (6.20) следует

$$\delta_x^4 \bar{\mathbf{v}} = \lambda \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{w}}, \quad |\bar{\mathbf{w}}|_h \leq Ch^4. \quad (6.23)$$

Что касается первого собственного значения, то теперь мы можем показать, что $\lambda_{h,1}$ может превышать λ_1 не более чем на $O(h^4)$.

Утверждение 6.2. Пусть λ_1 будет первым собственным значением $\mathcal{L}$ ($\lambda_1 = \beta_0^4$ из (6.7)). Тогда существует константа $C > 0$, зависящая от собственной функции ϕ_1 , но не от h , такая, что

$$\lambda_{h,1} \leq \lambda_1 + Ch^4. \quad (6.24)$$

Доказательство. Рассмотрим (6.23) с $\lambda = \lambda_1$. По вариационному принципу минимума для первого собственного значения мы знаем, что

$$\lambda_{h,1} = \min_{|\mathbf{z}|_h=1} (\delta_x^4 \mathbf{z}, \mathbf{z})_h,$$

следовательно,

$$\lambda_{h,1} \leq (\delta_x^4 \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}})_h \leq \lambda_1 + Ch^4, \quad (6.25)$$

что доказывает утверждение. $\square$

Замечание 6.4. Точное первое собственное значение $\lambda_1 = 500.5639017404$. Численные расчеты фактически показывают, что $\lambda_{h,1} \leq \lambda_1$, и что $\lambda_{h,1}$ увеличивается с уменьшением h , как показано на рис. 1. Это остается открытой проблемой.

Замечание 6.5. Обратим внимание, что в утверждении 6.2 отсутствует соответствующий нижний предел, а именно, что $\lambda_{h,1}$ больше $\lambda_1 - O(h^4)$. Это очевидно из численных результатов, показанных на рис. 2. Доказательство этого факта отложено до теоремы 6.1 ниже, где мы показываем, что сходимость всех дискретных собственных значений к соответствующим непрерывным является «оптимальной», а именно, со скоростью $O(h^4)$.

6.4. Сходимость дискретных собственных значений $\lambda_{h,k}$, $k \geq 1$. Теперь рассмотрим сходимость всех дискретных собственных значений к их непрерывным аналогам.

Численное моделирование показывает, что если мы зафиксируем индекс k , то

$$|\lambda_k - \lambda_{h,k}| \leq Ch^4 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где $C > 0$ завит от k . Это показано на рис. 3 (для $N = 16$) и рис. 4 (для $N = 64$). Мы благодарим Жана-Пьера Круазилля за оба рисунка. Таким образом, даже очень грубое разрешение дает превосходное приближение собственных значений.

При рассмотрении сходимости *всех собственных значений* оказывается, что нельзя использовать подход, основанный на методе Рэлея—Ритца. Мы рассмотрим здесь совершенно другой подход, который даст не только сходимость ко всем собственным значениям, но и, более того, оптимальную скорость сходимости $O(h^4)$.

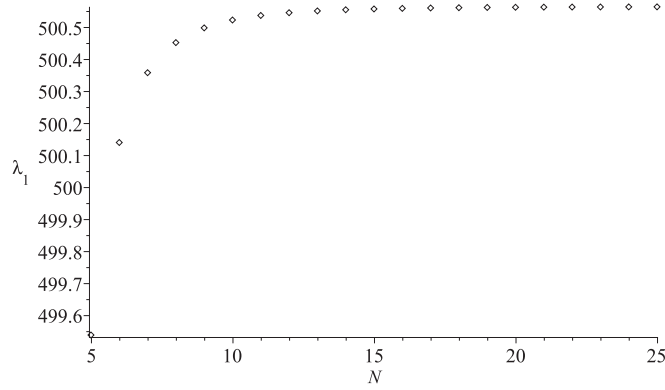


Рис. 1. Первое дискретное собственное значение как функция количества точек сетки на $[0, 1]$.

FIG. 1. First discrete eigenvalue as a function of the number of grid points in $[0, 1]$.

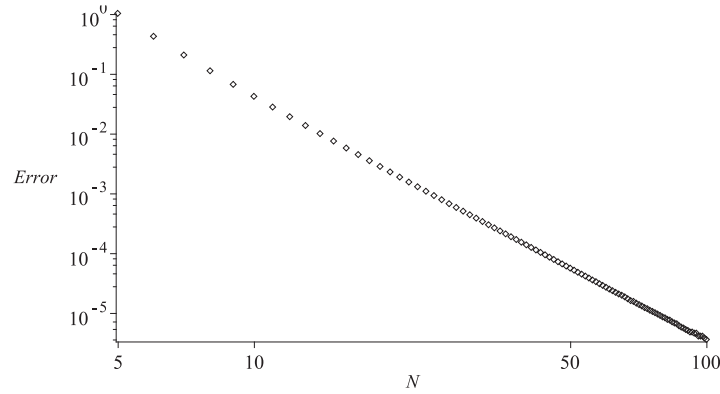


Рис. 2. Логарифмический график погрешности первого дискретного собственного значения $\lambda_1 - \lambda_{h,1}$ как функции числа N точек сетки в $[0, 1]$. Наклон равен -4 , что указывает на скорость сходимости $O(N^{-4}) = O(h^4)$.

FIG. 2. Log-log graph of the error of first discrete eigenvalue $\lambda_1 - \lambda_{h,1}$ as function of the number N of grid points in $[0, 1]$. The slope is -4 , indicating a convergence rate $O(N^{-4}) = O(h^4)$.

Введем кусочно-постоянное ядро $K_h(x, y)$ по формуле

$$K_h(x, y) = K(x_i, y_j), \quad x \in \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right), \quad y \in \left(y_j - \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}\right), \quad 0 \leq i, j \leq N. \quad (6.26)$$

Очевидно, что для $i = 0$ конечная точка $x_0 - \frac{h}{2}$ заменяется на x_0 , и аналогично для других конечных точек.

Обозначим через $\mathcal{L}_h^{-1}$ оператор (на $L^2[0, 1]$), ядром которого является K_h . Очевидно, что этот оператор компактен и положительно определен. Фактически, следующее утверждение говорит о том, что он имеет только конечное число положительных собственных значений (конечно, зависящих от h).

Утверждение 6.3. Множество собственных значений $\mathcal{L}_h^{-1}$ — это конечное множество Λ_h^{-1} , определенное в (6.10).

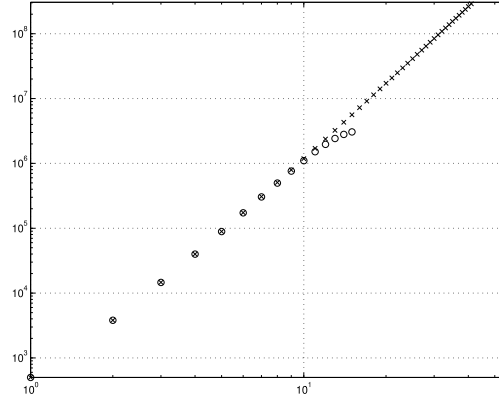


Рис. 3. График собственных значений в логарифмическом масштабе: k — горизонтальный, $\lg \lambda_k (\times)$, $\lg \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{16}$ — вертикальный.

FIG. 3. Graph of eigenvalues in logarithmic scale: k — horizontal, $\log \lambda_k (\times)$, $\log \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{16}$ — vertical.

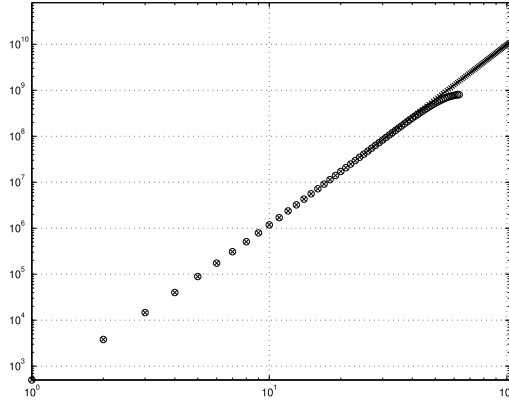


Рис. 4. График собственных значений в логарифмическом масштабе: k — горизонтальный, $\lg \lambda_k (\times)$, $\lg \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{64}$ — вертикальный.

FIG. 4. Graph of eigenvalues in logarithmic scale: k — horizontal, $\log \lambda_k (\times)$, $\log \lambda_{h,k} (\circ)$, $h = \frac{1}{N} = \frac{1}{64}$ — vertical.

Доказательство. Пусть $u \in L^2[0, 1]$ — собственная функция $\mathcal{L}_h^{-1}$. Таким образом, для некоторого $\mu > 0$ имеем

$$\mu u(x) = \int_0^1 K_h(x, y) u(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

В частности, u является кусочно-постоянной

$$u(x) = u(x_i), \quad x \in \left(x_i - \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Следовательно (с K^h как в следствии 5.1),

$$\mu u(x_i) = \sum_{j=0}^N K_{i,j}^h u(x_j), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (6.27)$$

где включены граничные значения $u(x_0) = u(x_N) = 0$.

Таким образом, μ является собственным значением $(\delta_x^4)^{-1}$, следовательно, $\mu = \lambda_{h,k}^{-1}$ для некоторого $1 \leq k \leq N-1$. $\square$

Теперь приступим к установлению сходимости всех дискретных собственных значений к соответствующим непрерывным. Фактически, следующая лемма является частным случаем теоремы Маркуса [20, следствие 5.3] о разностях собственных значений самосопряженных операторов. Подобная общая теорема была доказана (гораздо позже) Като [18]. Однако общность теоремы Като требовала «расширенного перечисления» собственных значений, добавляя значения граничных точек существенных спектров.

Для удобства читателя мы приводим здесь простое доказательство леммы, следуя доказательству (конечномерной) теоремы 6.11 в [17, раздел II.6].

Лемма 6.1. Пусть $h = \frac{1}{N}$, и пусть

$$\Lambda^{-1} = \{\lambda_1^{-1} > \lambda_2^{-1} > \dots > \lambda_k^{-1} \dots > 0\},$$

$$\Lambda_h^{-1} = \{\lambda_{h,1}^{-1} \geq \lambda_{h,2}^{-1} \geq \dots \geq \lambda_{h,N-1}^{-1} > 0\}$$

— множества, введенные в (6.9), (6.10), соответственно.

Тогда существует константа $C > 0$, не зависящая от h , такая что

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2} \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x, y) - K_h(x, y)|^2 dx dy \leq Ch^2. \quad (6.28)$$

Доказательство. Обратим внимание, что оба оператора $\mathcal{L}^{-1}$, $\mathcal{L}_h^{-1}$ являются положительными операторами Гильберта—Шмидта (следовательно, компактными).

При $t \in [0, 1]$ введем оператор

$$\mathcal{L}_{t,h}^{-1} = (1-t)\mathcal{L}^{-1} + t\mathcal{L}_h^{-1},$$

который также является компактным, положительным и самосопряженным оператором. В частности, его спектр состоит из убывающей последовательности положительных собственных значений

$$\left\{ \mu_1^{-1}(t) \geq \mu_2^{-1}(t) \geq \dots \geq \mu_{N-1}^{-1}(t) \geq \mu_N^{-1}(t) \geq \dots \mu_{N+p}^{-1}(t) \geq \dots > 0 \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ввиду обсуждения в [17, гл. VII.3.2], функции $\mu_k^{-1}(t)$, $1 \leq k < \infty$, являются непрерывными, кусочно-аналитическими по t и удовлетворяют равенствам

$$\mu_k^{-1}(0) = \lambda_k^{-1}, \quad 1 \leq k < \infty, \quad (6.29)$$

и

$$\mu_k^{-1}(1) = \begin{cases} \lambda_{h,k}^{-1}, & 1 \leq k < N, \\ 0, & k \geq N. \end{cases} \quad (6.30)$$

Кроме того, существует (для каждого фиксированного $t \in [0, 1]$) соответствующий набор ортонормированных функций (в $L^2(0, 1)$)

$$\{\phi_1(x; t), \phi_2(x; t), \dots, \phi_N(x; t), \dots, \phi_k(x; t), \dots\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Выберем индекс $k \geq 1$. Собственное значение $\mu_k^{-1}(t)$ непрерывно (по $t \in [0, 1]$) и кусочно-аналитично с конечным числом особенностей. Соответствующая собственная функция $\phi_k(x; t)$ кусочно-аналитична по t с тем же конечным числом особенностей. Таким образом, уравнение

$$\left[(1-t)\mathcal{L}^{-1} + t\mathcal{L}_h^{-1} - \mu_k^{-1}(t) \right] \phi_k(x; t) = 0 \quad (6.31)$$

можно продифференцировать по t (исключая особенности), тогда получим

$$\left[\mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1} - \frac{d}{dt} \mu_k^{-1}(t) \right] \phi_k(x; t) + \left[(1-t)\mathcal{L}^{-1} + t\mathcal{L}_h^{-1} - \mu_k^{-1}(t) \right] \frac{d}{dt} \phi_k(x; t) = 0. \quad (6.32)$$

Взяв скалярное произведение с $\phi_k(x; t)$, заключаем, что

$$\frac{d}{dt}\mu_k^{-1}(t) = \left((\mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1})\phi_k(x; t), \phi_k(x; t) \right)_{L^2(0,1)}, \quad t \in [0, 1]. \quad (6.33)$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание (6.29) и (6.30), получаем

$$\int_0^1 \left((\mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1})\phi_k(x; t), \phi_k(x; t) \right)_{L^2(0,1)} dt = \begin{cases} \lambda_{h,k}^{-1} - \lambda_k^{-1}, & 1 \leq k < N, \\ -\lambda_k^{-1}, & k \geq N. \end{cases} \quad (6.34)$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A} = \mathcal{L}_h^{-1} - \mathcal{L}^{-1}$ является оператором Гильберта—Шмидта, следовательно, компактен. Пусть $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ — последовательность его ненулевых собственных значений (повторенных в соответствии с кратностью) с соответствующей ортонормированной последовательностью собственных функций $\{\chi_1(x), \chi_2(x), \dots\} \subseteq L^2(0, 1)$.

Так как $\phi_k(x; t) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi_k(x; t), \chi_j(x))_{L^2(0,1)} \chi_j(x)$, уравнение (6.34) влечет за собой

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \gamma_j = \begin{cases} \lambda_{h,k}^{-1} - \lambda_k^{-1}, & 1 \leq k < N, \\ -\lambda_k^{-1}, & k \geq N, \end{cases} \quad (6.35)$$

где $\sigma_{j,k} = \int_0^1 (\phi_k(x; t), \chi_j)^2_{L^2(0,1)} dt$, $1 \leq j, k < \infty$.

Из ортонормальности функций (по x) имеем

$$0 \leq \sigma_{j,k} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \leq 1.$$

Пусть Φ — вещественная выпуклая функция на вещественной прямой, причем $\Phi(0) = 0$. Из неравенства Йенсена получаем

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \gamma_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \Phi(\gamma_j), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и суммирование по k дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{j,k} \gamma_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\gamma_j). \quad (6.36)$$

В частности, взяв $\Phi(\xi) = \xi^2$ и принимая во внимание (6.35), получаем

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^2.$$

Сумма в правой части — это квадрат нормы Гильберта—Шмидта $\mathcal{A}$, которая равна $\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y) - K_h(x, y)|^2 dx dy$, что доказывает (6.28). $\square$

Замечание 6.6. Обратим внимание, что (6.28) дает, в частности, равномерную оценку

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}|^2 \leq Ch^2. \quad (6.37)$$

Эта оценка верна одновременно для *всех* $N - 1$ собственных значений. Зафиксировав индекс k , мы получим, в частности,

$$\frac{|\lambda_k - \lambda_{h,k}|}{\lambda_{h,k}} \leq C \lambda_k h. \quad (6.38)$$

Ввиду утверждения 6.1 имеем $\lambda_k \approx k^4$. Таким образом, (6.38) дает только сходимость $O(h)$.

ТАБ. 1. Первые 4 собственных значения (верхний ряд) и их численные аппроксимации с использованием сетки из $N = 10-60$ узлов.ТАБ. 1. First 4 eigenvalues (top row) and their numerical approximations using a grid of $N = 10-60$ nodes.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
точное собственное значение / exact eigenvalue	500.563902	3803.537080	14617.630131	39943.799006
$N = 10$	500.521885	3800.689969	14567.617771	39493.816015
$N = 20$	500.561614	3803.398598	14615.468848	39926.599754
$N = 30$	500.563462	3803.511145	14617.236978	39940.722654
$N = 40$	500.563764	3803.529031	14617.509451	39942.881883
$N = 50$	500.563845	3803.533813	14617.581402	39943.430972
$N = 60$	500.563874	3803.535512	14617.606815	39943.623511

Однако, как видно из таб. 1, даже при небольшом количестве точек сетки первые дискретные собственные значения очень хорошо приближают непрерывные. Мы доказываем в теореме 6.1 ниже, что сходимость действительно «оптимальна».

Теперь приступим к доказательству «оптимальной» оценки.

Теорема 6.1 (оптимальная скорость сходимости дискретных собственных значений).

Зафиксируем целое число $k \geq 1$ и рассмотрим дискретное собственное значение $\lambda_{h,k}$ как функцию $h = \frac{1}{N}$, $N = k+1, k+2, \dots$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от k , такая, что

$$|\lambda_k - \lambda_{h,k}| \leq Ch^4, \quad 0 < h < h_0. \quad (6.39)$$

Доказательство. Зафиксируем k . Если $j \neq k$, то из (6.37) получим

$$|\lambda_{h,j}^{-1} - \lambda_k^{-1}| \geq \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_k^{-1} \right| - \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_{h,j}^{-1} \right| \geq \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_k^{-1} \right| - C^{\frac{1}{2}}h.$$

Следовательно, если $\eta = \min_{j \neq k} \left| \lambda_j^{-1} - \lambda_k^{-1} \right|$, то для $h < h_0 = \frac{1}{2}\eta C^{-\frac{1}{2}}$ имеем

$$j \neq k \Rightarrow |\lambda_{h,j}^{-1} - \lambda_k^{-1}| \geq \frac{1}{2}\eta.$$

В сочетании с предложением 6.2 мы заключаем, что единственный элемент Λ_h^{-1} , который может быть «близок» к λ_k^{-1} , это $\lambda_{h,k}^{-1}$, при этом

$$|\lambda_k^{-1} - \lambda_{h,k}^{-1}| \leq Ch^4,$$

тем самым завершается доказательство теоремы. $\square$

Замечание 6.7. Обратим внимание, что в доказательстве теоремы 6.1 мы опирались на специальные свойства ядра из предложения 6.2. Без использования такой информации мы получили бы «субоптимальные» оценки. Например, (6.28) подразумевает

$$\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2} \leq CN^{-2},$$

что не является оптимальным ввиду утверждения 6.1. Сравните также с оценкой в (6.8), которую можно записать как

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} - \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{h,i}^{-1} \right| \leq Ch^4.$$

Замечание 6.8. Скорость сходимости $O(h^4)$, как указано в теореме 6.1, можно сравнить с методом коллокационной аппроксимации [12]. В последнем случае достижение аналогичной скорости сходимости требует построения интерполирующей C^3 кусочно-полиномиальной функции пятого порядка, а затем использования коллокации в гауссовых точках. Результаты здесь были получены с использованием дискретизированного ядра (обратного оператора). Благодаря наблюдаемой связи между этим ядром и классическими (C^2) кубическими сплайнами, аппроксимирующие собственные значения фактически являются собственными значениями производной четвертого порядка (распределения) интерполирующего кубического сплайна в точках сетки (предложение 3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Applications. — New York–London: Academic Press, 1967.
2. Andrew A. L., Paine J. W. Correction of finite element estimates for Sturm–Liouville eigenvalues// Numer. Math. — 1986. — 50. — С. 205–215.
3. Babuška I., Osborn J. Eigenvalue problems// В сб.: «Handbook of Numerical Analysis, Vol. II». — Amsterdam, etc.: Elsevier, 1991. — С. 641–787.
4. Ben-Artzi M., Croisille J.-P., Fishelov D. Navier–Stokes Equations in Planar Domains. — London : Imperial College Press, 2013.
5. Ben-Artzi M., Croisille J.-P., Fishelov D., Katzir R. Discrete fourth-order Sturm–Liouville problems// IMA J. Numer. Anal. — 2018. — 38. — С. 1485–1522.
6. Ben-Artzi M., Katriel G. Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues// Numer. Mathematik. — 2019. — 141. — С. 839–879.
7. Boumenir A. Sampling for the fourth-order Sturm–Liouville differential operator// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 278. — С. 542–550.
8. Caudill Jr. L. F., Perry P. A., Schueller A. W. Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators// SIAM J. Math. Anal. — 1998. — 29. — С. 935–966.
9. Chawla M. M. A new fourth-order finite-difference method for computing eigenvalues of fourth-order two-point boundary-value problems// IMA J. Numer. Anal. — 1983. — 3. — С. 291–293.
10. Davies E. B. Spectral Theory and Differential Operators. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
11. C. de Boor A Practical Guide to Splines-Revised Edition. — New York: Springer, 2001.
12. de Boor C., Swartz B. Collocation approximation to eigenvalues of an ordinary differential equation: The principle of the thing// Math. Comp. — 1980. — 35. — С. 679–694.
13. Evans L. C. Partial Differential Equations. — Providence: Am. Math. Soc., 1998.
14. Everitt W. N. The Sturm–Liouville problem for fourth-order differential equations// Q. J. Math. — 1957. — 8. — С. 146–160.
15. Fishelov D., Ben-Artzi M., Croisille J.-P. Recent advances in the study of a fourth-order compact scheme for the one-dimensional biharmonic equation// J. Sci. Comput. — 2012. — 53. — С. 55–79.
16. Grunau H.-C., Robert F. Positivity and almost positivity of biharmonic Green’s functions under Dirichlet boundary conditions// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2010. — 196. — С. 865–898.
17. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. — New York: Springer, 1980.
18. Kato T. Variation of discrete spectra// Commun. Math. Phys. — 1987. — 111. — С. 501–504.
19. Lou Z. M., Bialecki B., Fairweather G. Orthogonal spline collocation methods for biharmonic problems// Numer. Math. — 1998. — 80. — С. 267–303.
20. Markus A. S. The eigen- and singular values of the sum and product of linear operators// Russ. Math. Surv. — 1964. — 19. — С. 91–120.
21. Munk W. H. On the wind-driven ocean circulation// J. Meteorol. — 1950. — 7. — С. 80–93.
22. Pipher J., Verchota G. A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains// Comment. Math. Helv. — 1993. — 68. — С. 384–414.
23. Prenter P. M. Splines and Variational Methods. — New York: Wiley, 1975.
24. Rattana A., Böckmann C. Matrix methods for computing eigenvalues of Sturm–Liouville problems of order four// J. Comp. Applied Math. — 2013. — 249. — С. 144–156.
25. Schröder J. On linear differential inequalities// J. Math. Anal. Appl. — 1968. — 22. — С. 188–216.
26. Spence A. On the convergence of the Nyström method for the integral equation eigenvalue problem// Numer. Math. — 1975. — 25. — С. 57–66.

Matania Ben-Artzi

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Иерусалим, Израиль

E-mail: mbartzi@math.huji.ac.il

UDC 517.984.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54

EDN: TPUIIY

Splines, biharmonic operator and approximate eigenvalue

M. Ben-Artzi

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Jerusalem, Israel

Abstract. The biharmonic operator plays a central role in a wide array of physical models, such as elasticity theory and the streamfunction formulation of the Navier–Stokes equations. Its spectral theory has been extensively studied. In particular the one-dimensional case (over an interval) serves as the basic model of a high order Sturm–Liouville problem. The need for corresponding numerical simulations has led to numerous works. This review focuses on a discrete biharmonic calculus. The primary object of this calculus is a high-order compact discrete biharmonic operator (DBO). The DBO is constructed in terms of the discrete Hermitian derivative. The surprising strong connection between cubic spline functions (on an interval) and the DBO is recalled. In particular the kernel of the inverse of the discrete operator is (up to scaling) equal to the grid evaluation of the kernel of $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^4\right]^{-1}$. This fact entails the conclusion that the eigenvalues of the DBO converge (at an “optimal” $O(h^4)$ rate) to the continuous ones. Another consequence is the validity of a *comparison principle*. It is well known that there is no maximum principle for the fourth-order equation. However, a positivity result is recalled, both for the continuous and the discrete biharmonic equation, claiming that in both cases the kernels are order preserving.

Keywords: cubic splines, Hermitian derivative, discrete biharmonic operator, eigenvalues, Green’s kernel.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. It is a pleasure to thank Jean-Pierre Croisille, Dalia Fishelov and Guy Katriel for very fruitful discussions.

For citation: M. Ben-Artzi, “Splines, biharmonic operator and approximate eigenvalue,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 1, 33–54. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-33-54>

REFERENCES

1. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, and J. L. Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*, Academic Press, New York–London, 1967.
2. A. L. Andrew and J. W. Paine, “Correction of finite element estimates for Sturm–Liouville eigenvalues,” *Numer. Math.*, 1986, **50**, 205–215.
3. I. Babuška and J. Osborn, “Eigenvalue problems,” In: *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*, Elsevier, Amsterdam, etc., pp. 641–787, 1991.
4. M. Ben-Artzi, J.-P. Croisille, and D. Fishelov, *Navier–Stokes Equations in Planar Domains*, Imperial College Press, London, 2013.

5. M. Ben-Artzi, J.-P. Croisille, D. Fishelov, and R. Katzir, “Discrete fourth-order Sturm-Liouville problems,” *IMA J. Numer. Anal.*, 2018, **38**, 1485–1522.
6. M. Ben-Artzi and G. Katriel, “Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues,” *Numer. Mathematik*, 2019, **141**, 839–879.
7. A. Boumenir, “Sampling for the fourth-order Sturm-Liouville differential operator,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **278**, 542–550.
8. L. F. Caudill Jr., P. A. Perry, and A. W. Schueller, “Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, **29**, 935–966.
9. M. M. Chawla, “A new fourth-order finite-difference method for computing eigenvalues of fourth-order two-point boundary-value problems,” *IMA J. Numer. Anal.*, 1983, **3**, 291–293.
10. E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
11. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines-Revised Edition*, Springer, New York, 2001.
12. C. de Boor and B. Swartz, “Collocation approximation to eigenvalues of an ordinary differential equation: The principle of the thing,” *Math. Comp.*, 1980, **35**, 679–694.
13. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 1998.
14. W. N. Everitt, “The Sturm-Liouville problem for fourth-order differential equations,” *Q. J. Math.*, 1957, **8**, 146–160.
15. D. Fishelov, M. Ben-Artzi, and J.-P. Croisille, “Recent advances in the study of a fourth-order compact scheme for the one-dimensional biharmonic equation,” *J. Sci. Comput.*, 2012, **53**, 55–79.
16. H.-C. Grunau and F. Robert, “Positivity and almost positivity of biharmonic Green’s functions under Dirichlet boundary conditions,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2010, **196**, 865–898.
17. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1980.
18. T. Kato, “Variation of discrete spectra,” *Commun. Math. Phys.*, 1987, **111**, 501–504.
19. Z. M. Lou, B. Bialecki, and G. Fairweather, “Orthogonal spline collocation methods for biharmonic problems,” *Numer. Math.*, 1998, **80**, 267–303.
20. A. S. Markus, “The eigen- and singular values of the sum and product of linear operators,” *Russ. Math. Surv.*, 1964, **19**, 91–120.
21. W. H. Munk, “On the wind-driven ocean circulation,” *J. Meteorol.*, 1950, **7**, 80–93.
22. J. Pipher and G. Verchota, “A maximum principle for biharmonic functions in Lipschitz and C^1 domains,” *Comment. Math. Helv.*, 1993, **68**, 384–414.
23. P. M. Prenter, *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York, 1975.
24. A. Rattana and C. Böckmann, “Matrix methods for computing eigenvalues of Sturm-Liouville problems of order four,” *J. Comp. Applied Math.*, 2013, **249**, 144–156.
25. J. Schröder, “On linear differential inequalities,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1968, **22**, 188–216.
26. A. Spence, “On the convergence of the Nyström method for the integral equation eigenvalue problem,” *Numer. Math.*, 1975, **25**, 57–66.

Matania Ben-Artzi

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Jerusalem, Israel

E-mail: mbartzi@math.huji.ac.il

УДК 517.958

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70

EDN: TRQNDY

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—ПУАССОНА—ЛАНДАУ

А. В. БОБЫЛЕВ, И. Ф. ПОТАПЕНКО

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена аналитическому и численному исследованию решений кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау (ВПЛ) для функций распределения с длиной L таких, что $\varepsilon = r_D/L \ll 1$, где r_D — дебаевский радиус. Предполагается также, что число Кнудсена $\text{Kn} = l/L = O(1)$, где l — длина свободного пробега электронов. Мы используем стандартную модель плазмы электронов с пространственно-однородным нейтрализующим фоном бесконечно тяжелых ионов. Начальные данные всегда предполагаются близкими к нейтральным. Мы изучаем асимптотическое поведение системы при малых $\varepsilon > 0$. Известно, что формальный предел уравнений ВПЛ при $\varepsilon = 0$ не описывает быстро осциллирующую часть электрического поля. Наша цель — изучить поведение «истинного» электрического поля вблизи этого предела. Мы рассматриваем задачу со стандартными изотропными по скоростям максвелловскими начальными условиями и показываем, что в бесстолкновительном случае затухание этих колебаний практически отсутствует. Выводится приближенная формула для электрического поля, которая затем подтверждается численно с использованием упрощенной модели Бхатнагара—Гросса—Крука (БГК) для уравнений ВПЛ. Также рассматривается другой класс начальных условий, который приводит к сильным колебаниям с амплитудой порядка $O(1/\varepsilon)$. Численные решения этого класса изучаются для различных значений параметров ε и Kn .

Ключевые слова: Кинетические уравнения Власова—Пуассона—Ландау, функция распределения, модель Бхатнагара—Гросса—Крука, колебания электрического поля.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. В. Бобылев, И. Ф. Потапенко. Асимптотические решения кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 55–70. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70>

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Власова—Пуассона—Ландау (ВПЛ) описывают эволюцию по времени горячей столкновительной плазмы. Известно, что интеграл столкновений Ландау [1, 11] можно рассматривать как малое возмущение уравнений Власова—Пуассона (см., например, [12]). Поэтому интегралы столкновений часто игнорируются, и тогда в литературе рассматриваются бесстолкновительные модели плазмы. Однако это может быть верно только для относительно коротких промежутков времени. Цель настоящей статьи — показать важность столкновительных эффектов в некоторых процессах. Очевидно, что уравнения Власова—Пуассона—Ландау содержат два различных микроскопических масштаба длины: радиус Дебая r_D и длину свободного пробега

$l \gg r_D$. Кроме того, типичные граничные или начальные условия могут вводить третий макроскопический масштаб длины L такой, что $L \gg l \gg r_D$. Эти три различных масштаба делают общую картину кинетической эволюции плазмы довольно сложной. Целью данной работы является изучение различных стадий этой эволюции на большом времени как аналитическими, так и численными методами. Основное внимание уделяется (1) роли начальных условий и (2) важности столкновительных эффектов. Мы используем в основном упрощенный оператор столкновений типа Бхатнагара—Гросса—Крука (БГК), поскольку все основные свойства приближенных уравнений совпадают с аналогичными свойствами истинных кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау. Наша главная цель — описать как аналитическими, так и численными методами качественную картину эволюции системы.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 посвящен постановке задачи для уравнений ВПЛ и анализу малых параметров, временных масштабов и различных классов начальных условий. Асимптотические решения относительно малого параметра ε обсуждаются в разделах 3–4. Показано, что безразмерное электрическое поле не может иметь предела при $\varepsilon = 0$ из-за быстрых колебаний с частотой порядка $O(1/\varepsilon)$. Этот вывод подтверждается численным решением. Колебания имеют величину порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Они затухают со временем только за счет столкновений, и этот факт показывает важность столкновительных эффектов в плазме. Все эти факты подтверждаются численным моделированием для упрощенного модельного уравнения со столкновительным членом типа БГК в разделе 5. Упрощение позволяет уменьшить размерность задачи до $d = 2$ и, следовательно, минимизировать затраты на вычисления. Численная схема и результаты расчетов подробно обсуждаются в разделе 5.

Следует подчеркнуть, что кинетические уравнения Власова—Пуассона—Ландау с математической точки зрения достаточно сложны. Поэтому они пока недостаточно изучены. В частности, для этих уравнений до сих пор не доказаны теоремы о глобальном существовании решений задачи Коши и подобные результаты. В то же время они широко используются в приложениях к физике. Основная цель настоящей работы — прояснить некоторые тонкие математические вопросы, связанные со многими работами физиков по асимптотическим свойствам этих кинетических уравнений. Поэтому работа написана на формальном уровне математической строгости. Неявно предполагается, что классические решения задачи Коши рассматриваемых уравнений существуют на любом временном интервале и обладают всеми необходимыми свойствами. Основное внимание уделено таким эффектам, которые не были отмечены в публикациях физиков (в частности, существование быстрых и очень медленно затухающих колебаний электрического поля). Результаты подтверждены точными численными исследованиями.

2. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА—ПУАССОНА—ЛАНДАУ ДЛЯ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим плазму из электронов с электрическим зарядом $(-e)$ и массой m и ионов с зарядом Ze и массой M , где $e > 0$ — элементарный заряд электрона. Ниже для простоты полагаем, что $Z = 1$. Условие слабого взаимодействия:

$$e^2 \rho_0^{-1/3} \ll T_0, \quad (2.1)$$

где ρ_0 и T_0 — соответственно типичные постоянные плотность и абсолютная температура электронов.

Пусть $f(x, v, t)$ — распределение электронов, а ионы равномерно распределены в пространстве с постоянной плотностью ρ_0 . Тогда самосогласованное электрическое поле выражается формулой

$$E(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} e \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\rho(y, t) - \rho_0}{|x - y|}, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

В равенстве (2.2) предполагается, что на бесконечности плазма находится в состоянии равновесия, а также

$$\rho(x, t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \rho_0 = \text{const}$$

достаточно быстро, чтобы гарантировать сходимость интеграла.

Уравнение Власова—Ландау для $f(x, v, t)$ выглядит так:

$$(\partial_t + v \cdot \partial_x - eE \cdot \partial_v)f = 2\pi \frac{e^4}{m^2} \Lambda [Q_L(f, f) + Q^{(L)}(f, f_i)],$$

где $f_i(x, v, t)$ — функция распределения ионов, Λ — постоянная кулоновского логарифма,

$$Q_L(f, f) = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} dw |u|^{-3} (|u|^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial}{\partial v_\beta} - \frac{\partial}{\partial w_\beta} \right) f(v) f(w),$$

$$Q^{(L)}(f, f_i) = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} dw |u|^{-3} (|u|^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial}{\partial v_\beta} - \frac{m}{M} \frac{\partial}{\partial w_\beta} \right) f(x, v, t) f_i(x, w, t),$$

$$\rho_0 = \int_{\mathbb{R}^3} dv f_i(x, v, t) = \text{const}, \quad u = v - w, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Мы рассматриваем формальный предел очень тяжелых ионов с $M \rightarrow \infty$, предполагая, что их кинетическая энергия остается конечной. Тогда типичная скорость иона очень мала и поэтому $u \approx v$ в подынтегральном выражении $Q^{(L)}(f, f_i)$. Следовательно,

$$Q^{(L)}(f, f_i) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial v_\alpha} (|v|^2 \delta_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta) \frac{\partial f}{\partial v_\beta} = \rho_0 K(f)$$

в пределе при $M \rightarrow \infty$. Поэтому упрощенное кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(x, v, t)$ имеет вид

$$(\partial_t + v \cdot \partial_x - eE \cdot \partial_v)f = 2\pi \frac{e^4}{m^2} \Lambda [Q_L(f, f) + \rho_0 K(f)]. \quad (2.3)$$

Самосогласованное электрическое поле $E(x, t)$ задается уравнением (2.2). Его также можно рассматривать как решение уравнений Максвелла в нерелятивистском пределе $c = \infty$

$$\text{div} E = 4\pi e (\rho_0 - \rho), \quad \text{curl} E = 0, \quad (2.4)$$

или, что то же самое, градиент решения $\varphi(x, t)$ уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e (\rho_0 - \rho), \quad E = \nabla \varphi, \quad (2.5)$$

с нулевыми условиями на бесконечности. Кинетическое уравнение (2.3) в паре с уравнением (2.4) или, что то же самое, с уравнением (2.5) называются *уравнениями Власова—Пуассона—Ландау*.

Заметим, что это уравнение было выведено выше в предположении (2.1) слабого взаимодействия между электронами. Параметры ρ_0 и T_0 в (2.1) соответствуют типичной электронной плотности и абсолютной температуре (выраженной в единицах энергии) на бесконечности. Рассмотрим задачу Коши для $t > 0$ во всем пространстве $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ с начальными условиями

$$f|_{t=0} = \rho_0 \theta_0^{-3/2} \tilde{f}_0 \left(\frac{x}{L}, \frac{v}{\theta_0^{1/2}} \right), \quad \theta_0 = \frac{T_0}{m}.$$

Заметим, что длина L рассматривается здесь как свободный параметр. Она не предполагается большой с самого начала. Обычно мы также предполагаем, что

$$\tilde{f}_0(\tilde{x}, \tilde{v}) \xrightarrow{|\tilde{x}| \rightarrow \infty} M(|\tilde{v}|) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-|\tilde{v}|^2/2).$$

Более того, та же самая константа Максвелла $M(|\tilde{v}|)$ на бесконечности для безразмерной задачи предполагается для всех $t > 0$. Это предположение будет рассматриваться ниже как граничное условие на бесконечности. Для постановки безразмерной задачи обозначим

$$f(x, v, t) = \rho_0 \theta_0^{-3/2} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{t}), \quad F(f) = m F_0 \tilde{F}(\tilde{f}), \quad C(f) = C_0 \tilde{C}(\tilde{f}),$$

с соответствующими константами F_0 для силы и C_0 , и положим

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{v} = v/\theta_0^{1/2}, \quad \tilde{t} = t/t_0, \quad t_0 = L/\theta_0^{1/2}.$$

Также определим безразмерное электронное поле $\tilde{E} = E/E_0$ в (2.3), (2.4) таким образом, что полученные уравнения для $\tilde{E}$ не содержат никаких параметров. Тогда безразмерные уравнения для $\tilde{f}$ и $\tilde{E}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_t + v \cdot f_x - A E \cdot f_v &= B C(f), \quad C(f) = Q_L(f, f) + K(f), \\ \operatorname{div} E &= 1 - \rho, \quad \operatorname{curl} E = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где тильды опущены. Эти уравнения содержат только два безразмерных параметра

$$A = \left(\frac{L}{r_D} \right)^2, \quad B = \frac{L}{l} = \frac{1}{Kn}, \quad (2.7)$$

где Kn обозначает число Кнудсена,

$$r_D = \left(\frac{4\pi\rho_0 e^2}{T_0} \right)^{-1/2}, \quad l = \frac{\sqrt{2\pi} T_0^2}{e^4 \rho_0 \Lambda}, \quad \Lambda = \ln \frac{r_D T_0}{e^2}$$

обозначают соответственно радиус Дебая, среднюю длину свободного пробега электронов и кулоновский логарифм.

Важно ясно понимать, что параметры A и B в уравнениях (2.6) не являются независимыми. Действительно, кинетическое уравнение (2.6) было формально выведено в предположении (2.1) слабого взаимодействия. Традиционный малый параметр δ в физике плазмы (см., например, [10]) равен обратному числу частиц в сфере или кубе Дебая. Неравенство

$$\delta = \frac{1}{\rho_0 r_D^3} = \left(\frac{4\pi e^2 \rho_0^{1/3}}{T_0} \right)^{3/2} \ll 1, \quad (2.8)$$

очевидно, эквивалентно неравенству (2.1). Следовательно,

$$\Lambda \approx \ln \frac{1}{\delta} \gg 1, \quad \frac{l}{r_D} = c_1 \frac{1}{\delta \Lambda} \approx c_1 \left(\delta \ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1} \gg 1,$$

и

$$\frac{A}{B} = \frac{Ll}{r_D^2} \approx \left(\delta \ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1} \frac{L}{r_D} \gg 1, \quad \text{если} \quad L \geq r_D,$$

где c_1 — абсолютная константа. Это неравенство подтверждает, что член столкновения Ландау следует рассматривать как малый поправочный член в уравнении Власова.

Имеется также второе условие применимости уравнения Ландау—Власова, а именно неравенство $L \ll d$, где d — эффективный радиус действия потенциала. В случае плазмы можно положить $d \approx r_D$ и ввести второй (вместе с δ из (2.8)) параметр, а именно

$$\varepsilon = A^{-1/2} = \frac{r_D}{L} \ll 1.$$

Число Кнудсена в уравнениях (2.6), (2.7) можно выразить через ε и δ как

$$Kn = \frac{l}{L} = \frac{l}{r_D} \varepsilon \approx c_1 \frac{\varepsilon}{\delta \ln 1/\delta}.$$

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые асимптотические решения уравнений (2.6) вблизи предела $\varepsilon \rightarrow 0$, предполагая, что Kn ограничено.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВПЛ

Сделаем еще одно упрощение и предположим, что начальные данные f_0 и решение f задачи (2.6) зависят только от одной пространственной переменной. Для краткости сохраним ниже прежние обозначения x , полагая, что $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}_+$. Введем также безразмерное электрическое поле

$$E^\varepsilon(x, t) = E(x, t)/\varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 = A^{-1}.$$

Замечание 3.1. Конечно, мы имеем в виду, что «истинное» электрическое поле $\tilde{E} \in \mathbb{R}^3$ — это вектор $\tilde{E} = (E, 0, 0)$, параллельный (или антипараллельный) оси x . Ниже, с некоторой долей злоупотребления обозначениями, символами типа $E_x, f_x, \dots$ обозначим частные производные по x , тогда как через v_x будем обозначать x -компоненту вектора $v \in \mathbb{R}^3$.

Получаем из (2.6):

$$f_t^\varepsilon + v_x f_x^\varepsilon - E^\varepsilon \cdot f_{v_x}^\varepsilon = \frac{1}{Kn} C(f^\varepsilon), \quad E_x^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \rho^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

где мы добавили верхние индексы к f, ρ , чтобы подчеркнуть их ε -зависимость. Типичное начальное условие имеет вид

$$f^\varepsilon|_{t=0} = [2\pi T_0(x)]^{-3/2} \exp[-|v|^2/2T_0(x)], \quad T_0(|x|) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 1. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\rho^\varepsilon = \langle f^\varepsilon, 1 \rangle, \quad j^\varepsilon = \langle f^\varepsilon, v_x \rangle, \quad \text{где} \quad \langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} dv f(v) \psi(v).$$

Теперь мы можем рассмотреть формальный предел уравнений ВПЛ при $\varepsilon \rightarrow 0$ при некоторых предположениях о «хорошем поведении» $f^\varepsilon(x, v, t)$ и $E^\varepsilon(x, t)$ для $\varepsilon \rightarrow 0$. Полученные уравнения имеют следующий вид.

Предложение 3.1. *Предельные функции $f^0(x, v, t)$ и $E^0(x, v, t)$ удовлетворяют уравнениям*

$$f_t^0 + v_x f_x^0 - E^0 f_{v_x}^0 = \frac{1}{Kn} C(f^0), \quad (3.3)$$

$$E^0 = \frac{1}{Kn} \langle C(f^0), v_x \rangle - \langle f^0, v_x^2 \rangle_x, \quad f^0|_{t=0} = f_0, \quad (3.4)$$

что влечёт

$$\rho^0(x, t) = \langle f^0, 1 \rangle = 1, \quad j^0(x, t) = \langle f^0, v_x \rangle = 0.$$

Доказательство. Формальное доказательство предложения 3.1 очевидно. Уравнение (3.1) для E приводит к равенству $\rho^0 = 1$. Это, в свою очередь, возможно только при $j^0 = 0$ из-за уравнения непрерывности и граничных условий на бесконечности. Наконец, формула для E^0 следует из уравнения $j_t^0 = 0$. $\square$

Предельные уравнения (3.3), (3.4) изучались аналитическими и численными методами во многих работах, в частности, в [2, 5–7, 9]. Можно сказать, что в этом случае уравнение Пуассона для электрического поля заменяется явной формулой (3.4) для E^0 , которая следует из условий квазинейтральности. Конечно, аналогичный формальный предел может быть определен и для более сложного случая двухкомпонентной плазмы с ионами, имеющими конечную массу и произвольный электрический заряд. В данной работе мы рассматриваем только упрощенную модель, чтобы избежать некоторых менее важных деталей.

4. ПОВЕДЕНИЕ $E^\varepsilon(x, t)$ ПРИ $\varepsilon \rightarrow 0$

Начнем с первого вопроса и предположим, что существует «хорошее» решение задачи (3.1), (3.2) для малых ε . Затем умножим уравнение (3.1) для $E^\varepsilon(x, t)$ на ε^2 и продифференцируем по переменной t . Уравнение непрерывности и граничные условия на бесконечности приводят к уравнению

$$\varepsilon^2 E_t^\varepsilon = j^\varepsilon, \quad j^\varepsilon = \langle f^\varepsilon, v_x \rangle.$$

Затем дифференцируем первое уравнение ещё раз и после несложных преобразований получаем на основе уравнений (3.1), (3.2) следующую задачу:

$$\varepsilon^2 E_{tt}^\varepsilon + E^\varepsilon = S^\varepsilon(x, t) = -\langle f^\varepsilon, v_x^2 \rangle_x + \frac{1}{Kn} \langle C(f^\varepsilon), v_x \rangle + \varepsilon^2 E^\varepsilon E_x^\varepsilon; \quad (4.1)$$

$$E^\varepsilon|_{t=0} = E_t^\varepsilon|_{t=0} = 0. \quad (4.2)$$

Задача (4.1), (4.2) может быть формально «решена» преобразованием Лапласа по t . Тогда мы получим

$$E^\varepsilon(x, t) = \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\sin \tau) S^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau) = S^\varepsilon(x, t) - S^\varepsilon(x, 0) \cos \frac{t}{\varepsilon} - \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\cos \tau) S_t^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau). \quad (4.3)$$

Теперь мы можем доказать следующую оценку.

Предложение 4.1. *Если*

$$|S_{tt}^\varepsilon(x, t)| \leq C(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

где C не зависит от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, то справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(x, t) &= S^\varepsilon(x, t) - S^\varepsilon(x, 0) \cos \frac{t}{\varepsilon} + \varepsilon \Delta(x, t), \\ |\Delta(x, t)| &\leq |S_t^\varepsilon(x, 0)| + C(x)t, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Доказательство. Достаточно оценить последний интеграл в (4.3). Интегрируя по частям, получаем

$$\Delta(x, t) = - \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\sin \tau)' S_t^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau) = -S_t^\varepsilon(x, 0) \sin \frac{t}{\varepsilon} - \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\sin \tau) S_{tt}^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau).$$

Оценка (4.5) следует непосредственно из этого равенства и предположения (4.4) предложения 4.1. Тем самым доказательство завершено. $\square$

Заметим, что $S^0(x, t) = E^0(x, t)$ в обозначениях уравнения (3.4). Таким образом, $E^\varepsilon(x, t)$ быстро осциллирует при $\varepsilon \rightarrow 0$ с частотой $\omega_\varepsilon = 1/\varepsilon$ вблизи своего среднего $E^0(x, t)$ с амплитудой $|E^0(x, 0)| = O(1)$. Например, $E^0(x, 0) = -T_0'(x)$ для начального локального максвеллиана с температурой $T_0(x)$.

Вероятно, дополнительный член в кинетическом уравнении (3.3) приводит лишь к небольшому возмущению $f^0(x, v, t)$ из-за быстрых колебаний. Но он важен для понимания поведения $E^\varepsilon(x, t)$.

Конечно, предположение (4.4) предложения 4.1 остается недоказанным. Однако оно выглядит реалистичным для «хорошего» решения $f^0(x, v, t)$ уравнения (3.3) с $E^\varepsilon(x, t)$ (без остаточного члена) из предложения 4.1. С другой стороны, асимптотическую формулу для $E^\varepsilon(x, t)$ можно проверить численно для общего случая или даже аналитически для линеаризованного бесстолкновительного случая (см. [3]).

Следует отметить, что быстрые колебания электрического поля для бесстолкновительных уравнений Власова—Пуассона ранее изучались в литературе (см., в частности, важную статью [8] Гренье). Наше уравнение (4.1) для $\text{Kn} = \infty$ можно рассматривать как одномерную версию уравнения (27) из [8] (после интегрирования и очевидной смены обозначений). Методы этой статьи основаны на специальном представлении решений (уравнение (12) из [8]), которое удобно только для уравнений типа Власова и вряд ли может быть использовано для уравнений ВПЛ.

5. Модельные уравнения Власова—Пуассона—БГК и численные примеры

В начале мы дадим краткое описание численного алгоритма и конечно-разностной схемы, с помощью которых решается упрощенная модель уравнений ВПЛ. Затем мы покажем несколько графиков, представляющих расчет для двух типов исходных данных и различных входных характеристик. В частности, расчеты качественно иллюстрируют полученные выше аналитические результаты.

Для численного моделирования возьмем упрощенную одномерную по скорости $v \in \mathbb{R}$ и координате $x \in \mathbb{R}$ модель 1V1D-версии уравнений (3.1) и (3.4), (4.1) (опуская нижний индекс x в v_x , E_x)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{I}_x f - \hat{I}_v f = \frac{1}{Kn} \hat{C}(f); \quad \hat{I}_x f = v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \hat{I}_v f = E \frac{\partial f}{\partial v}; \quad (5.1)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \rho E = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{Kn} J(x, t), \quad \varepsilon \neq 0, \quad (5.2)$$

$$E = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{Kn} J(x, t) \right], \quad \varepsilon = 0,$$

с начальными условиями

$$f|_{t=0} = f^0(x, v), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad E|_{t=0} = E^0(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0} = j^0(x).$$

Здесь $J(x, t) = \langle \hat{C}(f), v \rangle$, $\rho(x, t) = \langle f, 1 \rangle$, $p(x, t) = \langle f, v^2 \rangle$, где используется модель типа БГК

$$\hat{C}(f) = f_c(x, v, t) - f(x, v, t), \quad f_c(x, v, t) = \frac{\rho}{[2\pi(p/\rho)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{|v|^2}{2(p/\rho)} \right] \quad (5.3)$$

для члена столкновений $\hat{C}(f)$. Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают в этом разделе интеграл по $\mathbb{R}$. Упрощенные уравнения (5.1)–(5.3) рассматриваются на отрезке $[0, 2\pi]$ с периодическими граничными условиями $f(2\pi, v, t) = f(0, v, t)$, $E(2\pi, t) = E(0, t)$. Для построения 1V1D конечно-разностной схемы для (5.1)–(5.3) бесконечный интервал скорости заменяется на $v \in [-v_m, v_m]$. Граничные значения дискретной скорости $\pm v_m$ выбираются достаточно большими, чтобы обеспечить равенство нулю распределения $f(x, \pm v_m, t) \simeq 0$. В рассматриваемой области введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_x \times \omega_v \times \omega_t$ с шагами дискретизации Δx , Δv и Δt :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x_{l+1} = x_l + \Delta x, l = 0, 1, \dots, L-1, x_0 = 0, x_L = 2\pi\}, \\ \omega_v &= \{v_{k+1} = v_k + \Delta v, k = 0, 1, \dots, K-1, v_0 = -v_m, v_K = v_m\}, \\ \omega_t &= \{t^{n+1} = t^n + \Delta t, n = 0, 1, \dots, t^0 = 0\}, \end{aligned}$$

обозначая $f_{l,k}^n = f(l\Delta x, k\Delta v, n\Delta t)$, $E_l^n = E(l\Delta x, n\Delta t)$. Интегралы определяются суммами

$$\begin{aligned} \rho_l^n &= \sum_k f_{l,k}^n \Delta v, \quad j_l^n = \sum_k f_{l,k}^n v_k \Delta v, \\ p_l^n &= \sum_k f_{l,k}^n v_k^2 \Delta v, \quad J_l^n = \sum_k \hat{C}_{l,k}^n v_k \Delta v, \end{aligned}$$

где $\hat{C}_{l,k}^n = f_{c,l,k}^n - f_{l,k}^n$ в обозначениях уравнения (5.3).

Используя консервативную дискретизацию для уравнений (5.1), получаем конечно-разностные операторы

$$\begin{aligned} \hat{I}_x f_{l,k}^n &= \frac{(vf^n)_{l+\frac{1}{2},k} - (vf^n)_{l-\frac{1}{2},k}}{\Delta x}, \\ \hat{I}_v f_{l,k}^n &= \frac{(E^{n+1}f^n)_{l,k+\frac{1}{2}} - (E^{n+1}f^n)_{l,k-\frac{1}{2}}}{\Delta v} \end{aligned}$$

с потоками

$$\begin{aligned} (vf^n)_{l+\frac{1}{2},k} &= v_k \left(\frac{f_{l,k}^n + f_{l+1,k}^n}{2} \right) - |v_k| \left(\frac{f_{l+1,k}^n - f_{l,k}^n}{2} \right), \\ (E^{n+1}f^n)_{l,k+\frac{1}{2}} &= E_l^{n+1} \left(\frac{f_{l,k}^n + f_{l,k+1}^n}{2} \right) + |E_l^{n+1}| \left(\frac{f_{l,k+1}^n - f_{l,k}^n}{2} \right). \end{aligned}$$

Из уравнения (5.2) получаем его дискретный аналог для определения электрического поля. Тогда система (5.1), (5.2) принимает вид

$$\frac{f_{l,k}^{n+1} - f_{l,k}^n}{\Delta t} + \hat{I}_x f_{l,k}^n - \hat{I}_v f_{l,k}^n = \frac{1}{Kn} C_{l,k}^n; \quad (5.4)$$

$$\varepsilon^2 \frac{E_l^{n+1} - 2E_l^n + E_l^{n-1}}{\Delta t^2} + \rho_l^n E_l^{n+1} = \frac{J_{l,k}^n}{Kn} - \frac{\Delta p_l^n}{\Delta x}, \quad \varepsilon \neq 0; \quad (5.5)$$

$$E_l^{n+1} = \frac{1}{\rho_l^n} \left(\frac{J_{l,k}^n}{Kn} - \frac{\Delta p_l^n}{\Delta x} \right), \quad \varepsilon = 0. \quad (5.6)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{f_{l,k}^{n+1} - f_{l,k}^n}{\Delta t} v_k \Delta v &= \frac{\Delta j^{n+1}}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta j^{n+1}}{\Delta t} = \varepsilon^2 \frac{E_l^{n+1} - 2E_l^n + E_l^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \sum_k (\hat{I}_v f_{l,k}^n) v_k \Delta v &= -E_l^{n+1} \sum_k f_{l,k}^n \Delta v = -E_l^{n+1} \rho_l^n, \\ \sum_k \hat{I}_x f_{l,k}^n v_k \Delta v &= \frac{\Delta p_l^n}{\Delta x}, \end{aligned}$$

мы видим, что уравнения (5.5), (5.6) можно получить из уравнения (5.4). Квазинейтральный предел *формально* можно получить, если в уравнениях (5.2), (5.5) ε равен нулю: $\varepsilon = 0$, $E^0(x) = 0$, $j = 0$. Тогда осциллирующая во времени часть электрического поля в (5.6) обращается в нуль. Кроме того, в этой численной формуле отсутствует шаг по времени.

Таким образом, уравнения (5.4)–(5.6) задают численную схему первого порядка. Вычислительный алгоритм следующий:

1. На каждом временном шаге t^{n+1} все необходимые члены вычисляются с использованием $f_{l,k}^n$.
2. Затем электрическое поле E_l^{n+1} получается для $(n+1)$ -го временного шага из

$$E_l^{n+1} = \frac{1}{1 + \sigma \rho_l^n} \left[-\sigma \left[\frac{\Delta p_l^n}{\Delta x} - \frac{J_{l,k}^n}{Kn} \right] + (2E_l^n - E_l^{n-1}) \right] \quad (5.7)$$

с использованием уравнения (5.6) для формального предела при $\varepsilon = 0$. Здесь $\sigma = \Delta t^2/\varepsilon^2$.

3. Функция распределения вычисляется из уравнения

$$f_{l,k}^{n+1} = \Delta t f_{l,k}^n - \Delta t \hat{I}_x f_{l,k}^n + \Delta t \hat{I}_v f_{l,k}^n + \Delta t \frac{1}{Kn} C_{l,k}^n. \quad (5.8)$$

В следующей части раздела представлены численные эксперименты по изучению эволюции электрического поля для параметров $0 \leq \varepsilon \leq 1$ и $0 \leq Kn \leq 0.01$. Скорость изменяется от $-v_m = -20$ до $v_m = 20$ с шагом скорости $\Delta v = 0.1$, шаг пространственной сетки обычно равен $\Delta x \leq 0.1$. Шаг по времени зависит от ε . Его следует брать достаточно малым, поскольку грубые шаги не улавливают самые быстрые временные масштабы. Ниже рассматриваются два типа начальных данных:

$$f_{1,2}^0(x, v) = \frac{a_{1,2}(x, v)}{[2\pi T_{1,2}^0(x)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{|v|^2}{2T^0(x)} \right],$$

где

$$(I) \quad a_1 = 1, \quad (II) \quad a_2 = 1 + \frac{v \cos x}{T^0(x) + v^2},$$

с двумя различными типами начальных условий для $E(x, t)$:

$$\rho_1^0 = 1, \quad E_1^0(x) = 0, \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad j_1^0 = 0; \quad (I)$$

$$\rho_2^0 = 1, \quad E_2^0(x) = 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial E_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = j_2^0. \quad (II)$$

Представленные ниже численные результаты сравниваются с приближенной формулой для электрического поля $E(x, t)$ из [4]

$$E(x, t) \approx -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial p(x, 0)}{\partial x} e^{-\lambda t} \cos \frac{t}{\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{\beta}{Kn}, \quad \beta = \text{const}. \quad (5.9)$$

При отсутствии столкновений $Kn = \infty$ имеем $C(f) = J(f) = 0$ в (5.6)–(5.8) и $\lambda = 0$ в (5.9).

В начале мы рассмотрим эволюцию функции $f_1^0(x, v)$ для начальных условий (I) с температурой, распределенной как $T_1^0(x) = 1 - A \cos x$, $A = 0.5$. Отметим, что амплитуда колебаний электрического поля пропорциональна A и зависит от этого параметра возмущения линейно через $\partial p/\partial x$. Несколько расчетов выполнены для набора значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Численные результаты на рис. 1 и 2 иллюстрируют зависимость колебаний электрического поля от времени. Напомним, что $\varepsilon = 1$ соответствует периодическому в пространстве решению с периодом $2\pi r_D$ (масштаб пространства равен радиусу Дебая r_D). Условие $\varepsilon = 0$ соответствует квазинейтральному пределу, см. (5.6). Эта формула удобна для долговременного моделирования, поскольку нет ограничений на временной шаг, за исключением обычных численных ограничений. В этом случае колебания поля исчезают, и электрическое поле становится равным нулю после короткой начальной стадии $t \simeq \pi/2$ (рис. 1, $\varepsilon = 0$). Этот формальный подход не улавливает реального поведения электрического поля, но он приближенно описывает среднее значение $E(x, t)$ для *любых* малых значений $\varepsilon \ll 1$. В [3] было показано, что длинноволновые колебания электрического поля в бесстолкновительной плазме могут существовать без затухания очень долгое время (см. (5.9)). Этот факт подтверждается на рис. 1. Чем меньше параметр ε , тем слабее затухание колебаний.

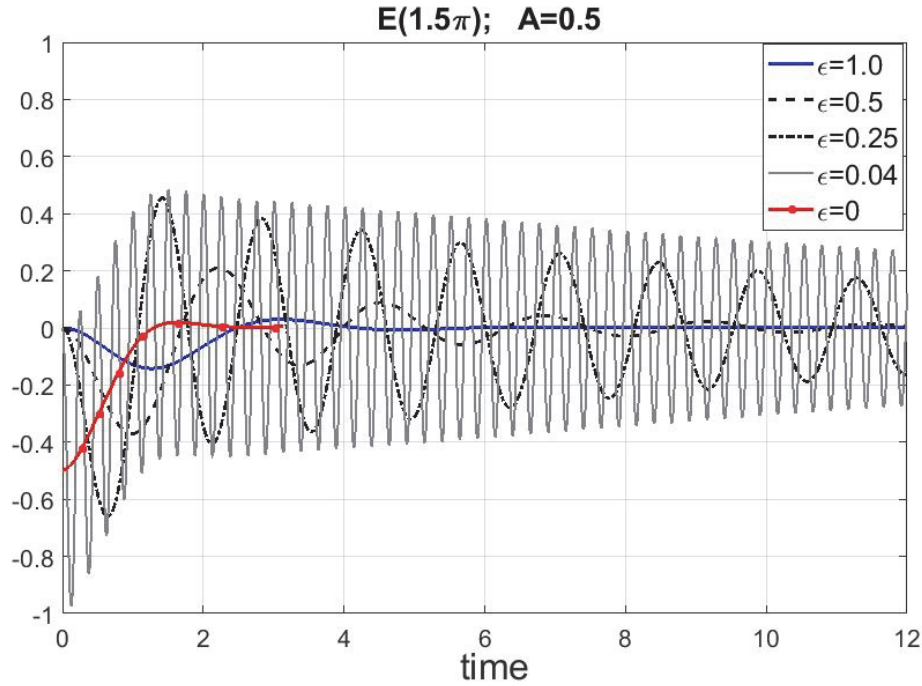


Рис. 1. Электрическое поле $E(1.5\pi, t)$ как функция времени для различных значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

FIG. 1. Electric field $E(1.5\pi, t)$ as a function of time for different values of parameter $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Для оценки затухания колебаний $E(x, t)$ вводится амплитуда колебаний $\Delta E(x, t; \varepsilon)$, вычисленная за период колебаний T_{osc} :

$$\Delta E(x, t; \varepsilon) = |E_{max} - E_{min}|; \quad T_{osc} = 2\pi\varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

$mT_{osc} \leq t \leq (1+m)T_{osc}$

Эта характеристика $\Delta E(x, t; \varepsilon)$ представлена на рис. 2 для $x = \pi/2$ и различных значений параметра ε .

Замечание 5.1. В принципе, параметр $\varepsilon(t)$ может менять свое значение в ходе численного решения больших по времени физических задач. Поскольку грубый шаг по времени не сохраняет правильную эволюцию поля, важно учитывать зависимость Δt от ε такую, что $\Delta t/\varepsilon \ll 1$. Несмотря на возможно небольшое влияние на саму функцию распределения, ошибка в оценке поля может играть важную роль для некоторых задач динамики плазмы.

Вторую серию численных расчетов для второго типа начальных данных $f_2(x, v)$ с начальными условиями (II)

$$\rho_2^0 = 1, \quad E_2^0 = 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} = j_2^0(x)$$

и распределением температуры

$$T_2^0(x) = 1 + A(1 - \cos x)$$

начинаем с бесстолкновительного случая $\text{Kn} = \infty$. Переход от начальных условий (I) к более общим ограничениям (II) существенно увеличивает величину осциллирующей части поля $E(x, t \geq 0) \simeq 1/\varepsilon$ (см. [4]).

Графики 3 и 4 дают общий вид эволюции электрического поля $E(x, t)$ для $\varepsilon = 0.04$ от времени для $x = \pi, 1.5\pi$. На рис. 4 показаны графики E и $\partial p/\partial x$, увеличенные для лучшей наглядности.

На рис. 5 и 6 представлены два результата вычислений для второго варианта в бесстолкновительном ($\text{Kn} = \infty$) и столкновительном ($\text{Kn} = 1$) случаях, $\varepsilon = 0.01$. Зависимость $\partial p/\partial x$ от времени во втором варианте более подробно представлена на рис. 5.

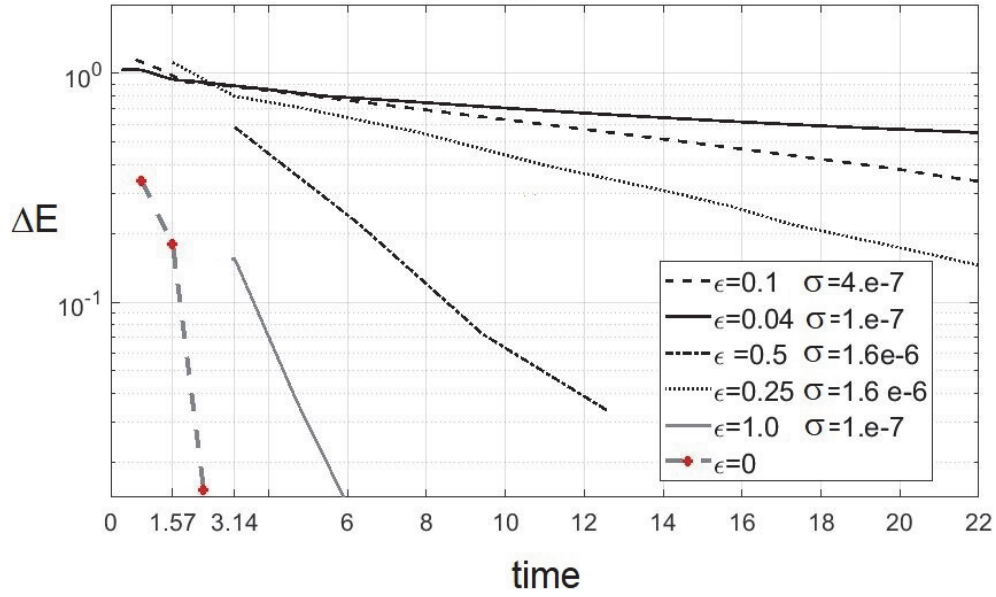


Рис. 2. $\Delta E(\pi/2, t; \varepsilon)$ как функция времени для различных значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\text{Kn} = \infty$.

FIG. 2. $\Delta E(\pi/2, t; \varepsilon)$ as a function of time for different values of parameter $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\text{Kn} = \infty$.

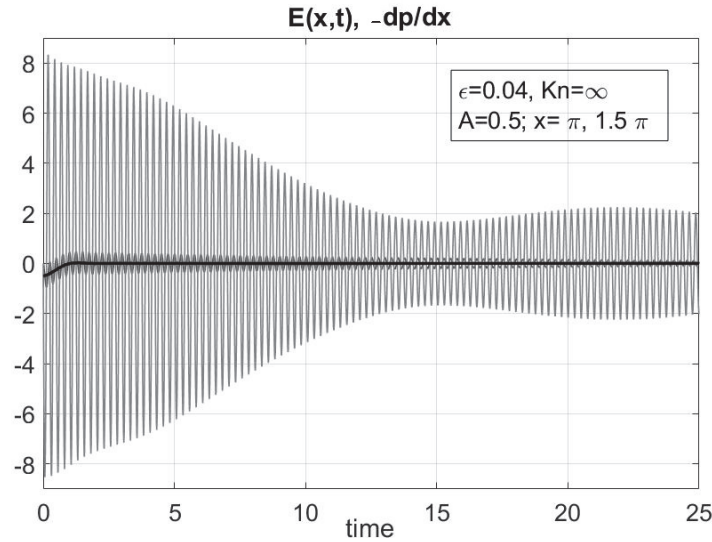


Рис. 3. Электрическое поле $E(x, t)$, $x = \pi$ — светло-серая линия, и $x = 3\pi/2$ — темно-серая линия, $\partial p / \partial x$, $x = 3\pi/2$ — черная линия; $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ и $A = 0.5$.

FIG. 3. Electric field $E(x, t)$, $x = \pi$ — light grey line, and $x = 3\pi/2$ — dark grey line, $\partial p / \partial x$, $x = 3\pi/2$ — black line; $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ and $A = 0.5$.

Для сравнения результатов двух вариантов начальных данных на рис. 7 представлены расчеты колебаний электрического поля в столкновительном случае, $\text{Kn} = 1$, для первого варианта: начальная функция f_1^0 с начальными условиями (II) и начальным распределением температуры $T_2^0(x)$. Длительность затухания электрического поля в обоих случаях сопоставима, но амплитуда колебаний в первом случае пренебрежимо мала.

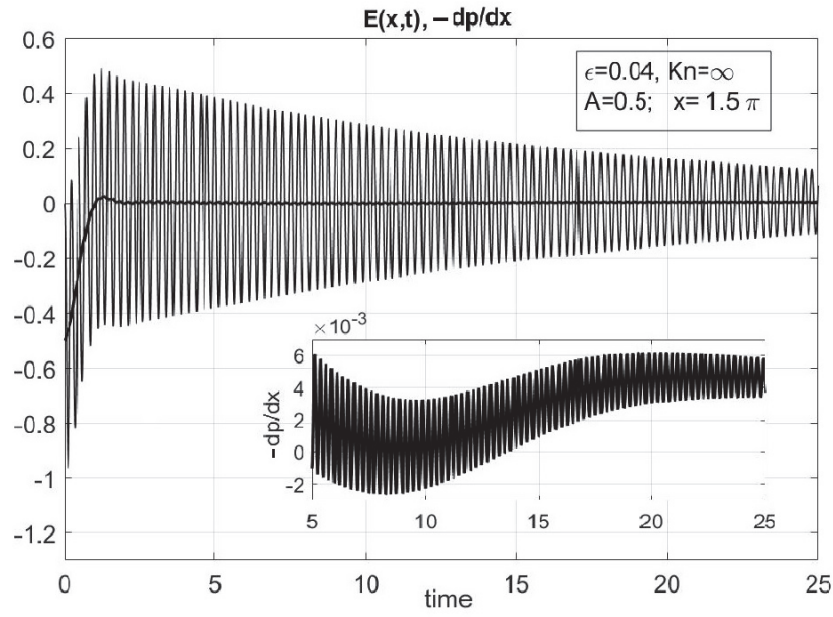


РИС. 4. Электрическое поле $E(x,t)$ — темно-серая линия, $-\partial p/\partial x$ — черная линия частично изображены в большем масштабе; $x = 3\pi/2$, $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ и $A = 0.5$.

FIG. 4. Electric field $E(x,t)$ — dark grey line, $-\partial p/\partial x$ — black line are partially depicted at a larger scale; $x = 3\pi/2$, $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ and $A = 0.5$.

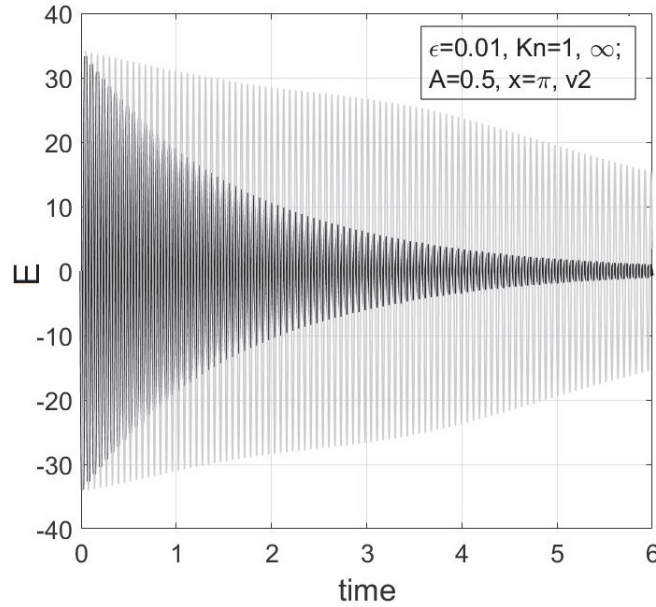


РИС. 5. Зависимость электрического поля $E(x,t)$ от времени; $\text{Kn} = \infty$ — серые линии; $\text{Kn} = 1$ — черные линии, $x = \pi$.

FIG. 5. Electric field $E(x,t)$ dependence on time; $\text{Kn} = \infty$ — grey lines; $\text{Kn} = 1$ — black lines, $x = \pi$.

В следующих примерах сравниваются столкновительные режимы для второго варианта при различных числах Кнудсена, которые принимаются в качестве параметра. Ищем зависимость затухания колебаний от величины Kn . На рис. 8 показана зависимость $E(\pi/2, t)$, $\varepsilon = 0.001$ для трех

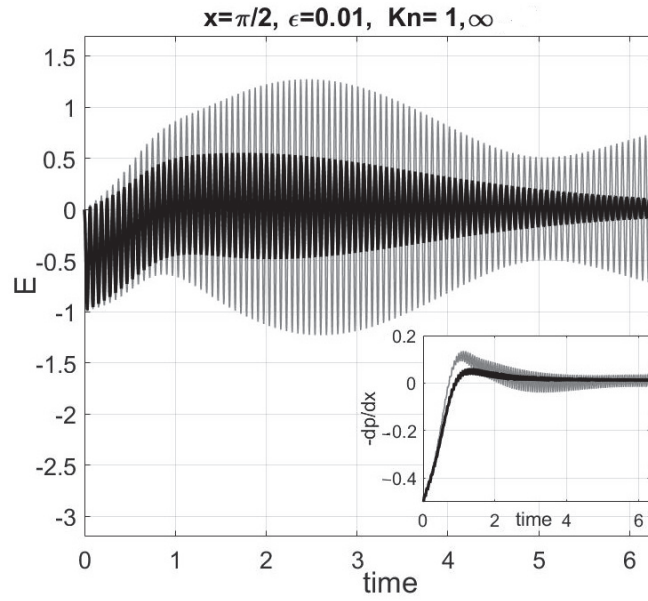


РИС. 6. Зависимость от времени электрического поля $E(x, t)$ и $\partial p / \partial x$: $\text{Kn} = \infty$ — серые линии; $\text{Kn} = 1$ — черные линии. $x = \pi/2$.

FIG. 6. Electric field $E(x, t)$ and $\partial p / \partial x$ dependence on time: $\text{Kn} = \infty$ — grey lines; $\text{Kn} = 1$ — black lines. $x = \pi/2$.

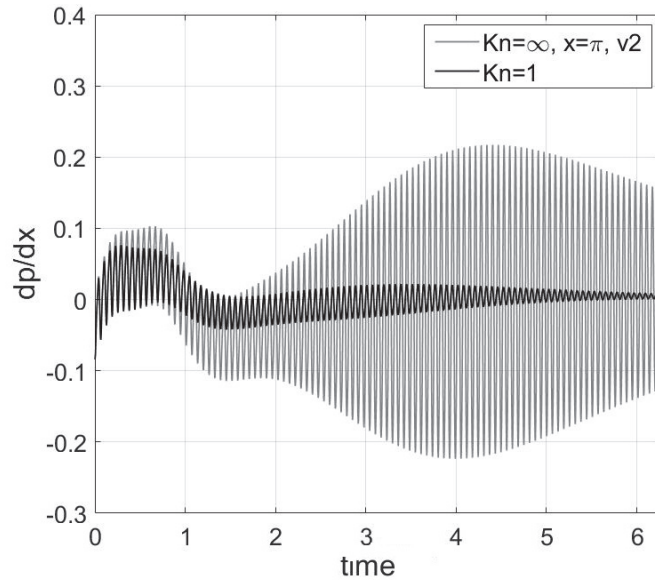


РИС. 7. Временная зависимость $\partial p / \partial x$ для $\text{Kn} = \infty$ и $\text{Kn} = 1$, $x = \pi/2$.

FIG. 7. Time dependence of $\partial p / \partial x$ for $\text{Kn} = \infty$ and $\text{Kn} = 1$, $x = \pi/2$.

чисел Кнудсена $\text{Kn} = 0.1, 0.05, 0.025$. Очевидно, что чем меньше число Кнудсена, тем медленнее $E(x, t)$ сходится к нулю при больших t .

Фактически, рис. 9 описывает переход к гидродинамическому режиму. Видно, что через некоторое время, пропорциональное Kn^{-1} , колебания исчезают. Также видно, что чем меньше число Кнудсена, тем выше проходят линии $E(x, t)$.

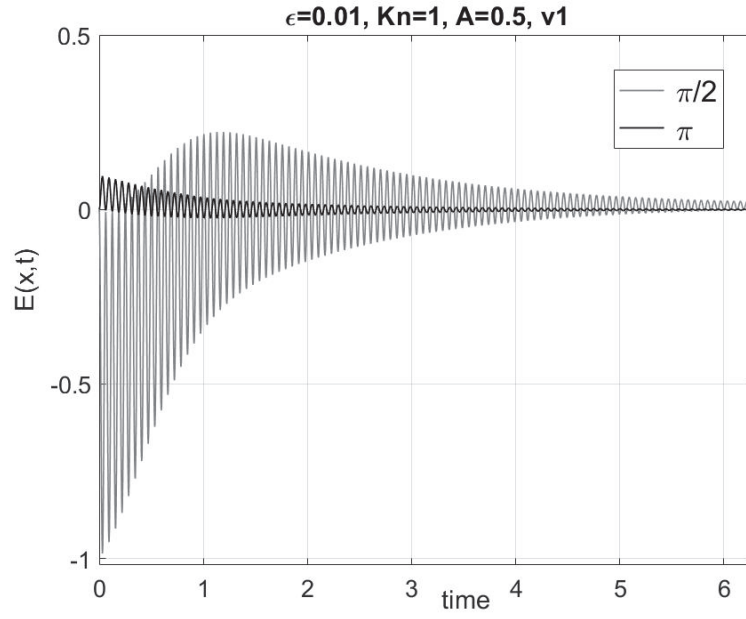


Рис. 8. $E(x, t)$ для начальной функции f_1^0 с начальными условиями (I) и $T_2^0(x)$.

FIG. 8. $E(x, t)$ for the initial function f_1^0 with the initial conditions (I) and $T_2^0(x)$.

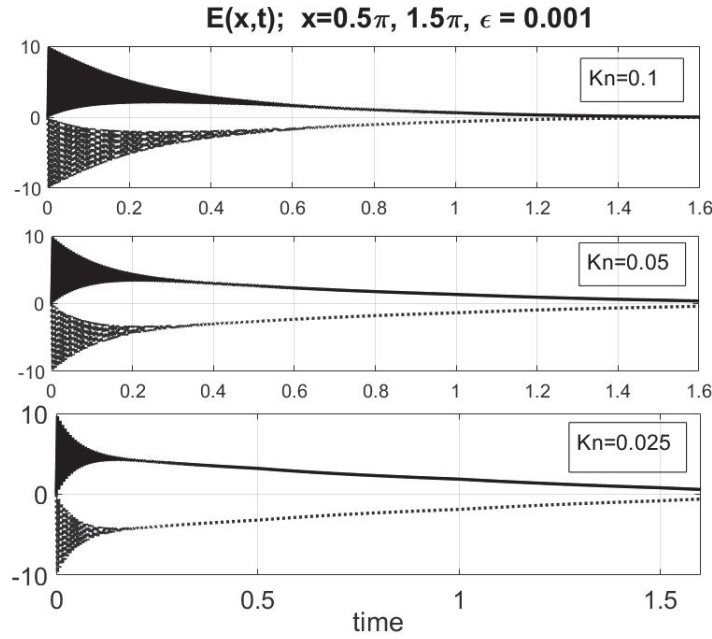


Рис. 9. Электрическое поле $E(x, t)$ для $\text{Kn} = 0.1, 0.05, 0.025$; $\varepsilon = 10^{-3}$, $A = 5$, $x = 3\pi/2$ — пунктирная линия, $\pi/2$ — сплошная линия.

FIG. 9. Electric field $E(x, t)$ for $\text{Kn} = 0.1, 0.05, 0.025$; $\varepsilon = 10^{-3}$, $A = 5$, $x = 3\pi/2$ — dotted line, $\pi/2$ — solid line.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы изучили класс таких решений уравнений ВПЛ, для которых типичная длина L намного больше радиуса Дебая r_D . Принимая формальный предел такой, что $\varepsilon = r_D/L \rightarrow 0$, $\text{Kn} = l/L$ остается ограниченным, мы получаем кинетическое уравнение, которое численно изучалось в нескольких публикациях. Нашей целью было прояснить некоторые математические вопросы, связанные с этим пределом. В частности, было показано, что предельное уравнение дает, вероятно, правильные результаты для функции распределения, но не для самосогласованного электрического поля. Причина в том, что поле содержит быстро осциллирующие члены, пропорциональные $\exp(\pm it/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это новое наблюдение показывает, что с предельными уравнениями нужно проявлять осторожность.

Мы считаем, что эти свойства уравнений ВПЛ могут быть строго доказаны, все они подтверждены в [3] более явным изучением линеаризованного уравнения Власова—Пуассона и в настоящей статье точными численными решениями модельных уравнений Власова—Пуассона—БГК. Численные результаты для случая сильных колебаний электрического поля (см. рис. 5 и 6) поднимают много интересных вопросов, которые требуют дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau L. D. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // Ж. экс. и теор. физ. — 1937. — 7. — С. 203–209.
2. Batishchev O. V., Bychenkov V. Yu., Detering F., Rozmus W., Sydora R., Capjack C. E., Novikov V. N. Heat transport and electron distribution function in laser produced with hot spots // Phys. Plasmas. — 2002. — 9. — С. 2302–2310.
3. Bobylev A. V., Potapenko I. F. Long wave asymptotics for Vlasov–Poisson–Landau kinetic equation // J. Stat. Phys. — 2019. — 175. — С. 1–18.
4. Bobylev A. V., Potapenko I. F. On solutions of Vlasov–Poisson–Landau equations for slowly varying in space initial data // Kinet. Relat. Models. — 2023. — 16, № 1. — С. 20–40.
5. Brantov A. V., Bychenkov V. Yu., Batishchev O. V., Rozmus W. Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses // Comput. Phys. Commun. — 2004. — 164. — С. 67–72.
6. Bychenkov V. Yu., Rozmus W., Tikhonchuk V. T., Brantov A. V. Nonlocal electron transport in a plasma // Phys. Rev. Lett. — 1995. — 75. — С. 4405–4408.
7. Epperlein E. M., Short R. W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas // Phys. Fluids B. — 1991. — 3. — С. 3092–3098.
8. Grenier E. Oscillations in quasi-neutral plasma // Commun. Part. Differ. Equ. — 1996. — 21. — С. 363–394.
9. Guisset S., Brull S., Dubroca B., d’Humières E., Karpov S., Potapenko I. Asymptotic-preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime // Commun. Comput. Phys. — 2016. — 19, № 2. — С. 301–328.
10. Ichimaru S. Basic Principles of Plasma Physics. — Boca Raton: CRC Press, 1973.
11. Landau L. D. Kinetic equation in case of Coulomb interaction // Phys. Zs. Sov. Union. — 1936. — 10. — С. 154–164.
12. Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. Physical Kinetics. — London: Pergamon, 1981.

А. В. Бобылев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

И. Ф. Потапенко

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

UDC 517.958

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70

EDN: TRQNDY

Asymptotic solutions of the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations

A. V. Bobylev and I. F. Potapenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to analytical and numerical study of solutions to the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations (VPLE) for distribution functions with typical length L such that $\varepsilon = r_D/L \ll 1$, where r_D stands for the Debye radius. It is also assumed that the Knudsen number $\text{Kn} = l/L = O(1)$, where l denotes the mean free pass of electrons. We use the standard model of plasma of electrons with a spatially homogeneous neutralizing background of infinitely heavy ions. The initial data is always assumed to be close to neutral. We study an asymptotic behavior of the system for small $\varepsilon > 0$. It is known that the formal limit of VPLE at $\varepsilon = 0$ does not describe a rapidly oscillating part of the electric field. Our aim is to study the behavior of the “true” electric field near this limit. We consider the problem with standard isotropic in velocities Maxwellian initial conditions, and show that there is almost no damping of these oscillations in the collisionless case. An approximate formula for the electric field is derived and then confirmed numerically by using a simplified Bathnagar–Gross–Krook (BGK-type) model of Vlasov–Poisson–Landau equation (VPLE). Another class of initial conditions that leads to strong oscillations having the amplitude of order $O(1/\varepsilon)$ is also considered. Numerical solutions of that class are studied for different values of parameters ε and Kn .

Keywords: Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations, distribution function, BGK model, electric field oscillations.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. V. Bobylev, I. F. Potapenko, “Asymptotic solutions of the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 55–70. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70>

REFERENCES

1. L. D. Landau, “Kineticheskoe uravnenie v sluchae kulonovskogo vzaimodeystviya” [Kinetic equation for the case of Coulomb interaction] *Zh. Eks. Teor. Fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], 1937, **7**, 203–209 (in Russian).
2. O. V. Batishchev, V. Yu. Bychenkov, F. Detering, W. Rozmus, R. Sydora, C. E. Capjack, and V. N. Novikov, “Heat transport and electron distribution function in laser produced with hot spots,” *Phys. Plasmas*, 2002, **9**, 2302–2310.
3. A. V. Bobylev and I. F. Potapenko, “Long wave asymptotics for Vlasov–Poisson–Landau kinetic equation,” *J. Stat. Phys.*, 2019, **175**, 1–18.
4. A. V. Bobylev and I. F. Potapenko, “On solutions of Vlasov–Poisson–Landau equations for slowly varying in space initial data,” *Kinet. Relat. Models*, 2023, **16**, No. 1, 20–40.
5. A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, O. V. Batishchev, and W. Rozmus, “Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses,” *Comput. Phys. Commun.*, 2004, **164**, 67–72.
6. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, V. T. Tikhonchuk, and A. V. Brantov, “Nonlocal electron transport in a plasma,” *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**, 4405–4408.
7. E. M. Epperlein and R. W. Short, “A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas,” *Phys. Fluids B*, 1991, **3**, 3092–3098.



8. E. Grenier, “Oscillations in quasi-neutral plasma,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1996, **21**, 363–394.
9. S. Guisset, S. Brull, B. Dubroca, E. d’Humières, S. Karpov, and I. Potapenko, “Asymptotic-preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime,” *Commun. Comput. Phys.*, 2016, **19**, No. 2, 301–328.
10. S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics*, CRC Press, Boca Raton, 1973.
11. L. D. Landau, “Kinetic equation in case of Coulomb interaction,” *Phys. Zs. Sov. Union*, 1936, **10**, 154–164.
12. E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon, London, 1981.

A. V. Bobylev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

I. F. Potapenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84

EDN: TXBXLU

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия прямой представимости одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в виде уравнений Лагранжа—Остроградского и построен соответствующий вариационный принцип (действие по Гамильтону—Остроградскому).

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения Лагранжа—Остроградского, вариационный принцип, действие по Гамильтону—Остроградскому.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Публикация частично выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Для цитирования: С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу. О вариационном принципе для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 71–84. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84>

1. ВВЕДЕНИЕ

Вариационные принципы сыграли основополагающую роль в становлении и развитии механики (см., например, монографию [8] и библиографию в ней). В [2–4, 8, 24] изложены классические и современные методы решения основных задач динамики. Исследование вариационности дифференциальных уравнений является важной и актуальной задачей. Отметим, что этому вопросу посвящено значительное количество работ: например, для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными [1, 9–14, 16–21, 23, 28, 29], дифференциально-разностных уравнений [5–7], стохастических дифференциальных уравнений [25–27], дифференциальных уравнений с производными дробного порядка [15, 22] и др. В перечисленных работах предложены конструктивные приемы построения прямых и косвенных вариационных формулировок дифференциальных уравнений. Для этого используются локальные и нелокальные билинейные формы, в том числе и билинейные формы со свертками, а также исследуются вопросы существования вариационных множителей как в виде функций, так и в виде операторов, в том числе и матричных. При этом соответствующие действия по Гамильтону (Гамильтону—Остроградскому) строятся с использованием как эйлеровых, так и неэйлеровых классов функционалов.

Представляет значительный интерес распространение некоторых изложенных в этих работах методов на исследование вопросов представимости дифференциальных уравнений с производными высших порядков в форме уравнений Лагранжа—Остроградского, построение соответствующих функционалов — действий по Гамильтону—Остроградскому. В связи с этим вопрос о вариационности одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений приобретает особую важность, что и определило актуальность данной работы.

Основная цель настоящей работы — получить необходимые и достаточные условия потенциальности оператора одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и построить соответствующее действие по Гамильтону—Остроградскому.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения и терминологию работ [8, 17].

Предположим, что U, V — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие определение и теорема.

Определение 1.1 (см. [8]). Оператор $N : D(N) \subset U \rightarrow V$ называется *потенциальным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, если существует дифференцируемый по Гато функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta F_N[u, h] = \Phi(N(u), h) \quad \forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u).$$

В этом случае говорят, что соответствующее уравнение $N(u) = 0$ допускает прямую *вариационную формулировку*.

Заметим, что N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$. Множество $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого значения ε .

Теорема 1.1 (см. [8]). Пусть дифференцируемый по Гато оператор $N : D(N) \subset U \rightarrow V$ и билинейная форма $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$ функция $\psi(\varepsilon) = \Phi(N(u + \varepsilon h), g)$ принадлежит классу $C^1[0, 1]$. Тогда для потенциальности оператора N на выпуклом множестве $D(N)$ относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(N'_u g, h) \quad \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \quad (1.1)$$

При этом потенциал оператора N определяется формулой

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)), u - u_0) d\lambda + F_N[u_0], \quad (1.2)$$

где u_0 — фиксированный элемент $D(N)$.

2. УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Рассмотрим систему уравнений

$$N(u) \equiv A(t)u^{(4)}(t) + B(t)u'''(t) + C(t)u''(t) + D(t)u'(t) + E(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (2.1)$$

Здесь $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $C(t) = (c_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $D(t) = (d_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $E(t) = (e_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ — заданные матрицы, причем $a_{ij} \in C^4[t_0, t_1]$, $b_{ij} \in C^3[t_0, t_1]$, $c_{ij} \in C^2[t_0, t_1]$, $d_{ij} \in C^1[t_0, t_1]$, $e_{ij} \in C[t_0, t_1]$, $i, j = \overline{1, n}$.

Зададим область определения оператора N (2.1) в виде

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^4[t_0, t_1] : u_i(t_0) = \varphi_{i1}, u_i(t_1) = \varphi_{i2}, u'_i(t_0) = \varphi_{i3}, u'_i(t_1) = \varphi_{i4}, i = \overline{1, n} \right\}, \quad (2.2)$$

где φ_{ik} ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 4}$) — заданные постоянные.

В данном случае

$$D(N'_u) = \left\{ h \in U = C^4[t_0, t_1] : h_i(t_0) = 0, h_i(t_1) = 0, h'_i(t_0) = 0, h'_i(t_1) = 0, i = \overline{1, n} \right\} \quad (2.3)$$

и $V = C[t_0, t_1]$.

Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} (v(t))^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n v_i(t) g_i(t) dt, \quad (2.4)$$

где $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$, $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))^T$.

Отметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (v(t))^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (g(t))^T v(t) dt,$$

т. е.

$$\Phi(v, g) = \Phi(g, v).$$

Теорема 2.1. Оператор N (2.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2.2) относительно билинейной формы (2.4) тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:

$$(A(t))^T - A(t) = 0, \quad (2.5)$$

$$(B(t))^T - 4A'(t) + B(t) = 0, \quad (2.6)$$

$$(C(t))^T - 6A''(t) + 3B'(t) - C(t) = 0, \quad (2.7)$$

$$(D(t))^T - 4A'''(t) + 3B''(t) - 2C'(t) + D(t) = 0, \quad (2.8)$$

$$(E(t))^T - A^{(4)}(t) + B'''(t) - C''(t) + D'(t) - E(t) = 0. \quad (2.9)$$

Доказательство. Производная Гато оператора N (2.1) имеет вид

$$N'_u h = A(t)h^{(4)}(t) + B(t)h'''(t) + C(t)h''(t) + D(t)h'(t) + E(t)h(t).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u h, g) &= \int_{t_0}^{t_1} (A(t)h^{(4)}(t) + B(t)h'''(t) + C(t)h''(t) + D(t)h'(t) + E(t)h(t))^T g(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [(h^{(4)}(t))^T (A(t))^T g(t) + (h'''(t))^T (B(t))^T g(t) + (h''(t))^T (C(t))^T g(t) + \\ &\quad + (h'(t))^T (D(t))^T g(t) + (h(t))^T (E(t))^T g(t)] dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что h и g принадлежат $D(N'_u)$ (2.3), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} (h^{(4)}(t))^T (A(t))^T g(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (h(t))^T [(A^{(4)}(t))^T g(t) + 4(A'''(t))^T g'(t) + 6(A''(t))^T g''(t) + 4(A'(t))^T g'''(t) + (A(t))^T g^{(4)}(t)] dt, \\ &\int_{t_0}^{t_1} (h'''(t))^T (B(t))^T g(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -(h(t))^T [(B'''(t))^T g(t) + 3(B''(t))^T g'(t) + 3(B'(t))^T g''(t) + (B(t))^T g'''(t)] dt, \\ &\int_{t_0}^{t_1} (h''(t))^T (C(t))^T g(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (h(t))^T [(C''(t))^T g(t) + 2(C'(t))^T g'(t) + (C(t))^T g''(t)] dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (h'(t))^T (D(t))^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} -(h(t))^T [(D'(t))^T g(t) + (D(t))^T g'(t)] dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u h, g) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (h(t))^T (A(t))^T g^{(4)}(t) + (h(t))^T [4(A'(t))^T - (B(t))^T] g'''(t) + \right. \\ & + (h(t))^T [6(A''(t))^T - 3(B'(t))^T + (C(t))^T] g''(t) + \\ & + (h(t))^T [4(A'''(t))^T - 3(B''(t))^T + 2(C'(t))^T - (D(t))^T] g'(t) + \\ & \left. + (h(t))^T [(A^{(4)}(t))^T - (B'''(t))^T + (C''(t))^T - (D'(t))^T + (E(t))^T] g(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u g, h) = & \int_{t_0}^{t_1} (A(t)g^{(4)}(t) + B(t)g'''(t) + C(t)g''(t) + D(t)g'(t) + E(t)g(t))^T h(t) dt = \\ = & \int_{t_0}^{t_1} \left[(h(t))^T A(t)g^{(4)}(t) + (h(t))^T B(t)g'''(t) + (h(t))^T C(t)g''(t) + (h(t))^T D(t)g'(t) + (h(t))^T E(t)g(t) \right] dt. \end{aligned}$$

В данном случае критерий потенциальности (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u h, g) - \Phi(N'_u g, h) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (h(t))^T [(A(t))^T - A(t)] g^{(4)}(t) + (h(t))^T [4(A'(t))^T - (B(t))^T - \right. \\ & - B(t)] g'''(t) + (h(t))^T [6(A''(t))^T - 3(B'(t))^T + (C(t))^T - C(t)] g''(t) + (h(t))^T [4(A'''(t))^T - \\ & - 3(B''(t))^T + 2(C'(t))^T - (D(t))^T - D(t)] g'(t) + (h(t))^T [(A^{(4)}(t))^T - (B'''(t))^T + (C''(t))^T - \\ & \left. - (D'(t))^T + (E(t))^T - E(t)] g(t) \right\} dt = 0 \quad \forall h, g \in D(N'_u). \end{aligned}$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$(A(t))^T - A(t) = 0, \quad (2.10)$$

$$4(A'(t))^T - (B(t))^T - B(t) = 0, \quad (2.11)$$

$$6(A''(t))^T - 3(B'(t))^T + (C(t))^T - C(t) = 0, \quad (2.12)$$

$$4(A'''(t))^T - 3(B''(t))^T + 2(C'(t))^T - (D(t))^T - D(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$(A^{(4)}(t))^T - (B'''(t))^T + (C''(t))^T - (D'(t))^T + (E(t))^T - E(t) = 0. \quad (2.14)$$

Заметим, что условия (2.10)–(2.14) сводятся к условиям (2.5)–(2.9). $\square$

3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА

Теорема 3.1. Если оператор N (2.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2.2) относительно билинейной формы (2.4), то действие по Гамильтону–Остроградскому имеет

вуд

$$F_N[u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u''(t))^T A(t) u''(t) + (u''(t))^T (B(t) - 2A'(t)) u'(t) - (u'(t))^T (3A''(t) - 2B'(t) + \right. \\ \left. + C(t)) u'(t) + (u'(t))^T (A'''(t) - B''(t) + C'(t) - D(t)) u(t) + (u(t))^T (E(t))^T u(t) \right) dt. \quad (3.1)$$

Доказательство. Формула (1.2) в данном случае принимает вид

$$F_N[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (A(t) \tilde{u}_{tttt}(t, \lambda) + B(t) \tilde{u}_{ttt}(t, \lambda) + C(t) \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) + D(t) \tilde{u}_t(t, \lambda) + \\ + E(t) \tilde{u}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda + F_N[u_0], \quad (3.2)$$

где $\tilde{u}(t, \lambda) = u_0(t) + \lambda(u(t) - u_0(t))$, $u_0(t)$ — фиксированный элемент из $D(N)$.

Обозначим

$$J_A[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (A(t) \tilde{u}_{tttt}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $(u - u_0) \in D(N'_u)$ (2.3), получаем

$$J_A[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tttt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A''(t))^T (u(t) - u_0(t)) + 2(\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A'(t))^T (u(t) - u_0(t))' + \right. \\ \left. + (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' \right) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left(-(\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (A'''(t))^T (u(t) - u_0(t)) - (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (A''(t))^T (u(t) - u_0(t))' + \right. \\ \left. + 2(\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A'(t))^T (u(t) - u_0(t))' + (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' \right) dt d\lambda. \quad (3.3)$$

Аналогично

$$J_B[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (B(t) \tilde{u}_{ttt}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{ttt}(t, \lambda))^T (B(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left(-(\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (B'(t))^T (u(t) - u_0(t)) - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (B(t))^T (u(t) - u_0(t))' \right) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (B''(t))^T (u(t) - u_0(t)) + (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (B'(t))^T (u(t) - u_0(t))' - \right. \\ \left. - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (B(t))^T (u(t) - u_0(t))' \right) dt d\lambda, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
J_C[u] &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (C(t)\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (C(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left(-(\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (C'(t))^T (u(t) - u_0(t)) - (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (C(t))^T (u(t) - u_0(t))' \right) dt d\lambda,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$J_D[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (D(t)\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (D(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda, \tag{3.6}$$

$$J_E[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (E(t)\tilde{u}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.3)–(3.7) в (3.2), получим

$$\begin{aligned}
F_N[u] - F_N[u_0] &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' + \right. \\
&\quad + (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T [2(A'(t))^T - (B(t))^T] (u(t) - u_0(t))' + \\
&\quad + (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T [- (A''(t))^T + (B'(t))^T - (C(t))^T] (u(t) - u_0(t))' + \\
&\quad + (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T [- (A'''(t))^T + (B''(t))^T - (C'(t))^T + (D(t))^T] (u(t) - u_0(t)) + \\
&\quad \left. + (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) \right) dt d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt\lambda}(t, \lambda) dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) - ((u(t) - u_0(t))'')^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right] dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T A(t) (u(t) - u_0(t))'' \right] dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' \right] dt d\lambda
\end{aligned}$$

(здесь учтено условие (2.5)). Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) dt d\lambda = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u''(t))^T A(t) u''(t) - (u_0''(t))^T A(t) u_0''(t) \right) dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (2(A'(t))^T - (B(t))^T) (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \quad (3.10)$$

Введем обозначение

$$H(t) = 2A'(t) - B(t).$$

С учетом условий (2.5), (2.6) получим

$$\begin{aligned} (H(t))^T &= (2A'(t) - B(t))^T = 2(A'(t))^T - (B(t))^T = 2A'(t) - 4A'(t) + B(t) = \\ &= -2A'(t) + B(t) = -H(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что $(u - u_0) \in D(N'_u)$ (2.3), а также условие (3.11), интеграл (3.10) представим в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (2(A'(t))^T - (B(t))^T) (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (H(t))^T \tilde{u}_{t\lambda}(t, \lambda) dt d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (H(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (H(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))'')^T (H(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[(u''(t))^T (H(t))^T u'(t) - (u_0''(t))^T (H(t))^T u_0'(t) \right] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T H(t) (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[(u''(t))^T (H(t))^T u'(t) - (u_0''(t))^T (H(t))^T u_0'(t) \right] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее, интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (- (A''(t))^T + (B'(t))^T - (C(t))^T) (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda$$

запишем в виде

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda, \quad (3.13)$$

где

$$G(t) = -A''(t) + B'(t) - C(t).$$

С учетом условий (2.5)–(2.7) имеем

$$\begin{aligned} (G(t))^T &= (-A''(t) + B'(t) - C(t))^T = -A''(t) + 4A''(t) - B'(t) - 6A''(t) + 3B'(t) - C(t) = \\ &= -3A''(t) + 2B'(t) - C(t) = -A''(t) + B'(t) - C(t) - 2A''(t) + B'(t) = G(t) - H'(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

В соответствии с условием (3.14) интеграл (3.13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_{t\lambda}(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) - ((u(t) - u_0(t))')^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right] dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))')^T (G(t) - H'(t)) \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))')^T G(t) \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda + \\ &\quad + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))')^T H'(t) \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (G(t))^T u'(t) - (u'_0(t))^T (G(t))^T u'_0(t) \right) dt - \\ &\quad - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (G(t))^T u'(t) - (u'_0(t))^T (G(t))^T u'_0(t) \right) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (-A'''(t))^T + (B''(t))^T - (C'(t))^T + (D(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda.$$

Обозначим

$$L(t) = -A'''(t) + B''(t) - C'(t) + D(t).$$

Из условий (2.5)–(2.8) следует, что

$$\begin{aligned} (L(t))^T &= (-A'''(t) + B''(t) - C'(t) + D(t))^T = \\ &= -A'''(t) + 4A'''(t) - B''(t) - 6A'''(t) + 3B''(t) - C'(t) + 4A'''(t) - 3B''(t) + 2C'(t) - D(t) = \\ &= A'''(t) - B''(t) + C'(t) - D(t) = -L(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, интегрируя по частям и принимая во внимание, что $(u - u_0) \in D(N'_u)$ (2.3), а также условие (3.16), получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T \tilde{u}_\lambda(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((\tilde{u}_{t\lambda}(t, \lambda))^T (L(t))^T \tilde{u}(t, \lambda)) dt d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (L(t))^T u(t) - (u'_0(t))^T (L(t))^T u_0(t) \right) dt + \\ &+ \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L'(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (L(t))^T u(t) - (u'_0(t))^T (L(t))^T u_0(t) \right) dt + \\ &+ \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L'(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (L(t))^T u(t) - (u'_0(t))^T (L(t))^T u_0(t) \right) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (L'(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из условия потенциальности (2.9) имеем

$$(E(t))^T = A^{(4)}(t) - B'''(t) + C''(t) - D'(t) + E(t) = -L'(t) + E(t) = (L'(t))^T + E(t),$$

поэтому интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda$$

может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T \tilde{u}_\lambda(t, \lambda) dt d\lambda = \\ & = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T ((L'(t))^T + E(t)) \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} ((u(t))^T (E(t))^T u(t) - (u_0(t))^T (E(t))^T u_0(t)) dt - \\ & - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L'(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T E(t) \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} ((u(t))^T (E(t))^T u(t) - (u_0(t))^T (E(t))^T u_0(t)) dt + \\ & + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (L'(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} ((u(t))^T (E(t))^T u(t) - (u_0(t))^T (E(t))^T u_0(t)) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (L'(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Подставляя (3.9), (3.12), (3.15), (3.17), (3.18) в (3.8), получим

$$\begin{aligned} F_N[u] &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u''(t))^T A(t) u''(t) + (u''(t))^T (H(t))^T u'(t) + \right. \\ & \left. + (u'(t))^T (G(t))^T u'(t) + (u'(t))^T (L(t))^T u(t) + (u(t))^T (E(t))^T u(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким образом, принимая во внимание (3.11), (3.14), (3.16), из (3.19) получаем функционал (3.1). $\square$

4. СЛУЧАЙ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$N(u) \equiv a(t)u^{(4)}(t) + b(t)u'''(t) + c(t)u''(t) + d(t)u'(t) + e(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (4.1)$$

Здесь $u = u(t)$ — неизвестная функция, $a \in C^4[t_0, t_1]$, $b \in C^3[t_0, t_1]$, $c \in C^2[t_0, t_1]$, $d \in C^1[t_0, t_1]$, $e \in C[t_0, t_1]$ — заданные функции.

Зададим область определения оператора N (4.1) в виде

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^4[t_0, t_1] : u(t_0) = \varphi_1, u(t_1) = \varphi_2, u'(t_0) = \varphi_3, u'(t_1) = \varphi_4 \right\}, \quad (4.2)$$

где φ_k ($k = \overline{1, 4}$) — заданные постоянные.

Отметим, что

$$D(N'_u) = \left\{ h \in U = C^4[t_0, t_1] : h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, h'(t_0) = 0, h'(t_1) = 0 \right\}$$

и $V = C[t_0, t_1]$.

Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \quad (4.3)$$

В данном случае теоремы 2.1 и 3.1 формулируются следующим образом.

Теорема 4.1. *Оператор N (4.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4.2) относительно билинейной формы (4.3) тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} b(t) - 2a'(t) &= 0, \\ d(t) + a'''(t) - c'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 4.2. *Если оператор N (4.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4.2) относительно билинейной формы (4.3), то действие по Гамильтону—Остроградскому имеет вид*

$$F_N[u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(a(t)(u''(t))^2 + (a''(t) - c(t))(u'(t))^2 + e(t)(u(t))^2 \right) dt.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована прямая представимость одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме уравнений Лагранжа—Остроградского. Одним из возможных направлений дальнейшего развития полученных результатов является разработка методов нахождения первых интегралов рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, основанных на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности как самих уравнений, так и соответствующего функционала — действия по Гамильтону—Остроградскому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будочкина С. А. О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме B_u -гамильтонова уравнения // Дифф. уравн. — 2013. — 49, № 2. — С. 175–185.
2. Галиуллин А. С. Системы Гельмгольца. — Москва: РУДН, 1995.
3. Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. — Москва: РУДН, 1998.
4. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Удмуртский гос. унив., 1995.
5. Попов А. М. Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений // Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 3. — С. 422–424.
6. Попов А. М. Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений // Мат. заметки. — 1998. — 64, № 3. — С. 437–442.
7. Попов А. М. Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка // Мат. заметки. — 2002. — 72, № 5. — С. 745–749.
8. Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — Москва: УДН, 1991.
9. Филиппов В. М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. — Москва: УДН, 1985.

10. Филиппов В. М. О вариационном принципе для гипоеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1986. — 22, № 2. — С. 338–343.
11. Филиппов В. М. О полуограниченных решениях обратных задач вариационного исчисления// Дифф. уравн. — 1987. — 23, № 9. — С. 1599–1607.
12. Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А. О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — 283. — С. 25–39.
13. Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А. Бивариационность, симметрии и приближенные решения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 3. — С. 596–608.
14. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — 40. — С. 3–176.
15. Agrawal O. P. Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — 272, № 1. — С. 368–379.
16. Budochkina S. A. Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation// Eurasian Math. J. — 2012. — 3, № 1. — С. 18–28.
17. Budochkina S. A., Dekhanova E. S. On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms// Ural Math. J. — 2021. — 7, № 1. — С. 26–37.
18. Budochkina S. A., Luu T. H. On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 15. — С. 3594–3605.
19. Budochkina S. A., Luu T. H. On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation// Lobachevskii J. Math. — 2024. — 45, № 6. — С. 2466–2477.
20. Budochkina S. A., Luu T. H., Shokarev V. A. On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton–Ostrogradsky equations// Уфимский мат. ж. — 2023. — 15, № 3. — С. 121–131.
21. Budochkina S. A., Vu H. P. On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff’s equations// Eurasian Math. J. — 2022. — 13, № 3. — С. 23–32.
22. He L., Wu H., Mei F. Variational integrators for fractional Birkhoffian systems// Nonlinear Dynam. — 2017. — 87. — С. 2325–2334.
23. Kalpakides V. K., Charalambopoulos A. On Hamilton’s principle for discrete and continuous systems: a convolved action principle// Rep. Math. Phys. — 2021. — 87, № 2. — С. 225–248.
24. Santilli R. M. Foundations of Theoretical Mechanics, II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1983.
25. Tleubergenov M. I., Azhymbaev D. T. On the solvability of stochastic Helmholtz problem// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2021. — 253. — С. 297–305.
26. Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T. On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion// Eurasian Math. J. — 2019. — 10, № 2. — С. 93–102.
27. Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T. On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems// Ukr. Math. J. — 2019. — 71, № 1. — С. 157–165.
28. Tonti E. On the variational formulation for linear initial value problems// Ann. Mat. Pura Appl. — 1973. — 95. — С. 331–359.
29. Tonti E. Variational formulation for every nonlinear problem// Internat. J. Engrg. Sci. — 1984. — 22, № 11–12. — С. 1343–1371.

Светлана Александровна Будочкина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

Тхи Хуен Лыу

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: luuthihuyen250393@gmail.com

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84

EDN: TXBXLU

On the variational principle for a system of ordinary differential equations

S. A. Budochkina and T. H. Luu

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. Necessary and sufficient conditions for the direct representability of one system of ordinary differential equations in the form of Lagrange–Ostrogradsky equations are obtained and the corresponding variational principle (the Hamilton–Ostrogradsky action) is constructed.

Keywords: system of ordinary differential equations, Lagrange–Ostrogradsky equations, variational principle, Hamilton–Ostrogradsky action.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The publication was partially supported by the project No. 002092-0-000 of the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115).

For citation: S. A. Budochkina, T. H. Luu, “On the variational principle for a system of ordinary differential equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 71–84. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84>

REFERENCES

1. S. A. Budochkina, “O predstavlenii odnogo operatornogo uravneniya s pervoy proizvodnoy po vremeni v forme B_u -gamil'tonova uravneniya” [On the representation of one operator equation with the first derivative with respect to time in the form of a B_u -Hamiltonian equation] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 2, 175–185 (in Russian).
2. A. S. Galiullin, *Sistemy Gel'mgol'tsa* [Helmholtz Systems], RUDN, Moscow, 1995 (in Russian).
3. A. S. Galiullin, *Analiticheskaya dinamika* [Analytical Dynamics], RUDN, Moscow, 1998 (in Russian).
4. V. V. Kozlov, *Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamil'tonovoy mekhanike* [Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics], Udmurtskiy gos. univ., Izhevsk, 1995 (in Russian).
5. A. M. Popov, “Usloviya potentsial'nosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy” [Potentiality conditions for differential-difference equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 3, 422–424 (in Russian).
6. A. M. Popov, “Usloviya potentsial'nosti Gel'mgol'tsa dlya sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy” [Helmholtz potentiality conditions for systems of differential-difference equations] *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1998, **64**, No. 3, 437–442 (in Russian).
7. A. M. Popov, “Obratnaya zadacha variatsionnogo ischisleniya dlya sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy vtorogo poryadka” [Inverse problem of variational calculus for systems of second-order differential-difference equations], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **72**, No. 5, 745–749 (in Russian).
8. V. M. Savchin, *Matematicheskie metody mekhaniki beskonечnomernykh nepotentsial'nykh sistem* [Mathematical Methods of Mechanics of Infinite-Dimensional Nonpotential Systems], UDN, Moscow, 1991 (in Russian).
9. V. M. Filippov, *Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov* [Variational Principles for Non-potential Operators], UDN, Moscow, 1985 (in Russian).

10. V. M. Filippov, “O variatsionnom printsipe dlya gipoellipticheskikh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami” [On the variational principle for hypoelliptic equations with constant coefficients] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 2, 338–343 (in Russian).
11. V. M. Filippov, “O poluogranichennykh resheniyakh obratnykh zadach variatsionnogo ischisleniya” [On semi-bounded solutions of inverse problems of the calculus of variations] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 9, 1599–1607 (in Russian).
12. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. A. Budochkina, “O sushchestvovanii variatsionnykh printsipov dlya evolyutsionnykh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [On the existence of variational principles for evolutionary differential-difference equations] *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 25–39 (in Russian).
13. V. M. Filippov, V. M. Savchin, S. A. Budochkina, “Bivariatsionnost’, simmetrii i priblizhennye resheniya” [Bivariance, symmetries and approximate solutions] *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], **67**, No. 3, 596–608 (2021).
14. V. M. Filippov, V. M. Savchin, S. G. Shorokhov, “Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial’nykh operatorov” [Variational principles for nonpotential operators], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dostizh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. New Achiev.], 1992, **40**, 3–176 (in Russian).
15. O. P. Agrawal, “Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **272**, No. 1, 368–379.
16. S. A. Budochkina, “Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation,” *Eurasian Math. J.*, 2012, **3**, No. 1, 18–28.
17. S. A. Budochkina and E. S. Dekhanova, “On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms,” *Ural Math. J.*, 2021, **7**, No. 1, 26–37.
18. S. A. Budochkina and T. H. Luu, “On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 15, 3594–3605.
19. S. A. Budochkina and T. H. Luu, “On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 6, 2466–2477.
20. S. A. Budochkina, T. H. Luu, and V. A. Shokarev, “On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton–Ostrogradsky equations,” *Ufimskii Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2023, **15**, No. 3, 121–131.
21. S. A. Budochkina and H. P. Vu, “On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff’s equations,” *Eurasian Math. J.*, 2022, **13**, No. 3, 23–32.
22. L. He, H. Wu, and F. Mei, “Variational integrators for fractional Birkhoffian systems,” *Nonlinear Dynam.*, 2017, **87**, 2325–2334.
23. V. K. Kalpakides and A. Charalambopoulos, “On Hamilton’s principle for discrete and continuous systems: a convolved action principle,” *Rep. Math. Phys.*, 2021, **87**, No. 2, 225–248.
24. R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics, II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1983.
25. M. I. Tleubergenov and D. T. Azhymbaev, “On the solvability of stochastic Helmholtz problem,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2021, **253**, 297–305.
26. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion,” *Eurasian Math. J.*, 2019, **10**, No. 2, 93–102.
27. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems,” *Ukr. Math. J.*, 2019, **71**, No. 1, 157–165.
28. E. Tonti, “On the variational formulation for linear initial value problems,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1973, **95**, 331–359.
29. E. Tonti, “Variational formulation for every nonlinear problem,” *Internat. J. Engrg. Sci.*, 1984, **22**, No. 11–12, 1343–1371.

Svetlana A. Budochkina
 RUDN University, Moscow, Russia
 E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

Thi Huyen Luu
 RUDN University, Moscow, Russia
 E-mail: luuthihuyen250393@gmail.com

УДК 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95

EDN: TZCNJN

ПРИМЕНЕНИЕ s -ГАРМОНИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ОСОБЕННОСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ЭМДЕНА

Л. ВЕРОН

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция

Аннотация. Мы используем расширение Каффарелли—Сильвестра на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ для изучения изолированных особенностей функций, удовлетворяющих дробно-полулинейному уравнению $(-\Delta)^s v + \epsilon v^p = 0$ в проколотой области $\mathbb{R}^N$, где $\epsilon = \pm 1$, $0 < s < 1$ и $p > 1$. Мы получаем априорные оценки и анализируем множество самоподобных решений. Мы даем полное описание возможного поведения решений вблизи особенности.

Ключевые слова: уравнение Эмдена, дробно-полулинейное уравнение, расширение Каффарелли—Сильвестра, самоподобные решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. Верон. Применение s -гармонического расширения к изучению особенностей уравнений Эмдена // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 85–95. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия появилось много статей, посвященных особому поведению решений следующих классов полулинейных эллиптических уравнений:

$$-\Delta v + \epsilon v^p = 0 \quad \text{в } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

где $p > 1$, $\epsilon = \pm 1$ и $v^p = |v|^{p-1}v$. Первые исследования радиальных решений уравнения Лейна—Эмдена ($\epsilon = -1$) принадлежат Дж. Лейну и Р. Эмдену, и довольно хорошее изложение можно найти в [7, с. 84–182]. В этой книге большое место также отведено уравнению Эмдена

$$\Delta v + \epsilon v^u = 0 \quad \text{в } B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

Этот дробный аналог этого уравнения не рассматривается в настоящей статье (современное исследование уравнения (1.2) см. в [2]). Уравнение Эмдена—Фаулера ($\epsilon = 1$) было подробно рассмотрено Р. Фаулером в радиальном случае [13]. Дальнейшие исследования принадлежат Зоммерфельду в теории атомов Томаса—Ферми [16, 20]. Случай $p = \frac{N+2}{N-2}$ в основном известен из-за его связей с конформной деформацией римановой метрики с $\epsilon = -1$ в рамках положительной кривизны [17] или $\epsilon = 1$ в гиперболическом пространстве [18].

Поведение сингулярных решений (1.1) в N -мерной области зависит от трех критических показателей:

$$p_1 = \frac{N}{N-2}, \quad p_2 = \frac{N+2}{N-2} \quad \text{при } N \geq 3, \quad p_3 = \frac{N+1}{N-3} \quad \text{при } N \geq 4. \quad (1.3)$$

Основными инструментами анализа поведения решений вблизи изолированной сингулярности являются:

1. Существование универсальной априорной оценки: благодаря конструкции Келлера—Оссермана оценку просто получить при $\epsilon = 1$, гораздо сложнее при $\epsilon = -1$ с помощью метода Бернштейна и неравенства Гарнака, и это только в диапазоне $1 < p < p_2$. Более того, универсальная оценка невозможна, если $p = p_3$.
2. Асимптотическая радиальность при $\epsilon = -1$ и $1 < p \leq p_2$ имеет место благодаря работе Каффарелли, Гидаса и Шпрука [4].
3. Существование явных радиальных решений в виде $v(x) = \Lambda_{N,p}|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ для $\epsilon = 1$ при условии $1 < p < p_1$ и для $\epsilon = -1$ при условии $p > p_1$.
4. Методы динамических систем при $p \neq p_2$: функция Ляпунова, характеристика возможных предельных множеств и использование теории аналитических функционалов Л. Саймона при $\epsilon = -1$ (см. [2, 19]). Для такой задачи уравнение в $B_1 \setminus \{0\}$ преобразуется в эллиптическое уравнение в бесконечном цилиндре $\mathbb{R}_- \times S^{N-1}$ благодаря преобразованию

$$w(t, \sigma) = r^{\frac{2}{p-1}} v(r, \sigma), \quad t = \ln r, \quad \sigma \in S^{N-1}. \quad (1.4)$$

Следовательно, (1.1) превращается в

$$w_{tt} + \Theta_{N,p} w_t + \Delta_{S^{N-1}} w + \Lambda_{N,p} w - \epsilon w^p = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_- \times S^{N-1}, \quad (1.5)$$

где

$$\Theta_{N,p} = N - 2\frac{p+1}{p-1}, \quad \Lambda_{N,p} = \frac{2}{p-1} \left(\frac{2}{p-1} + 2 - N \right).$$

Роль p_1 и p_2 становится очевидной, поскольку если $p = p_1$, то $\Lambda_{N,p} = 0$, и если $p = p_2$, то $\Theta_{N,p} = 0$. Обращение в нуль этих двух коэффициентов кардинально меняет поведение решений (1.5).

Работы по полулинейной модели (1.1) дали начало многочисленным расширениям, в которых лапласиан заменяется другим оператором диффузии, таким как p -лапласиан, билапласиан или дробный лапласиан. В этой статье мы представляем случай, когда диффузия смещается дробным лапласианом, и подчеркиваем подход, основанный на гармоническом или s -гармоническом расширении. Многие результаты, представленные ниже, были получены в сотрудничестве с Х. Ченом [11].

Если $s \in (0, 1)$, дробный Лапласиан $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ определен на функциях $v \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap L^1_{\mu_s}(\mathbb{R}^N)$, где $\mu_s(x) = (1 + |x|)^{-N-2s}$, выражением

$$(-\Delta)^s v(x) = c_{N,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{v(x) - v(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad (1.6)$$

где $c_{N,s} = 2^{2s} \pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{\Gamma(1-s)}$. Задача о сингулярности для дробных уравнений Эмдена в проколотой области Ω , содержащей $\overline{B}_1$, имеет вид

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s v + \epsilon v^p &= 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ v &= 0 \quad \text{в } \Omega^c, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\epsilon = \pm 1$ и $\Omega^c = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Мы сталкиваемся с тремя критическими значениями показателя степени p :

$$p_{0,s} = 1 + \frac{2s}{N}, \quad p_{1,s} = \frac{N}{N-2s}, \quad p_{2,s} = \frac{N+2s}{N-2s} \quad \text{при } N-2s > 0. \quad (1.8)$$

В случае $\epsilon = -1$ доказаны следующие расширения оценки Гидаса и Шпрука [15].

Теорема 1.1 (см. [24, 25]). Пусть $\epsilon = -1$. Если $p_{1,s} < p < p_{2,s}$, любое положительное решение (1.7) либо является регулярным, либо удовлетворяет для некоторого универсального $c > 0$ неравенству

$$c^{-1}|x|^{-\frac{2s}{p-1}} \leq v(x) \leq c|x|^{-\frac{2s}{p-1}} \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}}. \quad (1.9)$$

Более того, асимптотическая радиальность, как в конструкции Каффарелли, Гидаса и Шпрука [4], также верна в [5].

Теорема 1.2 (см. [5]). Пусть $\epsilon = -1$. Если $p = p_{2,s}$, то имеет место предыдущий результат и существует радиальное решение $\bar{v}$ уравнения (1.7) такое, что

$$v(x) = \bar{v}(|x|)(1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

В случае $\epsilon = 1$ несколько результатов были получены Ченом и Вероном [9] при изучении проблемы с мерой μ в правой части

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s v + v^p &= \mu \quad \text{в } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{в } \Omega^c. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Теорема 1.3 (см. [9]). Если $1 < p < p_{1,s}$, для любой положительной ограниченной меры существует единственное решение v_μ для (1.11). Если $\mu = k\delta_0$, то

$$v_{k\delta_0} = kc_{N,s}|x|^{2s-N}(1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Отображение $\mapsto v_{k\delta_0}$ — возрастающее и имеет предел (конечный или бесконечный) $v_{\infty\delta_0}$.

Теорема 1.4 (см. [10]). При предыдущих предположениях:

1. если $0 < p \leq p_{0,s}$, то $v_{\infty\delta_0}(x) = \infty$ для всех $x \in \Omega$;
2. если $p_{0,s} < p < p_{1,s}$, то $v_{\infty\delta_0}$ является положительным решением задачи

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s v + v^p &= 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ v &= 0 \quad \text{в } \Omega^c, \end{aligned} \quad (1.13)$$

удовлетворяющим

$$v_{\infty\delta_0} = \Lambda_{N,p,s}|x|^{-\frac{2s}{p-1}}(1 + o(1)), \quad (1.14)$$

где

$$\Lambda_{N,p,s} = \frac{2s}{p-1} \left(\frac{2s}{p-1} + 2s - N \right). \quad (1.15)$$

Если $p \geq p_{1,s}$, то для решения (1.11) необходимы емкостные условия на μ , как в случае $s = 1$.

2. ПРОДОЛЖЕНИЕ КАФФАРЕЛЛИ—СИЛЬВЕСТРА

Определение $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ через продолжение гармонических функций является классическим (см., например, [21]). В 2007 году Каффарелли и Сильвестр ввели в [6] обобщение гармонического расширения через вырожденные эллиптические операторы. С этим расширением задача (1.7) наследует следующую форму: в $\mathbb{R}_+^{N+1} = \{\xi = (x, z) : x \in \mathbb{R}^N, z > 0\}$ изучение (1.7) заменяется на

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(z^{1-2s}\nabla u) &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ \partial_{\nu^s} u(\cdot, 0) + \epsilon u(\cdot, 0)^p &= 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ u(\cdot, 0) &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{aligned} \quad (2.1)$$

и

$$v = u(\cdot, 0) \quad \text{в } \mathbb{R}^N,$$

так как

$$(-\Delta)^s v(x) = -\lim_{z \rightarrow 0} z^{1-2s} u_z(x, z) := \partial_{\nu^s} u(x, 0). \quad (2.2)$$

Если $s = \frac{1}{2}$, задача (2.1) сводится к нелинейной задаче Дирихле—Неймана

$$\begin{aligned} \Delta_\xi u &= 0 & \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}, \\ u_\nu(\cdot, 0) + \epsilon u(\cdot, 0)^p &= 0 & \text{в } \Omega \setminus \{0\}, \\ u(\cdot, 0) &= 0 & \text{в } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В случае $\epsilon = 1$ это уравнение изучается в [3].

Функция u , определенная в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, называется s -гармонической, если она удовлетворяет условию

$$\operatorname{div}(z^{1-2s} \nabla u) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{N+1}. \quad (2.4)$$

Следующая теорема дает важный инструмент, доказанный в [11].

Теорема 2.1. *Если $0 < s < 1$, то любая положительная s -гармоническая функция, определенная в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, допускает след на $\partial\mathbb{R}_+^{N+1}$, который является борелевской мерой $\mu \geq 0$ такой, что*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\mu}{(1 + |x|)^{N+2s}} < \infty. \quad (2.5)$$

Вторым важным результатом относительно задачи (2.1) является априорная оценка в случае $\epsilon = 1$, $0 < s < 1$ (см. [11]). Метод доказательства объединяет технику blow-up и приведенную выше теорему о следе. Заметим, что в отличие от случая $\epsilon = 1$, $s = 1$, этот результат не может быть получен путем построения локальных суперрешений.

Теорема 2.2. *Если $\epsilon = 1$ и $p > p_{0,s}$, любое положительное решение u уравнения (2.2) с $\Omega = B_1$ удовлетворяет с некоторой универсальной константой $c > 0$ неравенству*

$$u(x, z) \leq c \rho^{-\frac{2s}{p-1}} \quad \forall (x, z) \in \tilde{B}_\frac{1}{2}^+, \quad (2.6)$$

где $\rho = \sqrt{|x|^2 + z^2}$ и $\tilde{B}_\frac{1}{2}^+ = \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^{N+1} : \rho < 1\}$.

Заметим, что такая оценка невозможна, если $1 < p < p_{0,s}$.

3. САМОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ

Уравнение (2.2) с $\Omega = \mathbb{R}^N$ инвариантно относительно преобразования подобия T_λ ($\lambda > 0$), определяемого формулой

$$T_\lambda[u](x) = \lambda^{\frac{2s}{p-1}} u(\lambda x) \quad \text{для всех } x \neq 0.$$

Рассмотрим сферические координаты в $\mathbb{R}_+^{N+1} := \{\xi = (\rho, \sigma) : \rho > 0, \sigma \in \mathbb{S}_+^N\}$, где

$$\mathbb{S}_+^N = \left\{ \sigma = (x, z) = (\sigma' \cos \phi, \sin \phi) : \sigma' \in \mathbb{S}^{N-1}, \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Самоподобные решения (2.1) имеют следующий вид:

$$u(x, z) = u(\rho, \sigma) = \rho^{-\frac{2s}{p-1}} \omega(\sigma) \quad \text{для всех } (\rho, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_+^N. \quad (3.1)$$

Пусть $\mathcal{A}_s$ — вырожденный эллиптический оператор на N -сфере $\mathbb{S}^N$, определяемый формулой

$$\mathcal{A}_s[w] = \frac{1}{\lambda_s(\phi)(\cos \phi)^{N-1}} (\lambda_s(\phi)(\cos \phi)^{N-1} w_\phi)_\phi + \frac{1}{\cos^2 \phi} \Delta_{\mathbb{S}^{N-1}} w, \quad (3.2)$$

где

$$\lambda_s(\phi) = (\sin \phi)^{1-2s}.$$

С точностью до поворота и соответствующего выбора сферических переменных функция ω в (3.1) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s[\omega] + \Lambda_{N,p,s} \omega &= 0 & \text{в } \mathbb{S}_+^N, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \nu^s} + \epsilon |\omega|^{p-1} \omega &= 0 & \text{в } \mathbb{S}^{N-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\Lambda_{N,p,s}$ определено в (1.15), а $\frac{\partial}{\partial \nu^s}$ — кономальная внешняя производная на $\partial \mathbb{S}_+^N = \mathbb{S}^{N-1}$, соответствующая $\mathcal{A}_s$, если инвариантная мера dS , полученная изометрическим вложением $\mathbb{S}^N$ в $\mathbb{R}^{N+1}$, равна

$$dS(\sigma) = (\cos \phi)^{N-1} dS'(\sigma') d\phi.$$

Мы называем $\mathcal{E}_\epsilon$ (соответственно, $\mathcal{E}_\epsilon^+$) *множеством решений* (соответственно, *множеством положительных решений*) (3.3). В следующих теоремах, доказанных в [11], мы даем структуру $\mathcal{E}_\epsilon$ и $\mathcal{E}_\epsilon^+$.

Теорема 3.1. Пусть $s \in (0, 1)$, $\epsilon = 1$ и $p > 1$.

1. Если $p \geq p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_1 = \{0\}$.
2. Если $1 < p \leq p_{0,s}$, то $\mathcal{E}_1^+ = \{0\}$.
3. Если $p_{0,s} < p < p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_1^+ = \{0, \omega_1\}$, где ω_1 — положительное решение (3.3).

Доказательство. Используемые методы являются адаптациями $s = 1$ к дробному случаю.

1. Несуществование по монотонности: если $p \geq p_{1,s}$, мы умножаем уравнение на ω , интегрируем по $\mathbb{S}_+^N$ с весовой функцией $\lambda_s(\phi)$ и используем тот факт, что $\Lambda_{N,p,s} \leq 0$.

2. Существование получается путем минимизации функционала

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^N} \left(w_\phi^2 + \frac{1}{\cos^2 \phi} |\nabla' w|^2 - \Lambda_{N,p,s} w^2 \right) \lambda_s(\phi) dS + \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\gamma_0(w)|^{p+1} dS'$$

в пространстве $W(\mathbb{S}_+^N)$ функций w таких, что $\mathcal{B}[w, w] < +\infty$, где

$$\mathcal{B}[w, v] = \int_{\mathbb{S}_+^N} \left(w_\phi v_\phi + \frac{1}{\cos^2 \phi} \nabla' w \cdot \nabla' v \right) \lambda_s(\phi) dS,$$

а γ_0 обозначает оператор следа из $W(\mathbb{S}_+^N)$ в $L^2(\mathbb{S}^{N-1})$, отождествляемый с $w(0, \theta)$.

3. Для доказательства единственности положительных решений предположим, что ω и $\tilde{\omega}$ — два таких решения. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{S}_+^N} \left(\frac{\mathcal{A}_s[\omega]}{\omega} - \frac{\mathcal{A}_s[\tilde{\omega}]}{\tilde{\omega}} \right) (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) \lambda_s dS = \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\partial_{\phi^s} \omega \left(\omega - \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega} \right) - \partial_{\phi^s} \tilde{\omega} \left(\tilde{\omega} - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}} \right) \right) dS' - \left(\mathcal{B} \left[\omega, \omega - \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega} \right] - \mathcal{B} \left[\tilde{\omega}, \tilde{\omega} - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}} \right] \right) = A + B. \end{aligned}$$

Технические вычисления A и B дают

$$A = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left[-\omega^p \left(\omega - \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega} \right) + \tilde{\omega}^p \left(\tilde{\omega} - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}} \right) \right] dS' = - \int_{\mathbb{S}^{N-1}} (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) (\omega^{p-1} - \tilde{\omega}^{p-1}) dS',$$

тогда $A \leq 0$ и

$$B = - \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left[\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) (\omega \tilde{\omega}_\phi - \tilde{\omega} \omega_\phi)^2 + \frac{1}{\cos^2 \phi} |\omega \nabla' \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \nabla' \omega|^2 \right] \lambda_s(\phi) dS',$$

тогда $B \leq 0$. Поэтому $\omega = \tilde{\omega}$. □

Как и в случае $s = 1$, единственность общего решения сохраняется в небольшом диапазоне показателя p , что можно доказать, убедившись, что ω совпадает со своим сферическим средним (см. [11]).

Теорема 3.2. При предположениях теоремы 3.1 относительно s и ϵ , существует $p_s^* \in (1, p_{1,s})$ такое, что если $p_s^* \leq p < p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_1 = \{0, \omega_1, -\omega_1\}$.

Явное значение p_s^* не является простым, поскольку имеем

$$p_s^* = \frac{N + 2s + \sqrt{N^2 + 4N(1-s) + 4(s^2 - 1)}}{N - 2s + \sqrt{N^2 + 4N(1-s) + 4(s^2 - 1)}},$$

но если $s = 1$, мы восстанавливаем оптимальное значение, полученное в [22], которое равно $p_1^* = \frac{N+1}{N-1}$.

Доказательство теоремы 3.2 длинное и включает несколько различных шагов, которые мы представим ниже.

Лемма 3.1. *Если $p_{1,s} > p \geq p_s^*$, то любой элемент $\mathcal{E}_1$ зависит только от азимутальной переменной ϕ .*

Доказательство. Обозначим через $(\phi, \sigma) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times S^{N-1}$ сферические координаты на S_+^N , а через $\bar{\omega}(\phi)$ — функцию, которая является S^{N-1} -средним решения ω , то есть

$$\bar{\omega}(\phi) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} \omega(\phi, \sigma') dS(\sigma').$$

Усредняя (3.3) по S^{N-1} , мы имеем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s[\bar{\omega}] + \Lambda_{N,p,s} \bar{\omega} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{S}_+^N, \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \nu^s} + \bar{\omega}^p &= 0 \quad \text{в } \mathbb{S}^{N-1}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_s[\bar{\omega}] = \frac{1}{\lambda_s(\phi)(\cos \phi)^{N-1}} (\lambda_s(\phi)(\cos \phi)^{N-1} \bar{\omega}_\phi)_\phi.$$

Используя неравенство Виртингера, получаем

$$(\Lambda_{N,p,s} + 1 - N) \int_{\mathbb{S}_+^N} (\omega - \bar{\omega})^2 \lambda_s(\phi) dS \geq 2^{-p} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\omega - \bar{\omega}|^{p+1} dS'.$$

Условие на p подразумевает, что $\Lambda_{N,p,s} + 1 - N \leq 0$, таким образом, $\omega = \bar{\omega}$. $\square$

Поскольку при условии $p_s^* \leq p < p_{1,s}$ решение ω зависит только от переменной ϕ , естественно ввести соответствующее дифференциальное уравнение, которому оно удовлетворяет. В более общем виде мы доказываем методом Коши—Лишшица—Пикара следующую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть $\Lambda \neq 0$. Тогда для любого $a \neq 0$ существует единственная функция ω_a , удовлетворяющая в $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$*

$$\omega_a(\phi) = a - \Lambda \int_0^\phi (\sin \sigma)^{2s-1} (\cos \sigma)^{1-N} \int_\sigma^{\frac{\pi}{2}} \omega_a(\theta) (\sin \theta)^{1-2s} (\cos \theta)^{N-1} d\theta d\sigma. \quad (3.4)$$

Кроме того, $\omega_a\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ и $\omega_a = a\omega_1$. Наконец, если $a > 0$ и $\Lambda < 0$ (соответственно, $\Lambda > 0$), то ω_a положительна и возрастает (соответственно, убывает).

Доказательство теоремы 3.2. Мы рассматриваем только решения, зависящие от ϕ . Такое решение ω удовлетворяет

$$-((\sin \phi)^{1-2s} (\cos \phi)^{N-1} \omega_\phi)_\phi = \Lambda_{N,p,s} (\sin \phi)^{1-2s} (\cos \phi)^{N-1} \omega - \lim_{\phi \rightarrow 0} (\sin \phi)^{1-2s} \omega_\phi(\phi) + \omega^p(0) = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку $\omega_\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, равенство (3.5) эквивалентно

$$\omega_a(\phi) = \omega\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Lambda_{N,p,s} \int_0^\phi (\sin \sigma)^{2s-1} (\cos \sigma)^{1-N} \int_\sigma^{\frac{\pi}{2}} \omega_a(\theta) (\sin \theta)^{1-2s} (\cos \theta)^{N-1} d\theta d\sigma. \quad (3.6)$$

Тогда $a = \omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — это параметр метода стрельбы. Поскольку $\omega_a = a\omega_1$, задача сводится к поиску $a > 0$ такого, что

$$F^*(a) = -\lim_{\phi \rightarrow 0} (\sin \phi)^{1-2s} \omega_a \phi(\phi) + \omega_a^p(0) = a \left(\lim_{\phi \rightarrow 0} (\sin \phi)^{1-2s} \omega_1 \phi(\phi) + a^{p-1} \omega_1^p(0) \right) = 0. \quad (3.7)$$

Результат следует из того, что $a \mapsto a^{-1}F^*(a)$ является непрерывной, возрастающей, отрицательной при $a = 0$ и стремится к бесконечности при $a \rightarrow \infty$. $\square$

Аналогичным образом описываем множество $\mathcal{E}_{-1}$.

Теорема 3.3. Пусть $s \in (0, 1)$, $\epsilon = -1$ и $p > 1$.

1. Если $p \leq p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_{-1}^+ = \{0\}$.
2. Если $p > p_{1,s}$, то $\mathcal{E}_{-1}^+ = \{0, \omega_2\}$, где ω_2 — положительное решение (3.3), зависящее только от одной переменной.

Обратите внимание, что утверждение 2 теоремы 3.3 доказывается не методом леммы 3.1, а адаптацией метода движущихся плоскостей [14].

4. СИНГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ

Энергетический метод не зависит от значения ϵ . Положим

$$u(\xi) = u(\rho, \sigma) = r^{-\frac{2s}{p-1}} w(t, \sigma), \quad t = \ln \rho, \quad (4.1)$$

и $w(t, \sigma) = w(t, \sigma', \phi)$. Тогда w удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} w_{tt} + \Theta_{N,p,s} w_t + \Lambda_{N,p,s} w + \mathcal{A}_s[w] &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R} \times \mathbb{S}_+^N, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu^s} + \epsilon |w|^{p-1} w &= 0 \quad \text{в } \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\Theta_{N,p,s} = N - 2s \frac{p+1}{p-1}$, а $\Lambda_{N,p,s}$ уже определены в (1.15).

$$\frac{\partial w}{\partial \nu^s}(t, \sigma') = -\lim_{\phi \rightarrow 0} (\sin \phi)^{1-2s} w_\phi(t, \sigma', \phi).$$

Заметим, что $\Theta_{N,p,s} = 0$ тогда и только тогда, когда $p = p_{2,s}$ (консервативный случай). Определим пространство $\mathbf{X} = \left\{ \zeta \in C^s(\mathbb{S}_+^N) : \zeta(\cdot, 0) \in C^2(\mathbb{S}^{N-1}) \right\}$ и предельные множества траектории как $\Gamma_-[w] = \bigcap_{t \leq 0} \left(\overline{\bigcup \{w(\tau, \cdot), \tau \leq t\}^{\mathbf{X}}} \right)$ (т. е. сингулярность) и $\Gamma_+[w] = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup \{w(\tau, \cdot), \tau \geq t\}^{\mathbf{X}}} \right)$ (т. е. поведение на бесконечности).

Теорема 4.1. Предположим, что $s \in (0, 1)$, $p \in (1, +\infty) \setminus \{p_{2,s}\}$, $\epsilon = \pm 1$ и пусть $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}} \setminus \{(0, 0)\}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ будет решением (2.1) таким, что

$$|u(x, z)| \leq c (|x|^2 + z^2)^{-\frac{s}{p-1}} \quad \text{при } 0 < |x| < 1 \quad (\text{или при } |x| > 1) \quad (4.3)$$

для некоторого $c > 0$. Тогда $\Gamma_-[w]$ (соответственно, $\Gamma_+[w]$) является непустым компактным связным подмножеством множества $\mathcal{E}_\epsilon$, определяемым уравнением (3.3).

Доказательство. Энергетический метод стандартен, мы приводим доказательство при $t \rightarrow -\infty$ (случай сингулярности). Положим

$$\mathcal{I}_\epsilon[w](t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_+^N} (|\nabla' w|^2 - \Lambda_{N,p,s} w^2 - w_t^2) d\mu_s - \frac{\epsilon}{p+1} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |w|^p dS'.$$

Тогда w ограничена в $C^2(\overline{\mathbb{S}_+^N} \times (-\infty, -1])$ и выполняется

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}_\epsilon[w](t) = \left(p - \frac{2s(p+1)}{p-1} \right) \int_{\mathbb{S}_+^N} w_t^2 d\mu_s = \Theta_{N,p,s} \int_{\mathbb{S}_+^N} w_t^2 d\mu_s. \quad (4.4)$$

Так как $p \neq p_{2,s}$, то $\Theta_{N,p,s} \neq 0$, и мы имеем оценку затухания

$$\int_{-\infty}^{-1} \int_{\mathbb{S}_+^N} w_t^2 d\mu_s dt < +\infty.$$

Используя равномерную непрерывность, получим, что $w_t(t, \cdot) \rightarrow 0$. С помощью оценок регулярности и простых манипуляций получаем, что $w_{tt}(t, \cdot) \rightarrow 0$. $\square$

В качестве следствий этого общего результата, с учетом теорем 3.1 и 3.2 получим описание изолированных особенностей положительных решений (2.1).

Следствие 4.1 (уравнения Эмдена—Фаулера). Пусть $s \in (0, 1)$, $\epsilon = 1$. Если $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}} \setminus \{(0, 0)\}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ удовлетворяет (2.1) и (4.3), $v = u(\cdot, 0)$, и если w определено как (4.2), то при $t \rightarrow -\infty$ выполняется:

1. Если $p \geq p_{1,s}$, то $w(t, \cdot) \rightarrow 0$ равномерно в $\mathbb{S}_+^N$, следовательно, функция $v \equiv 0$ и функция u являются гладкими.
2. Если $p_{0,s} < p < p_{1,s}$ и $u \geq 0$, то $w(t, \cdot)$ сходится равномерно в $\mathbb{S}_+^N$ либо к ω_1 , либо к 0.
3. Если $p_s^* \leq p < \frac{N}{N-2s}$, то $w(t, \cdot)$ сходится равномерно в $\mathbb{S}_+^N$ к $\ell \in \{0, \omega_1, -\omega_1\}$.
4. Если $1 < p \leq p_{0,s}$, и $u \geq 0$, то $w(t, \cdot) \rightarrow 0$ равномерно в $\mathbb{S}_+^N$.
5. Пусть $1 < p < p_{1,s}$, $u \geq 0$. Если $w(t, \cdot) \rightarrow 0$ равномерно в $\mathbb{S}_+^N$, то существует $k \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$e^{(N-\frac{2s}{p-1})t} w(t, \sigma', \phi) \rightarrow k \sin^{2s}(\phi) \quad \text{равномерно в } \mathbb{S}_+^N.$$

Если $k = 0$, то функция $w \equiv 0$ и функция u являются гладкими.

Следствие 4.2 (уравнения Лейна—Эмдена). Пусть $s \in (0, 1)$, $\epsilon = -1$, $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}} \setminus \{(0, 0)\}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ неотрицательны и удовлетворяют (2.1) и (4.3), $v = u(\cdot, 0)$. Пусть w определяется как (4.2). Если $p \neq p_{2,s}$, то при $t \rightarrow -\infty$ выполняется:

1. Если $p > p_{1,s}$, то $w(t, \cdot)$ сходится в $L^\infty(\mathbb{S}_+^N)$ либо к ω_1 , либо к 0.
2. Если $1 < p \leq p_{1,s}$, то $w(t, \cdot) \rightarrow 0$ в $L^\infty(\mathbb{S}_+^N)$.
3. Если $p > p_{1,s}$ и $w(t, \cdot)$ сходится к 0, то u является гладкой функцией в $\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}}$, и v тоже.
4. Если $1 < p < p_{1,s}$, то существует $k \geq 0$ такое, что

$$e^{(N-\frac{2s}{p-1})t} w(t, \sigma', \phi) \rightarrow k(\sin \phi)^{2s} \quad \text{равномерно в } \mathbb{S}_+^N.$$

Тонкой частью доказательства следствия 4.2 является утверждение 3. Мы адаптируем метод, разработанный в [8], чтобы доказать от противного, что существует $\epsilon > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{S}_+^N)} = 0 \implies \exists \epsilon > 0, \exists c > 0 : w(t, \sigma) \leq ce^{\epsilon t} \quad \text{при } t \leq -1.$$

Затем технический итеративный «каскадный процесс» позволяет улучшить эту оценку до

$$w(t, \cdot) \leq ce^{\frac{2s}{p-1}t}.$$

Оставшаяся часть доказательства представляет собой просто анализ типа Фурье с оценками компонент $w(t, \cdot)$ на собственных пространствах $-\Delta_{\mathbb{S}^N}$.

В утверждении 2 при $p = p_{1,s}$ скорость убывания $w(t, \cdot)$ может быть уточнена. Если $s = 1$, аналогичный вопрос решен П. Авилесом в [1]. Следующий результат доказан в [12, 23].

Теорема 4.2. Пусть $s \in (0, 1)$, $\epsilon = -1$, $p = p_{1,s}$ а функция u неотрицательна, принадлежит $C^1(\overline{\mathbb{R}_+^{N+1}} \setminus \{(0, 0)\}) \cap C^2(\mathbb{R}_+^{N+1})$ и удовлетворяет (2.1), (4.3). Тогда либо u гладкая, либо

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{N-2s} (-\ln |x|)^{\frac{N-2s}{2s}} v(x) = C(N, s)$$

для некоторой явной константы $C(N, s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aviles P.* Local behavior of solutions of some elliptic equations// Commun. Math. Phys. — 1987. — 108. — С. 177–192.
2. *Bidaut-Véron M. F., Véron L.* Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations// Invent. Math. — 1991. — 106. — С. 489–539.
3. *Boukarabila O., Véron L.* Nonlinear boundary value problems relative to harmonic functions// Nonlinear Anal. — 2020. — 201. — 112090.
4. *Caffarelli L., Gidas B., Spruck J.* Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth// Commun. Pure Appl. Math. — 1989. — 42. — С. 271–297.
5. *Caffarelli L., Jin T., Sire Y., Xiong J.* Local analysis of solutions of fractional semi-linear elliptic equations with isolated singularities// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2014. — 213. — С. 245–268.
6. *Caffarelli L., Silvestre L.* An extension problem related to the fractional Laplacian// Commun. Part. Differ. Equ. — 2007. — 32. — С. 1245–1260.
7. *Chandrasekhar S.* Introduction to Stellar Structure. — Chicago: Univ. Chicago, 1939.
8. *Chen X., Matano H., Véron L.* Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ // J. Funct. Anal. — 1989. — 83. — С. 50–97.
9. *Chen H., Véron L.* Semilinear fractional elliptic equations involving measures// J. Differ. Equ. — 2014. — 257. — С. 1457–1486.
10. *Chen H., Véron L.* Weakly and strongly singular solutions of semilinear fractional elliptic equations// Asymp. Anal. — 2014. — 88. — С. 165–184.
11. *Chen H., Véron L.* Singularities of fractional Emden’s equations via Caffarelli–Silvestre extension// J. Differ. Equ. — 2023. — 363. — С. 472–530.
12. *Chen H., Zhou F., Personal communication (2023).*
13. *Fowler R. H.* Further studies on Emden’s and similar differential equations// Q. J. Math. — 1931. — 2. — С. 259–288.
14. *Gidas B., Ni W., Nirenberg L.* Symmetry and related properties via the maximum principle// Commun. Math. Phys. — 1979. — 68. — С. 209–243.
15. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1981. — 34. — С. 525–598.
16. *Hille E.* Some aspects of the Thomas–Fermi equation// J. Anal. Math. — 1970. — 23. — С. 147–170.
17. *Obata M.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds// J. Diff. Geom. — 1971. — 6. — С. 247–258.
18. *Ratto A., Rigoli M., Véron L.* Scalar curvature and conformal deformation of hyperbolic space// J. Funct. Anal. — 1994. — 121. — С. 15–77.
19. *Simon L.* Isolated singularities of extrema of geometric variational problems// В сб.: «Harmonic Mappings and Minimal Immersions», Springer, Berlin–Heidelberg–New-York, 1985. — С. 206–277.
20. *Sommerfeld A.* Asymptotische integration der differential-gleichung des Thomas–Fermischen atoms// Z. Phys. — 1932. — 78. — С. 283–308.
21. *Stein E.* Singular Integrals and Differentiability of Functions. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
22. *Véron L.* Singular solutions of some nonlinear elliptic equations// Nonlinear Anal. — 1981. — 5. — С. 225–242.
23. *Wei J., Wu K.* Local behavior of solutions to a fractional equation with isolated singularity and critical Serrin exponent// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2022. — 42. — С. 4031–4050.
24. *Yang H., Zou W.* On isolated singularities of fractional semi-linear elliptic equations// Ann. Henri Poincaré. — 2021. — 38. — С. 403–420.
25. *Yang H., Zou W.* Sharp blow up estimates and precise asymptotic behavior of singular positive solutions to fractional Hardy–Hénon equations// J. Differ. Equ. — 2021. — 278. — С. 393–429.

Л. Верон

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция

E-mail: veronl@univ-tours.fr

UDC 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95

EDN: TZCNJN

Applications of the s -harmonic extension to the study of singularities of Emden's equations

L. Véron

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France

Abstract. We use the Caffarelli–Silvestre extension to $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ to study the isolated singularities of functions satisfying the semilinear fractional equation $(-\Delta)^s v + \epsilon v^p = 0$ in a punctured domain of $\mathbb{R}^N$ where $\epsilon = \pm 1$, $0 < s < 1$ and $p > 1$. We emphasise the obtention of a priori estimates and analyse the set of self-similar solutions. We provide a complete description of the possible behaviour of solutions near a singularity.

Keywords: Emden's equation, semilinear fractional equation, Caffarelli–Silvestre extension, self-similar solutions.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. Véron, “Applications of the s -harmonic extension to the study of singularities of Emden's equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 85–95. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-85-95>

REFERENCES

1. P. Aviles, “Local behavior of solutions of some elliptic equations,” *Commun. Math. Phys.*, **108**, 177–192 (1987).
2. M. F. Bidaut-Véron and L. Véron, “Nonlinear elliptic equations on compact Riemannian manifolds and asymptotics of Emden equations,” *Invent. Math.*, **106**, 489–539 (1991).
3. O. Boukarabila and L. Véron, “Nonlinear boundary value problems relative to harmonic functions,” *Nonlinear Analysis*, **201**, 112090 (2020).
4. L. Caffarelli, B. Gidas, and J. Spruck, “Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth,” *Commun. Pure Appl. Math.*, **42**, 271–297 (1989).
5. L. Caffarelli, T. Jin, Y. Sire, and J. Xiong, “Local analysis of solutions of fractional semi-linear elliptic equations with isolated singularities,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **213**, 245–268 (2014).
6. L. Caffarelli and L. Silvestre, “An extension problem related to the fractional Laplacian,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, **32**, 1245–1260 (2007).
7. S. Chandrasekhar, *Introduction to Stellar Structure*, Univ. Chicago, Chicago (1939).
8. X. Chen, H. Matano, and L. Véron, “Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$,” *J. Funct. Anal.*, **83**, 50–97 (1989).
9. H. Chen and L. Véron, “Semilinear fractional elliptic equations involving measures,” *J. Differ. Equ.*, **257**, 1457–1486 (2014).
10. H. Chen and L. Véron, “Weakly and strongly singular solutions of semilinear fractional elliptic equations,” *Asymp. Anal.*, **88**, 165–184 (2014).
11. H. Chen and L. Véron, “Singularities of fractional Emden's equations via Caffarelli–Silvestre extension,” *J. Differ. Equ.*, **363**, 472–530 (2023).
12. H. Chen and F. Zhou, *Personal communication* (2023).



13. R. H. Fowler, “Further studies on Emden’s and similar differential equations,” *Q. J. Math.*, **2**, 259–288 (1931).
14. B. Gidas, W. Ni, and L. Nirenberg, “Symmetry and related properties via the maximum principle,” *Commun. Math. Phys.*, **68**, 209–243 (1979).
15. B. Gidas and J. Spruck, “Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, **34**, 525–598 (1981).
16. E. Hille, “Some aspects of the Thomas–Fermi equation,” *J. Anal. Math.*, **23**, 147–170 (1970).
17. M. Obata, “The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds,” *J. Diff. Geom.*, **6**, 247–258 (1971).
18. A. Ratto, M. Rigoli, and L. Véron, “Scalar curvature and conformal deformation of hyperbolic space,” *J. Funct. Anal.*, **121**, 15–77 (1994).
19. L. Simon, “Isolated singularities of extrema of geometric variational problems,” In: *Harmonic Mappings and Minimal Immersions*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, pp. 206–277 (1985).
20. A. Sommerfeld, “Asymptotische integration der differential-gleichung des Thomas–Fermischen atoms,” *Z. Phys.*, **78**, 283–308 (1932).
21. E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).
22. L. Véron, “Singular solutions of some nonlinear elliptic equations,” *Nonlinear Analysis*, **5**, 225–242 (1981).
23. J. Wei and K. Wu, “Local behavior of solutions to a fractional equation with isolated singularity and critical Serrin exponent,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **42**, 4031–4050 (2022).
24. H. Yang and W. Zou, “On isolated singularities of fractional semi-linear elliptic equations,” *Ann. Henri Poincaré*, **38**, 403–420 (2021).
25. H. Yang and W. Zou, “Sharp blow up estimates and precise asymptotic behavior of singular positive solutions to fractional Hardy–Hénon equations,” *J. Differ. Equ.*, **278**, 393–429 (2021).

Laurent Véron

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France

E-mail: veronl@univ-tours.fr

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109

EDN: UBQDHFV

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ АЛЬФА-МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется краевая задача для одной математической модели, описывающей движение водных растворов полимеров. На основе аппроксимационно-топологического метода исследуется существование слабых решений изучаемой задачи. Рассматривается случай движения среды как в ограниченной области двумерного или трехмерного пространства, так и в неограниченной области.

Ключевые слова: движение растворов полимеров, альфа-модель, аппроксимационно-топологический метод, слабое решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>.

Для цитирования: А. В. Звягин. Существование слабых решений стационарной альфа-модели, описывающей движение растворов полимеров // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 96–109. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченная область границей $\partial\Omega$ класса C^2 . Рассматривается следующая краевая задача:

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - 2\kappa \operatorname{Div} \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i} \right) + \operatorname{grad} p = f, \quad x \in \Omega; \quad (1.1)$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad x \in \Omega; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $v(x)$ — вектор-функция скорости, $u(x)$ — вектор-функция модифицированной скорости движения частицы среды, определяемая равенством (1.2), $p(x)$ — функция давления, $f(x)$ — плотность внешних сил, $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости, а $\kappa > 0$ — время запаздывания (время релаксации деформаций), $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$ — тензор

скоростей деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $\text{Div } A$ — дивергенция тензора A , т. е. вектор

$$\text{Div } A = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{1j}(t, x)}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{nj}(t, x)}{\partial x_j} \right).$$

Изучаемая в работе задача описывает стационарное движение растворов полимеров. Данная модель имеет реологическое (определяющее тип жидкости) соотношение вида

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\kappa \frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

где σ — девиатор тензора напряжений. Данная модель также получила название *модель Кельвина—Фойгта* (см. работы [4, 9, 20–22]). Группа ученых из Санкт-Петербурга провела эксперименты и доказала, что именно данное реологическое соотношение описывают течение слабо концентрированных водных растворов полимеров, например, растворов полиэтиленоксида и полиакриламида, растворов полиакриламида и гуаровой смолы [2, 12]. Поэтому рассматриваемую модель также часто называют моделью движения водных растворов полимеров.

Также отметим, что первая теоретическая модель движения водных растворов полимеров, учитывающая их релаксационные свойства, была сформулирована в работе Я. И. Войткунского, В. Б. Амфилохиева и В. А. Павловского [3]. Авторы исходили из варианта модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости. Затем в работе В. А. Павловского [12] эта модель была упрощена и использовалась для описания турбулентного пограничного слоя в предельном случае малых времен релаксации. Поэтому рассматриваемую модель также часто называют *моделью Павловского* (см. [13]).

Краевая задача (1.1)–(1.3) является *альфа-моделью* I класса. Альфа-модели представляют собой своего рода регуляризованные приближенные системы, которые зависят от некоторого положительного параметра α , причем регуляризация осуществляется путем некоторой фильтрации вектора скорости, который стоит в аргументе нелинейного члена. Параметр α отражает ширину шкалы пространственной фильтрации для модифицированной скорости. В качестве ядра фильтрации наиболее часто используют оператор Гельмгольца $I - \alpha^2 \Delta$. Выбор такого оператора связан с его хорошими математическими свойствами. Идея использования такого рода аппроксимаций впервые возникла в работе Ж. Лере [19] (в данной работе Ж. Лере использовал общий вид ядра фильтрации) для доказательства существования слабого решения системы уравнений Навье—Стокса. С одной стороны, интерес к изучению альфа-моделей связан с изучением исходных моделей, с другой стороны, в последнее время альфа-модели стали изучаться как независимые системы и применяться к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости и в численных исследованиях. Альфа-модели представляют больший интерес для прикладных ученых, производства и промышленности, чем исходные модели, ввиду более простого численного исследования.

Однако большая часть работ по исследованию разрешимости альфа-моделей посвящена моделям движения идеальной или ньютоновской жидкости (см. [16–18]). Только за последние несколько лет появились работы, посвященные альфа-моделям для неньютоновской жидкости (см. [5–7]). Данная работа продолжает исследования разрешимости альфа-моделей для неньютоновских жидкостей, а именно, для модели, описывающей движение водных растворов полимеров.

Работа организована следующим образом. Второй раздел посвящен описанию используемых функциональных пространств, введению определения слабого решения для изучаемой краевой задачи и формулировке основного результата работы. В третьем разделе вводится аппроксимационная задача и изучается ее разрешимость. Для этого в пункте 3.1 доказываются необходимые априорные оценки решений аппроксимационной задачи, а в пункте 3.2 применяется теория топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В четвертом разделе доказывается предельный переход к решению исходной задачи. Пятый раздел посвящен обобщению полученных результатов на случай неограниченной области Ω .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ будем обозначать пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω ; $\mathcal{V} = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$; H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$; V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; X — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$.

Определение 2.1. Пусть $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in X$ равенству:

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx - \\ & - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Здесь через $\Delta_{\alpha} : V \rightarrow V^*$ обозначим оператор $\Delta_{\alpha} = (J + \alpha^2 A)$, где $J = PI$, I — тождественный оператор, P — оператор Лере. В силу [10, лемма 4.4.4] оператор Δ_{α} обратим. Применив проектор Лере $P : L_2(\Omega)^n \rightarrow H$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2 \Delta)u$, выразим из последнего равенства u : $u = (J + \alpha^2 A)^{-1} v = \Delta_{\alpha}^{-1} v$.

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.

Доказательство данной теоремы 2.1 состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного профессором В. Г. Звятиным (см. [8]), доказывается существование слабых решений исследуемой задачи. Для этого вводится семейство вспомогательных задач, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени Лере—Шаудера доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи. Далее для доказательства разрешимости исходной задачи на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход.

Полученный результат можно обобщить на случай неограниченной области.

Теорема 2.2. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.

Доказательство данной теоремы 2.2 приведено в разделе 5.

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром.

Задача 3.1. Пусть $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in X$ равенству:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \\ & - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ε — некоторое фиксированное положительное число.

Для исследования аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3 с помощью следующих равенств:

$$A : V \rightarrow V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx, \quad v, \varphi \in V;$$

$$\begin{aligned}
N : X &\rightarrow X^*, \quad \langle Nv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx, \quad v, \varphi \in X; \\
B_1 : L_4(\Omega)^n &\rightarrow V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V; \\
B_2 : V &\rightarrow X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \varphi \in X; \\
B_3 : V &\rightarrow X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \quad v \in V, \varphi \in X.
\end{aligned}$$

Замечание 3.1. Заметим, что V вложено в $L_4(\Omega)^n$ для $n = 2, 3$, значит, B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \rightarrow V^*$, а поскольку X вложено в V , то операторы $A, B_i, i = 1, 2, 3$, можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3 : X \rightarrow X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.

В силу произвольности $\varphi \in X$ в задаче 3.1 равенство (3.1) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon Nv + \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v) = f. \quad (3.2)$$

Таким образом, каждое решение задачи 3.1 является решением операторного уравнения (3.2) и обратно.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned}
L_{\varepsilon} : X &\rightarrow X^*, \quad L_{\varepsilon}(v) = \varepsilon Nv; \\
K : X &\rightarrow X^*, \quad K(v) = \nu Av - B_1(v) - \kappa B_2(v) - \kappa B_3(v).
\end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнение (3.2) записывается в виде:

$$L_{\varepsilon}(v) + K(v) = f. \quad (3.3)$$

Для дальнейшего нам необходимо исследовать свойства операторов $A, L_{\varepsilon}, B_1, B_2, B_3, K$.

Лемма 3.1. Для оператора A имеют место следующие свойства:

1. Оператор $A : V \rightarrow V^*$ непрерывен, и для него имеет место оценка

$$\|Av\|_{V^*} \leq \|v\|_V. \quad (3.4)$$

2. Оператор $A : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывен.

Доказательство.

1. Достаточно показать ограниченность линейного оператора A . По определению имеем

$$|\langle Av, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \right| \leq \|v\|_V \|\varphi\|_V.$$

Отсюда и следует неравенство (3.4) и непрерывность оператора A .

2. Докажем вполне непрерывность оператора A , действующего из X в X^* . Из первого пункта этой леммы имеем, что оператор $A : V \rightarrow V^*$ непрерывен, а в композиции отображений $X \subset V \xrightarrow{A} V^* \subset X^*$ первое вложение вполне непрерывно. Учитывая, что отображение A и последнее вложение непрерывны, получаем, что отображение $A : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывно. $\square$

Лемма 3.2. Оператор $L_{\varepsilon} = \varepsilon N : X \rightarrow X^*$ непрерывен, обратим, и для него имеет место оценка

$$\|L_{\varepsilon}v\|_{X^*} = \|(\varepsilon N)v\|_{X^*} \leq \varepsilon \|v\|_X. \quad (3.5)$$

Кроме того, обратный оператор $L_\varepsilon^{-1} = (\varepsilon N)^{-1} : X^* \rightarrow X$ непрерывен.

Доказательство. В силу линейности оператора L_ε для доказательства его непрерывности достаточно показать его ограниченность. Имеем

$$| \langle (\varepsilon N)v, \varphi \rangle | = \left| \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx \right| \leq \varepsilon \|v\|_X \|\varphi\|_X.$$

Отсюда и следует оценка (3.5). Таким образом, оператор $L_\varepsilon : X \rightarrow X^*$ ограничен и, следовательно, непрерывен.

Для доказательства обратимости воспользуемся проекционной теоремой из [14, с. 28]. Приведем её формулировку.

Теорема 3.1 (проекционная теорема). Пусть W — сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой $\|\cdot\|_W$), и пусть $a(u, v)$ — непрерывная билинейная форма на $W \times W$, которая коэрцитивна, т. е. существует $\alpha > 0$, такое что

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_W^2 \quad \forall u \in W.$$

Тогда для каждого l из W^* — пространства, сопряженного к W , — существует один и только один элемент $u \in W$, такой что

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in W.$$

Для того чтобы применить данную теорему, нам достаточно показать, что непрерывная билинейная форма

$$a(u, v) = \langle (\varepsilon N)u, v \rangle = \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta v) dx$$

коэрцитивна.

Действительно, для любого $v \in X$ имеем, что

$$a(v, v) = \langle (\varepsilon N)v, v \rangle = \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v) dx = \varepsilon \|v\|_X^2 \geq \varepsilon \|v\|_X^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда следует, что $L_\varepsilon : X \rightarrow X^*$ — изоморфизм.

Итак, имеем линейный непрерывный оператор εN , который отображает все банахово пространство X на все банахово пространство X^* взаимно-однозначно. Отсюда по теореме Банаха следует, что существует линейный непрерывный оператор L_ε^{-1} , обратный оператору L_ε , отображающий X^* на X . $\square$

Лемма 3.3. Для отображения B_1 имеют место следующие свойства:

1. Отображение $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*$ непрерывно, и для него имеет место оценка

$$\|B_1(v)\|_{V^*} \leq C_0 \|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2. \quad (3.6)$$

2. Для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$, а отображение $B_1 : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывно.

Доказательство.

1. Для любых $v \in L_4(\Omega)$ и $\varphi \in V$, используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} |\langle B_1(v), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |(\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |(\Delta_\alpha^{-1} v)_i|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\Omega} |v_j|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \|\varphi\|_V \leq C_0 \|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2 \|\varphi\|_V = C_0 \|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2 \|\varphi\|_V. \end{aligned}$$

Откуда следует неравенство (3.6). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1, 15]):

$$\|\Delta_\alpha^{-1} v\|_{L_p(\Omega)^n} = \|(I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v\|_{L_p(\Omega)^n} \leq C \|v\|_{L_p(\Omega)^n}, \quad p > 1.$$

Покажем непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем

$$\begin{aligned}
|\langle B_1(v^m), \varphi \rangle - \langle B_1(v^0), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v^0)_i v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)^n} \leq \\
&\leq \|\varphi\|_V \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} = \\
&= \|\varphi\|_V \left(\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^0 + (\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^0 - (\Delta_{\alpha}^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} \right) \leq \\
&\leq \|\varphi\|_V \left(\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} + \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1} v^m)_i v_j^0 - (\Delta_{\alpha}^{-1} v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} \right) \leq \\
&\leq C_1 \|\varphi\|_V \left(\sum_{j=1}^n \|\Delta_{\alpha}^{-1} v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n} + \sum_{j=1}^n \|\Delta_{\alpha}^{-1} (v^m - v^0)\|_{L_4(\Omega)^n} \|v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \leq \\
&\leq C_1 \|\varphi\|_V \left(\sum_{j=1}^n \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n} + \sum_{j=1}^n \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \|v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \leq \\
&\leq C_1 (\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}) \|\varphi\|_V = \\
&= C_1 (\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_V.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\|_{V^{-1}} \leq C_1 (\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n}) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Полагая $v^m \rightarrow v^0$ в $L_4(\Omega)^n$, получаем, что отображение $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^*$ является непрерывным.

2. Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $X \subset L_4(\Omega)^n$ для $n = 2, 3$, то имеем: $X \subset L_4(\Omega)^n \xrightarrow{B_1} V^* \subset X^*$, где первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_1 и последнее вложение — непрерывны. Таким образом получили, что для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$, а отображение $B_1 : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывно. $\square$

Лемма 3.4. Для операторов B_2 и B_3 имеют место следующие свойства:

1. Для $i = 2, 3$ операторы $B_i : V \rightarrow X^*$ непрерывны, и для них имеет место оценка

$$\|B_i(v)\|_{X^*} \leq C_2 \|v\|_V^2. \quad (3.7)$$

2. Для $i = 2, 3$ и любой функции $v \in X$ значения $B_i(v) \in X^*$, а отображения $B_i : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывны.

Доказательство. Мы докажем данную лемму для оператора B_2 . Доказательство в случае оператора B_3 полностью аналогично.

1. Для любых $v \in V$, $\varphi \in X$ в силу определения оператора B_2 имеем

$$\begin{aligned}
|\langle B_2(v), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^n \|v_k\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq \\
&\leq C_3 \|v\|_{L_4(\Omega)^n} \|v\|_V \|\varphi\|_X \leq C_4 \|v\|_V^2 \|\varphi\|_X.
\end{aligned}$$

Отсюда и следует требуемая оценка (3.7).

Покажем непрерывность отображения $B_2 : V \rightarrow X^*$. Для произвольных $v^m, v^0 \in V$ имеем:

$$\begin{aligned} |\langle B_2(v^m), \varphi \rangle - \langle B_2(v^0), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \|\varphi\|_X. \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} &= \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} + \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{i,j,k=1}^n \|v_k^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \|v_k^m - v_k^0\|_{L_4(\Omega)} \leq \\ &\leq C_5 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_V + C_5 \|v^0\|_V \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \leq \\ &\leq C_6 (\|v^m\|_V + \|v^0\|_V) \|v^m - v^0\|_V. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|B_2(v^m) - B_2(v^0)\|_{X^*} \leq C_6 (\|v^m\|_V + \|v^0\|_V) \|v^m - v^0\|_V.$$

Итак, если последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V$, то из последнего неравенства следует непрерывность отображения $B_2 : V \rightarrow X^*$.

2. Для доказательства утверждения этого пункта мы уже имеем: $X \subset V \xrightarrow{B_2} X^*$. Здесь первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_2 непрерывно. Таким образом, для любой функции $v \in X$ получим, что функция $B_2(v) \in X^*$, а отображение $B_2 : X \rightarrow X^*$ вполне непрерывно. $\square$

Лемма 3.5. Оператор $K : X \rightarrow X^*$ — вполне непрерывен.

Доказательство. Вполне непрерывность оператора $K : X \rightarrow X^*$ следует из вполне непрерывности операторов $A : X \rightarrow X^*$ по лемме 3.1; $B_1 : X \rightarrow X^*$ по лемме 3.3; $B_2 : X \rightarrow X^*$ по лемме 3.4; $B_3 : X \rightarrow X^*$ по лемме 3.4. $\square$

3.1. Априорные оценки. Вместе с уравнением (3.3) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (3.8)$$

которое совпадает с (3.3) при $\lambda = 1$.

Теорема 3.2. Если $v \in X$ — решение операторного уравнения (3.8) для некоторого $\lambda \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leq C_7, \quad (3.9)$$

где $C_7 = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}$. Более того, при $\lambda = 1$ имеет место оценка

$$\nu \|v\|_V^2 \leq C_8, \quad (3.10)$$

где $C_8 = \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$.

Доказательство. Пусть $v \in X$ — решение (3.8), тогда для него при любом $\varphi \in X$ имеет место равенство

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx -$$

$$- \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \lambda \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \\ & = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = -2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx. \end{aligned}$$

Тогда (3.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ & + 2 \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \lambda \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi \in X$, то оно имеет место и при $\varphi = v$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta v) dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx + \lambda \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx + \\ & + 2 \lambda \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \lambda \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Преобразуем слагаемые в левой части (3.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx = \nu \|v\|_V^2; \quad \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta v) dx = \varepsilon \|v\|_X^2; \\ & \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_i} v_j v_j dx = 0; \\ & 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx = 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) dx = \\ & = \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial (\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v))}{\partial x_k} dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v) dx = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались симметричностью тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$.

Заметим, что правую часть равенства (3.12) можно оценить сверху

$$\lambda \int_{\Omega} f v dx \leq \lambda \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda \frac{\delta \|v\|_V^2}{2}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши:

$$bc \leq \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}.$$

Таким образом, для $\delta = \nu$ получили

$$\begin{aligned} \varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \nu \|v\|_V^2 & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2}, \\ \varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2} & \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leq \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}.$$

Аналогично при $\lambda = 1$ получаем:

$$\nu \|v\|_V^2 \leq \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}.$$

Отсюда и следуют требуемые оценки (3.9) и (3.10). $\square$

3.2. Существование решений аппроксимационной задачи.

Теорема 3.3. *Операторное уравнение (3.3) имеет хотя бы одно решение $v \in X$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В силу априорной оценки (3.9) все решения семейства уравнений (3.8)

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \text{где } \lambda \in [0, 1],$$

лежат в шаре B_R радиуса $R = C_7 + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений $v = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)] = 0$, где $\lambda \in [0, 1]$, лежат в том же шаре B_R . В силу леммы 3.5 отображение $[f - K(\cdot)] : X \rightarrow X^*$ является вполне непрерывным. А из леммы 3.2 следует, что оператор $L_\varepsilon^{-1} : X^* \rightarrow X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L_\varepsilon^{-1}[f - K(\cdot)] : X \rightarrow X$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0, 1] \times X \rightarrow X$, $G(\lambda, v) = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)]$ вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v .

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R . Следовательно, для него определена степень Лере—Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0, \cdot) = I$ и выполнено равенство $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Отсюда

$$\deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0) = 1.$$

Таким образом, получили, что существует хотя бы одно решение $v \in X$ уравнения

$$v + L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)] = 0$$

и, следовательно, уравнения (3.3). $\square$

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения (3.3), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача (3.1) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1.1)–(1.3)

В силу теоремы 3.3 при каждом ε задача 3.1 имеет слабое решение. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность ε_m . Покажем, что полученная последовательность решений v_m задачи 3.1 будет сходиться к слабому решению краевой задачи (1.1)–(1.3). Для этого положим в (3.1) $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$. В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \rightarrow \infty$. В силу теоремы 3.3 при каждом ε_m существует $v_m \in X \subset V$ — слабое решение аппроксимационной задачи 3.1. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi dx - \\ - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В силу существования априорной оценки (3.10) (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$. Тогда при $m \rightarrow \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx \rightarrow \nu \int_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx.$$

Далее заметим:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) \, dx \right| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\varepsilon_m} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) \, dx \right| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) \, dx \right|. \end{aligned}$$

Без ограничения общности в силу оценки (3.9) теоремы 3.2 получаем:

$$\varepsilon_m \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta \varphi) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для $n = 2, 3$, учитывая оценку (3.10), без ограничения общности можно считать, что $v_m \rightarrow v_*$ сильно в $L_4(\Omega)^n$. Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\begin{aligned} \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx &\rightarrow \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx, \\ \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx &\rightarrow \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx. \end{aligned}$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Поэтому их произведение сходится слабо к $v_* \nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

Таким образом, переходя в равенстве (4.1) к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получим, что предельная функция v_* удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \\ - \varkappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 2.1.

5. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим теперь задачу (1.1)–(1.3) в случае, когда Ω — произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, возможно, неограниченная. Аналогично случаю с ограниченной областью для задачи (1.1)–(1.3) вводятся понятия слабого решения (аналогично определению 2.1) и аппроксимационной задачи (аналогично задаче 3.1).

Определение 5.1. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и $f \in V^*$. Слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \\ - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Задача 5.1. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \\ - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для доказательства теоремы 2.2 обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m в пространстве $\mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$. Введем новые обозначения.

Через $L_p(\Omega_m)^n$, $1 \leq p < \infty$, будем обозначать множество всех измеримых функций $u : \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^n$, суммируемых с p -й степенью. $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$ — пространство функций на Ω_m со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_m ; $\mathcal{V}(\Omega_m) = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega_m)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$; $V(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega_m)^n$; $X(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega_m)^n$.

Аналогично введем обозначения $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, где B_k — шар с центром в нуле и радиусом k .

Следуя [11, с. 117], можно рассмотреть сужение f на $\Omega_m : f|_{\Omega_m} \in V^*(\Omega_m)$, которое задается формулой

$$\langle f|_{\Omega_m}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle,$$

где φ — произвольная функция из $\mathcal{V}$, а $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ нулем на все Ω . Очевидно,

$$\|f|_{\Omega_m}\|_{V^*(\Omega_m)} \leq \|f\|_{V^*(\Omega)}.$$

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу 5.1. Заменим в (5.2) f на $f|_{\Omega_m}$, и пусть $\varepsilon = \frac{1}{m}$. По теореме 2.1 эти задачи имеют хотя бы одно решение v_m . Обозначим через $\tilde{v}_m$ продолжение v_m нулем на все Ω . По теореме 3.2 нормы $\|\tilde{v}_m\|_{V(\Omega)} = \|v_m\|_{V(\Omega_m)}$ равномерно ограничены. Поэтому при $m \rightarrow \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v}_0$ слабо в V . Покажем, что $\tilde{v}_0$ есть решение задачи (5.1).

Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{V}$. При некотором k носитель φ лежит в Ω_k . Обозначим через v_m^* продолжение $\tilde{v}_m$ нулем за пределы Ω , суженное на B_k . Ясно, что $v_m^* \rightarrow v_0^*$ слабо в $V(B_k)$, и значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому все слагаемые (5.2) с $\varepsilon = \frac{1}{m}$ и $v = \tilde{v}_m$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_{\Omega} \nabla (\Delta \tilde{v}_m) : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} \tilde{v}_m)_i (\tilde{v}_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \tilde{v}_m : \nabla \varphi \, dx - \\ - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial (\tilde{v}_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial (\tilde{v}_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \end{aligned}$$

сходятся к соответствующим слагаемым (5.1):

$$- \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (\Delta_{\alpha}^{-1} \tilde{v}_0)_i (\tilde{v}_0)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \tilde{v}_0 : \nabla \varphi \, dx - \kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial (\tilde{v}_0)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx -$$

$$-\kappa \int_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial(\tilde{v}_0)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

причем без ограничения общности в силу оценки (3.9) теоремы 3.2 получаем:

$$\frac{1}{m} \int_{\Omega} \nabla(\Delta(\tilde{v}_m)) : \nabla(\Delta \varphi) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Итак, $\tilde{v}_0$ удовлетворяет тождеству (5.1) при всех $\varphi \in \mathcal{V}$. Значит, $\tilde{v}_0$ является слабым решением задачи (1.1)–(1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — 19, № 3. — С. 53–161.
2. Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазеева Н. П., Ходорновский Я. С. Течение полимерных растворов при наличии конвективных ускорений// Тр. Ленинград. орд. Ленина кораблестр. инст. — 1975. — 96. — С. 3–9.
3. Войткунский Я. И., Амфилохиев В. Б., Павловский В. А. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств// Тр. Ленинград. орд. Ленина кораблестр. инст. — 1970. — 69. — С. 19–26.
4. Звягин А. В. О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — № 2. — С. 103–105.
5. Звягин А. В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2016. — № 10. — С. 70–75.
6. Звягин А. В., Звягин В. Г., Поляков Д. М. О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2019. — 59, № 7. — С. 1243–1257.
7. Звягин А. В., Поляков Д. М. О разрешимости альфа-модели Джеффриса—Олдройда// Дифф. уравн. — 2016. — 52, №6. — С. 782–787.
8. Звягин В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — 46. — С. 92–119.
9. Звягин В. Г., Турбин М. В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — 31. — С. 3–144.
10. Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: Кранд УРСС, 2012.
11. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
12. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров// Докл. АН СССР. — 1971. — 200, № 4. — С. 809–812.
13. Пухначев В. В., Фроловская О. А. О модели Войткунского—Амфилохиева—Павловского движения водных растворов полимеров// Тр. МИАН. — 2018. — 300. — С. 176–189.
14. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
15. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — 15. — С. 119–147.
16. Hecht M. W., Holm D. D., Petersen M. R., Wingate B. A. Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model// J. Comput. Phys. — 2008. — 227. — С. 5691–5716.
17. Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion// Phys. Rev. Lett. — 1998. — 349. — С. 4173–4177.
18. Lemarie-Rieusset P. G. The Navier–Stokes problem in the 21st century. — Taylor and Francis Group, 2016.
19. Leray J. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique// J. Math. Pures Appl. — 1933. — 12. — С. 1–82.
20. Zvyagin A. V. Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions// Appl. Anal. — 2013. — 92, № 6. — С. 1157–1168.
21. Zvyagin A. V. Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative// Nonlinear Anal. — 2013. — 90. — С. 70–85.
22. Zvyagin A. V. Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative// Fixed Point Theory. — 2014. — 15, № 2. — С. 623–634.

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109

EDN: UBQDHFV

Existence of weak solutions of the stationary alpha model describing the motion of polymer solutions

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we study a boundary-value problem for a mathematical model describing the motion of aqueous polymer solutions. Based on the approximation-topological method, we investigate the existence of weak solutions of the problem under study. We consider the case of medium motion both in a bounded domain of two-dimensional or three-dimensional space and in an unbounded domain.

Keywords: motion of polymer solutions, alpha model, approximation-topological method, weak solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>.

For citation: A. V. Zvyagin, “Existence of weak solutions of the stationary alpha model describing the motion of polymer solutions,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 1, 96–109. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109>

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, “Ellipticheskie granichnye zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida” [Elliptic boundary-value problems with a parameter and parabolic problems of general form], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. V. B. Amfilokhiev, Ya. I. Voytkunskii, N. P. Mazaeva, and Ya. S. Khodornovskii, “Techenie polimernykh rastvorov pri nalichii konvektivnykh uskoreniy” [Flow of polymer solutions in the presence of convective accelerations], *Tr. Leningrad. Ord. Lenina Korablestr. Inst.* [Proc. Leningrad Ord. Lenin Shipbuilding Inst.], 1975, **96**, 3–9 (in Russian).
3. Ya. I. Voytkunskii, V. B. Amfilokhiev, and V. A. Pavlovskii, “Uravneniya dvizheniya zhidkosti s uchetom ee relaksatsionnykh svoystv” [Equations of fluid motion taking into account its relaxation properties], *Tr. Leningrad. Ord. Lenina Korablestr. Inst.* [Proc. Leningrad Ord. Lenin Shipbuilding Inst.], 1970, **69**, 19–26 (in Russian).
4. A. V. Zvyagin, “O razreshimosti statsionarnoy modeli dvizheniya slabykh vodnykh rastvorov polimerov” [On the solvability of a stationary model of motion of weak aqueous solutions of polymers], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, No. 2, 103–105 (in Russian).
5. A. V. Zvyagin, “Razreshimost’ zadachi termovyazkoupругosti dlya al’fa-modeli Lere” [Razreshimost’ zadachi termovyazkoupругosti dlya al’fa-modeli Lere], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2016, No. 10, 70–75 (in Russian).

6. A. V. Zvyagin, V. G. Zvyagin, and D. M. Polyakov, “O dissipativnoy razreshimosti al’fa-modeli dvizheniya zhidkosti s pamyat’yu” [On the dissipative solvability of the alpha model of fluid motion with memory], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 7, 1243–1257 (in Russian).
7. A. V. Zvyagin and D. M. Polyakov, “O razreshimosti al’fa-modeli Dzheffrisa—Oldroyda” [On the solvability of the Jeffreys—Oldroyd alpha model], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 6, 782–787 (in Russian).
8. V. G. Zvyagin, “Approksimatsionno-topologicheskii podkhod k issledovaniyu matematicheskikh zadach gidrodinamiki” [Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **46**, 92–119 (in Russian).
9. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, “Issledovanie nachal’no-kraevykh zadach dlya matematicheskikh modeley dvizheniya zhidkostey Kel’vina—Foygta” [The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin—Voigt fluids], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
10. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* [Mathematical Issues of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], Krasand URSS, Moscow, 2012 (in Russian).
11. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Issues of Dynamics of Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
12. V. A. Pavlovskii, “K voprosu o teoreticheskom opisani slabykh vodnykh rastvorov polimerov” [On the issue of theoretical description of weak aqueous solutions of polymers], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1971, **200**, No. 4, 809–812 (in Russian).
13. V. V. Pukhnachev and O. A. Frolovskaya, “O modeli Voytkunskogo—Amfilokhieva—Pavlovskogo dvizheniya vodnykh rastvorov polimerov” [On the Voikunsky—Amfilokhiiev—Pavlovskii model of motion of aqueous solutions of polymers], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **300**, 176–189 (in Russian).
14. R. Teman, *Uravneniya Nav’e—Stoksa. Teoriya i chislennyy analiz* [Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis], Mir, Moscow, 1981 (Russian translation).
15. S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 119–147.
16. M. W. Hecht, D. D. Holm, M. R. Petersen, and B. A. Wingate, “Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model,” *J. Comput. Phys.*, 2008, **227**, 5691–5716.
17. D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, “The Euler—Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion,” *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **349**, 4173–4177.
18. P. G. Lemarie-Rieusset, *The Navier—Stokes Problem in the 21st Century*, Taylor and Francis Group, 2016.
19. J. Leray, “Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique,” *J. Math. Pures Appl.*, 1933, **12**, 1–82.
20. A. V. Zvyagin, “Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions,” *Appl. Anal.*, 2013, **92**, No. 6, 1157–1168.
21. A. V. Zvyagin, “Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative,” *Nonlinear Anal.*, 2013, **90**, 70–85.
22. A. V. Zvyagin, “Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative,” *Fixed Point Theory*, 2014, **15**, No. 2, 623–634.

A. V. Zvyagin
 Voronezh State University, Voronezh, Russia
 E-mail: zvyagin.a@mail.ru

УДК 517.958+519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124

EDN: UIYIPG

О СШИВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НА ВИРТУАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ С ДОМИНИРОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИИ ТЕЧЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

А. И. ИБРАГИМОВ^{1,2}, Е. М. ВАРФОЛОМЕЕВ³, Э. С. ЗАКИРОВ²

¹*Texas Tech University, Lubbock, USA*

²*Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия*

³*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Аннотация. Изучается следующая обратная задача для уравнения в частных производных: найти геометрический параметр области нестационарной задачи, который соответствует численному. Важной особенностью является то, что интересующий нас блок дискретизации содержит источник (трещины), генерирующий поток в пористой среде. С индустриальной точки зрения мы строим аппарат для сшивки численно найденного давления в резервуаре с аналитическим. Наша цель состоит в том, чтобы получить значение функции давления на трещине (или вблизи трещины) в зависимости от расстояния между множественными трещинами (ср. [14]). Для этого мы обобщаем вероятностный метод Эйнштейна (см. [5]) для броуновского движения для изучения транспорта жидкостей в пористой среде. Мы обобщаем парадигму Эйнштейна, связывая средние изменения плотности жидкости со скоростью жидкости, и выводим уравнение анизотропной диффузии в недивергентной форме, которое содержит член конвекции. Затем мы применяем закон Дарси и основные законы для потока сжимаемой жидкости и получаем нелинейные уравнения в частных производных для функции плотности. Мы используем преобразование Бернштейна для сведения исходной нелинейной задачи к линейной. Используемый метод позволяет использовать аналитическое решение стационарного состояния для интерпретации численно найденного давления на трещине, зависящего от времени, учитывающей одномерную геометрию потока в направлении «длинной» трещины.

Ключевые слова: поток в пористой среде, материальный баланс Эйнштейна, радиус блока скважины Писмана, параболическое уравнение в недивергентной форме.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. И. Ибрагимов, Е. М. Варфоломеев, Э. С. Закиров. О сшивании аналитического и численного решений задачи на виртуальной границе с доминированием геометрии течения в ограниченной области // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 110–124. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124>

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы опишем парадигму материального баланса (МБ) в виде алгебраического набора уравнений и укажем предполагаемое применение для интерпретации численного распределения давления вдоль искусственной трещины, производящей пластовую жидкость. Математически эта проблема полностью понятна для вертикальной скважины и приводит к так называемому

радиусу блока скважины Писмана (см. недавнюю публикацию [9]; см. также [3, 12–15, 20, 21]), где представлен подробный обзор в классическом круговом случае). Это не означает, что решение уже найдено, но дает один из способов доказательства.

В этой статье мы рассматриваем численное моделирование потока и ставим цель интерпретировать численное решение с помощью аналитического решения, основанного на качественном понимании процесса течения жидкости к трещине-источнику. Пусть $P_{M,N,K}$ — $3D$ -матрица распределения давления в пласте, полученная в результате некоторого моделирования (численного решения). Задача иллюстрируется картиной течения к системе множественных трещин, представленной на рис. 1 (см. [11]).

Пусть симулятор резервуара на заданной сетке дает данные о резервуаре в ячейках $B_{m,n,k}$ для некоторых m, n, k , и пусть характерный размер ячейки будет Δ . В целом понятно, что при $\Delta \rightarrow 0$ решение $P_{M,N,K} \rightarrow u(x, y, z, t)$ сходится поточечно. Во многих случаях так оно и есть или ожидается, что так будет (см. обзор сходимости). Для этого требуется, чтобы сетка аппроксимировала границу области и граничные данные численного решения аппроксимировали граничные данные. Этого не наблюдается для многих задач в приближении подземных областей. В то же время, вдали от границы внутри области численное решение в каждой ячейке близко к аналитическому решению в центре ячейки. Большая проблема возникает, когда ячейка содержит возмущение в виде искусственной трещины. Предполагается, что скорость добычи жидкости фиксирована на участке трещины, и цель состоит в том, чтобы оценить давление и сравнить его с фактическим значением давления на трещине.

Задача состоит в следующем: найти геометрическое расстояние относительно источника, такое, чтобы значение давления удовлетворяло уравнению материального баланса. Эта проблема была хорошо изучена в случае радиального течения к скважине как к стоку (см. [9]). В случае потоков, не описываемых радиальной моделью, в некоторых симуляторах задача приближается суперпозицией радиальных (см. [22]). Очевидно, это приводит к значительным ошибкам. В настоящей статье мы решаем эту проблему, используя аналитическое решение, которое сводит поток к трещинам к квази-одномерному. Наша мотивация основана на недавней статье, которая качественно описывает составные потоки к семейству трещин (см. [11]).

В некотором смысле наш подход основан на наборах семейств решений, каждый из которых представляет качественное поведение потока. Мы считаем, что это многообещающий подход, который обеспечивает правильную интерпретацию моделируемых данных. Мы разбиваем область потока на ячейки, некоторые из которых содержат трещины как источник потока, а другие являются просто субъектами уравнения материального баланса. Наша цель — интерпретировать численное решение на ячейке в зависимости от местоположения трещины в ячейке (см. [11]).

В данной работе мы выводим уравнение переноса однофазной изотермической жидкости в пористой среде на основе парадигмы Эйнштейна броуновского движения частиц. С нашей точки зрения, это лучше соответствует нашей процедуре интерпретации.

Моделирование фильтрации в пористой среде имеет долгую историю изучения и традиционно базируется на «трех китах» (см. [10]).

1. Уравнение неразрывности (уравнение материального баланса, в дивергентной форме), связывающее скорость и плотность жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.1)$$

2. Основное уравнение, связывающее скорость и градиент давления:

$$F(\vec{v}, \nabla p) = 0. \quad (1.2)$$

3. Функциональное уравнение состояния, которое функционально связывает два основных параметра — давление и плотность:

$$F(\rho; p) = 0. \quad (1.3)$$

Это приводит к параболическому (линейному или квазилинейному, вырожденному) уравнению относительно функции давления в дивергентной форме (см. [1]). Все три ограничения выше могут быть подвержены стохастическим возмущениям. Например, принято рассматривать (см. [16]) возмущение скорости из-за неоднородности в среде, и можно использовать методы Монте-Карло

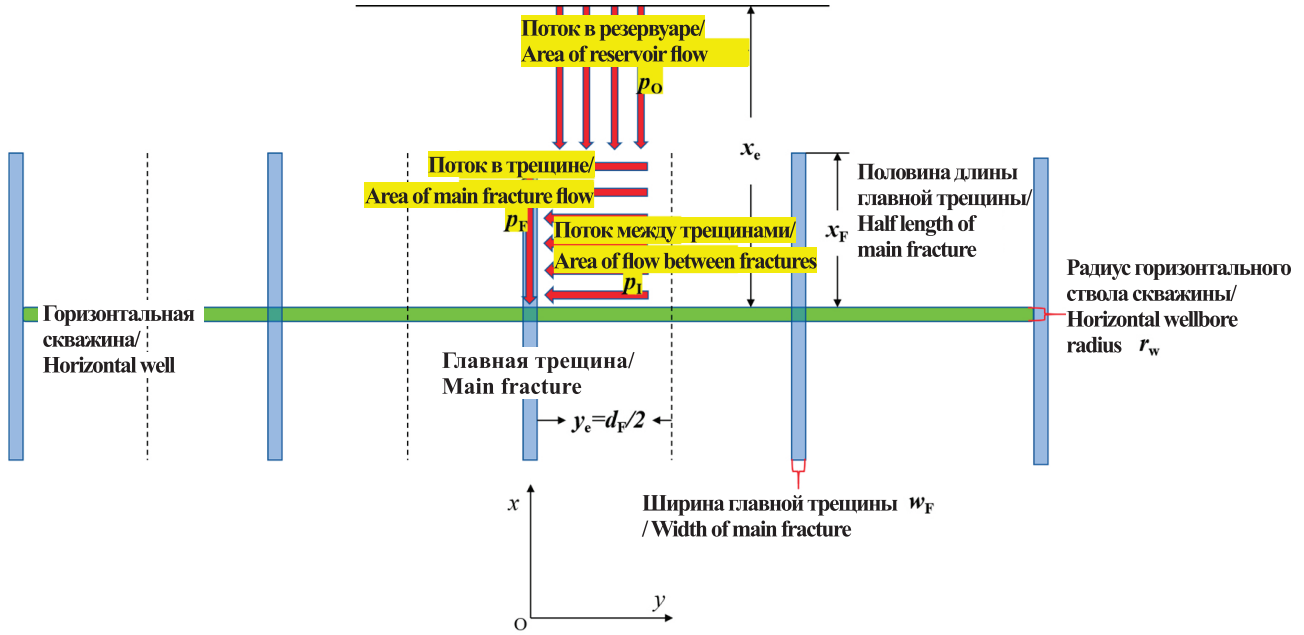


РИС. 1. Качественная схема явления

FIG. 1. Qualitative picture of interest

вдоль основного тренда для генерации случайных данных. Алгоритм Монте-Карло и его обобщение используются для моделирования случайности в термодинамическом уравнении (см. [18]), однако это не является темой нашего исследования. Мы следуем недооцененной работе Эйнштейна с целью построения потока в среде на основе мысленного эксперимента над концепцией скачков частицы, которые для нас являются событиями.

В данной работе мы построим уравнение материального баланса случайного блуждания частиц в среде, подверженной диффузии и дрейфу. Для этого мы описываем материальный баланс с помощью уравнения типа Эйнштейна, в котором плотность частиц в пространственной переменной в фиксированной точке в фиксированное время будет функцией зависимых переменных, которые будут ключевыми характеристиками. Согласно парадигме Эйнштейна, события заключаются в длине скачков за интервал времени τ как входной коэффициент и их частоте $\varphi_\tau(\vec{\Delta}(x, t))$. Следуя парадигме Эйнштейна, мы предлагаем модель переноса жидкости в виде совокупности частиц, составляющих жидкость в среде, характеризующейся функцией плотности, которая в любой момент времени t изменяется в пространстве x случайным образом в пределах интервала времени τ . Параметр τ как входная переменная размерности времени фиксирован и остается неизменным в любой момент времени и в любой точке пространства x . Функция распределения плотности вероятности (РПВ) $\varphi_\tau(\vec{\Delta}(x, t))$ характеризует как перенос (конвекцию или дрейф) в некотором направлении, так и диффузию с помощью коэффициентов матрицы. Функция РПВ — это еще один параметр, который зависит от τ и определяет движение жидкости $\mathcal{F}$ в среде $\mathcal{M}$. Как мы уже упоминали, жидкость $\mathcal{F}$ и среда $\mathcal{M}$ сами могут быть подвержены случайности, но в статье это не рассматривается. Продолжая мысленный эксперимент Эйнштейна, после нескольких шагов мы приходим к уравнению недивергентного типа с дрейфом для гладкой функции $\rho(x, t)$ с коэффициентами, образующими составной оператор с матрицей диффузии и конвекции вида

$$\mathcal{L}\rho(x, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \langle \tau^{-1} A, D^2 \rho \rangle - \frac{\Delta_e}{\tau} \cdot \nabla \rho.$$

Выше $D^2 \rho$ — матрица Гессе, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n^2}$ между двумя матрицами $n \times n$. Здесь $A(x, t)$ и Δ_e — функции от $((x, t); \dots)$; они представляют собой стандартное отклонение и ожидаемое значение случайного процесса «скачков» частиц, которые приводят к изменению плотности и, очевидно, зависят от $\varphi_\tau(x, t)$. Поэтому естественно исследовать уравнение с внешней силой: $\mathcal{L}\rho = \mathcal{R}(x, t)$.

Одной из целей этого проекта является построение модели в терминах параболического уравнения в недивергентной форме и применение методов, разработанных Ландисом, для изучения качественных свойств решения этого уравнения. Детали формулировки модели уравнения в частных производных представлены в разделе 2. Мы вводим основные предположения в пункте 2.2. Одно из них — гипотеза 2.1 о том, что скорость жидкости в среде «матрично пропорциональна» ожидаемому значению длины прыжков частиц:

$$M_0 \vec{v} = \frac{1}{\tau} \int \vec{\Delta} \varphi_\tau(\vec{\Delta}(x, t)) d\Delta_1 \dots \Delta_n.$$

Далее мы накладываем условие неотрицательности на матрицу M_0 (см. [6]). Эта гипотеза позволяет связать микроскопический транспорт с макроскопическим, что является ключом к пониманию и разработке различных типов моделей.

В данной статье мы рассматриваем постулат Дарси для макроскопических потоков и связываем скорость потока только с функцией плотности. При таком предположении мы приходим к квазилинейному параболическому уравнению для функции плотности с квадратичной нелинейностью градиента. Используя нелинейную подстановку типа Коула—Хопфа, мы сводим исходное уравнение, нелинейное относительно как градиента, так и решения, к нелинейному, но только относительно самого решения. Парадигма Эйнштейна хорошо представлена в [6].

Замечание 1.1. Авторы осознают недостатки предложенной модели. Очевидно, для подтверждения мысленного эксперимента требуется больше данных и опытов. Возможно, он слишком амбициозен, можно сравнить это с так называемой теорией корневого давления, где методы интерпретации существуют уже много десятилетий, но по-прежнему требуются дополнительные исследования чтобы понять, почему высокое дерево может транспортировать воду наверх к листьям (см. [19]). Мысленный эксперимент Эйнштейна дает возможный ответ на этот вопрос. А именно, предположим, что в течение временного интервала T_0 каналы из-за капиллярного давления транспортируют воду от корней к высоте дерева на уровне H_0 . Затем она «расширится» из-за диффузии по каналам внутри дерева во всех направлениях и создаст мини-резервуар U_0 высотой порядка H_0 . Затем процесс транспортировки продолжится до следующего уровня H_1 и т. д. Конечно, потребуется больше экспериментальных подтверждений этого гипотетического процесса, мы просто выдвигаем эту идею для изучения научным сообществом.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы поэтапно выводим модель: самое общее уравнение (2.8), уравнение диффузии с конвективным членом (2.16) при гипотезе 2.1, частные уравнения пористой среды (2.18), (2.17) с учетом анизотропного закона Дарси (2.13). В следующем разделе мы предлагаем метод для реализации качественного поведения потока: одномерного по направлению к трещине и радиального вдали от системы трещины в целом.

Мы предполагаем, что на поток не действуют силы гравитации, и сводим исходное уравнение к недивергентному линейному уравнению (см. [6]).

2. ВЫВОД МОДЕЛЕЙ

2.1. Общие уравнения. Предположим, что $\rho(x, t)$ — функция плотности в единичном объеме в точке x в момент времени t ($-\infty < t < \infty$), где $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\tau > 0$ — временной интервал в качестве входного параметра в момент наблюдения в точке x , и этот параметр одинаков для всего времени и пространства.

Пусть $\rho(x + \Delta, t)$ — изменение плотности, которое приводит к изменению в момент времени t в точке пространства x из-за перемещения на расстояние Δ частиц, составляющих материю.

Предположение 2.1. Пусть $\rho(x, t \pm \tau)$ — значение плотности в точке x в момент времени $t \pm \tau$. Знак перед параметром τ выбирается в зависимости от того, является ли «жидкость» (или любой интересующий нас объект) «средофобной» («+») или «средофильной» («−») в данной среде.

Процесс на отрезке времени $[t, t + \tau]$ характеризуется многомерной РПВ, которую можно представить другим способом.

Предположение 2.2. Пусть $\phi(x, t, \Delta; \tau)$ для $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ — распределение плотности вероятности процесса движения, и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \Delta; \tau) d\zeta = 1.$$

Для определенности предположим, что перед τ стоит знак «+». Тогда уравнение материального баланса Эйнштейна принимает вид

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \Delta, t) \phi(x, t, \Delta; \tau) d\Delta. \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Обратим внимание, что уравнение Эйнштейна представляет собой модель случайного процесса, определяемого относительно входных параметров τ и функции плотности вероятности ϕ . В общем случае параметр τ зависит от t и x . Но, как мы увидим далее, это приведет к слишком большому усложнению, поскольку τ находится внутри неизвестной функции плотности ($\rho(x, t + \tau)$). Поэтому мы *предполагаем*, что τ является входной характеристикой жидкости и ее фильтрационной способностью в среде, поскольку время и пространство являются независимыми параметрами.

Предположение 2.3. Далее предположим, что τ фиксировано и достаточно мало, так что для всех t

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \rho(x, t + \tau) - \rho(x, t). \quad (2.2)$$

Кроме того, для заданного $\tau > 0$ скалярная функция РПВ $\phi_\tau(\zeta, x, t, \dots)$ зависит от многих переменных и такова, что:

1. параметр τ является основным, он характеризует жидкость;
2. функция РПВ $\phi_\tau(x, t, \zeta)$ как функция событий характеризует пористую среду относительно заданной жидкости, текущей и «сжимающейся» внутри среды (длина движения частиц, составляющих нашу жидкость), и является функцией вектора ζ ;
3. эта функция РПВ может характеризовать:
 - неоднородность среды,
 - геометрию потока,
 - диффузию вдоль движения,
 - кинетику движения и ее зависимость от градиента давления,
 - и т. д.;
4. все моменты выше 2-го игнорируются относительно первого и второго моментов.

Для простоты обозначим $\phi(x, t, \zeta) = \phi(x, t, \zeta; \tau)$.

Определение 2.1. Введем функции коэффициентов

$$\bar{a}_{ij}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_i \zeta_j \phi(x, t, \zeta) d\zeta, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.3)$$

матрицу размера $n \times n$

$$\bar{A}(x, t) = (\bar{a}_{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2.4)$$

и вектор

$$E(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \zeta) \zeta d\zeta. \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что матрица $\bar{A}(x, t)$ симметрична, и для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{a}_{ij}(x, t) \xi_j = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi \cdot \zeta|^2 \phi(x, t, \zeta) d\zeta \geq 0.$$

Следовательно, матрица $\bar{A}(x, t)$ является положительно полуопределенной.

Замечание 2.2. Рассмотрим случай взаимно независимых событий для скачков, когда

$$\phi(x, t, \zeta) = \phi_1(x, t, \zeta_1) \dots \phi_n(x, t, \zeta_n), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \quad (2.6)$$

при $\int_{\mathbb{R}} \phi_i(x, t, s) ds = 1$, для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} \sigma_i \sigma_j & \text{при } i \neq j, \\ \bar{\sigma}_i^2 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где

$$\sigma_i(x, t) = \int_{\mathbb{R}} s \phi_i(x, t, s) ds, \quad \bar{\sigma}_i(x, t) = \left(\int_{\mathbb{R}} s^2 \phi_i(x, t, s) ds \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Предположим, кроме того, что каждая функция $\phi_i(s, x, t)$, $1 \leq i \leq n$, четна относительно s . Тогда каждое $\sigma_i = 0$ и, следовательно, $\bar{A}(x, t)$ является диагональной матрицей $\text{diag}[\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n]$. Поскольку каждое $\bar{\sigma}_i$ положительно, в этом случае матрица $\bar{A}(x, t)$ положительно определена. Более того, получаем, что $E(x, t) = 0$.

Предположим, что $\rho \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим малое τ и предположим, что носитель функции $\zeta \mapsto \phi(x, t, \zeta)$ находится в малом шаре с центром в начале координат. С помощью разложения Тейлора функции $\zeta \mapsto \rho(x + \zeta, t)$ для малых $|\zeta|$ с точностью до квадратичных членов имеем приближение

$$\rho(x + \zeta, t) \approx \rho(x, t) + \zeta \cdot \nabla \rho(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \zeta_i \zeta_j \rho_{x_i x_j}(x, t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \zeta, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta \approx \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \zeta \cdot \nabla \rho(x, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_i \zeta_j \rho_{x_i x_j}(x, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta = \\ &= \rho(x, t) + E \cdot \nabla \rho + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Объединяя это с (2.2) и заменяя приближенное равенство точным, получаем

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + E \cdot \nabla \rho. \quad (2.8)$$

Аналогичное уравнение можно получить с помощью стохастических методов (см. [17]).

Замечание 2.3. Параметр τ может зависеть от самого решения, и это может привести к такому явлению, как конечная скорость распространения (подробнее см. в [8]).

2.2. Основное предположение.

Гипотеза 2.1. Предположим, что ожидаемое значение плотности потока относительно параметра τ пропорционально скорости потока жидкости:

$$M_0 v(x, t) = \frac{E(x, t)}{\tau}. \quad (2.9)$$

Здесь $M_0(x, t)$ — безразмерная константа, которую для простоты мы предполагаем равной 1.

Фактически, матрица M_0 может зависеть от РПВ $\phi(x, t, \dots)$ через усреднение и само ожидаемое значение. Обратим внимание, что это фундаментальная гипотеза, которая связывает микроскопические особенности переноса частиц в среде и макроскопические свойства потока, такие как скорость в среде и/или на открытом пространстве.

Из (2.8) и (2.9) получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2\tau} \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + (M_0 v) \cdot \nabla \rho. \quad (2.10)$$

Для $1 \leq i, j \leq n$ положим $a_{ij}(x, t) = (2\tau)^{-1} \bar{a}_{ij}(x, t)$ и определим матрицу

$$A(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{1}{2\tau} \bar{A}(x, t). \quad (2.11)$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle + (M_0(x, t) v(x, t)) \cdot \nabla \rho. \quad (2.12)$$

В этом уравнении слагаемое $\langle A(x, t), D^2 \rho \rangle$ представляет диффузию в недивергентной форме, а слагаемое $(M_0(x, t) v(x, t)) \cdot \nabla \rho$ представляет конвекцию/перенос.

2.3. Движение жидкости в пористой среде (закон Дарси). Учтем анизотропный закон Дарси:

$$v = -\bar{K}(x, t) \nabla p, \quad (2.13)$$

где $\bar{K}(x, t)$ — матрица размера $n \times n$. Из (2.12) и (2.13) получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - (K(x, t) \nabla p) \cdot \nabla \rho, \quad (2.14)$$

где

$$K(x, t) = M_0(x, t) \bar{K}(x, t), \quad B(x, t) = M_0(x, t) \bar{K}(x, t) \vec{g}. \quad (2.15)$$

Учтем основной закон:

$$p = P(\rho),$$

тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - P'(\rho) (K \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B \cdot \nabla \rho. \quad (2.16)$$

Случай слабосжимаемых жидкостей. Имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\rho} = \kappa = \text{const} \ll 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - \frac{1}{\kappa \rho} (K(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.17)$$

Случай изоэнтропического течения газа. Имеем $p = c\rho^\gamma$ с удельной теплоемкостью $\gamma \geq 1$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - \gamma \rho^{\gamma-1} (K(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.18)$$

Замечание 2.4. Сравнение со стандартным уравнением пористой среды: при $m > 1$

$$u_t = \Delta(u^m) = \nabla \cdot (m u^{m-1} \nabla u) = m u^{m-1} \Delta u + m(m-1) u^{m-2} |\nabla u|^2.$$

Обратим внимание, что здесь член $|\nabla u|^2$ имеет положительный коэффициент $m(m-1)$, тогда как в нашей модели он имеет отрицательный коэффициент. Это серьезное отклонение от стандартных моделей. Авторы, по сути, не полностью могут объяснить эту особенность модели. Однако, поскольку вывод настолько естествен и прямолинеен, мы просто выдвигаем эту идею для изучения научным сообществом.

В следующих двух разделах мы сосредоточимся исключительно на математическом аспекте уравнения (2.16).

Предположение 2.4. Далее предположим, что τ фиксировано и достаточно мало, так что для всех t

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \rho(\tau, x, t + \tau) - \rho(\tau, x, t). \quad (2.19)$$

Более того, функция ρ является гладкой, а функция ϕ такова, что константы M и m удовлетворяют ограничениям

$$\left| \int \Delta^{2k+1} \phi(\Delta, \dots) \right| \ll \left| \int \Delta \phi(\Delta, \dots) \right| \quad \text{для всех } k \geq 1, \quad (2.20)$$

$$\left| \int \Delta^{2k} \phi(\Delta, \dots) \right| \ll \int \Delta^2 \phi(\Delta, \dots) \quad \text{для всех } k \geq 2. \quad (2.21)$$

При всех предположениях 2.4 из разложения Тейлора следует, что уравнение материального баланса Эйнштейна можно аппроксимировать в виде

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\sigma(x, t, \tau)}{2} (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \dots) + \vec{\Delta}_e(x, t, \tau) \cdot \nabla \rho. \quad (2.22)$$

Здесь

$$D = D(x, t, \tau) = \frac{1}{\tau} \frac{\sigma(x)}{2}, \quad (2.23)$$

$$\sigma(x, t, \tau) = \int \vec{\Delta} \cdot \vec{\Delta} \phi(\tau, \Delta, x, t) d\Delta, \quad (2.24)$$

$$\vec{\Delta}_e(x, t, \tau) = \int \vec{\Delta} \cdot \phi(\tau, \Delta, x, t) d\Delta. \quad (2.25)$$

Предположение 2.5. В общем случае функция плотности однокомпонентной однофазной жидкости зависит от давления и температуры. Здесь мы предполагаем, что жидкость изотермична и плотность ρ является функцией только давления p :

$$\rho = \rho(p), \quad (2.26)$$

тогда уравнение 2.22 примет вид

$$\rho_p \tau \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_p \cdot \frac{\sigma(x, t, \tau)}{2} \nabla \cdot \nabla p + \rho_{pp} \cdot \frac{\sigma(x, t, \tau)}{2} (\nabla p \cdot \nabla p) + \vec{\Delta}_e(x) \rho_p \cdot \nabla p. \quad (2.27)$$

2.4. Специальная линеаризация для класса уравнений в частных производных (2.27). Пусть

$$A(p) = \frac{\rho_{pp}}{\rho_p}. \quad (2.28)$$

Обратим внимание, что чисто математически имеется простое соотношение, позволяющее удалить член $|\nabla_x p|^2$ в уравнении (2.27). Другие коэффициенты (параметры) процесса, как можно увидеть, могут быть весьма нелинейными и зависеть от пространственных переменных.

Обозначим

$$D = D(x, t, \dots) = \frac{\sigma(x, t, \dots)}{2\tau} \neq 0 \quad \text{и} \quad b = \frac{\Delta_e}{\tau}. \quad (2.29)$$

Тогда уравнение (2.27) можно переписать в виде $L_0(p, p) = 0$:

$$L_0(p, \cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla(\cdot) - D A(p) \nabla(\cdot) \nabla(\cdot) - \vec{b} \cdot \nabla(\cdot). \quad (2.30)$$

Очевидно, гладкая функция $p(x, t)$ ($p \neq \text{const}$) является решением уравнения

$$L_0(p, p) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla p - \vec{b} \cdot \nabla p = D A(p) \nabla p \cdot \nabla p. \quad (2.31)$$

Пусть функция f такова, что

$$A(p) \frac{df(p)}{dp} - \frac{d^2 f(p)}{dp^2} = 0. \quad (2.32)$$

Тогда функция $u(x, t) = f(p(x, t))$ является решением квазилинейного уравнения

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u = 0 \quad (2.33)$$

тогда и только тогда, когда

$$L_0(p, p) = 0. \quad (2.34)$$

В общем случае, если

$$\int_0^p A(s) ds < \infty, \quad (2.35)$$

то мы имеем следующее представление u как решения при условии, что функция p является решением уравнения $L_0(p, p) = 0$:

$$u = f(p) = \exp \left(\int_0^p A(s) ds \right). \quad (2.36)$$

Например, если жидкость слабо сжимаема, то $u = Ce^{\kappa p}$ и $p = \frac{1}{\kappa} \ln u + \text{const}$. Здесь $p \geq 0$ и $u \geq 1$. Многие построения, которые используются далее в этой статье, хорошо работают для класса уравнений в частных производных, которые могут быть получены из результатов этого раздела 2.4. Сформулируем вышеприведенное наблюдение в терминах следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Предположим, что*

$$\int_0^p A(s) ds < \infty. \quad (2.37)$$

Пусть p является решением уравнения

$$L_0(p, p) = \frac{\partial p}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla p - DA(p) \nabla p \cdot \nabla p - \vec{b} \cdot \nabla p = 0. \quad (2.38)$$

Тогда функция

$$u = f(p) \quad (2.39)$$

является решением уравнения

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u = 0 \quad (2.40)$$

тогда и только тогда, когда

$$A(s) \frac{df(s)}{ds} - \frac{d^2 f(s)}{ds^2} = 0. \quad (2.41)$$

Доказательство. Пусть

$$u = f(p),$$

тогда доказательство теоремы следует из цепочки тождеств

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u &= \frac{df}{dp} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u \right] - D \frac{d^2 f}{dp^2} \cdot \nabla u \cdot \nabla u = \\ &= DA(p) \frac{df}{dp} \cdot (\nabla u \cdot \nabla u) - D \frac{d^2 f}{dp^2} \cdot (\nabla u \cdot \nabla u) = \left(A(p) \cdot \frac{df}{dp} - \frac{d^2 f}{dp^2} \right) \cdot D (\nabla u \cdot \nabla u). \end{aligned}$$

□

2.5. Уравнение Дарси для скорости без учета глобальных сил. В этом пункте мы, частично повторяя приведенные выше построения, наглядно устанавливаем связь между подходом Эйнштейна и классическим методом, основанным на уравнении непрерывности (см. [10]).

Предположим, что поле скоростей $\vec{b}$ подчиняется классическому уравнению Дарси без учета гравитации

$$\vec{b} = \vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2.42)$$

где k — проницаемость, а μ — вязкость.

Рассмотрим давление $p(x, t)$ как функцию плотности:

$$p = F_0(\rho) = \Phi^{-1}(\rho), \quad (2.43)$$

или как функцию от вспомогательной функции u :

$$p = F(u) = f^{-1}(u). \quad (2.44)$$

Тогда функция давления $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla p - \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla p = DA(p) \nabla p \cdot \nabla p. \quad (2.45)$$

Мы доказали в теореме 2.1, что уравнение для давления можно свести к уравнению для математической функции u , определенной в (2.39). Когда мы говорим «математическая функция», мы имеем в виду, что она не имеет физического смысла.

Тогда это уравнение примет вид

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \frac{1}{\frac{df}{dp}|_{p=F(u)}} \nabla u \cdot \nabla u = 0. \quad (2.46)$$

Перепишем уравнение (2.46) в коэффициентной форме

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - B(u) \nabla u \cdot \nabla u = 0. \quad (2.47)$$

Здесь $B(u)$ определяется как структурная функция

$$B(u) = \frac{1}{\frac{df}{dp}|_{p=F(u)}}. \quad (2.48)$$

Теорема 2.2. *Предположим, что u является ограниченным решением квазилинейного уравнения (2.47). Тогда $w(x, t) = W(u)$ является функцией от (x, t) , где $W(u)$ является функцией от u , а также удовлетворяет уравнению диффузии*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D \nabla^2 w = 0 \quad (2.49)$$

тогда и только тогда, когда $W(u)$ является решением уравнения

$$B(u) \frac{dW}{du} - D \frac{d^2 W}{du^2} = 0. \quad (2.50)$$

Доказательство. Доказательство следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla W &= \frac{dW}{du} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dW}{du} D \nabla \cdot \nabla u - \frac{d^2 W}{du^2} D \nabla u \cdot \nabla u = \\ &= (\nabla u \cdot \nabla u) B(u) \frac{dW}{du} - \frac{d^2 W}{du^2} D (\nabla u \cdot \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u \left[B(u) \frac{dW}{du} - \frac{d^2 W}{du^2} D \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Тогда утверждение теоремы следует из предположения, что $W(u)$ является решением уравнения (2.50). $\square$

3. ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК В НАПРАВЛЕНИИ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ ПСЕВДОСТАЦИОНАРНЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ

Мы показали, что моделирование потоков жидкости в пористых средах после линеаризации может быть сведено к линейному параболическому уравнению. Это позволяет нам применить аппарат, разработанный в [7]. Предположим, что $D = 1$, тогда моделирование течения к трещине качественно можно считать одномерным. Благодаря сведению к линейному параболическому уравнению мы можем рассматривать дискретизацию области потока вблизи трещины как одномерную сетку. Мы введем два типа процессов: стационарное состояние (СС) и псевдостационарное состояние (ПСС). Модельную задачу стационарного состояния в области течения можно записать как

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p = 0 \quad \text{в области } U \quad (3.1)$$

с граничными условиями для модельного случая: скорость добычи на трещине $x = 0$ равна 1, а давление $p(x) = u(x)$ на внешней границе области задано. Краевая задача может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad \text{в области } U. \quad (3.2)$$

Здесь $U = [0, R_e]$, и соответствующие краевые условия для уравнения (3.2) имеют вид

$$u(R_e) = p_e, \quad (3.3)$$

$$u_x = -1. \quad (3.4)$$

Тогда решение краевой задачи получим в форме

$$u(x) = -x + p_e. \quad (3.5)$$

Уравнение материального баланса в случае стационарного состояния записывается в виде

$$MB_{ss}(p) = \frac{p(\frac{\Delta}{2}) - 2p(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + p(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = 0, \quad (3.6)$$

то есть

$$\frac{p(\frac{\Delta}{2}) - 2p(\frac{3\Delta}{2}) + p(\frac{5\Delta}{2})}{\Delta^2} = 0. \quad (3.7)$$

В случае стационарного состояния цель состоит в том, чтобы найти R_0^{ss} такое, чтобы решение задачи (3.2)–(3.4) удовлетворяло материальному балансу вида

$$\frac{u(R_0^{ss}) - 2u(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + u(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что для одномерного случая в силу уравнения (3.5)

$$R_0^{ss} = \frac{\Delta}{2}. \quad (3.9)$$

Очевидно, что случай стационарного состояния не учитывает интерференцию между трещинами, поэтому требуется более точная интерпретация потока в направлении множественных трещин. По-видимому, это может быть учтено так называемым псевдостационарным режимом добычи, когда в «середине» между двумя продуктивными трещинами как источниками поток отсутствует. В этом случае уравнение аналитической задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w = \frac{1}{R_e} \quad \text{в области } U. \quad (3.10)$$

Здесь $U = [0, R_e]$, и соответствующие краевые условия для уравнения (3.2) примут вид

$$w_x \Big|_{x=R_e} = 0, \quad (3.11)$$

$$w_x \Big|_{x=0} = -1. \quad (3.12)$$

Уравнение материального баланса для случая ПСС в терминах конечно-разностной аппроксимации с учетом геометрии течения принимает вид

$$MB_{pss}(p) = \frac{p(\frac{\Delta}{2}) - 2p(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + p(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = \alpha \frac{1}{R_e}. \quad (3.13)$$

Подчеркнем еще раз, что конечно-разностное уравнение материального баланса не включает граничные данные, считается фиксированным для любой Δ и сходится к аналитическому решению при $\Delta \rightarrow 0$. Решение в случае ПСС по определению ищется для уравнения в области течения с конкретным граничным условием, и поэтому имеет вид

$$w(x) = Ax^2 + Bx, \quad (3.14)$$

где

$$A = \frac{1}{2R_e}, \quad (3.15)$$

$$\frac{B}{A} = -2R_e, \quad B = -1. \quad (3.16)$$

И снова, как и в случае стационарного состояния, задача ставится следующим образом:

В случае псевдостационарного состояния требуется найти R_0^{pss} такое, что стационарная часть ПСС является решением

$$\frac{w(R_{(0,pss)}) - 2w(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + w(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = \alpha \frac{1}{R_e}. \quad (3.17)$$

Учитывая (3.14), получим

$$A \cdot (R_{(0,pss)})^2 + B \cdot (R_{(0,pss)}) - 2 \left(A \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + B \frac{3\Delta}{2} \right) + A \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + B \left(\frac{5\Delta}{2} \right) = \alpha \frac{\Delta^2}{R_e}. \quad (3.18)$$

Принимая во внимание (3.16), отсюда будем иметь

$$-\frac{1}{2R_e} (R_{(0,pss)})^2 + R_{(0,pss)} - 2 \left(-\frac{1}{2R_e} \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \right) - \frac{1}{2R_e} \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{5\Delta}{2} \right) + \alpha \frac{\Delta^2}{1 \cdot R_e} = 0. \quad (3.19)$$

По сути, мы имеем квадратное уравнение относительно $x = R_{(0,pss)}$:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (3.20)$$

где

$$a = -\frac{1}{2R_e}, \quad (3.21)$$

$$b = \frac{1}{1} = 1, \quad (3.22)$$

$$c = -2 \left(-\frac{1}{2R_e} \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \right) - \frac{1}{2R_e} \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{5\Delta}{2} \right) + \alpha \frac{\Delta^2}{1 \cdot R_e}. \quad (3.23)$$

Следовательно, корень можно представить в виде

$$x = R_{(0,pss)} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -R_e \cdot \left[-1 + \sqrt{D(\alpha, R_e, \Delta)} \right]. \quad (3.24)$$

Здесь дискриминант выражается как

$$\begin{aligned} D(\alpha, R_e, \Delta) &= 1 - 4 \frac{1}{-2R_e} \left[-2 \left(-\frac{1}{2R_e} \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \right) - \frac{1}{2R_e} \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + \frac{5\Delta}{2} + \alpha \frac{\Delta^2}{R_e} \right] = \\ &= 1 - \Delta \cdot R_e + \frac{\Delta^2}{4} (8\alpha - 7). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.1.

$$R_{(0,ps)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \frac{\Delta^2}{4R_e}(8\alpha - 7)}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta}{R_e} + \frac{\Delta^2}{4R_e^2}(8\alpha - 7)}}, & \alpha \neq 1; \\ \frac{\Delta}{2}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Замечание 3.1. Отметим, что уравнение материального баланса Эйнштейна не связано с граничными условиями, поэтому константа α в (3.17) не связана с граничным условием.

В заключение отметим, что в этой работе можно использовать ПСС-решение для интерпретации величины давления в точках блока, содержащего трещину, и в отличие от СС-решения оно будет учитывать влияние расстояния на величину давления. Это имеет решающее значение для более точной оценки результата численного моделирования процесса гидрогенизационного восстановления на основе качественной картины потоков вблизи источника добычи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronson D. G. The porous medium equation// В сб.: «Nonlinear Diffusion Problems». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1986. — С. 1–46.
2. Aulisa E., Bloshanskaya L., Ibragimov A. Well productivity index for compressible fluids and gases// Evol. Equ. Control Theory. — 2016. — 5, № 1. — С. 1–36.
3. Dake L. P. Fundamentals of Reservoir Engineering. — Amsterdam–London–New York–Tokyo: Elsevier, 1985.
4. Ding Y., Renard G., Weill L. Representation of wells in numerical reservoir simulation// SPE Reservoir Eval. Engrg. — 1998. — 1, № 1. — С. 18–23.
5. A. Einstein Über die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flussigkeiten suspendierten teilchen// Ann. Phys. Leipzig. — 1905. — 322. — С. 549–560.
6. L. Hoang, A. Ibragimov A class of anisotropic diffusion-transport equations in non-divergence form// ArXiv. — 2025. — 2503.03089.
7. Ibragimov A., Khalmanova D., Valko P. P., Walton J. R. On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering// SIAM J. Appl. Math. — 2005. — 65. — С. 1952–1980.
8. A. Ibragimov, Z. Sobol, I. Hevage Einstein's model of "the movement of small particles in a stationary liquid" revisited: finite propagation speed// Turkish J. Math. — 2023. — 47, № 3. — С. 934–948.
9. A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, D. Anikeev Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well// Appl. Comput. Math. — 2024. — 23, № 1. — С. 53–69.
10. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. — Oxford: Pergamon Press, 1987.
11. W. Liu, Ch. Liu, Ya. Duan, X. Yan, Yu. Sun, H. Sun Fracture spacing optimization method for multi-stage fractured horizontal wells in shale oil reservoir based on dynamic production data analysis// Energies. — 2023. — 16, № 24. — 7922.
12. Naz R., Alsaedi A., Hayat T. Flow of fourth grade fluid in a porous medium// Appl. Comput. Math. — 2015. — 14, № 2. — С. 125–140.
13. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation// Soc. Petr. Engrg. J. — 1978. — 18, № 3. — С. 183–194.
14. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability// Soc. Petr. Engrg. J. — 1983. — 23, № 3. — С. 531–543.
15. Peaceman D. W. Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation// SPE Adv. Tech. Ser. — 1993. — 1, № 1. — С. 7–16.
16. Rubin Y. Transport in heterogeneous porous media: Prediction uncertainty// Water Resources Res. — 1991. — 27, № 7. — С. 1723–1738.
17. Skorokhod A. Basic principles and applications of probability theory. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2005.
18. Wang F., Landau D. P. Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states// Phys. Rev. Lett. — 2001. — 86, № 10. — С. 2050–2053.
19. U. Zimmermann, H. Schneider, L. H. Wegner, A. Haase Water ascent in tall trees: does evolution of land plants rely on a highly metastable state?// New Phytologist. — 2004. — 162. — С. 575–615.
20. Eclipse Reference Manual, 96A Release. — Schlumberger: GeoQuest, 1996.
21. STARS user's guide, version 2015. — Calgary: Computer Modeling Group, 2015.
22. tNavigator User Manual, 21.1 Release. — RFD, 2021.

А. И. Ибрагимов
 Texas Tech University, Lubbock, USA
 Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
 E-mail: ilya1sergey@gmail.com

Е. М. Варфоломеев
 Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
 E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Э. С. Закиров
 Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
 E-mail: ezakirov@ogri.ru

UDC 517.958+519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124

EDN: UIYIPG

On the stitching of analytical and numerical solutions of the problem on a virtual boundary with the dominance of flow geometry in a bounded domain

A. I. Ibragimov, E. M. Varfolomeev, E. S. Zakirov

Abstract. We are studying the following inverse PDE problem: to find geometric parameter of the domain of the time-dependent problem that match numerical one. Important feature is that discretization box of the interest contains source (fractures) generating transport in the porous media. From industrial point of view, we are building a machinery of the sewing the simulated pressure in the reservoir with analytical one. The goal is to obtain the value of the pressure function on the fracture (or near fracture) depending on the distance between multiple fractures (cf. [14]). For that, we generalize Einstein's probabilistic method (see [5]) for the Brownian motion to study the fluids transport in porous media. We generalize Einstein's paradigm to relate the average changes in the fluid density with the velocity of fluid and derive an anisotropic diffusion equation in nondivergence form that contains a convection term. This is then combined with the Darcy and the constitutive laws for compressible fluid flows to yield a nonlinear partial differential equations for the density function. Bernstein's transformation is used to reduce the original nonlinear problem to the linear one. The method which we employ allow us to use a steady state analytical solution to interpret the result of numerical time-dependent pressure function on the fracture which takes into account 1-D geometry of the flow towards "long" fracture.

Keywords: flow in porous media, Einstein material balance, Peaceman well block radius, parabolic equation in nondivergence form.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. I. Ibragimov, E. M. Varfolomeev, E. S. Zakirov, "On the stitching of analytical and numerical solutions of the problem on a virtual boundary with the dominance of flow geometry in a bounded domain," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 1, 110–124. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124>

REFERENCES

1. D. G. Aronson, “The porous medium equation,” In: *Nonlinear Diffusion Problems*, Springer, Berlin–Heidelberg, pp. 1–46, 1986.
2. E. Aulisa, L. Bloshanskaya, and A. Ibragimov, “Well productivity index for compressible fluids and gases,” *Evol. Equ. Control Theory*, 2016, **5**, No. 1, 1–36.
3. L. P. Dake, *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier, Amsterdam–London–New York–Tokyo, 1985.
4. Y. Ding, G. Renard, and L. Weill, “Representation of wells in numerical reservoir simulation,” *SPE Reservoir Eval. Engrg.*, 1998, **1**, No. 1, 18–23.
5. A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen,” *Ann. Phys. Leipzig*, 1905, **322**, 549–560.
6. L. Hoang and A. Ibragimov, “A class of anisotropic diffusion-transport equations in non-divergence form,” *ArXiv*, 2025, 2503.03089.
7. A. Ibragimov, D. Khalmanova, P. P. Valko, and J. R. Walton, “On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, **65**, 1952–1980.
8. A. Ibragimov, Z. Sobol, and I. Hevage, “Einstein’s model of “the movement of small particles in a stationary liquid” revisited: finite propagation speed,” *Turkish J. Math.*, 2023, **47**, No. 3, 934–948.
9. A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, and D. Anikeev, “Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well,” *Appl. Comput. Math.*, 2024, **23**, No. 1, 53–69.
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1987.
11. W. Liu, Ch. Liu, Ya. Duan, X. Yan, Yu. Sun, and H. Sun, “Fracture spacing optimization method for multi-stage fractured horizontal wells in shale oil reservoir based on dynamic production data analysis,” *Energies*, 2023, **16**, No. 24, 7922.
12. R. Naz, A. Alsaedi, and T. Hayat, “Flow of fourth grade fluid in a porous medium,” *Appl. Comput. Math.*, 2015, **14**, No. 2, 125–140.
13. D. W. Peaceman, “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation,” *Soc. Petr. Engrg. J.*, 1978, **18**, No. 3, 183–194.
14. D. W. Peaceman, “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability,” *Soc. Petr. Engrg. J.*, 1983, **23**, No. 3, 531–543.
15. D. W. Peaceman, “Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation,” *SPE Adv. Tech. Ser.*, 1993, **1**, No. 1, 7–16.
16. Y. Rubin, “Transport in heterogeneous porous media: Prediction uncertainty,” *Water Resources Res.*, 1991, **27**, No. 7, 1723–1738.
17. A. Skorokhod, *Basic Principles and Applications of Probability Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
18. F. Wang and D. P. Landau, “Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states,” *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**, No. 10, 2050–2053.
19. U. Zimmermann, H. Schneider, L. H. Wegner, and A. Haase, “Water ascent in tall trees: does evolution of land plants rely on a highly metastable state?” *New Phytologist*, 2004, **162**, 575–615.
20. *Eclipse Reference Manual, 96A Release*, GeoQuest, Schlumberger, 1996.
21. *STARS user’s guide, version 2015*, Computer Modeling Group, Calgary, 2015.
22. *tNavigator User Manual, 21.1 Release*, RFD, 2021.

A. I. Ibragimov

Texas Tech University, Lubbock, USA

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ilya1sergey@gmail.com

E. M. Varfolomeev

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

E. S. Zakirov

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ezakirov@ogri.ru

УДК 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146

EDN: UQKNFN

ЛОКАЛЬНЫЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. М. КОЖЕВНИКОВА^{1,2}¹Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия²Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия

Аннотация. В работе рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с переменными показателями нелинейностей и локально суммируемой правой частью. Установлено свойство устойчивости и как следствие доказано существование локального ренормализованного решения задачи Дирихле в произвольной неограниченной области.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, переменный показатель роста, неограниченная область, задача Дирихле, устойчивость решения, локальное ренормализованное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. М. Кожевникова. Локальные ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями в неограниченных областях // Соврем. мат. Фундамент. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 125–146. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146>

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с переменным ростом и локально суммируемой функцией f рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u) = f, \quad x \in \Omega, \quad (0.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.2)$$

Понятие ренормализованных решений является мощным инструментом для изучения широких классов вырождающихся эллиптических уравнений с данными в виде меры. Первоначальное определение приведено в работе [6] для уравнения

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) = \mu \quad (0.3)$$

и распространено М.-Ф. Бидо-Верон [4] в локальную и очень полезную форму для уравнения с p -лапласианом, поглощением и мерой Радона μ :

$$-\Delta_p u + |u|^{p_0-2} u = \mu, \quad p \in (1, n), \quad 0 < p-1 < p_0. \quad (0.4)$$

В частности, М.-Ф. Бидо-Верон доказала существование в пространстве $\mathbb{R}^n$ локального ренормализованного решения уравнения (0.4) с $\mu \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. В монографии [13] Л. Верон обобщил понятие локального ренормализованного решения для уравнения со степенными нелинейностями вида

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = \mu.$$

Следует отметить, что в работе [10] доказана эквивалентность α -супергармонических функций и локально ренормализованных решений уравнения (0.3) в случае неотрицательных мер Радона μ .

В настоящей работе понятие локального ренормализованного решения адаптируется на уравнение (0.1) с переменными показателями роста. В качестве примера можно привести уравнение

$$-\Delta_{p(x)} u + |u|^{p_0(x)-2} u = f, \quad 0 < p(\cdot) - 1 < p_0(\cdot), \quad f \in L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega}).$$

Автором установлено свойство устойчивости локальных ренормализованных решений задачи (0.1), (0.2). Следствием результата устойчивости является теорема существования локального ренормализованного решения задачи (0.1), (0.2) в произвольной неограниченной области Ω .

1. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА, СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории пространств с переменными показателями. Пусть $Q \subseteq \Omega$ (Q может совпадать с Ω).

Обозначим

$$L_{\infty}^{+}(Q) = \{p \in L_{\infty}(Q) \mid 1 \leq p_{-} \leq p_{+} < +\infty\},$$

где $p_{-} = \operatorname{vrai} \inf_{x \in Q} p(x)$, $p_{+} = \operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} p(x)$. Пусть $p(\cdot) \in L_{\infty}^{+}(Q)$, определим лебегово пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ с переменным показателем как множество измеримых на Q вещественнозначных функций v таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int_Q |v(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot),Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leq 1 \right\}.$$

Для $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ справедливы следующие соотношения:

$$\|v\|_{p(\cdot),Q}^{p_{-}} - 1 \leq \rho_{p(\cdot),Q}(v) \leq \|v\|_{p(\cdot),Q}^{p_{+}} + 1.$$

Ввиду выпуклости имеет место неравенство:

$$|y + z|^{p(x)} \leq 2^{p_{+}-1}(|y|^{p(x)} + |z|^{p(x)}), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q. \quad (1.1)$$

При $p_{-} > 1$ справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq |y|^{p(x)} + |z|^{p'(x)}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad p'(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot) - 1}, \quad x \in Q, \quad (1.2)$$

и неравенство Гельдера

$$\left| \int_Q u(x)v(x) dx \right| \leq 2 \|u\|_{p'(\cdot),Q} \|v\|_{p(\cdot),Q}, \quad u \in L_{p'(\cdot)}(Q), \quad v \in L_{p(\cdot)}(Q). \quad (1.3)$$

Определим пространство Соболева с переменным показателем

$$W_{p(\cdot)}^1(Q) = \{v \in L_{p(\cdot)}(Q) \mid |\nabla v| \in L_{p(\cdot)}(Q)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{p(\cdot),Q}^1 = \|v\|_{p(\cdot),Q} + \|\nabla v\|_{p(\cdot),Q}.$$

Пространство $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$ определим как пополнение пространства $C_0^{\infty}(Q)$ по норме $\|\cdot\|_{W_{p(\cdot)}^1(Q)}$. Пространства $L_{p(\cdot)}(Q)$, $W_{p(\cdot)}^1(Q)$, $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$ являются сепарабельными, банаховыми и рефлексивными для $p_{-} > 1$ (см. [7, Ch. 3, §3.2, §3.4, §8.1]).

Интересная особенность пространства Соболева с переменным показателем

$$\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q) = \{v \in \dot{W}_1^1(Q) : \rho_{p(\cdot), Q}(|\nabla v|) < \infty\}$$

заключается в том, что гладкие функции не плотны в нем без дополнительных предположений о степени $p(\cdot)$. Это было отмечено В. В. Жиковым [2] в связи с эффектом Лаврентьева. Однако, если модуль непрерывности показателя $p(\cdot)$ удовлетворяет логарифмическому условию:

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{K}{\ln|x - y|}, \quad x, y \in Q, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2},$$

то гладкие функции плотны в пространстве $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$.

В настоящей работе предполагаем, что $p \in C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) \mid 1 < p_- \leq p_+ < +\infty\}$, где $p_- = \inf_{x \in \overline{Q}} p(x)$, $p_+ = \sup_{x \in \overline{Q}} p(x)$. Для двух ограниченных функций $q(\cdot), r(\cdot) \in C(\overline{Q})$ будем писать $q(\cdot) < r(\cdot)$, если $\inf_{x \in \overline{Q}} (r(x) - q(x)) > 0$.

Лемма 1.1 (см. [8]). Пусть Q ограничена, $p(\cdot), q(\cdot) \in C^+(\overline{Q})$, $p_+ < n$, $q(\cdot) < p^*(\cdot) = \frac{np(\cdot)}{n - p(\cdot)}$. Тогда имеет место непрерывное и компактное вложение $W_{p(\cdot)}^1(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ

Условие P. Предполагаем, что функции

$$a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s)) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(x, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (0.1), каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательная функция $\Phi \in L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$, для всех $s, t \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|a(x, s)| \leq \widehat{a} \left(|s|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right); \quad (2.1)$$

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) > 0, \quad s \neq t; \quad (2.2)$$

$$a(x, s) \cdot s \geq \overline{a} |s|^{p(x)}. \quad (2.3)$$

Здесь $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Кроме того, пусть существуют неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, положительное число $\overline{b}$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

$$|b(x, s_0)| \leq \widehat{b}(|s_0|) \Phi_0(x); \quad (2.4)$$

$$b(x, s_0) s_0 \geq \overline{b} |s_0|^{p_0(x)+1}, \quad p(\cdot) - 1 < p_0(\cdot). \quad (2.5)$$

При этом предполагаем, что функции $p, p_0 \in C^+(\overline{\Omega})$ и $p_+ < n$.

Следуя [3, 12], введем обозначения: $q_0(\cdot) = \frac{p^*(\cdot)}{p'_+}$, $q_3(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{p(\cdot) - 1}$, $q_1(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot) + 1} p(\cdot)$, $q_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot) + 1} p'(\cdot)$, $q_4(\cdot) = \frac{p_0(\cdot)}{1 + p_0(\cdot)} p'(\cdot)$, где $p'_+ = \frac{p_-}{p_- - 1}$. Пусть выполнено дополнительное условие

$$p(\cdot) - 1 < q_0(\cdot). \quad (2.6)$$

Тогда можно определить $q'_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot) p(\cdot)}{q_0(\cdot) + 1 - p(\cdot)}$.

Определим срезку $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\text{Lip}_0(\mathbb{R})$ обозначим пространство всех липшицевых непрерывных функций на $\mathbb{R}$, производная которых имеет компактный носитель.

Определение 2.1. Пусть область Ω ограничена. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_1(\Omega)$, если выполняются следующие условия:

а) $T_k(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$ при любом $k > 0$;

- b) $b(x, u) \in L_1(\Omega)$;
- c) $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$, $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$;
- d) $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$, $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$;
- e) для любой функции $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и любой $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$, такой, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, имеем

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f)h(u)\varphi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla \varphi h(u))dx = 0. \quad (2.7)$$

Определим $L_{\infty, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $\dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ как пространства, состоящие из функций v , определенных в Ω , для которых при любой ограниченной $Q \subsetneq \Omega$ имеет место принадлежность $v \in L_{\infty}(Q)$, $L_1(Q)$, $\dot{V}_{p(\cdot)}^1(Q) = \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap W_{p(\cdot)}^1(Q)$, соответственно.

Определение 2.1-loc. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локальным ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, если выполняются следующие условия:

- a-loc) $T_k(u) \in \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ при любом $k > 0$;
- b-loc) $b(x, u) \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$;
- c-loc) $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$;
- d-loc) $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$;
- e-loc) для любой функции $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и любой $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ с компактным носителем такой, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, справедливо тождество (2.7).

Отметим, что в работе [3] впервые для уравнения с $p(\cdot)$ -ростом было сформулировано определение ренормализованного решения и доказано его существование.

Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2). Для любого $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega: |u| \leq k\}} \nabla u \in (L_{p(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n. \quad (2.8)$$

Применяя (1.1), из неравенства (2.1) выводим оценку:

$$|a(x, s)|^{p'(x)} \leq \hat{A}|s|^{p(x)} + \Psi(x) \quad (2.1')$$

с неотрицательной функцией $\Psi \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$. Из (2.8), (2.1') следует, что для любого $k > 0$

$$\chi_{\{\Omega: |u| \leq k\}} a(x, \nabla u) = \chi_{\{\Omega: |u| \leq k\}} a(x, \nabla T_k(u)) \in (L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n. \quad (2.9)$$

Замечание 2.1. Каждый интеграл в (2.7) корректно определен. Пусть $\text{supp } \varphi \cap \Omega = K$. Несложно проверить, что $q_2'(\cdot) \geq n$, поэтому справедливы вложения $W_{r(\cdot)}^1(K) \subset W_{q_2(\cdot)}^1(K) \subset W_n^1(K) \subset C(\overline{K})$. Действительно, первое слагаемое конечно благодаря условию b-loc), $f \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ и принадлежности $h(u)\varphi \in L_{\infty}(K)$. Поскольку $\text{supp } h' \subseteq [-M, M]$ для некоторого $M > 0$, то второе слагаемое может быть записано в виде

$$\int_K a(x, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla \varphi h(u))dx = \int_K a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u) h'(u)\varphi dx + \int_K a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u)dx.$$

Благодаря (2.8), (2.9) и принадлежности $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in C(\overline{K})$ первый интеграл определен и конечен. Поскольку $a(x, \nabla u) \in (L_{q(\cdot)}(K))^n$ для любого $q(\cdot) < q_2(\cdot)$ и $\nabla \varphi \in (L_{r(\cdot)}(K))^n$ для любого $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$, получаем, что произведение $a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u)$ интегрируемо в K .

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия P , последовательность функций $\{f_{\xi}\}_{\xi \in \mathbb{N}} \subset L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ сходится к f в $L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, и $\{u_{\xi}\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ — последовательность локальных ренормализованных решений задачи

$$-\text{div } a(x, \nabla u) + b(x, u) = f_{\xi}, \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

с краевым условием (0.2). Тогда существует подпоследовательность последовательности $\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ (обозначим ее так же), сходящаяся почти всюду к локальному ренормализованному решению задачи (0.1), (0.2).

Следствием теоремы 2.1 является теорема 2.2.

Теорема 2.2. Пусть $f \in L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega})$, выполнены условия P , тогда существует локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2).

В работе [11] в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрено нелинейное анизотропное эллиптическое уравнение вида (0.1) с переменными показателями нелинейностей и локально интегрируемой функцией f . Ф. Мохтари доказано существование локального слабого решения u уравнения (0.1) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для сравнения сформулируем результат регулярности градиента для изотропного уравнения. При дополнительном ограничении $p(\cdot) > 2 - 1/n$ установлена локальная суммируемость ∇u с показателем $1 \leq q(\cdot) < \frac{(p(\cdot) - 1)n}{n - 1}$, а также при дополнительном ограничении $p(\cdot) > 1 + 1/p_0(\cdot)$ установлена локальная суммируемость ∇u с показателем $1 \leq q(\cdot) < \frac{p_0(\cdot)p(\cdot)}{1 + p_0(\cdot)} = q_4(\cdot)(p(\cdot) - 1)$. Заметим, что в настоящей работе аналогичные оценки установлены в утверждении 3.2 (см. (3.17)), причем оценка с показателем $q_4(\cdot)$ получена без дополнительных ограничений.

3. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Меру Лебега измеримого множества Q будем обозначать $\text{meas}(Q)$. Через $D^+(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с положительными значениями внутри компактного носителя. Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Утверждение 3.1. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), положим $\hat{R}_0 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \frac{p_0(x)p(x)}{p_0(x) + 1 - p(x)}$. Тогда для любых $\alpha < 0$, $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ справедливы оценки

$$\int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx \leq C_1 \left(\int_{\Omega} (1 + \Phi^{p'(x)} + |f|) \phi^R dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi|^R dx \right), \quad R > \hat{R}_0, \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx \leq C_2 \left(\int_{\Omega} (1 + \Phi^{p'(x)} + |f|) \phi^R dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi|^R dx \right), \quad R > \hat{R}_0, \quad (3.2)$$

с постоянными $C_1(\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, n, R, \sup \phi, p, p_0)$, $C_2(\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, \alpha, n, R, \sup \phi, p, p_0)$, не зависящими от u .

Доказательство. Пусть $\rho > 0$, $\alpha < 0$ и $h(\varrho) = (1 - (|\varrho| + 1)^\alpha) \text{sign } \varrho$, $h_\rho(\varrho) = h(T_\rho(\varrho))$, $\varrho \in \mathbb{R}$, тогда $h'_\rho(\varrho) = |\alpha| (|T_\rho(\varrho)| + 1)^{\alpha-1} \chi_{\{|\varrho| < \rho\}}$. Положив в (2.7) $h = h_\rho$, применяя оценку (2.1), для $\varphi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ будем иметь

$$\begin{aligned} & |\alpha| \int_{\Omega} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_\rho(u) \varphi dx + \int_{\Omega} b(x, u) \varphi h_\rho(u) dx = \\ & = - \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h_\rho(u) dx + \int_{\Omega} \varphi f h_\rho(u) dx \leq \\ & \leq \hat{a} \int_{\Omega} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx + \int_{\{\Omega: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx + \hat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, используя (1.2), выводим

$$I = \hat{a} \int_{\Omega} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx \leq \frac{|\alpha| \bar{a}}{2} \int_{\Omega} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} \varphi dx +$$

$$+ C_3(\alpha, \widehat{a}, \overline{a}) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p(x)} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{(1-\alpha)(p(x)-1)} \varphi^{1-p(x)} dx.$$

Положим $-\alpha^* = \inf_{\Omega} \frac{p_0(x)}{p(x)-1} - 1 > 0$ и $\tau_{\alpha}(x) = \frac{p_0(x)}{(p(x)-1)(1-\alpha)} > 1$ для $\alpha \in (\alpha^*, 0)$. Снова применяя (1.2), получаем

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{|\alpha| \overline{a}}{2} \int_{\Omega} |\nabla T_{\rho}(u)|^{p(x)} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{\alpha-1} \varphi dx + \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4(\varepsilon, \alpha, \widehat{a}, \overline{a}) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p(x)} \tau'_{\alpha}(x) \varphi^{1-p(x)} \tau'_{\alpha}(x) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соединяя (3.3), (3.4), применяя (2.3), (2.5), выводим неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{\alpha-1} |\nabla T_{\rho}(u)|^{p(x)} \varphi dx + \int_{\Omega} |b(x, u)| \varphi |h_{\rho}(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p(x)} \tau'_{\alpha}(x) \varphi^{1-p(x)} \tau'_{\alpha}(x) dx + \\ &+ \int_{\{\Omega: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx + \widehat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ввиду условия c-loc $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx = 0. \quad (3.6)$$

Выполняя предельный переход при $\rho \rightarrow \infty$ в (3.5) с учетом (3.6), устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \varphi dx + \int_{\Omega} |b(x, u)| \varphi |h(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4 \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla \varphi|}{\varphi} \right)^{p(x) \tau'_{\alpha}(x)} \varphi dx + \widehat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned}$$

Применяя (2.5), выводим

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \varphi dx + \overline{b} \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \varphi |h(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4 \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla \varphi|}{\varphi} \right)^{p(x) \tau'_{\alpha}(x)} \varphi dx + \widehat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для $\alpha \in (\alpha^*, 0]$ рассмотрим функцию $R_{\alpha}(x) = \frac{p_0(x)p(x)}{p_0(x) + 1 - p(x) + \alpha(p(x) - 1)} : K \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $K = \text{supp } \varphi \cap \Omega$. Обозначим $\widehat{R}_{\alpha} = \max_{x \in K} R_{\alpha}(x)$. Очевидно, $\widehat{R}_{\alpha}$ непрерывна, монотонно не возрастает по $\alpha \in (\alpha^*, 0]$ и ограничена снизу $\widehat{R}_0$. Для любого $\alpha \in (\alpha^*, 0)$ найдем $\widehat{R}_{\alpha}$ и зафиксируем $R > \widehat{R}_{\alpha}$.

Положим $\varphi = \phi^R$, тогда из (3.7) следует неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx + \overline{b} \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \phi^R |h(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx + C_4 \int_{\Omega} (\phi^R + R^R |\nabla \phi|^R) dx + \widehat{a} R \int_{\Omega} \Phi |\nabla \phi| \phi^{R-1} dx + \int_{\Omega} \phi^R |f| dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее, применяя неравенство (1.2), пользуясь очевидным неравенством $R' < p'(x)$, устанавливаем

$$R \int_{\Omega} \Phi |\nabla \phi| \phi^{R-1} dx \leq \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \Phi^{R'} \phi^R \right) dx \leq \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \Phi^{p'(x)} \phi^R + \phi^R \right) dx. \quad (3.9)$$

Соединяя (3.8), (3.9), устанавливаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx + \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \phi^R |h(u)| dx \leq \\ & \leq \varepsilon C_5 \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx + C_6 \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \phi^R (1 + |f| + \Phi^{p'(x)}) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для $|u| \geq 1$ справедлива оценка $|h(u)| = 1 - (|u| + 1)^{\alpha} \geq 1 - 2^{\alpha} > 0$. Тогда имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx \leq 2^{p_0+1} \int_{\Omega} (|u|^{p_0(x)} + 1) \phi^R dx \leq \\ & \leq 2^{p_0+} \int_{\{ \Omega: |u| \geq 1 \}} |u|^{p_0(x)} \phi^R dx + 2^{p_0+} \int_{\{ \Omega: |u| < 1 \}} \phi^R dx \leq \frac{2^{p_0+}}{1 - 2^{\alpha}} \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \phi^R |h(u)| dx + 2^{p_0+} \int_{\Omega} \phi^R dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Соединяя (3.10), (3.11), выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx + \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx \leq \\ & \leq C_7 \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \phi^R (1 + |f| + \Phi^{p'(x)}) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Отсюда следует неравенство (3.1) и неравенство (3.2) для $\alpha \in (\alpha^*, 0)$; для $\alpha \leq \alpha^*$ неравенство (3.2) также справедливо. $\square$

Введем обозначения: $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$, $\Omega(r) = \Omega \cap B(r)$, $r > 0$. Будем рассматривать срезающую функцию $\phi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$: $\phi_r(\varrho) = 0$ при $\varrho > r + 1$ и $\phi_r(\varrho) = 1$ при $0 \leq \varrho \leq r$.

Утверждение 3.2. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), тогда для любых $r, k > 0$ верны оценки

$$\int_{\Omega(r)} (|u| + 1)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega(r)} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_2(\alpha), \quad \alpha < 0, \quad (3.14)$$

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u| \geq k\}) \leq D_1 k^{-p_0-}. \quad (3.15)$$

Кроме того, $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{s(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq s(\cdot) < q_3(\cdot)$, и справедлива оценка

$$\int_{\Omega(r)} |u|^{(p(x)-1)s(x)} dx \leq D_3; \quad (3.16)$$

$|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{\sigma(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq \sigma(\cdot) < q_2(\cdot)$, и справедлива оценка

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla u|^{(p(x)-1)\sigma(x)} dx \leq D_4, \quad (3.17)$$

а также $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{\sigma(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq \sigma(\cdot) < q_4(\cdot)$, и справедлива оценка (3.17).

Здесь константы $D_1 - D_4$, зависят от N , где N — набор $\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, n, \Omega(r+1), p, p_0, \|\Phi\|_{p'(\cdot), \Omega(r+1)}, \|f\|_{1, \Omega(r+1)}$, не зависящий от u .

Доказательство. Перепишем оценки (3.1), (3.2) с $\phi(x) = \phi_r(|x|)$ и фиксированным R , получим неравенства: (3.13), (3.14). Из оценки (3.13) следует неравенство (3.15).

Пусть $\alpha \in (1-p_-, 0)$ и $v = (1+|u|)^\beta$, $\beta = (\alpha + p_- - 1)/p_- > 0$. Поскольку $\beta p(x) < p(x) - 1 < p_0(x)$, ввиду оценки (3.13) имеем

$$\int_{\Omega(r)} v^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1+|u|)^{p_0(x)} dx \leq D_1. \quad (3.18)$$

Тогда $\nabla v = \beta(1+|u|)^{\beta-1} \nabla u \operatorname{sign} u$ и, согласно (3.14), справедливы неравенства

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla v|^{p(x)} dx \leq \beta^{p_-} \int_{\Omega(r)} (1+|u|)^{(\beta-1)p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1+|u|)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_5. \quad (3.19)$$

Соединяя (3.18), (3.19), выводим оценку

$$\|v\|_{p(\cdot), \Omega(r)}^1 \leq D_6,$$

из которой, ввиду леммы 1.1, получаем

$$\|v\|_{q(\cdot)(p(\cdot)-1), \Omega(r)} \leq D_7, \quad 1 \leq q(\cdot) < \frac{p^*(\cdot)}{p(\cdot) - 1}.$$

Отсюда для любого $\alpha \in (1-p_-, 0)$ следует неравенство

$$\int_{\Omega(r)} |u|^{\beta q(x)(p(x)-1)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (|u|+1)^{\beta q(x)(p(x)-1)} dx \leq D_3. \quad (3.20)$$

Пусть $s(\cdot) < q_3(\cdot)$, найдем $s(\cdot) < t(\cdot) < q_3(\cdot)$, тогда $\inf_{\Omega} (q_3(x) - t(x)) = a > 0$. Положим $t(x) = \frac{p^*(x)(\alpha + p_- - 1)}{p_-(p(x) - 1)}$, тогда $a = |\alpha| \inf_{\Omega} \frac{p^*(x)}{p_-(p(x) - 1)}$. Поскольку $s(x) < t(x) = \frac{p^*(x)\beta}{p(x) - 1}$, то ввиду (3.20) оценка (3.16) установлена.

Далее, применяя неравенство (1.2), для $1 \leq \sigma(x) < p'(x)$ имеем:

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla u|^{(p(x)-1)\sigma(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} |\nabla u|^{p(x)} (|u|+1)^{\alpha-1} dx + \int_{\Omega(r)} (|u|+1)^{\frac{(1-\alpha)\sigma(x)}{p'(x)-\sigma(x)}}. \quad (3.21)$$

Первый интеграл в (3.21) оценивается благодаря (3.14), а второй с помощью (3.16) при условии $\frac{(1-\alpha)\sigma(x)}{p'(x) - \sigma(x)} < q_0(x)$, которое выполняется для $1 \leq \sigma(x) < \frac{p'(x)q_0(x)}{1-\alpha+q_0(x)}$ при малых $\alpha < 0$.

Кроме того, второй интеграл можно оценить с помощью (3.13) при условии $\frac{(1-\alpha)\sigma(x)}{p'(x) - \sigma(x)} < p_0(x)$,

которое выполняется для $1 \leq \sigma(x) < \frac{p'(x)p_0(x)}{1-\alpha+p_0(x)}$ при малых $\alpha < 0$. Таким образом, оценка (3.17) установлена. $\square$

Следует отметить, что в случае ограниченной области Ω глобальные оценки вида (3.16), (3.17) для энтропийного решения установлены в [12, Proposition 3.2, 3.6, Corollary 3.5, 3.7].

Утверждение 3.3. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), тогда при всех $k, r > 0, m \geq 0$ справедлива оценка

$$\int_{\{\Omega(r): |u| \geq k+m\}} |b(x, u)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{\Omega(r): m \leq |u| < k+m\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_7, \quad (3.22)$$

с константой $D_7(N)$, не зависящей от u .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$T_{k,m}(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\varrho| < m, \\ \varrho - m \operatorname{sign} \varrho & \text{при } m \leq |\varrho| < k+m, \\ k \operatorname{sign} \varrho & \text{при } |\varrho| \geq k+m. \end{cases}$$

Положив в (2.7) $h(u) = T_{k,m}(u)$, $\varphi = \phi_r$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\{\Omega: m \leq |u| < k+m\}} \phi_r a(x, \nabla u) \cdot \nabla u dx + \int_{\{\Omega: m \leq |u|\}} b(x, u) T_{k,m}(u) \phi_r dx + \\ & + \int_{\{\Omega: m \leq |u|\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi_r T_{k,m}(u) dx = \int_{\{\Omega: m \leq |u|\}} T_{k,m}(u) \phi_r f dx. \end{aligned}$$

Далее, используя (2.3), (2.5), выводим

$$\begin{aligned} & \bar{a} \int_{\{\Omega: m \leq |u| < k+m\}} \phi_r |\nabla u|^{p(x)} dx + k \int_{\{\Omega: |u| \geq k+m\}} \phi_r |b(x, u)| dx \leq \\ & \leq k \int_{\{\Omega: |u| \geq m\}} \phi_r |f| dx + k \hat{a} \int_{\{\Omega: |u| \geq m\}} \left(|\nabla u|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) |\nabla \phi_r| dx \leq \\ & \leq k \|f\|_{1, \Omega(r+1)} + k \hat{a} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) |\nabla \phi_r| dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Соединяя последнее неравенство с (3.17), получаем оценку (3.22).

В частности, из (3.22) при $m = 0$ имеем оценку

$$\int_{\{\Omega(r): |u| \geq k\}} |b(x, u)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{\Omega(r): |u| < k\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_7. \quad (3.24)$$

□

Утверждение 3.4. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), тогда для любых $k, r > 0$ верны неравенства

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u| \geq k\}) \leq D_8(N) k^{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 - p_-}{p_0 - 1}. \quad (3.25)$$

Доказательство. Из оценки (3.24) выводим

$$\int_{\{\Omega(r): |u| < k\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_7 k, \quad k > 0. \quad (3.26)$$

Положим $\Phi(k, h) = \text{meas} \{\Omega(r) : |u| \geq k, |\nabla u|^{p(x)} \geq h\}$, $k, h > 0$. Выше установлено (см. (3.15)), что

$$\Phi(k, 0) \leq D_1 k^{-p_0-}. \quad (3.27)$$

Поскольку функция $h \rightarrow \Phi(k, h)$ невозрастающая, то для $k, h > 0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0, h) \leq \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(0, \varrho) d\varrho \leq \Phi(k, 0) + \frac{1}{h} \int_0^h (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) d\varrho. \quad (3.28)$$

Отметим, что

$$\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho) = \text{meas} \{\Omega : |u| < k, |\nabla u|^{p(x)} \geq \varrho\}.$$

Поэтому из (3.26) следует, что

$$\int_0^\infty (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) d\varrho \leq D_7 k. \quad (3.29)$$

Теперь, соединяя (3.27)–(3.29), получаем неравенство

$$\Phi(0, h) \leq D_1 k^{-p_0-} + D_7 k/h.$$

Выбирая $k = h^{\frac{1}{p_0-+1}}$, добиваемся неравенства $\Phi(0, h) < D_8 h^{-\frac{p_0}{p_0-+1}}$. Отсюда, ввиду справедливости вложения $\{\Omega(r) : |\nabla u|^{p(x)} \geq h\} \supset \{\Omega(r) : |\nabla u| \geq h^{1/p-}\}$, устанавливаем оценку

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u| \geq h^{1/p-}\}) \leq D_8 h^{-\gamma_0/p-}, \quad h \geq 1,$$

из которой следует (3.25). $\square$

Лемма 3.1. Пусть $B = L_{p(\cdot)}(Q)$ или $B = W_{p(\cdot)}^1(Q)$, $v^j, j \in \mathbb{N}$, v — такие функции из B , что $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в B и

$$v^j \rightarrow v \quad \text{н.в. в } Q, \quad j \rightarrow \infty, \quad (3.30)$$

тогда

$$v^j \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } B, \quad j \rightarrow \infty.$$

Лемма 3.2. Пусть функции $v^j, j \in \mathbb{N}$, $v \in L_\infty(Q)$ такие, что $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L_\infty(Q)$ и имеет место сходимость (3.30), тогда

$$v^j \xrightarrow{*} v \quad \text{слабо в } L_\infty(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Если, кроме того, $h^j, j \in \mathbb{N}$, h — такие функции из $L_{p(\cdot)}(Q)$, что

$$h^j \rightarrow h \quad \text{сильно в } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty,$$

то

$$v^j h^j \rightarrow v h \quad \text{сильно в } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Лемма 3.3 (см. [5, лемма 2]). Пусть $\text{meas}(Q) < \infty$, $\gamma : Q \rightarrow [0, +\infty]$ — измеримая функция такая, что $\text{meas}(\{x \in Q : \gamma(x) = 0\}) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\int_{Q'} \gamma(x) dx < \delta, \quad Q' \subset Q,$$

влечет $\text{meas}(Q') < \varepsilon$.

Ниже будет использоваться теорема Витали в следующей форме (см. [1, гл. III, §6, теорема 15]).

Лемма 3.4. Пусть $v^j, j \in \mathbb{N}$, v — измеримые функции в области Q , $\text{meas}(Q) < \infty$, такие, что имеет место сходимость (3.30), $s = 1$ или $p(\cdot)$ и интегралы

$$\int_Q |v^j(x)|^s dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

равностепенно абсолютно непрерывны, тогда

$$v^j \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_s(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Лемма 3.5 (см. [9, Theorem 13.47]). Пусть $v^j, j \in \mathbb{N}$, $v \in L_1(Q)$ такие, что $v^j, v \geq 0$ н.в. в Q , имеет место сходимость (3.30) и

$$\int_Q v^j(x) dx \rightarrow \int_Q v(x) dx, \quad j \rightarrow \infty,$$

тогда

$$v^j \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_1(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Определение 3.1. Пусть область Ω ограничена. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_1(\Omega)$, если выполняются условия: а)–д) и для любой функции $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ такой, что

$$\text{существуют } k > 0, \quad w^{+\infty}, w^{-\infty} \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega), \quad r(\cdot) > q'_2(\cdot),$$

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} \text{ почти всюду при } u > k, \\ w = w^{-\infty} \text{ почти всюду при } u < -k, \end{cases} \quad (3.31)$$

справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f)w dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx = 0. \quad (3.32)$$

Определение 3.1-loc. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локальным ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_{1,loc}(\overline{\Omega})$, если выполняются условия a-loc)–d-loc) и для любой функции $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ с компактным носителем и свойствами (3.31) справедливо равенство (3.32).

Замечание 3.1. Каждый интеграл в (3.32) корректно определен. Пусть $\text{supp } w \cap \Omega = K$. Первое слагаемое в левой части конечно благодаря условию b-loc), $f \in L_{1,loc}(\overline{\Omega})$ и принадлежности $w \in L_{\infty}(K)$. Второе слагаемое можно записать

$$\int_{\{K: u < -k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx + \int_{\{K: u > k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx + \int_{\{K: |u| \leq k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx.$$

С одной стороны, из условия c-loc) и неравенства (2.1) следует, что $a(x, \nabla u) \in (L_{q(\cdot)}(K))^n$ для любого $q(\cdot) < q_2(\cdot)$; с другой стороны, $\nabla w = \nabla w^{-\infty}$ п.в. на множестве $\{K : u < -k\}$, поэтому $\nabla w \in (L_{r(\cdot)}(\{K : u < -k\}))^n$ для любого $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ и, следовательно, произведение $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$ интегрируемо на $\{K : u < -k\}$. Таким же образом доказывается интегрируемость $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$ на $\{K : u > k\}$. Наконец, благодаря (2.9) и принадлежности $w \in W_{p(\cdot)}^1(K)$ произведение $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$ интегрируемо на $\{K : |u| \leq k\}$.

Теорема 3.1. Определения 2.1-loc, 3.1-loc эквивалентны.

Эквивалентность определений 2.1, 3.1 в случае данных в виде общей меры доказана в [3], эквивалентность определений 2.1-loc, 3.1-loc устанавливается аналогично.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1, НАЧАЛО

В этом разделе будут получены некоторые априорные оценки и свойства сходимости последовательности $\{u_{\xi}\}$.

Согласно определению 2.1-loc, для любой функции $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и любой $\varphi \in W_{q(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ с компактным носителем такой, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, решение u_{ξ} удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} (b(x, u_{\xi}) - f_{\xi})h(u_{\xi})\varphi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_{\xi}) \cdot (\nabla u_{\xi} h'(u_{\xi})\varphi + \nabla \varphi h(u_{\xi})) dx = 0. \quad (4.1)$$

Кроме того, согласно определению 3.1-loc для любой функции $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ с компактным носителем и со свойствами (3.31) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (b(x, u_{\xi}) - f_{\xi})w dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_{\xi}) \cdot \nabla w dx = 0. \quad (4.2)$$

Шаг 1: априорные оценки. Здесь $r > 0$ — произвольное фиксированное.

Ввиду сходимости

$$f_{\xi} \rightarrow f \text{ в } L_{1,loc}(\overline{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

существует положительная константа c_r такая, что

$$\|f_{\xi}\|_{1,\Omega(r)} \leq c_r, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Применяя оценки утверждения 3.1 с $\phi = \phi_r$ (см. (3.1), (3.2)), учитывая (4.4), выводим оценки:

$$\int_{\Omega(r)} (|u_{\xi}| + 1)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad \xi \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

и для любого $\alpha < 0$

$$\int_{\Omega(r)} (|u_\xi| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq D_2, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Согласно утверждению 3.2, для любых $k, r > 0$ справедливо неравенство (см. (3.15))

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_\xi| \geq k\}) \leq D_1 k^{-p_0-}, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Кроме того, для $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$ справедлива оценка (см. (3.16))

$$\int_{\Omega(r)} |u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq D_3, \quad \xi \in \mathbb{N}; \quad (4.8)$$

а для $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ (или $q_4(\cdot)$) — оценка (см. (3.17))

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq D_4, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Таким же образом, как в утверждении 3.3, получаем оценку (см. (3.24))

$$\int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq k\}} |b(x, u_\xi)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| < k\}} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq D_7, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Из оценки (4.10) ввиду произвольности $k > 0$ устанавливаем неравенство

$$\|b(x, u_\xi)\|_{1, \Omega(r)} \leq D_7, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Далее, из оценки (4.10), пользуясь неравенством (2.1'), выводим

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla T_k(u_\xi)|^{p(x)} dx \leq D_7 k, \quad k > 0, \quad \xi \in \mathbb{N}, \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega(r)} |a(x, \nabla T_k(u_\xi))|^{p'(x)} dx \leq D_9 k, \quad k \geq 1, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Далее, согласно утверждению 3.4, для любых $k, r > 0$ справедливо неравенство (см. (3.25))

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u_\xi| \geq k\}) \leq D_8 k^{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 - p_-}{p_0 - 1}. \quad (4.14)$$

Здесь и ниже константы D_i не зависят от ξ, k .

Шаг 2: сходимость подпоследовательности $\{u_\xi\}$ почти всюду.

Из оценок (4.7), (4.14) имеем

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_\xi| \geq h\}) \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } \xi, \quad h \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u_\xi| \geq h\}) \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } \xi, \quad h \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Установим сходимость по подпоследовательности:

$$u_\xi \rightarrow u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Пусть $\alpha \in (1 - p_-, 0)$, рассмотрим последовательность $v_\xi = (1 + |u_\xi|)^\beta$, $\beta = (\alpha + p_- - 1)/p_- > 0$. Согласно (4.5), (4.6), справедливы оценки

$$\int_{\Omega(r)} |v_\xi|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1 + |u_\xi|)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad (4.18)$$

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla v_\xi|^{p(x)} dx \leq \beta^{p_-} \int_{\Omega(r)} (1 + |u_\xi|)^{(\beta-1)p(x)} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1 + |u_\xi|)^{\alpha-1} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq D_2. \quad (4.19)$$

Рассмотрим также последовательности $v'_\xi = (1 + u_\xi^+)^{\beta}$, $v''_\xi = (1 + u_\xi^-)^{\beta}$. Очевидно, что $|\nabla v'_\xi| \leq \beta(1 + |u_\xi|)^{(\alpha-1)/p-} |\nabla u_\xi|$, $|\nabla v''_\xi| \leq \beta(1 + |u_\xi|)^{(\alpha-1)/p-} |\nabla u_\xi|$. Из оценок (4.18), (4.19) следует ограниченность последовательностей v'_ξ, v''_ξ в пространстве $W_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$ и, ввиду компактности вложения в пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega(r))$, имеет место сильная сходимость в $L_{p(\cdot)}(\Omega(r))$ и сходимость $v'_\xi \rightarrow v'$, $v''_\xi \rightarrow v''$ п.в. в Ω . Тогда сходимость (4.17) доказана. Применяя лемму Фату и сходимость (4.17), из оценок (4.5), (4.11) выводим $|u|^{p_0(x)}$, $b(x, u) \in L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$.

Из (4.17) следует, что для любого $k > 0$

$$T_k(u_\xi) \rightarrow T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Кроме того, из сходимости (4.17) вытекает сходимость локально по мере, а значит, и фундаментальность $\{u_\xi\}$ локально по мере:

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_\xi - u_\eta| \geq \nu\}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi, \eta \rightarrow \infty \quad \text{для любых } \nu, r > 0. \quad (4.21)$$

Из оценки (4.12) следует ограниченность последовательности $\{T_k(u_\xi)\} \subset \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ в пространстве $W_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$ при фиксированных $k, r > 0$. Тогда можно выделить слабо сходящуюся в $W_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$ подпоследовательность $T_k(u_\xi) \rightharpoonup v_k$, $\xi \rightarrow \infty$, причем $v_k \in \dot{V}_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$. Из сходимости (4.20) следует равенство $v_k = T_k(u) \in \dot{V}_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$. Таким образом, доказана сходимость

$$T_k(u_\xi) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{в } \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

Шаг 3: сходимость подпоследовательности $\{\nabla u_\xi\}$ почти всюду.

Сначала установим сходимость

$$\nabla u_\xi \rightarrow \nabla u \quad \text{локально по мере, } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Для $\nu, \theta, h, r > 0$ рассмотрим множество

$$E_{\nu, \theta, h}(r) = \{\Omega(r) : |u_\xi - u_\eta| < \nu, |\nabla u_\xi| \leq h, |\nabla u_\eta| \leq h, |u_\xi| < h, |u_\eta| < h, |\nabla(u_\xi - u_\eta)| \geq \theta\}.$$

Поскольку справедливо включение

$$\begin{aligned} \{\Omega(r) : |\nabla(u_\xi - u_\eta)| \geq \theta\} &\subset \{\Omega(r) : |\nabla u_\xi| > h\} \cup \{\Omega(r) : |\nabla u_\eta| > h\} \cup \\ &\cup \{\Omega(r) : |u_\xi - u_\eta| \geq \nu\} \cup \{\Omega(r) : |u_\xi| \geq h\} \cup \{\Omega(r) : |u_\eta| \geq h\} \cup E_{\nu, \theta, h}(r), \end{aligned}$$

то в силу (4.15)-(4.16) выбором h добьемся неравенств

$$\text{meas} \{\Omega(r) : |\nabla(u_\xi - u_\eta)| \geq \theta\} < 4\varepsilon + \text{meas} E_{\nu, \theta, h}(r) + \text{meas} \{\Omega(r) : |u_\eta - u_\xi| \geq \nu\}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

По условию монотонности (2.2) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(x) > 0$ п.в. в $\Omega(r)$ такая, что $\text{meas}(\{x \in \Omega(r) : \gamma(x) = 0\}) = 0$, и при $|s| \leq h$, $|t| \leq h$, $|s - t| \geq \theta$ справедливо неравенство

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) \geq \gamma(x), \quad x \in \Omega(r). \quad (4.25)$$

Запишем равенство (4.2) дважды для u_ξ, u_η с f_ξ и f_η , соответственно, и вычтем из первого второе, получим

$$\int_{\Omega} (a(x, \nabla u_\xi) - a(x, \nabla u_\eta)) \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} (f_\xi - f_\eta - b(x, u_\xi) + b(x, u_\eta)) w dx.$$

Подставляя пробную функцию $w = T_\nu(u_\xi - u_\eta) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_\xi|) \phi_h(|u_\eta|)$, $w^{+\infty} = w^{-\infty} = 0$, устанавливаем соотношение

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (a(x, \nabla u_\xi) - a(x, \nabla u_\eta)) \cdot \nabla (T_\nu(u_\xi - u_\eta) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_\xi|) \phi_h(|u_\eta|)) dx = \\ &= \int_{\Omega} (-b(x, u_\xi) + b(x, u_\eta) + f_\xi - f_\eta) T_\nu(u_\xi - u_\eta) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_\xi|) \phi_h(|u_\eta|) dx. \end{aligned}$$

Используя оценки (4.4), (4.11), выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_{\xi}) - a(x, \nabla u_{\eta})) \cdot \nabla (T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta}) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_{\xi}|) \phi_h(|u_{\eta}|)) dx \leq \\ & \leq \nu (\|b(x, u_{\xi})\|_{1, \Omega(r+1)} + \|b(x, u_{\eta})\|_{1, \Omega(r+1)} + \|f_{\xi}\|_{1, \Omega(r+1)} + \|f_{\eta}\|_{1, \Omega(r+1)}) \leq D_{10} \nu. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Далее, применяя (4.25), устанавливаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} \gamma(x) dx \leq \int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} (a(x, \nabla u_{\xi}) - a(x, \nabla u_{\eta})) \cdot \nabla (u_{\xi} - u_{\eta}) dx \leq \\ & \leq \int_{\{\Omega: |u_{\xi} - u_{\eta}| < \nu\}} \phi_r(|x|) \phi_h(|u_{\xi}|) \phi_h(|u_{\eta}|) (a(x, \nabla u_{\xi}) - a(x, \nabla u_{\eta})) \cdot \nabla (u_{\xi} - u_{\eta}) dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Соединяя (4.26), (4.27), применяя (1.2), (4.12), (4.13), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} \gamma(x) dx \leq \int_{\{\Omega(r+1): |u_{\xi}| < h+1, |u_{\eta}| < r+1\}} (|a(x, \nabla u_{\xi})| + |a(x, \nabla u_{\eta})|) |T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta})| dx + \\ & + \int_{\{\Omega(r+1): h < |u_{\eta}| < h+1, |u_{\xi}| < h+1\}} (|a(x, \nabla u_{\xi})| + |a(x, \nabla u_{\eta})|) |\nabla u_{\eta}| |T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta})| dx + \\ & + \int_{\{\Omega(r+1): h < |u_{\xi}| < h+1, |u_{\eta}| < h+1\}} (|a(x, \nabla u_{\xi})| + |a(x, \nabla u_{\eta})|) |\nabla u_{\xi}| |T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta})| dx + D_{10}(r) \nu \leq \\ & \leq \nu (3\rho(|a(x, \nabla T_{h+1}(u_{\xi}))|)_{p'(\cdot), \Omega(r+1)} + 3\rho(|a(x, \nabla T_{h+1}(u_{\eta}))|)_{p'(\cdot), \Omega(r+1)} + \\ & + 2\rho(|\nabla T_{h+1}(u_{\xi})|)_{p(\cdot), \Omega(r+1)} + 2\rho(|\nabla T_{h+1}(u_{\eta})|)_{p(\cdot), \Omega(r+1)} + D_{11}(r)) \leq D_{12}(r, h) \nu. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для произвольных $\theta, \delta > 0$ при фиксированных h, r выбором ν из (4.28) устанавливаем неравенство

$$\int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} \gamma(x) dx < \delta.$$

Применяя лемму 3.3, для любых $\theta, \varepsilon > 0$ выводим

$$\text{meas}(E_{\nu, \theta, h}(r)) < \varepsilon. \quad (4.29)$$

Кроме того, согласно (4.21) можно выбрать $\xi_0(\nu, r, \varepsilon)$ такое, что

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_{\xi} - u_{\eta}| \geq \nu\}) < \varepsilon, \quad \xi, \eta \geq \xi_0. \quad (4.30)$$

Соединяя (4.24), (4.29), (4.30), в итоге для любых $\theta, \varepsilon > 0$ выводим неравенство

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla(u_{\xi} - u_{\eta})| \geq \theta\}) < 6\varepsilon, \quad \xi, \eta \geq \xi_0.$$

Отсюда следует локальная фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla u_{\xi}\}$, это влечет сходимость (4.23), а также сходимость по подпоследовательности:

$$\nabla u_{\xi} \rightarrow \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.31)$$

Далее, несложно установить сходимость

$$\nabla T_k(u_{\xi}) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.32)$$

Из непрерывности $a(x, s)$ по $s \in \mathbb{R}^n$ и сходимости (4.32) следует сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_{\xi})) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

Отсюда, благодаря оценке (4.13), по лемме 3.1 имеем сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_{\xi})) \rightharpoonup a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{слабо в } (L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Шаг 4: сильные сходимости

$$|u_\xi|^{p(x)-1} \rightarrow |u|^{p(x)-1} \quad \text{в } L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}), \quad 1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.35)$$

$$|\nabla u_\xi|^{p(x)-1} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)-1} \quad \text{в } (L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (или } q_4(\cdot)), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.36)$$

$$a(x, \nabla u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla u) \quad \text{в } (L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (или } q_4(\cdot)), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.37)$$

$$b(x, u_\xi) \rightarrow b(x, u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

Применяя лемму Фату и сходимости (4.17), (4.31), из оценок (4.8), (4.9) выводим принадлежность $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$, $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ (или $q_4(\cdot)$).

Применяя неравенства (1.1), (2.1) и неравенство Юнга, для любого измеримого множества $Q \subset \Omega(r)$ и любого $\epsilon > 0$ устанавливаем неравенства

$$\begin{aligned} \int_Q |a(x, \nabla u_\xi)|^{q(x)} dx &\leq \widehat{a}^{q+} 2^{q+1} \int_Q \left(|\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)} + \Phi^{q(x)}(x) \right) dx \leq \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega(r)} |\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)\widehat{q}(x)} dx + C(\epsilon) \text{meas}(Q) + D_{13} \int_Q \Phi^{q(x)}(x) dx, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $1 \leq q(\cdot) < \widehat{q}(\cdot) < q_2(\cdot)$.

Поскольку $q_2(\cdot) < p'(\cdot)$, то $\Phi \in L_{q(\cdot)}(\Omega(r))$, $q(\cdot) < q_2(\cdot)$. Учитывая абсолютную непрерывность второго интеграла в правой части (4.39), применяя оценку (4.9), для любого $\epsilon > 0$ найдем такое $\delta(\epsilon)$, что: для любого Q такого, что $\text{meas}(Q) < \delta(\epsilon)$, выполнено неравенство

$$\int_Q |a(x, \nabla u_\xi)|^{q(x)} dx \leq \epsilon, \quad \forall \xi \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что последовательности $\{|\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)}\}$, $\{|a(x, \nabla u_\xi)|^{q(x)}\}$ имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы по множеству $\Omega(r)$. По лемме 3.4 имеют место сходимости (4.36), (4.37). Сходимость (4.35) устанавливается аналогично, с помощью оценки (4.8).

Запишем оценку (3.23) для u_ξ, f_ξ для $k = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{a} \int_{\{\Omega(r): \rho \leq |u_\xi| < 1+\rho\}} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx + \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq 1+\rho\}} |b(x, u_\xi)| dx &\leq \\ \leq \int_{\{\Omega(r+1): |u_\xi| \geq \rho\}} |f_\xi| dx + \widehat{a} \int_{\{\Omega(r+1): |u_\xi| \geq \rho\}} \left(|\nabla u_\xi|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $f_\xi, |\nabla u_\xi|^{p(x)-1}$ сходятся сильно в $L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (4.15), для любого $\epsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое $\tilde{\rho}(\epsilon) > 1$ такое, что для $\rho \geq \tilde{\rho}$ справедлива оценка:

$$\bar{a} \int_{\{\Omega(r): \rho \leq |u_\xi| < 1+\rho\}} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx + \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq 1+\rho\}} |b(x, u_\xi)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.40)$$

Для любого измеримого множества $Q \subset \Omega(r)$ имеем

$$\int_Q |b(x, u_\xi)| dx \leq \int_{\{Q: |u_\xi| < \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx + \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx. \quad (4.41)$$

Применяя (2.4), выводим:

$$\int_{\{Q: |u_\xi| < \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx \leq \widehat{b}(\rho+1) \int_Q \Phi_0(x) dx.$$

Ввиду того, что $\Phi_0 \in L_1(Q)$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha(\varepsilon)$, что для любого Q такого, что $\text{meas } Q < \alpha(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\int_{\{Q: |u_\xi| < \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.42)$$

Объединяя (4.40)–(4.42), устанавливаем

$$\int_Q |b(x, u_\xi)| dx < \varepsilon \quad \forall Q \text{ такого, что } \text{meas } Q < \alpha(\varepsilon), \quad \xi \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{b(x, u_\xi)\}$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы по множеству $\Omega(r)$. По лемме 3.4 устанавливаем сходимость

$$b(x, u_\xi) \rightarrow b(x, u) \quad \text{в } L_1(\Omega(r)), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

для любого $r > 0$. Сходимость (4.38) доказана.

Доказательство теоремы будет продолжено в разделе 6.

5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Чтобы доказать сильную сходимость срезов в $\dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$, установим вспомогательные леммы.

Будем использовать функции вещественной переменной ϱ от одного вещественного параметра $m > 0$:

$$G_m(\varrho) = \begin{cases} 0, & |\varrho| > 2m, \\ \frac{\varrho + 2m}{m}, & -2m \leq \varrho < -m, \\ 1, & |\varrho| \leq m, \\ \frac{2m - \varrho}{m}, & m < \varrho \leq 2m, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\tau_m(\varrho) = T_{m,m}(\varrho).$$

Для положительных вещественных чисел m, ξ обозначим через $\omega(m, \xi)$ любую величину такую, что

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} |\omega(m, \xi)| = 0.$$

А через $\omega_m(\xi)$ обозначим величину такую, что при фиксированном m

$$\limsup_{\xi \rightarrow +\infty} |\omega_m(\xi)| = 0.$$

Лемма 5.1. Пусть $\{u_\xi\}$ — последовательность локальных ренормализованных решений задачи (2.10), (0.2) такая, что имеют место сходимости (4.3), (4.17), (4.22), (4.31), (4.37), (4.38). Тогда для любых $m > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\frac{1}{m} \int_{\{\Omega: m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx = \omega(m, \xi). \quad (5.2)$$

Доказательство. Зафиксируем m , и пусть ξ стремится к бесконечности. Ввиду сходимости (4.17), непрерывности и ограниченности функции $\tau_m(\varrho)$, по лемме 3.2 имеем

$$\tau_m(u_\xi) \rightarrow \tau_m(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

$$\tau_m(u_\xi) \xrightarrow{*} \tau_m(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Очевидно,

$$\tau_m(u) \rightarrow 0 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Ввиду ограниченности последовательности функций $\{\tau_m(\varrho)\}_{m=1}^\infty$, по лемме 3.2 имеем

$$\tau_m(u) \xrightarrow{*} 0 \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

Теперь в равенстве (4.1) возьмем $h = \tau_m(u_\xi)$, $\varphi = \phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$, получим

$$\begin{aligned} I_1 + I_{21} + I_{22} &= \int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) \phi \tau_m(u_\xi) dx + \frac{1}{m} \int_{\{m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \phi \tau_m(u_\xi) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$, благодаря сходимостям

$$a(x, \nabla u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla u) \quad \text{сильно в } (L_{1,\text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (5.8)$$

(см. (4.37)), (5.4), (5.6) имеем

$$I_{22} = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi \tau_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \omega(m, \xi). \quad (5.9)$$

Аналогично, используя сходимости (4.38), (4.3), (5.4), (5.6), получаем

$$I_1 = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) \phi \tau_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \omega(m, \xi). \quad (5.10)$$

Соединяя (5.7), (5.9)–(5.10), получаем неравенство

$$\frac{1}{m} \int_{\{\Omega: m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx \leq \omega(m, \xi),$$

которое влечет (5.2). $\square$

Лемма 5.2. Пусть выполнены условия леммы 5.1, тогда для $k > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \phi dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi dx + \omega(\xi). \quad (5.11)$$

Доказательство леммы 5.2 разобьем на две леммы.

Лемма 5.3. Пусть выполнены условия леммы 5.1, тогда для любых $k > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx = \omega(\xi). \quad (5.12)$$

Доказательство. Выберем $h(\rho) = T_k(\rho)$, $\varphi = \phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ в равенстве (4.1), получим:

$$\begin{aligned} I_1 + I_{21} + I_{22} &= \int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) T_k(u_\xi) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \phi dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \phi T_k(u_\xi) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Согласно (4.20), по лемме 3.2 имеет место сходимость

$$T_k(u_\xi) \xrightarrow{*} T_k(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Применяя (5.14), (5.8), устанавливаем:

$$I_{22} = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx + \omega(\xi). \quad (5.15)$$

Благодаря (4.38), (4.3), (5.14) устанавливаем

$$I_1 = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \omega(\xi). \quad (5.16)$$

Соединяя (5.13), (5.15), (5.16), выводим (5.12). $\square$

Лемма 5.4. Пусть выполнены условия леммы 5.1, тогда для любых $k > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx = 0. \quad (5.17)$$

Доказательство. Ввиду сходимости (4.17), непрерывности и ограниченности функции $G_m(\varrho)$, по лемме 3.2 имеем

$$\begin{aligned} G_m(u_\xi) &\rightarrow G_m(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty, \\ G_m(u_\xi) &\overset{*}{\rightharpoonup} G_m(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ввиду ограниченности функции $G_m(\varrho)$ по лемме 3.2 имеем

$$G_m(u) \rightarrow 1 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.19)$$

$$G_m(u) \overset{*}{\rightharpoonup} 1 \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.20)$$

Выберем $w = T_k(u) G_m(u_\xi) \phi$, $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ в качестве тестовой функции в равенстве (4.2), полагая $w^{+\infty} = w^{-\infty} = 0$; получим:

$$\begin{aligned} I_1 + I_{21} + I_{22} + I_{23} &= \int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) T_k(u) \phi G_m(u_\xi) dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi T_k(u) \phi G'_m(u_\xi) dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla T_k(u) \phi G_m(u_\xi) dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \phi T_k(u) G_m(u_\xi) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Благодаря неравенству (4.13) имеет место оценка:

$$\int_{\Omega(r)} |a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi)|^{p'(x)} dx \leq m D_{13}.$$

Из непрерывности $a(x, s)$ по $s \in \mathbb{R}^n$, $G_m(s_0)$ по $s_0 \in \mathbb{R}$ и сходимостей (4.17), (4.32) следует сходимость

$$a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla T_{2m}(u)) G_m(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Отсюда, по лемме 3.1 имеем сходимость

$$a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi) \rightharpoonup a(x, \nabla T_{2m}(u)) G_m(u) \quad \text{слабо в } (L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

Поскольку $a(x, \nabla u_\xi) G_m(u_\xi) = a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi)$, применяя (5.22), (5.20), для $m > k$ имеем

$$I_{22} = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_{2m}(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi G_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi dx + \omega(m, \xi). \quad (5.23)$$

Применяя сходимости (5.8), (5.18), (5.20), получаем

$$I_{23} = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) G_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx + \omega(m, \xi). \quad (5.24)$$

По лемме 5.1 имеем

$$|I_{21}| \leq \frac{k}{m} \int_{\{\Omega: m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx = \omega(m, \xi). \quad (5.25)$$

Применяя сходимости (4.38), (4.3), (5.18), (5.20), получаем

$$I_1 = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi G_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \omega(m, \xi). \quad (5.26)$$

Соединяя (5.21), (5.23)–(5.26), устанавливаем (5.17), поскольку все слагаемые в (5.17) не зависят от ξ и m . $\square$

Для получения (5.11) достаточно вычесть (5.17) из (5.12). Лемма 5.2 доказана.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1, ФИНАЛ

В этом разделе мы завершаем доказательство теоремы 2.1. Напомним, что $\{u_\xi\}$ — подпоследовательность ренормализованных решений задач (2.10), (0.2) такая, что имеют место сходимости (4.17), (4.22), (4.31), (4.37), (4.38).

Шаг 5: сильная сходимость срезов в $\dot{W}_{p(\cdot),\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$.

Учитывая (4.32), (4.33), выводим

$$a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

Поскольку $a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi)$ неотрицательны, применяя (5.11), (6.1), для $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ по лемме 3.5 устанавливаем

$$\phi a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \rightarrow \phi a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.2)$$

Отсюда следует сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.3)$$

Для любого измеримого множества $Q \subset \Omega(r)$, используя неравенства (1.1), (2.3), выводим

$$\begin{aligned} \int_Q |\nabla T_k(u_\xi) - \nabla T_k(u)|^{p(x)} dx &\leq 2^{p_+-1} \int_Q \left(|\nabla T_k(u_\xi)|^{p(x)} + |\nabla T_k(u)|^{p(x)} \right) dx \leq \\ &\leq D_{14} \int_Q (a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) + a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)) dx. \end{aligned}$$

Ввиду сходимости (6.3) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что:

$$\int_Q |\nabla T_k(u_\xi) - \nabla T_k(u)|^{p(x)} dx < \varepsilon \quad \forall Q \quad \text{такого, что } \text{meas}(Q) < \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, последовательность $\{|\nabla T_k(u_\xi) - \nabla T_k(u)|^{p(x)}\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы по множеству $\Omega(r)$. Отсюда, благодаря сходимости (4.32), по лемме 3.4 имеет место сходимость

$$\nabla T_k(u_\xi) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{в } (L_{p(\cdot),\text{loc}}(\bar{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

Далее, применяя неравенства (1.1), (2.1'), (2.3), выводим

$$\begin{aligned} |a(x, \nabla T_k(u_\xi)) - a(x, \nabla T_k(u))|^{p'(x)} &\leq 2^{p'_+-1} \left(|a(x, \nabla T_k(u_\xi))|^{p'(x)} + |a(x, \nabla T_k(u))|^{p'(x)} \right) \leq \\ &\leq D_{15} \left(|\nabla T_k(u_\xi)|^{p(x)} + |\nabla T_k(u)|^{p(x)} + \Psi(x) \right) \leq \\ &\leq D_{16} (a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) + a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) + \Psi(x)). \end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, устанавливаем, что последовательность $\{|a(x, \nabla T_k(u_\xi)) - a(x, \nabla T_k(u))|^{p'(x)}\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Тогда, благодаря сходимости (4.33), по лемме 3.4 имеет место сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{сильно в } (L_{p'(\cdot),\text{loc}}(\bar{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.5)$$

Шаг 6: предельная функция — ренормализованное решение.

Докажем, что предельная функция u удовлетворяет определению 2.1-loc. Условия a-loc)–d-loc) определения 2.1-loc выполнены, это доказано в конце шага 2 и начале шага 4, соответственно. Докажем равенство (2.7). Пусть $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и φ с компактным носителем, $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q'_2(\cdot)$, таковы, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$ (очевидно, что $\varphi h(u_\xi) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$). Поскольку h ограничена и непрерывна, ввиду сходимости (4.17), по лемме 3.2 устанавливаем

$$h(u_\xi) \rightarrow h(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

$$h(u_\xi) \xrightarrow{*} h(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (6.7)$$

$$\nabla \varphi h(u_\xi) \rightarrow \nabla \varphi h(u) \quad \text{сильно в } L_{r(\cdot)}(\Omega), \quad r(\cdot) > q'_2(\cdot), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.8)$$

Если $\text{supp } h' \subset [-M, M]$ для $M > 0$, то для п.в. $x \in \Omega$ имеем

$$|h(u_\xi)|^{p(x)} + |\nabla h(u_\xi)|^{p(x)} = |h(u)|^{p(x)} + |\nabla u_\xi h'(u_\xi)|^{p(x)} \leq D_{17} + D_{18} |\nabla T_M(u_\xi)|^{p(x)}.$$

Тогда, применяя оценку (4.12), получаем ограниченность последовательности $\{h(u_\xi)\}$ в пространстве $\dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$. Отсюда и из (6.6) по лемме 3.1 устанавливаем сходимость

$$h(u_\xi) \rightharpoonup h(u) \quad \text{слабо в } \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Тогда, учитывая $\varphi \in C(\bar{K})$, $K = \text{supp } \varphi \cap \Omega$, заключаем сходимость

$$\nabla h(u_\xi) \varphi \rightharpoonup \nabla h(u) \varphi \quad \text{слабо в } L_{p(\cdot)}(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

Напомним, что функции u_ξ являются локальными ренормализованными решениями уравнения (2.10) в смысле определения 2.1-loc и удовлетворяют равенству вида (4.1).

Применяя (4.38), (4.3), (6.7), устанавливаем

$$\int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) h(u_\xi) \varphi dx = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) h(u) \varphi dx + \omega(\xi). \quad (6.10)$$

Учитывая сходимости (6.5), (6.9), имеем

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u_\xi)) \cdot \nabla h(u_\xi) \varphi dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla h(u) \varphi dx + \omega(\xi) = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u h'(u) \varphi dx + \omega(\xi). \quad (6.11)$$

Применяя сходимости (4.37), (6.8), получаем

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \varphi h(u_\xi) dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u) dx + \omega(\xi). \quad (6.12)$$

Комбинируя (4.1), (6.10)–(6.12), получаем равенство (2.7). Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Для любого $\xi \in \mathbb{N}$ существует единственное глобальное ренормализованное решение задачи

$$-\text{div } a(x, \nabla u_\xi) + b(x, u_\xi) = f, \quad x \in \Omega(\xi); \quad (6.13)$$

$$u_\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega(\xi), \quad (6.14)$$

где $f \in L_1(\Omega(\xi))$ (см., например, [3]).

Продолжим u_ξ нулем на область Ω . Очевидно, при каждом $\xi \in \mathbb{N}$ функция u_ξ является локальным ренормализованным решением задачи (0.1), (0.2) в области Ω . Тогда, согласно теореме 2.1, существует подпоследовательность последовательности $\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ (обозначим ее так же), сходящаяся почти всюду к локальному ренормализованному решению u задачи (0.1), (0.2). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
2. Жиков В. В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста // Пробл. мат. анализа. — 2011. — 54. — С. 23–112.
3. Кожевникова Л. М. Ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями и данными в виде общей меры // Мат. сб. — 2020. — 211, № 12. — С. 83–122.
4. Bidaut-Veron M.-F. Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data // Adv. Nonlinear Stud. — 2003. — 3, № 1. — С. 25–63.
5. Boccardo L., Gallouët Th. Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures // Commun. Part. Differ. Equ. — 1992. — 17, № 3-4. — С. 641–655.
6. Dal Maso G., Malusa A. Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1997. — 25, № 1-2. — С. 375–396.
7. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2011.
8. Fan X. L., Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — 263. — С. 424–446.

9. Hewitt E., Stromberg K. Real and abstract analysis. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1965.
10. Kilpeläinen T., Kuusi T., Tuhola-Kujanpää A. Superharmonic functions are locally renormalized solutions // Ann. Henri Poincaré. — 2011. — 28. — С. 775–795.
11. Mokhtari F. Nonlinear anisotropic elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with variable exponents and locally integrable data // Math. Methods Appl. Sci. — 2017. — 40. — С. 2265–2276.
12. Sanchón M., Urbano J. M. Entropy solutions for the $p(x)$ -laplace equation // Trans. Am. Math. Soc. — 2009. — 361, № 12. — С. 6387–6405.
13. Véron L. Local and global aspects of quasilinear degenerate elliptic equations. Quasilinear elliptic singular problems. — Hackensack: World Sci. Publ., 2017.

Л. М. Кожевникова

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия
 Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия
 E-mail: kosul@mail.ru

UDC 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146

EDN: UQKNFN

Local renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents in unbounded domains

L. M. Kozhevnikova^{1,2}

¹*Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia*

²*Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia*

Abstract. In this paper, we consider a second-order quasilinear elliptic equation with variable nonlinearity exponents and a locally summable right-hand side. The stability property is established and, as a consequence, the existence of a local renormalized solution of the Dirichlet problem in an arbitrary unbounded domain is proved.

Keywords: quasilinear elliptic equation, variable growth exponent, unbounded domain, Dirichlet problem, stability of solution, local renormalized solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. M. Kozhevnikova, “Local renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents in unbounded domains,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 125–146. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146>

REFERENCES

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).
2. V. V. Zhikov, “O variatsionnykh zadachakh i nelineynykh ellipticheskikh uravneniyakh s nestandartnymi usloviyami rosta” [On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions], *Probl. Mat. Analiza* [Probl. Math. Anal.], 2011, **54**, 23–112 (in Russian).



3. L. M. Kozhevnikova, “Renormalizovannye resheniya ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami i dannymi v vide obshchey mery” [Renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents and data in the form of a general measure], *Mat. Sb. [Math. Digest]*, 2020, **211**, No. 12, 83–122 (in Russian).
4. M.-F. Bidaut-Veron, “Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data,” *Adv. Nonlinear Stud.*, 2003, **3**, No. 1, 25–63.
5. L. Boccardo and Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1992, **17**, No. 3-4, 641–655.
6. G. Dal Maso and A. Malusa, “Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1997, **25**, No. 1-2, 375–396.
7. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2011.
8. X. L. Fan and D. Zhao, “On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **263**, 424–446.
9. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1965.
10. T. Kilpeläinen, T. Kuusi, and A. Tuhola-Kujanpää, “Superharmonic functions are locally renormalized solutions,” *Ann. Henri Poincaré*, 2011, **28**, 775–795.
11. F. Mokhtari, “Nonlinear anisotropic elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with variable exponents and locally integrable data,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, **40**, 2265–2276.
12. M. Sanchón and J. M. Urbano, “Entropy solutions for the $p(x)$ -laplace equation,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2009, **361**, No. 12, 6387–6405.
13. L. Véron, *Local and Global Aspects of Quasilinear Degenerate Elliptic Equations. Quasilinear Elliptic Singular Problems*, World Sci. Publ., Hackensack, 2017.

L. M. Kozhevnikova

Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia

Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia

E-mail: kosul@mail.ru

УДК 517.956

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158

EDN: VFGYMJ

О ГЛОБАЛЬНО ГЛАДКИХ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЯХ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Найден класс нестрогих гиперболических систем квазилинейных уравнений с осциллирующими решениями задачи Коши, глобально гладкими по времени в некоторой открытой окрестности нулевого стационарного состояния. Для таких систем период колебания решений не зависит от начальной точки лагранжевой траектории. Обсуждается также вопрос о возможности построения этих систем в физическом контексте, и с этой точки зрения изучаются нерелятивистские и релятивистские уравнения холодной плазмы.

Ключевые слова: нестрогий гиперболический системы, квазилинейные уравнения, задача Коши, осциллирующие решения, лагранжева траектория, уравнения холодной плазмы.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает благодарность В. В. Быкову за обсуждение различных аспектов изохронных колебаний. Поддержано грантом РНФ 23-11-00056 через Российский университет дружбы народов.

Для цитирования: О. С. Розанова. О глобально гладких осциллирующих решениях нестрогих гиперболических систем // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 147–158. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим нестрогий гиперболическую систему

$$\mathbf{Y}_t + \mathbb{A}(x, \mathbf{Y}) \mathbf{Y}_x = \mathbf{S}(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbb{A} = Q(x, \mathbf{Y}) \mathbb{I}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{Y}(t, x) = (Y_1, \dots, Y_n)^T$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)^T$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — единичная матрица размера $n \times n$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $Q(x, \mathbf{0}) = 0$, $\mathbf{S}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, с начальными условиями

$$\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}^0(x) \in C^2(\mathbb{R}). \quad (1.2)$$

Предполагается, что функции $Q(x, \mathbf{Y})$ и $\mathbf{S}(x, \mathbf{Y})$ являются C^1 -гладкими по всем своим аргументам.

Система (1.1) является промежуточным математическим объектом между квазилинейными гиперболическими уравнениями общего вида, где $\mathbb{A}$ — произвольная $n \times n$ матрица с n вещественными различными собственными значениями, и системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, динамика решения может быть полностью описана

поведением вдоль одной лагранжевой характеристики $x = x(t)$, которая управляется системой $n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Q(x, \mathbf{Y}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(x, \mathbf{Y}). \quad (1.3)$$

Можно сказать, что это несколько упрощает исследование нестрого гиперболической системы (1.1) за счет того, что можно использовать результаты и методы, относящиеся к теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Интерес к изучению нестрогих гиперболических систем обусловлен тем, что к ним сводятся некоторые важные многомерные радиально-симметричные модели физики полупроводников и холодной плазмы. Эти модели описываются уравнениями Эйлера—Пуассона с отталкивающей силой и ненулевым постоянным фоном плотности $c > 0$:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \Psi, \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \Delta \Psi = c - \rho, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{V}$, $\rho > 0$ и Ψ — скорость, плотность электронов и потенциал электрического поля, соответственно; они зависят от времени $t \geq 0$ и точки $x \in \mathbb{R}^d$.

Для

$$\mathbf{V} = F(t, r)\mathbf{r}, \quad \nabla \Psi = \mathbf{E} = G(t, r)\mathbf{r}, \quad \rho = \rho(t, r),$$

где $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_d)$, $r = |\mathbf{r}|$, систему можно свести к

$$G_t + Fr G_r = F - dFG, \quad F_t + Fr F_r = -F^2 - G, \quad (1.5)$$

(подробнее см. в [19]). Мы видим, что система (1.5) является частным случаем системы (1.1). Она имеет нулевое постоянное равновесие $G = F = 0$, и естественно предположить, что вблизи этого равновесия существуют решения, которые также являются гладкими во времени. Достаточно легко показать, что при размерности 1 это действительно так [11, 22].

Однако в многомерном случае ситуация совершенно иная. Было обнаружено, что помимо размерности 1 существует только одна пространственная размерность 4, для которой существует окрестность нулевого равновесия, соответствующая глобально гладким решениям (размер этой окрестности был найден точно в [21]). В остальных размерностях любое сколь угодно малое возмущение общего вида положения равновесия приводит к его разрушению за конечное время. Однако, если возмущение выбрано специальным образом так, чтобы начальные данные лежали на некотором подмногообразии меньшей размерности (соответствующем так называемым *простым волнам*, при которых $F = F(G)$), содержащем начало координат, то глобально гладкое решение все равно может быть получено [19].

Как было недавно показано, во всех случаях, когда период лагранжевой траектории $x(t)$ зависит от начальной точки траектории, различные траектории обязательно пересекаются и решение разрушается. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Предположим, что отображение $x \mapsto X(t)$ ($\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) непрерывно, а траектория $X(t)$ (нетривиально) периодична по $t \geq 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$ с периодом $T(x_0)$, который непрерывно зависит от x_0 , $X(0) = x_0$. Тогда, если $T(x)$ не является константой, существуют x_1 и x_2 из $\mathbb{R}$ такие, что $X_1(t_*) = X_2(t_*)$ для некоторого $t_* > 0$, где $X_i(t)$ — траектория такая, что $X_i(0) = x_i$, $i = 1, 2$.*

Лемма доказана в [20]. Фактически, это более общая формулировка леммы 2.2 из [3]. Этот результат также известен физикам в контексте проблемы разрушения плазменных колебаний.

Другими словами, только в случае, когда период лагранжевой траектории $x(t)$ не зависит от начальной точки траектории $x(0)$, можно надеяться найти окрестность нулевого равновесия, для которой существуют глобально гладкие решения. Для задач, связанных с физикой холодной плазмы, случаи изохронных колебаний крайне редки. По-видимому, они возможны только в нерелятивистском случае с фоном постоянной плотности [20] в размерностях 1 и 4 (для радиально-симметричных решений).

Однако можно рассматривать квазилинейные нестрогие гиперболические системы вне физического контекста, то есть изучать, какими свойствами должны обладать Q и S_i , чтобы система (1.1) имела изохронные колебания.

Напомним, что система ОДУ называется *изохронной*, если ее фазовое пространство имеет открытую полномерную область, где все ее решения являются периодическими с одним и тем же периодом, независимо от начальных данных.

Определение 1.1. Будем говорить, что система (1.1) является *изохронной колебательной*, если характеристическая система (1.3) является изохронной.

В частности, это означает, что каждая из характеристик $x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, является периодической с тем же периодом.

В этой статье мы сначала показываем, что изохронная колебательная система имеет окрестность тривиального стационарного состояния в C^1 -норме, соответствующей глобально гладким по времени решениям задачи Коши. Затем мы предлагаем правила, позволяющие генерировать нестрогие гиперболические изохронные колебательные системы. Затем мы обсуждаем возможность получения гладких решений для уравнений холодной плазмы в нерелятивистском и релятивистском случаях.

2. ГЛОБАЛЬНО ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ

Мы собираемся доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Система (1.1) является изохронно колебательной тогда и только тогда, когда существует окрестность U точки $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ в C^1 -норме такая, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) с начальными данными из U сохраняет начальную гладкость при всех $t > 0$.

Доказательство. Система (1.1) является гиперболической, поэтому она имеет локальное решение по времени, такое же гладкое, как и начальные данные, а разрушение обусловлено либо неограниченностью самих компонент решения, либо неограниченностью их первых производных [5]. Компоненты решения являются периодическими, поэтому нам нужно изучить поведение производных. Для этого мы дифференцируем (1.1) по x и получаем следующее матричное уравнение Риккати для вектора $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T = ((Y_1)_x, \dots, (Y_n)_x)^T$:

$$(y_i)_t + Q \mathbb{I}(y_i)_x = -(Q_x + \sum_{j=1}^n Q_{Y_j} y_j) y_i + \sum_{j=1}^n (S_i)_{Y_j} y_i + (S_i)_x, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

с начальными данными $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^T = ((Y_1^0)_x, \dots, (Y_n^0)_x)^T$. $\square$

Ключевым моментом в изучении поведения производных является теорема Радона [13, 17].

Теорема 2.2 (теорема Радона). Матричное уравнение Риккати

$$\dot{W} = M_{21}(t) + M_{22}(t)W - WM_{11}(t) - WM_{12}(t)W, \quad (2.2)$$

где $W = W(t)$ — $(n \times t)$ -матрица, M_{21} — $(n \times t)$ -матрица, M_{22} — $(t \times t)$ -матрица, M_{11} — $(n \times n)$ -матрица, M_{12} — $(t \times n)$ -матрица, эквивалентно однородному линейному матричному уравнению

$$\dot{Y} = M(t)Y, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $Y = Y(t)$ — $(n \times (n + t))$ -матрица $M = ((n + t) \times (n + t))$ -матрица, в следующем смысле.

Пусть на некотором интервале $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ матричная функция $Y(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$, где Q — $(n \times n)$ -матрица, P — $(n \times t)$ -матрица, является решением (2.3) с начальными данными

$$Y(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ W_0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{I}$ — единичная $(n \times n)$ -матрица, W_0 — постоянная $(n \times t)$ -матрица, и $\det Q \neq 0$ на $\mathcal{J}$. Тогда $W(t) = P(t)Q^{-1}(t)$ — решение уравнение (2.2) при $\mathcal{J}$ с $W(0) = W_0$.

Систему (2.1) можно переписать вдоль характеристик в виде (2.2) при $W = \mathbf{y}$, с $M_{11} = Q_x$, $M_{12} = (Q_{Y_1}, \dots, Q_{Y_n})$, $M_{21} = ((S_1)_x, \dots, (S_n)_x)^T$, и $(n \times n)$ -матрицей $M_{22} = (S_i)_{Y_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x & Q_{Y_1} & \dots & Q_{Y_n} \\ (S_1)_x & (S_1)_{Y_1} & \dots & (S_1)_{Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (S_n)_x & (S_n)_{Y_1} & \dots & (S_n)_{Y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Это система линейных уравнений с периодическими коэффициентами, которую можно изучать с помощью теории Флоке (например, [4, раздел 2.4]). Согласно этой теории, для фундаментальной матрицы $\Psi(t)$ ($\Psi(0) = \mathbb{I}$) существует постоянная матрица $\mathcal{M}$, возможно, с комплексными коэффициентами, такая, что $\Psi(T) = e^{T\mathcal{M}}$, где T — период коэффициентов. Собственные значения матрицы монодромии $e^{T\mathcal{M}}$ называются *характеристическими множителями* системы. Если среди характеристических множителей есть такие, что их абсолютные значения больше единицы, то решение (2.4) не является периодическим и колебания компонент решения в основном имеют экспоненциально растущую амплитуду (см. [4, теорема 2.53]). В частности, это означает, что нулевое решение (2.4) неустойчиво по Ляпунову. Таким образом, компонента q , начиная с 1, за конечное время превращается в ноль, а решение (2.1) разрушается.

Если решение (2.4) периодическое, то при $y_i^0 = 0$, $i = 1, \dots, n$, компонента $q \equiv 1$ и можно найти $(y_1^0, \dots, y_n^0)$ по крайней мере в окрестности нуля, так что $q(t) > 0$ в пределах периода. Это подразумевает существование окрестности нулевого равновесия в C^1 -норме такой, что решение из этой окрестности сохраняет глобальную гладкость по t .

Мы показываем, что решение (2.4) является периодическим тогда и только тогда, когда система (1.3) является изохронной. Для этой цели мы используем следующий результат, который фактически является обобщением на многомерный случай предложения из [8, с. 8].

Предложение 2.1. Пусть

$$\dot{X}_i = \mathcal{N}_i(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)^T \in C^2(\mathbb{R}), \quad (2.5)$$

— система с неотрицательным интегралом энергии $E(\mathbf{X}) = h = \text{const}$, и существует единственная точка $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^n$ такая, что $E(\bar{\mathbf{X}}) = 0$. Пусть $\mathbf{Z}(t, h)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ — периодическое решение, соответствующее фиксированному уровню $h > 0$ с периодом $T(h)$. Тогда решения системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{N}_i(\mathbf{Z}(t, h))}{\partial X_j} x_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

являются $T(h)$ -периодическими тогда и только тогда, когда $T'(h) = 0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $\mathbf{Z}_h$ является решением системы (2.6) с любыми начальными данными $\mathbf{X}^0$ для системы (2.5). Найдем условие периодичности для $\mathbf{Z}_h$, т. е. $\mathbf{Z}_h(t, h) = \mathbf{Z}_h(t + T(h), h)$.

Обозначим через $\mathbf{Z}'_k$, $k = 1, 2$, производные по первому и второму аргументам, соответственно. Поскольку $\mathbf{Z}(t, h) = \mathbf{Z}(t + T(h), h)$, то

$$\mathbf{Z}_h(t, h) = \frac{d\mathbf{Z}(t, h)}{dh} = \frac{d\mathbf{Z}(t + T(h), h)}{dh} = \mathbf{Z}'_1(t + T(h), h)T'(h) + \mathbf{Z}'_2(t + T(h), h).$$

Заметим, что $\mathbf{Z}'_1(t + T(h), h) = \mathbf{Z}_t(t + T(h), h) = \mathcal{N}(\mathbf{Z}(t, h)) \neq 0$ тождественно, и $\mathbf{Z}'_2(t + T(h), h) = \mathbf{Z}_h(t + T(h), h)$. Таким образом, если $T'(h) \neq 0$, то $\mathbf{Z}_h(t + T(h), h) \neq \mathbf{Z}_h(t, h)$, и наоборот. Это доказывает предложение. $\square$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 достаточно отметить, что систему (1.3) можно рассматривать как систему (2.5) при $\mathbf{X} = (Q, S_1, \dots, S_n)^T$, а систему (2.4) рассматривать как систему (2.6) при $\mathbf{x} = (q, y_1, \dots, y_n)^T$.

Замечание 2.1. Подчеркнем, что требование существования нулевого равновесия системы (1.1) является существенным. Без этого требования, даже если система (1.3) имеет изохронное

положение равновесия, глобально гладких решений может вообще не быть. Действительно, рассмотрим уравнение Хопфа с потенциалом

$$Y_t + Y Y_x = -x, \quad Y = Y(t, x).$$

Система характеристик (1.3) имеет вид

$$\dot{x} = Y, \quad \dot{Y} = -x,$$

совпадает с уравнениями гармонического осциллятора и имеет изохронный центр в начале координат. Тем не менее, вдоль характеристик производная $y = Y_x$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = -y^2 - 1$ и, очевидно, стремится к $-\infty$ при любых начальных условиях.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОХРОННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

История изучения изохронных систем обыкновенных дифференциальных уравнений очень долгая. Со времен Пуанкаре известно, что если система имеет изохронное положение равновесия, то ее можно линеаризовать (см., например [18]). Однако на практике найти преобразование, позволяющее линеаризовать систему, порой гораздо сложнее, чем найти альтернативные способы доказательства ее изохронности. Для систем на плоскости есть результаты такого рода. Их можно применять к системам, возникающим естественным образом (как это произошло в случае с системой (1.5)). Изохронную систему естественного происхождения найти сложно, но, если речь идет о проектировании изохронных систем, не имеющих никакого отношения к реальной физике, то вопрос решается достаточно просто.

Например, мы можем взять систему, соответствующую линейному осциллятору $\dot{X}_1 = X_2$, $\dot{X}_2 = -X_1$, и рассмотреть обратимое гладкое преобразование $X_1 = F_1(Z_1, Z_2)$, $X_2 = F_2(Z_1, Z_2)$ такое, что $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$. Тогда изохронным центром будет начало новой системы

$$\dot{Z}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \text{Det} \begin{pmatrix} (F_1)_1 & (F_1)_2 \\ (F_2)_1 & (F_2)_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \text{Det} \begin{pmatrix} F_2 & (F_1)_2 \\ -F_1 & (F_2)_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \text{Det} \begin{pmatrix} (F_1)_1 & F_2 \\ (F_2)_1 & -F_1 \end{pmatrix},$$

где $(F_i)_j$ — производная $F_i(Z_1, Z_2)$ по компоненте j , $i, j = 1, 2$.

Формально мы можем выбрать любую изохронную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве (1.3) и построить на ее основе систему (1.1). Если построенная таким образом система имеет тривиальное решение, то она удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Например, книга [2] посвящена различным методам построения изохронных систем. Таким образом, если не привязываться к физике, изохронных систем оказывается довольно много, тогда как «... в реальном мире примеры чисто изохронного поведения довольно редки — иначе жизнь была бы довольно скучной» [2]. В то же время, даже в задаче N тел можно построить явное аналитическое решение, получив изохронные колебания специальным подбором потенциала. Среди физически содержательных задач отметим также случаи изохронности для так называемых PDM-осцилляторов [16]. Критерий изохронности гамильтоновой системы с одной степенью свободы был получен в [1, 9].

3.1. Однородные левые части. Мы сосредоточимся на частном случае, когда система (1.3) имеет вид

$$\dot{x} = Q(x, \mathbf{Y}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}).$$

Здесь вторая часть $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(\mathbf{Y})$ отделена от всей системы, а поведение $x(t)$ наследуется от $\mathbf{Y}$. Этот случай можно в некоторой степени применить к колебаниям холодной плазмы.

Пусть вектор $\mathbf{Y}$ состоит из двух компонент ($n = 2$). В этом случае нам нужно изучить проблему центра на плоскости, и есть много результатов по изохронности (см., например, [7, 10, 12, 14, 18] и содержащуюся там библиографию). В частности, критерий Сабатини [23] очень полезен для двумерных систем, которые можно свести к уравнению Лянара

$$\ddot{z} + f(z)\dot{z} + g(z) = 0. \quad (3.1)$$

Например, системы

$$\dot{Y}_1 = Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -g(Y_1) - f(Y_1)Y_2$$

и

$$\dot{Y}_1 = Y_2 - F(Y_1), \quad \dot{Y}_2 = -g(Y_1), \quad F(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Справедлива следующая теорема [23].

Теорема 3.1. Пусть функции f, g — аналитические, g — нечетная, $f(0) = g(0) = 0$, $g'(0) > 0$. Тогда $\mathcal{O} = (y, \dot{y}) = (0, 0)$ является центром тогда и только тогда, когда f — нечетная, и является изохронным центром для (3.1) тогда и только тогда, когда

$$\tau(z) := \left(\int_0^z s f(s) ds \right)^2 - z^3 (g(z) - g'(0)z) = 0.$$

4. ПРИМЕРЫ

4.1. Как стабилизировать нерелятивистские радиальные колебания в любых размерностях? Рассмотрим систему (1.5), описывающую радиально-симметричные нерелятивистские плазменные колебания в d -мерном пространстве. Переименуем r в x и G, F в Y_1, Y_2 , соответственно. Таким образом, система (1.3) здесь имеет вид

$$\dot{x} = xY_2, \quad \dot{Y}_1 = Y_2 - dY_1Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -Y_1 - Y_2^2. \quad (4.1)$$

Последние два уравнения сводятся к

$$\ddot{Y}_2 + (2 + d)Y_2\dot{Y}_2 + Y_2 + dY_2^3 = 0,$$

что является уравнением Лъенара, поэтому мы можем применить теорему 3.1. Мы видим, что

$$\tau(Y_2) := ((2 + d)^2 - 9d) \frac{Y_2^6}{2},$$

поэтому $\tau(Y_2) = 0$ подразумевает $d = 1$ или $d = 4$.

Мы изучаем следующий вопрос: какую зависящую от скорости силу $\mathbf{F}(\mathbf{V}, r)$ следует добавить в правую часть первого уравнения (1.4), чтобы обеспечить изохронность колебаний и, следовательно, возможность существования глобально гладких возмущений тривиального стационарного состояния в произвольной размерности? Легко видеть, что нам необходимо откалибровать коэффициенты системы (4.1) в зависимости от d .

Прежде всего, обозначим $L(x, Y_2) = \frac{1}{r} \mathbf{F}(\mathbf{V}, r)|_{r=x} = \frac{1}{r} \mathbf{F}(rY_2, r)|_{r=x}$. Тогда (4.1) примет вид

$$\dot{x} = xY_2, \quad \dot{Y}_1 = Y_2 - dY_1Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -Y_1 - Y_2^2 - L(x, Y_2).$$

Стандартные вычисления показывают, что для получения уравнения Лъенара нам нужно потребовать $L = L(Y_2)$, и если требуется получить $\tau(Y_2) = 0$, то нужно положить $L = \gamma Y_2^2$, $\gamma = \text{const}$. В этом случае $\tau(Y_2) = 0$, если γ является корнем квадратного уравнения

$$(2(1 - \gamma) + d)^2 - 9d(1 - \gamma) = 0,$$

то есть $\gamma = 1 - d$ или $\gamma = 1 - \frac{d}{4}$. Соответствующий член силы равен

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}, r) = \gamma \frac{|\mathbf{V}|^2}{r}.$$

Возникает соблазн интерпретировать этот член как нечто вроде аэродинамического трения, но это не так, поскольку трение направлено против скорости и должно быть пропорционально $-\mathbf{V}|\mathbf{V}|$. Более того, наличие трения всегда связано с затуханием интеграла энергии, что несовместимо с существованием центра на плоскости (G, F) . В действительности этот калибровочный член не имеет физического смысла и означает лишь то, что скорость должна быть специально замедлена или увеличена на разных стадиях колебаний.

4.2. Можно ли стабилизировать релятивистские колебания в $1D$? Система уравнений Эйлера—Пуассона, описывающая поведение релятивистской холодной плазмы в $\mathbb{R}$ с фоном переменной плотности в случае отталкивания имеет следующий вид [6]:

$$P_t + (V \cdot \nabla)P = -E, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \quad E = c(x) - \rho, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}.$$

Здесь x и t — безразмерные координаты в пространстве и времени, соответственно. Переменная P описывает импульс электрона, V — скорость электрона, E — функция, характеризующая электрическое поле, $\rho > 0$ — плотность электронов. Фиксированная C^1 -гладкая функция $c(x) > 0$ — фон плотности, или так называемый допинг-профиль. В простейшем случае $c(x) = 1$.

Используя эту систему, приходим к уравнениям, описывающим плоские одномерные релятивистские плазменные колебания

$$P_t + V P_x + E = 0, \quad E_t + V E_x - V c(x) = 0, \quad V = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} \quad (4.2)$$

с начальными условиями

$$P(x, 0) = P_0(x), \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Таким образом, вдоль характеристик $x = x(t)$ решение $(V(x(t)), E(x(t)))$ начиная с точки $x_0 \in \mathbb{R}$ подчиняется системе ОДУ

$$\dot{x} = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}}, \quad \dot{P} = -E, \quad \dot{E} = c(x) \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} \quad (4.4)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad P(0) = P_0(x_0), \quad E(0) = E_0(x_0).$$

Докажем несколько предложений, позволяющих понять свойства простых релятивистских колебаний.

Предложение 4.1. *В случае постоянного допинг-профиля $c(x) = c_0 > 0$ любое нетривиальное классическое решение задачи Коши (4.2), (4.3), которое не является простой волной $P = P(E)$, разрушается за конечное время.*

Доказательство. Из двух последних уравнений (4.4) имеем

$$\ddot{P} + c_0 \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} = 0, \quad (4.5)$$

что является частным случаем уравнения Льенара (3.1). Легко видеть, что $\tau(P) \neq 0$, поэтому теорема 3.1 подразумевает, что колебания P не изохронны. Из первых уравнений (4.4) заключаем, что колебания $x(t)$ также не изохронны. Таким образом, из леммы 1.1 заключаем, что характеристики обязательно пересекаются и решение разрушается за конечное время для общих начальных данных. В [22] показано, что для простой волны можно выбрать окрестность начала координат $P = G = 0$, соответствующую гладкому решению. $\square$

Рассмотрим аналог системы (1.4) с силой такой, что первое уравнение принимает вид

$$P_t + (V \cdot \nabla)P = -E + \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ — внешняя сила. Мы предполагаем, что $\mathcal{L}'(0) = 0$, $\mathcal{L}'(P)$ — нечетное число, чтобы сохранить колебательный характер системы под воздействием внешней силы.

Предложение 4.2. *Никакая зависящая от импульса (и скорости) сила $\mathcal{L}(P)$ такая, что $\mathcal{L}'(0) = 0$ и $\mathcal{L}'(P)$ нечетна, не может сделать колебания (1.4) изохронными в случае постоянного допинг-профиля.*

Доказательство. Рассмотрим соответствующий аналог (4.5):

$$\ddot{P} + \mathcal{L}'(P)\dot{P} + c_0 \frac{P}{\sqrt{1 + P^2}} = 0.$$

Таким образом,

$$\tau(P) = \left(\int_0^P s \mathcal{L}'(s) ds \right)^2 - c_0 P^4 \frac{1 - \sqrt{1 + P^2}}{\sqrt{1 + P^2}}.$$

Так как $1 - \sqrt{1 + P^2} < 0$ и $c_0 > 0$, то $\tau > 0$ для всех нетривиальных P . $\square$

В [20] было доказано, что в случае нерелятивистских колебаний холодной плазмы система характеристик изохронна (и, следовательно, глобально гладкие решения возможны только для постоянного допинг-профиля). Далее, как следует из предложения 4.1, релятивистские колебания холодной плазмы для постоянного допинг-профиля в основном разрушаются. Поэтому возникает вопрос: можно ли найти переменную $c(x)$ такую, чтобы колебания не разрушались? Другими словами, может ли система (4.4) быть изохронной для некоторой $c(x)$? Следующее предложение утверждает, что ответ отрицательный.

Предложение 4.3. Для любого гладкого допинг-профиля $c(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, любое нетривиальное классическое решение задачи Коши (4.2), (4.3) разрушается за конечное время.

Доказательство. Из (4.4) имеем

$$E(x(t)) = \int_{x_0}^x c(\xi) d\xi + E_0(x_0), \quad P^2 = \frac{(\dot{x})^2}{1 - (\dot{x})^2}, \quad \ddot{x} = \frac{1}{(1 + P^2)^{\frac{3}{2}}} \dot{P},$$

поэтому

$$\ddot{x} = -E(x) (1 - (\dot{x})^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.6)$$

Заметим, что $|\dot{x}| < 1$. Предположим для простоты, что $x = 0$ — точка равновесия.

Если обозначить $\dot{x} = s(x)$ и $z(x) = s^2$, то получим

$$z' = -2E(x) (1 - z)^{\frac{3}{2}},$$

и

$$1 - (\dot{x})^2 = 1 - z = \frac{1}{\Phi^2(x)}, \quad \Phi(x) = - \int_0^x E(\xi) d\xi + E_0 + (1 + P_0^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \Phi'(x) = -E(x), \quad \Phi''(x) = c(x).$$

Вместе с (4.6) это влечёт

$$\ddot{x} = \frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)}, \quad (4.7)$$

что соответствует плоской гамильтоновой системе с гамильтонианом $\mathcal{V}$ таким, что $g(x) = \mathcal{V}' = -\frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)}$.

1. Если предположить, что $g(x)$ является *нечетной* и аналитичной в окрестности $x = 0$, то мы можем воспользоваться теоремой 3.1 и вычислить

$$\tau(x) = -x^3 \left(-\frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)} - K x \right), \quad K = - \left(\frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)} \right)' \Big|_{x=0} > 0.$$

Таким образом, $\tau(x) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{K x^2 + M}}, \quad M = \text{const}.$$

Заметим, что в этом случае $\frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)} = -Kx$, поэтому уравнение (4.7) линейно и инвариантно относительно сдвига x_0 . Учитывая сдвиг начальной точки в x_0 , имеем

$$c(x) = \pm \frac{K(M - 2K(x - x_0)^2)}{(M + K(x - x_0)^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Однако мы видим, что $c(x)$ не может быть положительной для всех $x \in \mathbb{R}$. Более того, для обеспечения изохронности $c(x)$ должна зависеть от начальной точки траектории, что противоречит требованию, чтобы допинг-профиль был функцией только пространственной координаты.

2. Известно, что предположение о нечетности $g(x)$ не является необходимым для существования изохронного центра гамильтоновой системы. Таким образом, мы можем воспользоваться общим результатом [9] для класса непрерывных функций g .

Мы называем C^1 -диффеоморфизм H открытого интервала $J \subseteq \mathbb{R}$ на себя *инволюцией*, если

$$H^{-1} = H, \quad 0 \in J, \quad H(0) = 0, \quad H'(0) = -1.$$

Это означает, что график функции $y = H(x)$ симметричен относительно главной диагонали $y = x$.

Теорема 4.1. Пусть $H : J \rightarrow J$ — инволюция, $\omega > 0$, и определим

$$V(x) = \frac{\omega}{8} (x - H(x))^2, \quad x \in J. \quad (4.8)$$

Тогда начало координат является изохронным центром для $\ddot{x} = -g(x)$, где $g(x) = V'(x)$, с тем же периодом $\frac{2\pi}{\omega}$.

Наоборот, пусть g непрерывно в окрестности $0 \in \mathbb{R}$, $g(0) = 0$ и предположим, что $g'(0) > 0$ и начало координат является изохронным центром для $\ddot{x} = -g(x)$. Тогда существуют открытый интервал J , $0 \in J$, который является подмножеством области определения g , и инволюция $H : J \rightarrow J$, такая, что (4.8) выполняется при

$$V(x) = \int_0^x g(s) ds, \quad \omega = \sqrt{g'(0)}.$$

В статье [9] содержится множество примеров для H . В нашем случае (4.7) мы имеем

$$M - \frac{1}{2\Phi^2(x)} = -\frac{\omega}{8} (x - H(x))^2, \quad M = \frac{1}{2\Phi^2(0)} > 0, \quad \Phi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2M + \frac{\omega}{4} (x - x_0 - H(x - x_0))^2}}.$$

Таким образом, в этом случае $c(x)$ снова зависит от начальной точки траектории и не удовлетворяет требованиям. Таким образом, доказательство завершено. $\square$

5. ОБСУЖДЕНИЕ

1. Если колебательная система изохронна, это фактически означает, что она имеет дополнительный первый интеграл. В контексте гамильтоновых систем это свойство называется *суперинтегрируемостью* и имеет многочисленные приложения [15].

2. Представленные здесь методы могут быть распространены на системы уравнений в частных производных для $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ вида

$$(Y_i)_t + \sum_{j=0}^m a_j(\mathbf{Y}, \mathbf{x})(Y_i)_{x_j} = S_i(\mathbf{Y}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.1)$$

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\mathbf{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. В частности, при $n = 1$ это одно уравнение. Динамика вдоль характеристик определяется системой $n + m$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}). \quad (5.2)$$

Если равновесие (5.2) является изохронным, то вполне вероятно, что глобально гладкие решения (5.1) могут быть найдены вблизи нулевого устойчивого состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трещев Д. В. Об изохронности // Тр. МИАН. — 2023. — 322. — С. 206–232.
2. Calogero F. Isochronous systems. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2008.
3. Carrillo J. A., Shu R. Existence of radial global smooth solutions to the pressureless Euler–Poisson equations with quadratic confinement // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2023. — 247. — 73.
4. Chicone C. Ordinary differential equations with applications. — New York: Springer, 1999.
5. Dafermos C. M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2016.

6. *Davidson R. C.* Methods in nonlinear plasma theory. — New York: Acad. Press, 1972.
7. *Dong G., Liu C., Yang J.* On the topology of isochronous centers of hamiltonian differential systems// Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. — 2019. — 29, № 6. — 1950099.
8. *Gasull A.* On isochronous Hill equations// Workshop on Periodic Orbits, Bellaterra, CRM, Feb. 7–9, 2024. — <https://www.gsd.uab.cat/new?controller=publications&task=download&ID=slides.pdf-7955f73fa05752ccdb4225feda1aac57.pdf&OD=slides.pdf>
9. *Gorni G., Zampieri G.* Global isochronous potentials// Qual. Theory Dyn. Syst. — 2013. — 12, № 2. — C. 407–416.
10. *Hill J. M., Lloyd N. G., Pearson J. M.* Algorithmic derivation of isochronicity conditions// Nonlinear Anal. — 2007. — 67, № 1. — C. 52–69.
11. *Engelberg S., Liu H., Tadmor E.* Critical thresholds in Euler–Poisson equations// Indiana Univ. Math. J. — 2001. — 50. — C. 109–157.
12. *Fernandes W., Romanovski V. G., Sultanova M., Tang Y.* Isochronicity and linearizability of a planar cubic system// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — 450, № 1. — C. 795–813.
13. *Freiling G.* A survey of nonsymmetric Riccati equations// Linear Algebra Appl. — 2002. — 351–352. — C. 243–270.
14. *Kovačič I.* Nonlinear isochronous oscillators// B c6.: «Nonlinear Oscillations». — Cham: Springer, 2020. — C. 189–222.
15. *Miller W. Jr, Post S., Winternitz P.* Classical and quantum superintegrability with applications// J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — 46. — 423001.
16. *Mustafa O.* Isochronous n -dimensional nonlinear PDM-oscillators: linearizability, invariance and exact solvability// Eur. Phys. J. Plus. — 2021. — 136. — 249.
17. *Reid W. T.* Riccati differential equations. — New York: Academic Press, 1972.
18. *Romanovski V. G., Shafer D. S.* The center and cyclicity problems: A computational algebra approach. — Boston: Birkhauser, 2009.
19. *Rozanova O. S.* On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2023. — 443. — 133578.
20. *Rozanova O. S.* The repulsive Euler–Poisson equations with variable doping profile// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2024. — 444. — 134454.
21. *Rozanova O. S.* Criterion of singularity formation for radial solutions of the pressureless Euler–Poisson equations in exceptional dimension// J. Math. Anal. Appl. — 2025. — 548, № 2. — 129394.
22. *Rozanova O. S., Chizhonkov E. V.* On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma// Z. Angew. Math. Phys. — 2021. — 72, № 1. — 13.
23. *Sabatini M.* On the period function of Liénard systems// J. Differ. Equ. — 1999. — 152. — C. 467–487.

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

UDC 517.956

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158

EDN: VFGYMJ

On globally smooth oscillating solutions of nonstrictly hyperbolic systems

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. A class of nonstrictly hyperbolic systems of quasilinear equations with oscillatory solutions of the Cauchy problem, globally smooth in time in some open neighborhood of the zero stationary state, is found. For such systems, the period of oscillation of solutions does not depend on the initial point of the Lagrangian trajectory. The question of the possibility of constructing these systems in a physical context is also discussed, and nonrelativistic and relativistic equations of cold plasma are studied from this point of view.

Keywords: nonstrictly hyperbolic systems, quasilinear equations, Cauchy problem, oscillatory solutions, Lagrangian trajectory, cold plasma equations.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author thanks V. V. Bykov for discussion of various aspects of isochronous oscillations. Supported by grant RSF 23-11-00056 through RUDN University.

For citation: O. S. Rozanova, “On globally smooth oscillating solutions of nonstrictly hyperbolic systems,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 147–158. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158>

REFERENCES

1. D. V. Treschev, “Ob izokhronnosti” [On isochronicity] *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Inst.], 2023, **322**, 206–232 (in Russian).
2. F. Calogero, *Isochronous Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
3. J. A. Carrillo and R. Shu, “Existence of radial global smooth solutions to the pressureless Euler–Poisson equations with quadratic confinement,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2023, **247**, 73.
4. C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, New York, 1999.
5. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2016.
6. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Acad. Press, New York, 1972.
7. G. Dong, C. Liu, and J. Yang, “On the topology of isochronous centers of hamiltonian differential systems,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2019, **29**, No. 6, 1950099.
8. A. Gasull, “On isochronous Hill equations,” *Workshop on Periodic Orbits*, Bellaterra, CRM, Feb. 7–9, 2024 (available online: <https://www.gsd.uab.cat/new?controller=publications&task=download&ID=slides.pdf-7955f73fa05752ccdb4225feda1aac57.pdf&OD=slides.pdf>)
9. G. Gorni and G. Zampieri, “Global isochronous potentials,” *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2013, **12**, No. 2, 407–416.
10. J. M. Hill, N. G. Lloyd, and J. M. Pearson, “Algorithmic derivation of isochronicity conditions,” *Nonlinear Anal.*, 2007, **67**, No. 1, 52–69.
11. S. Engelberg, H. Liu, and E. Tadmor, “Critical thresholds in Euler–Poisson equations,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2001, **50**, 109–157.
12. W. Fernandes, V. G. Romanovski, M. Sultanova, and Y. Tang, “Isochronicity and linearizability of a planar cubic system,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, **450**, № 1, 795–813.
13. G. Freiling, “A survey of nonsymmetric Riccati equations,” *Linear Algebra Appl.*, 2002, **351–352**, 243–270.



14. I. Kovačić, “Nonlinear isochronous oscillators,” In: *Nonlinear Oscillations*, Springer, Cham, pp. 189–222, 2020.
15. W. Miller Jr, S. Post, and P. Winternitz, “Classical and quantum superintegrability with applications,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2013, **46**, 423001.
16. O. Mustafa, “Isochronous n -dimensional nonlinear PDM-oscillators: linearizability, invariance and exact solvability,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, 249.
17. W. T. Reid, *Riccati Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972.
18. V. G. Romanovski and D. S. Shafer, *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*, Birkhauser, Boston, 2009.
19. O. S. Rozanova, “On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2023, **443**, 133578.
20. O. S. Rozanova, “The repulsive Euler–Poisson equations with variable doping profile,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2024, **444**, 134454.
21. O. S. Rozanova, “Criterion of singularity formation for radial solutions of the pressureless Euler–Poisson equations in exceptional dimension,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2025, **548**, No. 2, 129394.
22. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, “On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2021, **72**, No. 1, 13.
23. M. Sabatini, “On the period function of Liénard systems,” *J. Differ. Equ.*, 1999, **152**, 467–487.

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

УДК 519.62

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-159-175

EDN: VHWIQO

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИММУННОГО ОТВЕТА НА ВИЧ

П. С. СУРНИН¹, М. А. ШИШЛЕНИН¹, Г. А. БОЧАРОВ²

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

Аннотация. Вирус иммунодефицита человека первого типа (ВИЧ) поражает иммунную систему и, тем самым, ослабляет защиту от других инфекций и некоторых типов рака, с которыми может справиться иммунная система здорового человека. Несмотря на применение препаратов высокоактивной антиретровирусной терапии (ВААРТ), пока не существует методов, позволяющих добиться полного удаления ВИЧ из организма зараженного человека. Однако благодаря расширению доступа к средствам профилактики, диагностики и лечения ВИЧ с помощью ВААРТ, ВИЧ-инфекция перешла в категорию контролируемых хронических заболеваний. Для исследования кинетических механизмов патогенеза ВИЧ-инфекции и развития персонализированных подходов к лечению на основе комбинированной иммунотерапии активно используются методы математического моделирования. Одной из центральных задач моделирования ВИЧ-инфекции является определение индивидуальных параметров реагирования иммунной системы при острой фазе развития ВИЧ-инфекции на основе решения обратных задач.

Для исследования кинетики процессов патогенеза ВИЧ-инфекции использовалась математическая модель из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений, сформулированная Н. Т. Bank и др. [5]. Система уравнений модели описывает изменение численности четырех субпопуляций CD4+ Т-клеток и двух типов CD8+ Т-клеток. Особенностью данной модели является рассмотрение латентно-инфицированных CD4+ Т-клеток, которые служат основным резервуаром вирусной популяции. Вирусная нагрузка на организм человека определяется совокупностью популяций инфекционных и неинфекционных вирусных частиц.

Проведено исследование обратной задачи идентификации параметров по данным острой фазы течения ВИЧ-инфекции. В частности, исследована идентифицируемость параметров и проведен анализ чувствительности от входных данных. Обратная задача сведена к задаче минимизации методом эволюционных центров.

Ключевые слова: вирус иммунодефицита человека, ВИЧ, иммунный ответ, система дифференциальных уравнений, обратная задача идентификации параметров, метод эволюционных центров.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа П. С. Сурнина выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281. Работа М. А. Шишленина выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН (тема № FWNF-2024-0001). Работа Г. А. Бочарова выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00116, <https://rscf.ru/project/23-11-00116>).

Для цитирования: П. С. Сурнин, М. А. Шишленин, Г. А. Бочаров. Определение параметров математической модели иммунного ответа на ВИЧ // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 159–175. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-159-175>

ВВЕДЕНИЕ

Вирус иммунодефицита человека первого типа (ВИЧ) — это ретровирус, который заражает $CD4^+$ Т-хелперные клетки и макрофаги иммунной системы организма человека, вызывая системное заболевание, переходящее от острой фазы в хроническую. Хроническая фаза характеризуется развитием иммунодефицита, приводящего данное инфекционное заболевание к терминальной фазе синдрома приобретенного иммунодефицита (СПИД).

ВИЧ-инфекция и СПИД относятся к числу наиболее серьезных проблем общественного здравоохранения в мире, затрагивающих людей всех демографических групп во всем мире [14]. Так, на сегодняшний день этот вирус унес 36.3 миллиона человеческих жизней [21]. Со времени обнаружения в 1987 г. первого россиянина, инфицированного ВИЧ, по 31 декабря 2021 г. общее число выявленных случаев ВИЧ-инфекции среди граждан Российской Федерации (подтвержденных в иммунном блоке) достигло по предварительным данным 1 562 570. На 31 декабря 2021 г. в стране проживало 1 137 596 россиян с лабораторно подтвержденным диагнозом ВИЧ-инфекции, исключая 424 974 больных, умерших за весь период наблюдения (27,2%) [3]. Эпидемиология ВИЧ и проблемы общественного здравоохранения, такие как передача (динамика между хозяевами), остаются важными для изучения.

Несмотря на множество успешных мероприятий в области общественного здравоохранения и клинических вмешательств с момента первого выявления ВИЧ-инфицированных пациентов в 1981 году, лечения по-прежнему нет, и эпидемия ВИЧ/СПИДа продолжает расти. Применяемые методы лечения ВИЧ-инфекции используют средства высокоактивной антиретровирусной терапии (ВААРТ) [9], подавляющие процессы заражения и размножения вирусов, однако не приводящие к полноценному излечению, т. е. восстановлению функций иммунной системы. Важной задачей проводимых исследований являются эффективное использование и совершенствование антиретровирусных препаратов с целью снижения побочных эффектов, а также разработка принципиально новых подходов на основе методов иммунотерапии. Для их реализации необходимо более глубокое понимание поведения вирусной популяции внутри каждого хозяина, включая пути заражения, регуляция процессов иммунной защиты и эффекты лекарств.

При анализе механизмов патогенеза ВИЧ-инфекции и решении задачи прогнозирования ее динамики с учетом индивидуального иммунного статуса пациента иммунологи и вирусологи сталкиваются целым рядом фундаментальных проблем. К ним относятся многовариантность режимов динамики патологических процессов, нелинейность регуляторных связей, гетерогенность и вариабельность популяций клеток врожденного и адаптивного иммунитета, мутация вирусов, формирование пула латентно-инфицированных клеток, в которых скрывается ВИЧ. Их исследование связано с разработкой и применением математических и компьютерных инструментов моделирования иммунных процессов. Математические модели могут помочь в количественной оценке параметров динамических физиологических и иммунологических процессов и соотнесении научных знаний об этих процессах с наблюдаемым поведением пациента.

Математическое моделирование ВИЧ-1 инфекции в организме человека является одним из главных направлений математической иммунологии [8, 10, 16, 20]. В работах [4, 6, 7, 19] разработаны модели ВИЧ-инфекции и исследованы задачи оптимального управления.

Целью данной работы является разработка новых подходов к изучению методами математического моделирования факторов иммунной защиты, определяющих наблюдаемые различия в течении и тяжести ВИЧ-инфекции по клиническим данным пациентов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для изучения динамики ВИЧ-инфекции исследована математическая модель из [5], которая является системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и описывает важные механизмы патогенеза ВИЧ-инфекции, такие как роль Т-клеток памяти $CD4^+$ в формировании резервуара латентно инфицированных клеток, участие $CD4^+$ Т-хелперных клеток в генерации Т-клеток памяти $CD8^+$ и стимуляция антигенами, отличными от ВИЧ.

Выбранная модель [5] характеризуется рядом важных свойств, выделяющих ее среди других классов моделей, которые позже были включены в некоторые из них [18]. В частности, данная

математическая модель учитывает следующие клинически существенные особенности патогенеза инфекции:

- (1) роль CD4+ Т-клеток памяти как резервуара латентно инфицированных клеток,
- (2) участие активированных CD4+ Т-клеток в формировании ВИЧ-1 специфического ответа CD8+ Т-клеток киллеров и генерации клеток памяти,
- (3) влияние хронической иммунной активации.

При этом существенно, что модель калибрована на основе клинических данных за длительные периоды наблюдения.

Уравнения модели описывают популяционную динамику численности следующих компонент инфекционного процесса: клетки-мишени CD4+ Т-клетки (покоящиеся и активированные), зараженные клетки-мишени CD4+ Т-клетки (покоящиеся и активированные), ВИЧ-специфические цитотоксические CD8+ Т-лимфоциты (эффекторы и клетки памяти). Моделируемые компоненты ВИЧ-инфекции перечислены в таб. 1.

ТАБ. 1. Моделируемые характеристики инфекции.

Состояние	Размерность	Описание
T_1	клетки/мл-кровь	неинфицированные активированные CD4+ Т-клетки
T_2	клетки/мл-кровь	неинфицированные покоящиеся CD4+ Т-клетки
I_1	клетки/мл-кровь	инфицированные активированные CD4+ Т-клетки
I_2	клетки/мл-кровь	инфицированные покоящиеся CD4+ Т-клетки
V_I	РНК копии/мл-плазма	инфекционный свободный вирус
V_{NI}	РНК копии/мл-плазма	неинфекционный свободный вирус
E_1	клетки/мл-кровь	ВИЧ-специфические CD8+ Т-клетки эффекторы
E_2	клетки/мл-кровь	ВИЧ-специфические CD8+ Т-клетки памяти

ТАБ. 1. Modeled infection characteristics.

State	Dimension	Description
T_1	cells/ml-blood	uninfected activated CD4+ T cells
T_2	cells/ml-blood	uninfected resting CD4+ T cells
I_1	cells/ml-blood	infected activated CD4+ T cells
I_2	cells/ml-blood	infected resting CD4+ T cells
V_I	RNA copies/ml-plasma	infectious free virus
V_{NI}	RNA copies/ml-plasma	noninfectious free virus
E_1	cells/ml-blood	HIV-specific CD8+ T cell effectors
E_2	cells/ml-blood	HIV-specific CD8+ memory T cells

Математическая модель описывается следующей системой ОДУ:

$$\dot{T}_1 = -d_1 T_1 - (1 - \xi_1(t)) k_1 V_I T_1 - \gamma_T T_1 + p_T \left(\frac{a_T V_I}{V_I + K_V} + a_A \right) T_2, \quad (1.1)$$

$$\dot{T}_2 = -d_2 T_2 - (1 - f \xi_1(t)) k_2 V_I T_2 + \gamma_T T_1 - \left(\frac{a_T V_I}{V_I + K_V} + a_A \right) T_2 + \lambda_T \frac{K_s}{V_I + K_S}, \quad (1.2)$$

$$\dot{I}_1 = -\delta I_1 + (1 - \xi_1(t)) k_1 V_I T_1 - \gamma_T I_1 + p_T \left(\frac{a_T V_I}{V_I + K_V} + a_A \right) I_2 - m E_1 I_1, \quad (1.3)$$

$$\dot{I}_2 = -d_2 I_2 + (1 - f \xi_1(t)) k_2 V_I T_2 + \gamma_T I_1 - \left(\frac{a_T V_I}{V_I + K_V} + a_A \right) I_2, \quad (1.4)$$

$$\dot{V}_I = (1 - \xi_2(t)) 10^3 N_T \delta I_1 - c V_I - 10^3 [(1 - \xi_1(t)) \rho_1 k_1 T_1 + (1 - f \xi_1(t)) \rho_2 k_2 T_2] V_I, \quad (1.5)$$

$$\dot{V}_{NI} = \xi_2(t) 10^3 N_T \delta I_1 - c V_{NI}, \quad (1.6)$$

$$\dot{E}_1 = \lambda_E + \frac{b_{E1} I_1}{I_1 + K_{b1}} E_1 - \frac{d_E I_1}{I_1 + K_d} E_1 - \delta_{E1} E_1 - \gamma_E \frac{T_1 + I_1}{T_1 + I_1 + K_\gamma} E_1 + \frac{p_E a_E V_I}{V_I + K_V} E_2, \quad (1.7)$$

$$\dot{E}_2 = \gamma_E \frac{T_1 + I_1}{T_1 + I_1 + K_\gamma} E_1 + \frac{b_{E2} K_{b2}}{E_2 + K_{b2}} E_2 - \delta_{E2} E_2 - \frac{a_E V_I}{V_I + K_V} E_2, \quad (1.8)$$

со следующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} T_1(0) = T_1^0, \quad T_2(0) = T_2^0, \quad I_1(0) = I_1^0, \quad I_2(0) = I_2^0, \\ V_I(0) = V_I^0, \quad V_{NI}(0) = V_{NI}^0, \quad E_1(0) = E_1^0, \quad E_2(0) = E_2^0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения системы ОДУ (1.1)–(1.8) описывают изменения концентраций соответствующих характеристик инфекции.

Первое уравнение описывает динамику неинфицированных активированных CD4+ Т-клеток под действием процессов естественной гибели, заражения ВИЧ и перехода в состояние покоя, появления в результате активации покоящихся клеток, представленных соответствующими слагаемыми в правой части уравнения.

Второе уравнение для неинфицированных покоящихся CD4+ Т-клеток учитывает действие процессов естественной гибели, заражения ВИЧ, перехода активированных клеток в состояние покоя, активации покоящихся клеток и поступления клеток предшественников из тимуса, соответственно.

Третье уравнение описывает динамику инфицированных активно-продуцирующих ВИЧ CD4+ Т-клеток, обусловленную следующими процессами: естественная гибель, появление в результате заражения активированных CD4+ Т-клеток, переход в состояние покоя (латентной инфекции), активация латентно-инфицированных клеток и разрушение ВИЧ-специфическими эффекторными CD8+ Т-клетками.

Четвертое уравнение для латентно-инфицированных CD4+ Т-клеток описывает вклад процессов естественной гибели, появления в результате заражения покоящихся CD4+ Т-клеток, переход в активированное состояние.

Пятое уравнение описывает изменение концентрации инфекционных ВИЧ, определяемую процессами их размножения в активно-инфицированных клетках, естественной деградации, расхода на заражение активированных и покоящихся CD4+ Т-клеток.

Шестое уравнение описывает динамику неинфекционных вирусных частиц с учетом процессов размножения в активированных зараженных клетках под действием антиретровирусных препаратов, блокирующих процесс созревания инфекционных вирионов, и деградации вирусных частиц.

Динамика ВИЧ-специфических эффекторных CD8+ Т-клеток описывается седьмым уравнением, в правой части которого рассматривается вклад следующих процессов: поступление из тимуса, антиген-индуцированное деление, антиген-индуцированный апоптоз, естественная гибель, дифференцировка в CD8+ Т-клетки памяти, активация и деление покоящихся CD8+ Т-клеток памяти.

Динамика ВИЧ-специфических CD8+ Т-клеток памяти описывается последним уравнением, определяется процессами дифференцировки эффекторных CD8+ Т-клеток в клетки памяти, гомеостатической пролиферации CD8+ Т-клеток памяти, естественной гибели и антиген-индуцированной активацией CD8+ Т-клеток памяти.

Параметризация функций $\xi_1(t) = \epsilon_1 u(t)$ и $\xi_2(t) = \epsilon_2 u(t)$, описывающих эффект лечения, содержит параметры эффективности ϵ_1 и ϵ_2 , а также функцию управления $u(t)$, учитывающую фармакокинетику и фармакодинамику антиретровирусных препаратов. Параметры ϵ_1 и ϵ_2 задают относительную эффективность ингибитора обратной транскриптазы (RTI) и ингибитора протеазы (PI), соответственно. Функция управления (лечения) $u(t)$ ($0 \leq u(t) \leq 1$) описывает в единичном интервале обобщенный уровень антиретровирусных препаратов.

2. ОПИСАНИЕ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

Математическая модель (1.1)–(1.8) использовалась нами для решения обратной задачи по клиническим данным острой фазы ВИЧ-инфекции и далее, в течение года, до начала антиретровирусной терапии, когда имеет место стабилизация динамики вирусной нагрузки (ВН). Данные были взяты из статьи [13]. В данной работе проведен детальный анализ динамики уровня вирусной нагрузки и Т-клеточного иммунитета у группы пациентов. В таб. 2 представлены клинические показатели вирусной нагрузки и CD4+ Т-клеток на миллилитр крови.

Для решения задачи Коши (1.1)–(1.9) необходимы значения параметров модели, которые взяты (в качестве референтного набора) из [5] и приведены в таб. 3.

ТАБ. 2. Значения показателей вирусной нагрузки ($\log_{10}$) и общее число CD4+ Т-клеток для группы пациентов P1–P4.ТАБ. 2. Viral load values ($\log_{10}$) and total CD4+ T cell counts for patient group P1–P4.

Период/Period	Сутки /Day	ВН P1	CD4 P1	ВН P2	CD4 P2	ВН P3	CD4 P3	ВН P4	CD4 P4
Преинфицирование /Preinfection	0	0.0	1200.0	0.0	750.0	0.0	650.0	0.0	610.0
0 Неделя/Week	11	5.89	890.0	5.8	610.0	5.95	450.0	3.9	695.0
1 Неделя/Week	18	7.96	600.0	7.0	450.0	7.3	300.0	5.9	450.0
2 Неделя/Week	25	6.3	420.0	5.98	290.0	6.9	480.0	6.1	605.0
3 Неделя/Week	32	5.91	550.0	4.9	620.0	4.1	550.0	4.0	580.0
4 Неделя/Week	39	5.87	520.0	3.95	590.0	3.9	470.0	3.95	560.0
6 Месяцев/Months	180	4.5	560.0	4.2	470.0	3.0	610.0	3.6	490.0
1 Год/Year	360	5.0	580.0	4.1	580.0	3.5	510.0	3.5	610.0

ТАБ. 3. Значения параметров для модели ВИЧ-инфекции.

Параметр	Значение	Параметр	Значение
d_1	0.02 сутки^{-1}	δ_{E1}	0.1 сутки^{-1}
δ	0.7 сутки^{-1}	p_T	1.2
d_2	0.005 сутки^{-1}	p_E	3
f	$0.34 \in [0, 1]$	b_{E2}	0.001
ϵ_2	$0 \in [0, 1]$	k_1	$10^{-5} \frac{\text{мл-плазма}}{\text{копии сутки}}$
a_A	0 сутки^{-1}	k_2	$10^{-9} \frac{\text{мл-плазма}}{\text{копии сутки}}$
a_T	0.008 сутки^{-1}	λ_T	$7 \frac{\text{мкл-кровь}}{\text{клетка}}$
a_E	0.1 сутки^{-1}	K_S	$10^5 \frac{\text{копии}}{\text{мкл-кровь}}$
γ_E	0.01 сутки^{-1}	N_T	$100 \frac{\text{копии мкл-кровь}}{\text{клетки мл-плазма}}$
δ_{E2}	0.005 сутки^{-1}	λ_E	$0.001 \frac{\text{клетки мл-плазма}}{\text{клетка}}$
ϵ_1	$0 \in [0, 1]$	K_γ	$10 \frac{\text{мкл-кровь}}{\text{клетки}}$
m	$0.01 \frac{\text{мкл-кровь}}{\text{клетки сутки}}$	K_{b1}	$0.1 \frac{\text{клетки}}{\text{мкл-кровь}}$
K_V	$100 \frac{\text{копии}}{\text{мл-плазма}}$	K_{b2}	$100 \frac{\text{клетки}}{\text{мкл-кровь}}$
γ_T	0.005 сутки^{-1}	K_d	$0.5 \frac{\text{клетки}}{\text{мкл-кровь}}$
c	13 сутки^{-1}	b_{E1}	0.3 сутки^{-1}
d_E	0.25 сутки^{-1}		

ТАБ. 3. Parameter values for the HIV infection model.

Parameter	Value	Parameter	Value
d_1	0.02 day^{-1}	δ_{E1}	0.1 day^{-1}
δ	0.7 day^{-1}	p_T	1.2
d_2	0.005 day^{-1}	p_E	3
f	$0.34 \in [0, 1]$	b_{E2}	0.001
ϵ_2	$0 \in [0, 1]$	k_1	$10^{-5} \frac{\text{ml-plasma}}{\text{copies day}}$
a_A	0 day^{-1}	k_2	$10^{-9} \frac{\text{ml-plasma}}{\text{copies day}}$
a_T	0.008 day^{-1}	λ_T	$7 \frac{\text{mcl-blood day}}{\text{cell}}$
a_E	0.1 day^{-1}	K_S	$10^5 \frac{\text{copies}}{\text{ml-plasma}}$
γ_E	0.01 day^{-1}	N_T	$100 \frac{\text{copies ml-blood}}{\text{cells ml-plasma}}$
δ_{E2}	0.005 day^{-1}	λ_E	$0.001 \frac{\text{cell}}{\text{ml-blood day}}$
ϵ_1	$0 \in [0, 1]$	K_γ	$10 \frac{\text{cells}}{\text{ml-blood}}$
m	$0.01 \frac{\text{ml-blood}}{\text{cells day}}$	K_{b1}	$0.1 \frac{\text{cells}}{\text{mcl-blood}}$
K_V	$100 \frac{\text{copies}}{\text{mcl-plasma}}$	K_{b2}	$100 \frac{\text{cells}}{\text{mcl-blood}}$
γ_T	0.005 day^{-1}	K_d	$0.5 \frac{\text{cells}}{\text{mcl-blood}}$
c	13 day^{-1}	b_{E1}	0.3 day^{-1}
d_E	0.25 day^{-1}		

3. АЛГОРИТМ ВЫБОРА НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В первую неделю после заражения (фаза эклипса) обнаружить вирус в организме человека невозможно, но инфекционный процесс развивается и вирус взаимодействует с клетками иммунной системы. При задании начальных условий нами сделаны следующие предположения:

- $|V_I(0)| \leq 10^{-2}$, $V_{NI}(0) = 0$,
- $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$,
- $E_2(0) = 0$ (предполагается, что ВИЧ-специфические CD8+ Т-клетки памяти появляются после контакта с вирусом в организме).

В норме у здорового человека количество CD4+ Т-клеток находится диапазоне от 600 до 1200 клеток на мл крови. В математической модели ВИЧ-инфекции описаны четыре группы CD4+ Т-клеток, которые никак не разделены при анализе биологического материала, поэтому необходимо найти оптимальное значение начальных условий. В таб. 2 для каждого пациента содержится информация о CD4-клетках $\tilde{u}_1(t) = \log_{10}|u_1(t)|$ и вирусной нагрузке $u_2(t)$ в момент времени t . Для математической модели эти значения представляются как суммы $T_{CD4}(t) = T_1(t) + T_2(t) + I_1(t) + I_2(t)$ и $V_L(t) = V_I(t) + V_{NI}(t)$. Чтобы адекватно воспроизвести раннюю фазу динамики ВИЧ, начальное условие задачи Коши записано в виде:

$$\begin{aligned} T_1(0) &= T_{CD4}(0) \cdot \frac{100-p}{100}, & T_2(0) &= T_{CD4}(0) \cdot \frac{p}{100}, & I_1(0) &= 0, & I_2(0) &= 0, \\ V_I(0) &= v, & V_{NI}(0) &= 0, & E_1(0) &= \frac{\lambda_E}{\delta_{E1}}, & E_2(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$p \in \{1, \dots, 99\}, \quad v \in \{10^{-2}, \dots, 10^{-15}\}.$$

Значения p , v берутся такими, чтобы значение $|\log_{10}|T_{CD4}(T)| - \tilde{u}_1(T)| + |\log_{10}|V_L(T)| - u_2(T)|$ было минимально. Функции $T_{CD4}(t)$ и $V_L(t)$ задаются после решения задачи Коши (1.1)–(1.8), (3.1) с параметрами из таб. 3 на временном интервале от 0 до T , который обозначает день, когда был обнаружен вирус. Из таб. 2 значение $T = 11$, что соответствует началу первой недели.

Для численного решения прямой задачи использовалась явная схема Рунге–Кутты пятого порядка [17]. Полученные значения начальных условий (1.9) представлены в таб. 4.

ТАБ. 4. Начальные условия для (P1)–(P4).

ТАБ. 4. Initial conditions for (P1)–(P4).

Пациент/Patient	T_1^0	T_2^0	I_1^0	I_2^0	V_1^0	V_2^0	E_1^0	E_2^0
P1	156.0	1044.0	0.0	0.0	1e-18	0.0	0.01	0.0
P2	158.0	592.0	0.0	0.0	1e-18	0.0	0.01	0.0
P3	156.0	494.0	0.0	0.0	1e-18	0.0	0.01	0.0
P4	146.0	464.0	0.0	0.0	1e-17	0.0	0.01	0.0

4. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Для задачи (1.1)–(1.9) с начальными условиями из таб. 4 применен дисперсионный анализ чувствительности методом Соболя.

Метод Соболя [2] основан на исследовании дисперсии наблюдаемой переменной модели, обусловленной случайным выбором параметров модели. Идея заключается в том, что метод разбивает дисперсию выходных данных модели или системы на слагаемые, которые можно отнести к входным данным (параметры модели) или их комбинациям. Это помогает получить не только чувствительность интересующей переменной модели или функционала от нее к отдельному параметру, но и дает возможность количественно оценить совместное влияние и чувствительность от взаимодействия между параметрами.

Любую модель можно рассматривать как функцию $Y = f(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X}$ — вектор d неопределенных входных данных модели $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$, а Y — скалярное значение, которое выдает модель. Предполагается, что входные данные независимо и равномерно распределены внутри единичного гиперкуба, т. е. $X_i \in [0, 1]$ для $i = 1, 2, \dots, d$. Это предположение не приводит к потере общности,

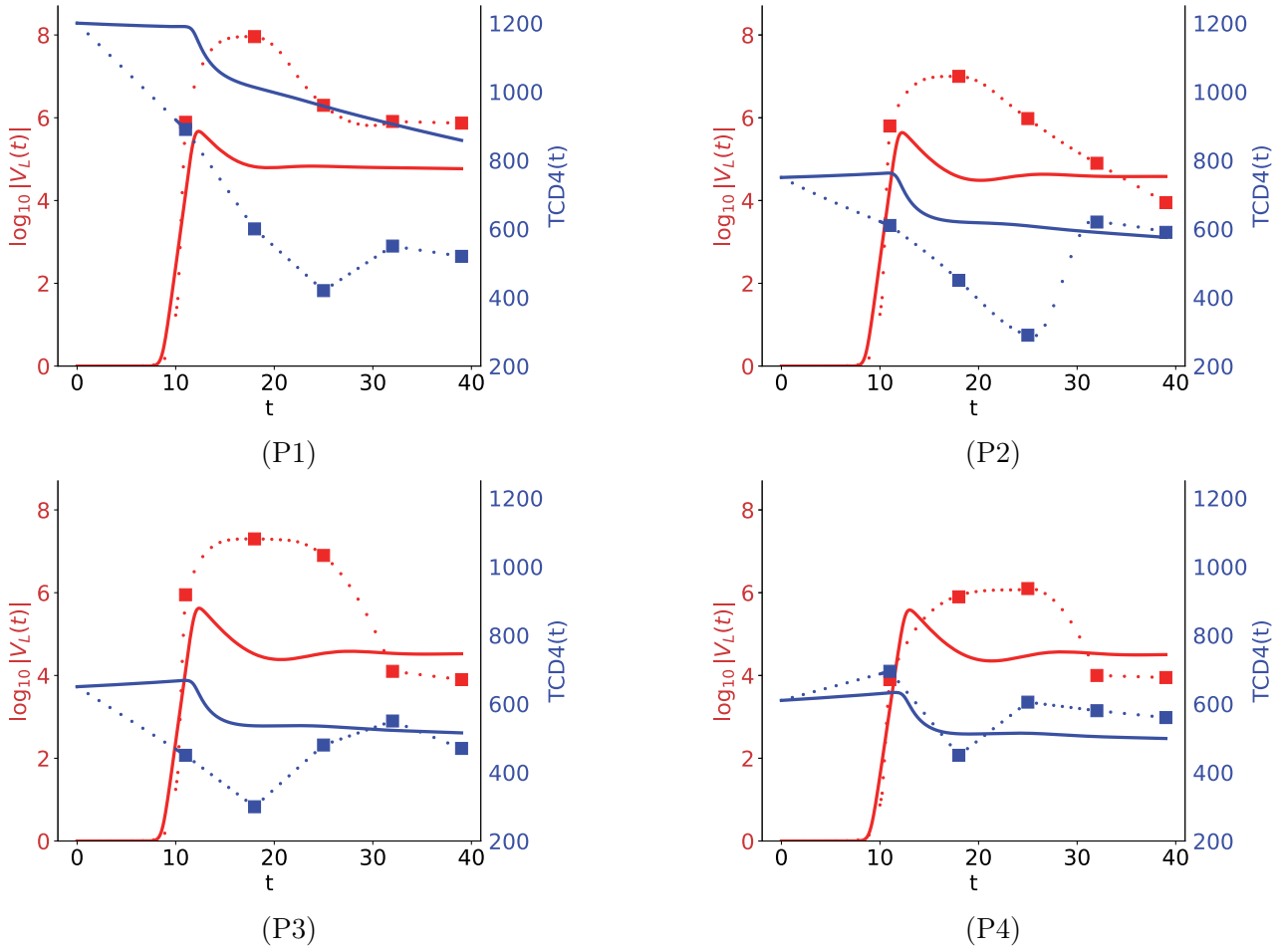


Рис. 1. Изображения (P1)–(P4) иллюстрируют решение прямой задачи с данными из таб. 3 и 4. Красный цвет соответствует вирусной нагрузке V_L , а синий T_{CD4} . Точки в форме квадратов описывают данные из таб. 2.

FIG. 1. Figures (P1)–(P4) illustrate the solution of the direct problem with the data from Tab. 3 and 4. The red color corresponds to the viral load V_L , and the blue color T_{CD4} . The square dots describe the data from Tab. 2.

поскольку любое входное пространство может быть преобразовано в единичный гиперкуб. Тогда $f(\mathbf{X})$ может быть разложено следующим образом:

$$Y = f_0 + \sum_{i=1}^d f_i(X_i) + \sum_{i<j} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1,2,\dots,d}(X_1, X_2, \dots, X_d),$$

где f_0 — константа, f_i — функции от X_i , f_{ij} — функции от X_i и X_j и т. д. Условием такого разложения является то, что все члены функциональной декомпозиции ортогональны:

$$\int_0^1 f_{i_1 i_2 \dots i_s}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_s}) dX_k = 0 \quad \text{для} \quad k = i_1, \dots, i_s.$$

Это приводит к следующим выражениям с условными математическими ожиданиями:

$$\begin{aligned} f_0 &= E(Y), \\ f_i(X_i) &= E(Y|X_i) - f_0, \\ f_{ij}(X_i, X_j) &= E(Y|X_i, X_j) - f_0 - f_i - f_j. \end{aligned}$$

Из данных соотношений следует, что f_i отражает эффект изменения только X_i (известный как основной эффект X_i), а f_{ij} отражает эффект изменения X_i и X_j одновременно, дополнительный к эффекту их индивидуальных вариаций. Это известно как взаимодействие второго порядка. Слагаемые более высокого порядка имеют аналогичные определения. Дополнительно предполагая, что $f(\mathbf{X})$ квадратично интегрируемо, функциональное разложение может быть возведено в квадрат и проинтегрировано, чтобы получить

$$\int f^2(\mathbf{X})d\mathbf{X} - f_0^2 = \sum_{s=1}^d \sum_{i_1 < \dots < i_s}^d \int f_{i_1 \dots i_s}^2 dX_{i_1} \dots dX_{i_s}.$$

Левая часть равна дисперсии Y , а члены правой части являются членами дисперсии, разложенными по множествам X_i . Учитывая это, приходим к выражениям для разложения величины дисперсии

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^d V_i + \sum_{i < j}^d V_{ij} + \dots + V_{12\dots d},$$

где

$$V_i = \text{Var}_{X_i}(E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(Y | X_i)),$$

$$V_{ij} = \text{Var}_{X_{ij}}(E_{\mathbf{X}_{\sim ij}}(Y | X_i, X_j)) - V_i - V_j$$

и т. д. Обозначение $X_{\sim i}$ указывает на набор всех переменных, кроме X_i . Приведенная выше декомпозиция дисперсии показывает, как дисперсия выходных данных модели может быть разложена на слагаемые, относящиеся к каждому входному параметру, а также эффекты взаимодействия между параметрами.

Индексы Соболя «упорядочены», при этом индексы первого порядка задаются выражением $S_i = \frac{V_i}{\text{Var}(Y)}$, характеризую вклад в дисперсию выходной переменной или величину основного эффекта для параметра X_i . Таким образом, они измеряют эффект варьирования X_i отдельно, но усредненный по вариациям других входных параметров. Данный индекс чувствительности масштабируется величиной общей дисперсии, чтобы обеспечить следующую нормализацию:

$$\sum_{i=1}^d S_i + \sum_{i < j}^d S_{ij} + \dots + S_{12\dots d} = 1.$$

Используя индексы более высокого порядка, можно составить представление о важности каждой переменной при определении выходной дисперсии. Однако когда число переменных велико, это требует оценки $2^d - 1$ индексов, что может быть слишком трудоемким с точки зрения вычислений. По этой причине используется показатель, известный как *индекс общего эффекта*, или *индекс общего порядка*:

$$S_{T_i} = \frac{E_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\text{Var}_{X_i}(Y | \mathbf{X}_{\sim i}))}{\text{Var}(Y)} = 1 - \frac{\text{Var}_{\mathbf{X}_{\sim i}}(E_{X_i}(Y | \mathbf{X}_{\sim i}))}{\text{Var}(Y)},$$

который измеряет вклад в выходную дисперсию параметра, включая все дисперсии, вызванные его взаимодействиями любого порядка с любыми другими входными переменными.

Для данной задачи были выбраны границы варьирования параметров следующим образом: если $q_0^i < 1.0$, то $[10^{-10}, 1.0]$, иначе $[10^{\lceil \log_{10}(q_0^i) \rceil - 4}, 10^{\lceil \log_{10}(q_0^i) \rceil + 4}]$. Также фиксировались параметры $f, \epsilon_1, \epsilon_2, a_A$, так как они отвечают за моделирование антиретровирусной терапии и иммунного ответа на инфекцию, не являющейся ВИЧ. При сэмпировании для пространства параметров использовался метод выборки квази-Монте-Карло, который использует последовательность с низким расхождением.

Анализ чувствительности проводился на интервале времени $(0, 39)$ с числом точек $N = 100$. Результаты метода сначала были усреднены на интервале для каждого уравнения в отдельности. Затем усреднялись значения для каждого уравнения разных случаев начальных условий (P1)–(P4). Конечный результат усреднения представлен на рис. 2.

Из гистограммы 2 видно, что наиболее чувствительными параметрами к изменению начальных данных являются m , отвечающий за интенсивность удаления I_1 иммунными эффекторными клетками E_1 , и параметр N_T , учитывающий количество копий РНК, полученных в ходе вирусного

почкования. В ходе решения обратной задачи на это обращено внимание с помощью фиксирования параметра m и уменьшения интервала варьирования параметра N_T .

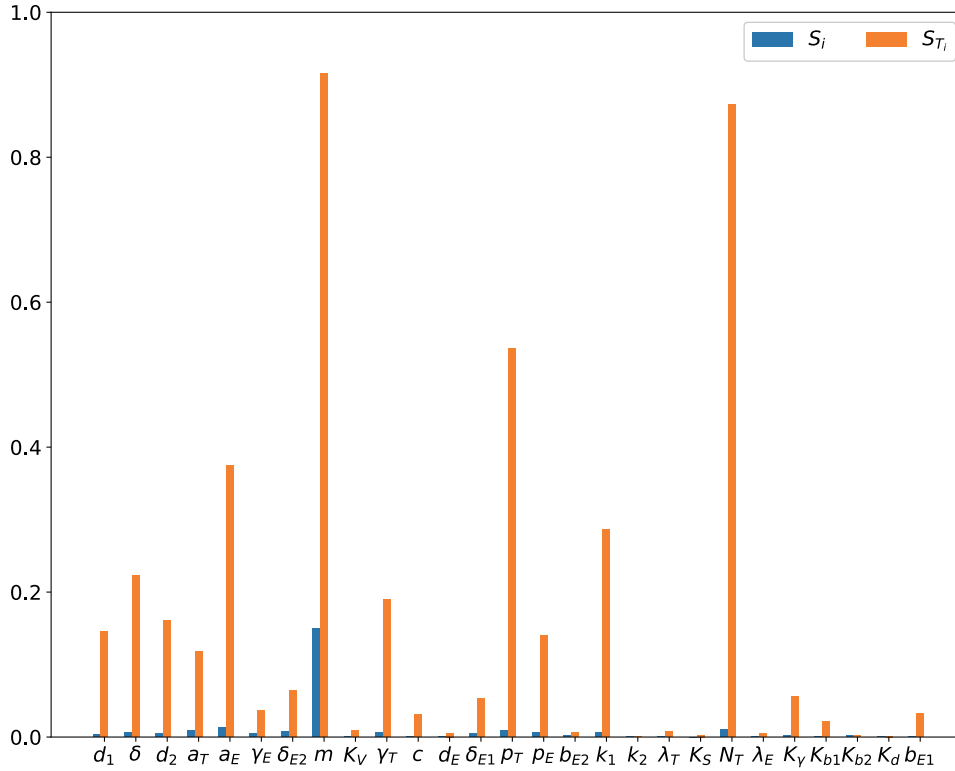


Рис. 2. Гистограмма иллюстрирует индекс общего порядка S_{T_i} и индекс первого порядка S_i для каждого параметра математической модели.

FIG. 2. The histogram illustrates the total order index S_{T_i} and the first-order index S_i for each parameter of the mathematical model.

5. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратная задача для системы (1.1)–(1.8), (3.1) заключается в идентификации параметров (перечисленных в таб. 3) по дополнительной информации [12]. При решении обратной задачи определялись следующие параметры: $d_2, a_T, c, N_T, \lambda_T$.

Введем дополнительные функции z_1 и z_2 , которые описывают наблюдаемые переменные — CD4+ Т-клетки и вирусную нагрузку — в момент времени t при заданном векторе параметров q :

$$\begin{aligned} z_1(t; q) &= \log_{10}(|T_1(t; q) + T_2(t; q) + I_1(t; q) + I_2(t; q) + 1|), \\ z_2(t; q) &= \log_{10}(|V_I(t; q) + V_{NI}(t; q) + 1|). \end{aligned}$$

Дополнительно введем функции $\tilde{y}_1(t) = \log_{10} |y_1(t)|$ и $y_2(t)$, которые описывают значения CD4+ Т-клеток и вирусной нагрузки V_L в момент времени t . Для решения обратной задачи — для получения функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ по данным из таб. 2 — была проведена интерполяция. К данным CD4+ Т-клеток была применена линейная интерполяция, а к данным вирусной нагрузки квадратичная интерполяция.

Обратная задача состоит в том, чтобы найти в области допустимых значений параметров Q такой вектор параметров q , который бы для функционала $J(q)$ давал минимальное значение:

$$J(q) = \sum_{i=1}^{N_1} (\tilde{y}_1^i - z_1(t_1^i; q))^2 + \sum_{i=1}^{N_2} (y_2^i - z_2(t_2^i; q))^2 \rightarrow \min_{q \in Q}.$$

Выбор функционала соответствует предположению о лог-нормальности ошибок измерений.

6. ОПИСАНИЕ РАСЧЕТОВ

Данные в таб. 2 представлены с интервалом времени 7 дней, где значения могут расти или убывать. Нами предложено разбить отрезок времени $[0, 40]$ дней на 5 интервалов $i_1, \dots, i_5$. В каждом интервале будет решаться соответствующая обратная задача со своими начальными данными для системы ОДУ модели.

Для минимизации целевого функционала $J(q)$ использовался алгоритм эволюционных центров [15]. В качестве начального приближения q_0 использовался вектор, составленный из значений таб. 3. Применение априорной информации об искомом решении позволяет повысить устойчивость работы алгоритма и восстановления параметров и сильно сократить количество итераций [1, 11]. Область допустимых значений Q_i для каждого параметра q^i выбиралась так, что если $q^i < 1.0$, то $Q_i = [10^{-10}, 1.0]$, иначе $Q_i = [10^{\lceil \log_{10}(q_i) \rceil - 2}, 10^{\lceil \log_{10}(q_i) \rceil + 2}]$.

Алгоритм эволюционных центров является методом стохастической оптимизации, который сходится к точке глобального минимума с некоторой вероятностью. При решении оптимизационной задачи алгоритм работал при размере шага $\eta_{max} = 2$, количестве векторов для генерации центра масс $K = 7$, размере популяции $N = 20$. Для устойчивости алгоритма делался многократный рестарт и выбиралось минимальное по функционалу приближенное решение обратной задачи.

ТАБ. 5. Значения параметров, полученные в ходе решения обратной задачи для случаев (P1)–(P4).

ТАБ. 5. Parameter values obtained during the solution of the inverse problem for cases (P1)–(P4).

Параметр/Parameter	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
P1					
d_2	0.035	0.036	0.038	0.005	0.005
λ_T	7	7	7	210.5	7
N_T	100	1000	1000	1000	1000
c	13	0.1	2	2	2
a_T	0.008	0.008	0.008	0.002	0.002
P2					
d_2	0.035	0.005	0.063	0.005	0.149
λ_T	7	7	7	165	7
N_T	100	100	100	10	6
c	13	0.1	0.35	0.4	0.41
a_T	0.008	0.008	0.00125	0.00125	0.00175
P3					
d_2	0.055	0.00113	0.00035	0.005	0.033
λ_T	7	7	3127	17.5	7
N_T	100	227	50	150	175
c	13	0.1	0.13	5	13
a_T	0.008	0.008	0.0002	0.002	0.00195
P4					
d_2	0.005	0.0087	0.005	0.001	0.001
λ_T	13	7	583.5	7	9.5
N_T	100	5	5	10	11
c	13	0.05	0.05	8	9
a_T	0.008	0.05	0.05	0.04	0.00141

7. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Расчеты производились на языке программирования Julia. Оценки значений параметров модели, отражающие изменение интенсивности процессов в ходе развития инфекции для каждого из пациентов, представлены в таб. 5 и на рис. 4.

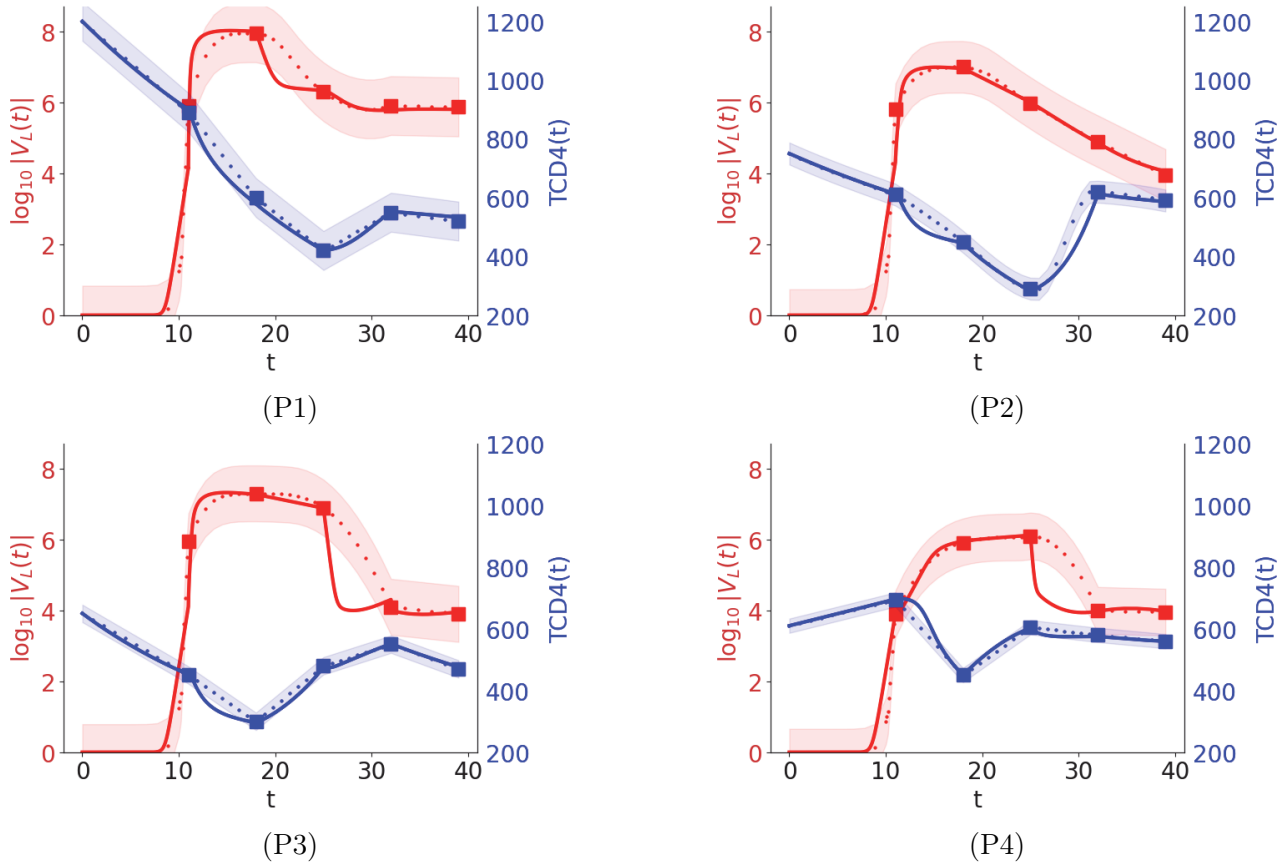


Рис. 3. Изображения (P1)–(P4) иллюстрируют работу алгоритма с данными из таб. 2. Красный цвет соответствует вирусной нагрузке V_L , а синий T_{CD4} .

FIG. 3. Figures (P1)–(P4) illustrate the algorithm's operation with the data from the Tab. 2. The red color corresponds to the viral load V_L , and the blue color to T_{CD4} .

ТАБ. 6. Погрешность измерений для случаев (P1)–(P4).

ТАБ. 6. Measurement error for cases (P1)–(P4).

$S_p \cdot t_\alpha$	P1	P2	P3	P4
T_{CD4}	66.4	37.49	28.35	23.26
$\log_{10} V_L $	0.83	0.73	0.79	0.66

Восстановленное решение по параметрам, найденным из решения обратной задачи, представлено на рис. 3. Доверительный интервал, учитывающий неопределенность, связанную с положением тренда, и возможность отклонения от этого тренда, задается со значением надежности $P = 0.95$. В таб. 6 представлены значения погрешностей измерений, где среднеквадратическая ошибка среднего арифметического $S_p = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^2}$ при $n = 48$, а t_α — соответствующий коэффициент Стьюдента.

Как видно из графиков, решение хорошо описывает начальную фазу распространения вируса в организме человека, а дальше улавливает характерный профиль данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из важнейших задач моделирования ВИЧ-инфекции является определение индивидуальных параметров реагирования иммунной системы на инфекцию по измеряемым клиническим данным пациентов, в частности — вирусной нагрузке и концентрации CD4+ Т-клеток. Это важно для развития персонализированных подходов к терапии ВИЧ-инфекции.

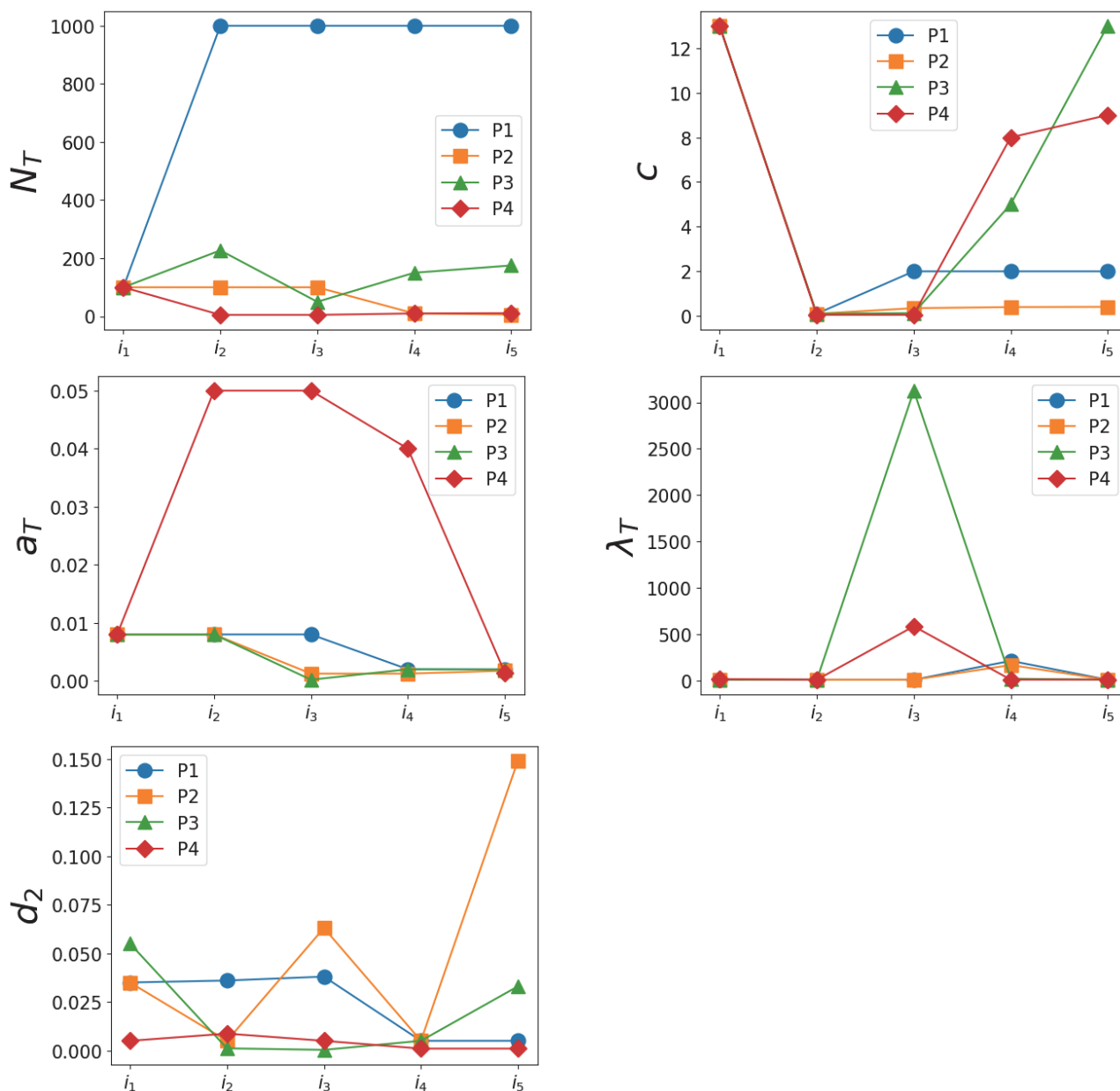


РИС. 4. Оценки значений параметров модели на различных фазах развития инфекции из таб. 5.

FIG. 4. Estimates of the values of the model parameters at different phases of infection development from Tab. 5.

Результаты идентификации параметров индивидуальной динамики ВИЧ-1 инфекции для четырех пациентов позволяют сформулировать следующие гипотезы об особенностях патогенеза у каждого из них:

- Скорость продукции вирусов N_T зараженными клетками у пациента P1 существенно выше, чем у остальных.
- Скорость нейтрализации свободных вирусов c имеет тенденцию к значительному росту у пациентов P3, P4, что может быть связано с развитием гуморального иммунного ответа — нейтрализующих антител.
- Скорость активации ВИЧ-инфицированных покоящихся $CD4^+$ Т-клеток вирусов a_T существенно выше у пациента P4, что может отражать повышенный уровень хронической иммунной активации.

- Скорость поступления наивных CD4+ Т-клеток λ_T из тимуса временно, но существенно, повышается у пациента P3.
- Скорость естественной гибели покоящихся CD4+ Т-клеток d_2 в среднем выше у пациентов P1, P2.

Следует отметить, что неполнота клинических данных, используемых для идентификации, не является ограничивающим фактором. Более детальные данные важны для уточнения оценок и доверительных интервалов для более широкого набора идентифицируемых параметров модели.

В данной работе предложен возможный подход к решению этой задачи, связанный с декомпозицией задачи приближения на более простые подзадачи на меньших временных интервалах. Его реализация связана с уточнением начального условия и параметров для системы ОДУ. Разработан метод оптимизации целевого функционала согласия данных и модели, который улавливает общий тренд. Отметим, что чувствительным к шумам в исходных данных и выбросам в исходных данных является не предложенный алгоритм решения, а математическая модель, основанная на обыкновенных дифференциальных уравнениях. Поэтому предварительно для параметров математической модели проводится анализ чувствительности методом Соболя, чтобы выявить параметры, наиболее чувствительные к изменению начальных данных. После интерполяции данных временной интервал разбивается на подынтервалы, где с помощью алгоритма эволюционных центров производится подбор параметров системы дифференциальных уравнений, гладкое решение которой проходило бы через исходные точки данных.

В дальнейшем планируется развитие компонент метода, которые помогут оценивать число латентно-инфицированных клеток и иммунного статуса пациентов. В целом, разработанный в данной работе подход к анализу параметров индивидуальной реакции пациентов на ВИЧ-инфекцию позволяет получить информацию об интенсивности вирусных и иммунных процессов и их вкладу в наблюдаемые различия динамики заболевания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанихин С. И., Шишленин М. А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — 18, № 1. — С. 147–164.
2. Соболев И. М. Глобальные показатели чувствительности для изучения нелинейных математических моделей // Матем. модел. — 2005. — 17, № 9. — С. 43–52.
3. ВИЧ-инфекция в Российской Федерации на 31 декабря 2021 г. // Референс-Центр по мониторингу за ВИЧ и ВИЧ-ассоциированными инфекциями [электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.hivrussia.info/wp-content/uploads/2022/03/Spravka-VICH-v-Rossii-na-31.12.2021-g..pdf> (дата обращения: 11.11.2024).
4. Banks H., Banks J., Link K., Rosenheim J., Ross C., Tillman K. Model comparison tests to determine data information content // Appl. Math. Lett. — 2015. — 43. — С. 10–18. — DOI: 10.1016/j.aml.2014.11.002.
5. Banks H. T., Davidian M., Hu S., Kepler G. M., Rosenberg E. S. Modelling HIV immune response and validation with clinical data // J. Biol. Dyn. — 2008. — 2, № 4. — С. 357–385. — DOI: 10.1080/17513750701813184.
6. Banks H., Flores K. B., Hu S., Rosenberg E., Buzon M., Yu X., Lichterfeld M. Immuno-modulatory strategies for reduction of HIV reservoir cells // J. Theor. Biol. — 2015. — 372. — С. 146–158. — DOI: 10.1016/j.jtbi.2015.02.006.
7. Banks H., Hu S., Rosenberg E. A dynamical modeling approach for analysis of longitudinal clinical trials in the presence of missing endpoints // Appl. Math. Lett. — 2017. — 63. — С. 109–117. — DOI: 10.1016/j.aml.2016.07.002.
8. Bocharov G., Chereshev V., Gainova I., Bazhan S., Bachmetyev B., Argilaguet J., Martinez J., Meyerhans A. Human immunodeficiency virus infection: from biological observations to mechanistic mathematical modelling // Math. Model. Nat. Phenom. — 2012. — 7, № 5. — С. 78–104. — DOI: 10.1051/mmnp/20127507.
9. Gandhi R. T., Bedimo R., Hoy J. F., Landovitz R. J., Smith D. M. и др. Antiretroviral drugs for treatment and prevention of HIV infection in adults: 2022 recommendations of the international antiviral society — USA panel // JAMA. — 2023. — 329, № 1. — С. 63–84. — DOI: 10.1001/jama.2022.22246.
10. Jenner A. L., Aogo R. A., Davis C. L., Smith A. M., Craig M. Leveraging computational modeling to understand infectious diseases // Curr. Pathobiol. Rep. — 2020. — 8, № 4. — С. 149–161. — DOI: 10.1007/s40139-020-00213-x.

11. *Kabanikhin S., Shishlenin M.* Quasi-solution in inverse coefficient problems// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2008. — 16, № 7. — С. 317–357. — DOI: 10.1515/jiip.2008.043.
12. *Kabanikhin S., Shishlenin M.* Theory and numerical methods for solving inverse and illposed problems// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2019. — 27, № 3. — С. 453–456. — DOI: 10.1515/jiip-2019-5001.
13. *Kazer S. W., Aicher T. P., Muema D. M., Carroll S. L., Ordovas-Montanes J. u др.* Integrated single-cell analysis of multicellular immune dynamics during hyperacute HIV-1 infection// Nat. Med. — 2020. — 26, № 4. — С. 511–518. — DOI: 10.1038/s41591-020-0799-2.
14. *Landovitz R. J., Scott H., Deeks S. G.* Prevention, treatment and cure of HIV infection// Nat. Rev. Microbiol. — 2023. — 21. — С. 657–670. — DOI: 10.1038/s41579-023-00914-1.
15. *Mejía-de Dios J.-A., Mezura-Montes E.* A new evolutionary optimization method based on center of mass: performance and safety management// В сб.: «Decision Science in Action Theory and Applications of Modern Decision Analytic Optimisation». — Singapore: Springer, 2019. — С. 65–74. — DOI: 10.1007/978-981-13-0860-4_6.
16. *Perelson A. S., Ribeiro R. M.* Introduction to modeling viral infections and immunity// Immunol. Rev. — 2018. — 285. — С. 5–8. — DOI: 10.1111/imr.12700.
17. *Tsitouras C.* Runge–Kutta pairs of order 5(4) satisfying only the first column simplifying assumption// Comput. Math. Appl. — 2011. — 62, № 2. — С. 770–775. — DOI: 10.1016/j.camwa.2011.06.002.
18. *Vemparala B., Chowdhury S., Guedj J., Dixit N. M.* Modelling HIV-1 control and remission// npj Syst. Biol. Appl. — 2024. — 10, № 1. — 84. — DOI: 10.1038/s41540-024-00407-8.
19. *Wendelsdorf K., Dean G., Hu S., Nordone S., Banks H.* Host immune responses that promote initial HIV spread// J. Theor. Biol. — 2011. — 289. — С. 17–35. — DOI: 10.1016/j.jtbi.2011.08.012.
20. *Zheltkova V., Argilaquet J., Peligero C., Bocharov G., Meyerhans A.* Prediction of PD-L1 inhibition effects for HIV-infected individuals// PLOS Computational Biology. — 2019. — 15, № 11. — e1007401. — DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007401.
21. HIV and AIDS// World Health Organization [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/hiv-aids> (дата обращения: 11.11.2024).

П. С. Сурнин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: p.surnin@internet.ru

М. А. Шишленин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: m.a.shishlenin@mail.ru

Г. А. Бочаров

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

E-mail: g.bocharov@inm.ras.ru

UDC 519.62

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-159-175

EDN: VHVIQO

Determination of the parameters of the mathematical model of the immune response to HIV

P. S. Surnin¹, M. A. Shishlenin¹, and G. A. Bocharov²

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Abstract. Human immunodeficiency virus of type 1 (HIV) attacks the immune system and thereby weakens the defense against other infections and some types of cancer that the immune system of a healthy person can cope with. Despite the use of highly active antiretroviral therapy (HAART), there are no methods yet to completely eliminate HIV from the body of an infected person. However, due to the expansion of access to HIV prevention, diagnosis and treatment with HAART, HIV infection has moved into the category of controllable chronic diseases. Mathematical modeling methods are actively used to study the kinetic mechanisms of HIV pathogenesis and the development of personalized approaches to treatment based on combined immunotherapy. One of the central tasks of HIV infection modeling is to determine the individual parameters of the immune system response during the acute phase of HIV infection by solving inverse problems.

To study the kinetics of the pathogenesis of HIV infection, a mathematical model of eight ordinary differential equations formulated by Bank et al. [5] was used. The system of equations of the model describes the change in the number of four subpopulations of CD4+ T cells and two types of CD8+ T cells. A feature of this model is the consideration of latently infected CD4+ T cells, which serve as the main reservoir of the viral population. The viral load on the human body is determined by the combination of populations of infectious and noninfectious viral particles.

The inverse problem of parameter identification based on the data of the acute phase of HIV infection was studied. In particular, the identifiability of the parameters was studied and sensitivity analysis from the input data was performed. The inverse problem was reduced to a minimization problem using the evolutionary centers method.

Keywords: human immunodeficiency virus, HIV, immune response, system of differential equations, inverse problem of parameter identification, method of evolutionary centers.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work of P. S. Surnin was supported by the Mathematical Center in Akademgorodok, agreement with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2022-281. The work of M. A. Shishlenin was carried out within the framework of the state assignment of the SB RAS Institute of Mathematics (topic No. FWNF-2024-0001). The work of G. A. Bocharov was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00116, <https://rscf.ru/project/23-11-00116>).

For citation: P. S. Surnin, M. A. Shishlenin, G. A. Bocharov, “Determination of the parameters of the mathematical model of the immune response to HIV,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 1, 159–175. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-159-175>

REFERENCES

1. S. I. Kabanikhin and M. A. Shishlenin, “Ob ispol’zovanii apriornoy informatsii v koeffitsientnykh obratnykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy” [On the use of a priori information in coefficient inverse



- problems for hyperbolic equations], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. IMM UB RAS], 2012, **18**, No. 1, 147–164 (in Russian).
2. I. M. Sobol', "Global'nye pokazateli chuvstvitel'nosti dlya izucheniya nelineynykh matematicheskikh modeley" [Global sensitivity measures for studying nonlinear mathematical models], *Matem. Model.* [Matem. Model.], 2005, **17**, No. 9, 43–52 (in Russian).
 3. "VICH-infektsiya v Rossiyskoy Federatsii na 31 dekabrya 2021 g." [HIV infection in the Russian Federation as of December 31, 2021] *Referens-Tsentr po monitoringu za VICH i VICH-assotsirovannymi infektsiyami* [Reference Center for Monitoring HIV and HIV-Associated Infections]. Available online: <http://www.hivrussia.info/wp-content/uploads/2022/03/Spravka-VICH-v-Rossii-na-31.12.2021-g..pdf> (accessed on Nov. 11, 2024).
 4. H. Banks, J. Banks, K. Link, J. Rosenheim, C. Ross, and K. Tillman, "Model comparison tests to determine data information content," *Appl. Math. Lett.*, 2015, **43**, 10–18, DOI: 10.1016/j.aml.2014.11.002.
 5. H. T. Banks, M. Davidian, S. Hu, G. M. Kepler, and E. S. Rosenberg, "Modelling HIV immune response and validation with clinical data," *J. Biol. Dyn.*, 2008, **2**, No. 4, 357–385, DOI: 10.1080/17513750701813184.
 6. H. Banks, K. B. Flores, S. Hu, E. Rosenberg, M. Buzon, X. Yu, and M. Lichterfeld, "Immuno-modulatory strategies for reduction of HIV reservoir cells," *J. Theor. Biol.*, 2015, **372**, 146–158, DOI: 10.1016/j.jtbi.2015.02.006.
 7. H. Banks, S. Hu, and E. Rosenberg, "A dynamical modeling approach for analysis of longitudinal clinical trials in the presence of missing endpoints," *Appl. Math. Lett.*, 2017, **63**, 109–117, DOI: 10.1016/j.aml.2016.07.002.
 8. G. Bocharov, V. Chereshev, I. Gainova, S. Bazhan, B. Bachmetyev, J. Argilaguet, J. Martinez, and A. Meyerhans, "Human immunodeficiency virus infection: from biological observations to mechanistic mathematical modelling," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2012, **7**, No. 5, 78–104, DOI: 10.1051/mmnp/20127507.
 9. R. T. Gandhi, R. Bedimo, J. F. Hoy, R. J. Landovitz, D. M. Smith et al., "Antiretroviral drugs for treatment and prevention of HIV infection in adults: 2022 recommendations of the international antiviral society — USA panel," *JAMA*, 2023, **329**, No. 1, 63–84, DOI: 10.1001/jama.2022.22246.
 10. A. L. Jenner, R. A. Aogo, C. L. Davis, A. M. Smith, and M. Craig, "Leveraging computational modeling to understand infectious diseases," *Curr. Pathobiol. Rep.*, 2020, **8**, No. 4, 149–161, DOI: 10.1007/s40139-020-00213-x.
 11. S. Kabanikhin and M. Shishlenin, "Quasi-solution in inverse coefficient problems," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2008, **16**, No. 7, 317–357, DOI: 10.1515/jiip.2008.043.
 12. S. Kabanikhin and M. Shishlenin, "Theory and numerical methods for solving inverse and illposed problems," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2019, **27**, No. 3, 453–456, DOI: 10.1515/jiip-2019-5001.
 13. S. W. Kazer, T. P. Aicher, D. M. Muema, S. L. Carroll, J. Ordovas-Montanes et al., "Integrated single-cell analysis of multicellular immune dynamics during hyperacute HIV-1 infection," *Nat. Med.*, 2020, **26**, No. 4, 511–518, DOI: 10.1038/s41591-020-0799-2.
 14. R. J. Landovitz, H. Scott, and S. G. Deeks, "Prevention, treatment and cure of HIV infection," *Nat. Rev. Microbiol.*, 2023, **21**, 657–670, DOI: 10.1038/s41579-023-00914-1.
 15. J.-A. Mejía-de Dios and E. Mezura-Montes, "A new evolutionary optimization method based on center of mass: performance and safety management," In: *Decision Science in Action Theory and Applications of Modern Decision Analytic Optimisation*, Springer, Singapore, 2019, pp. 65–74, DOI: 10.1007/978-981-13-0860-4_6.
 16. A. S. Perelson and R. M. Ribeiro, "Introduction to modeling viral infections and immunity," *Immunol. Rev.*, 2018, **285**, 5–8, DOI: 10.1111/imr.12700.
 17. C. Tsitouras, "Runge–Kutta pairs of order 5(4) satisfying only the first column simplifying assumption," *Comput. Math. Appl.*, 2011, **62**, No. 2, 770–775, DOI: 10.1016/j.camwa.2011.06.002.
 18. B. Vemparala, S. Chowdhury, J. Guedj, and N. M. Dixit, "Modelling HIV-1 control and remission," *npj Syst. Biol. Appl.*, 2024, **10**, No. 1, 84, DOI: 10.1038/s41540-024-00407-8.
 19. K. Wendelsdorf, G. Dean, S. Hu, S. Nordone, and H. Banks, "Host immune responses that promote initial HIV spread," *J. Theor. Biol.*, 2011, **289**, 17–35, DOI: 10.1016/j.jtbi.2011.08.012.
 20. V. Zheltkova, J. Argilaguet, C. Peligero, G. Bocharov, and A. Meyerhans, "Prediction of PD-L1 inhibition effects for HIV-infected individuals," *PLOS Computational Biology*, 2019, **15**, No. 11, e1007401, DOI: 10.1371/journal.pcbi.1007401.
 21. "HIV and AIDS," *World Health Organization*. Available online: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/hiv-aids> (accessed on Nov. 11, 2024).

P. S. Surnin

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

E-mail: p.surnin@internet.ru

M. A. Shishlenin

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

E-mail: m.a.shishlenin@mail.ru

G. A. Bocharov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: g.bocharov@inm.ras.ru

УДК 517.956.35, 537.84

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193

EDN: VLOCPJ

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ МГД И УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

Ю. Л. ТРАХИНИН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Мы рассматриваем результаты о корректности задачи со свободной границей (интерфейсом), где граница отделяет идеально проводящую невязкую жидкость (например, плазму) от вакуума. Течение жидкости регулируется уравнениями идеальной сжимаемой магнитогидродинамики (МГД). В отличие от классической постановки, когда вакуумное магнитное поле подчиняется системе div-rot домаксвелловской динамики, мы не пренебрегаем током смещения в вакуумной области и рассматриваем уравнения Максвелла для электрических и магнитных полей. С граничными условиями на интерфейсе это образует нелинейную гиперболическую задачу с характеристической свободной границей. Постановка этой задачи свободного интерфейса исходит из релятивистской постановки, где током смещения в вакууме нельзя пренебречь. Мы также кратко обсуждаем недавний результат, показывающий стабилизирующий эффект поверхностного натяжения.

Ключевые слова: уравнения идеальной сжимаемой магнитогидродинамики, задача со свободной границей, ток смещения, уравнения Максвелла, нелинейная гиперболическая задача, корректность.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено в Институте математики им. С. Л. Соболева в рамках государственного контракта (проект № ФВНФ-2022-0008).

Для цитирования: Ю. Л. Трахинин. О корректности задачи со свободной границей для уравнений идеальной сжимаемой МГД и уравнений Максвелла в вакууме // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 176–193. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193>

1. ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений идеальной сжимаемой МГД [9], описывающая движение сжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости (например, плазмы) в магнитном поле, имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \text{div}(\rho v \otimes v - H \otimes H) + \nabla q = 0, \\ \partial_t H - \nabla \times (v \times H) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathcal{E} + \frac{1}{2}|H|^2) + \text{div}(\rho \mathcal{E} v + p v + H \times (v \times H)) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь ρ обозначает плотность, $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$ — скорость плазмы, $H = (H_1, H_2, H_3)^\top$ — магнитное поле, $p = p(\rho, S)$ — давление, $q = p + \frac{1}{2}|H|^2$ — полное давление, S — энтропия, $\mathcal{E} = \epsilon + \frac{1}{2}|v|^2$ — полная энергия и $\epsilon = \epsilon(\rho, S)$ — внутренняя энергия. С уравнением состояния, $\rho = \rho(p, S)$, и первым принципом термодинамики, (1.1) является замкнутой системой, например, для неизвестного $U = U(t, x) = (q, v^\top, H^\top, S)^\top \in \mathbb{R}^8$. Система (1.1) должна быть дополнена ограничением на дивергенцию

$$\operatorname{div} H = 0 \quad (1.2)$$

с начальными данными $U|_{t=0} = U_0$. Легко видеть, что равенство (1.2) выполняется для всех $t > 0$, если оно справедливо при $t = 0$.

Принимая во внимание (1.2), перепишем (1.1) в неконсервативной форме

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho a^2} \left\{ \frac{dq}{dt} - H \cdot \frac{dH}{dt} \right\} + \operatorname{div} v = 0, & \rho \frac{dv}{dt} - (H \cdot \nabla)H + \nabla q = 0, \\ \frac{dH}{dt} - (H \cdot \nabla)v - \frac{1}{\rho a^2} \left\{ \frac{dq}{dt} - H \cdot \frac{dH}{dt} \right\} H = 0, & \frac{dS}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $a = a(p, S) = (\rho_p(p, S))^{-1/2}$ — скорость звука, а $d/dt = \partial_t + (v \cdot \nabla)$. Отметим, что для 2-мерных плоских течений, когда пространственные переменные $x = (x_1, x_2)$, скорость $v = (v_1, v_2)^\top$ и магнитное поле $H = (H_1, H_2)^\top$ имеют только две компоненты, МГД-систему также можно переписать в неконсервативной форме (1.3). Ниже мы будем рассматривать по умолчанию 3-мерный случай, если не указано иное. Но следует иметь в виду, что все векторы в (1.3) являются 2-мерными для 2-мерного случая.

Уравнения (1.3) образуют симметричную систему

$$A_0(U) \partial_t U + \sum_{i=1}^d A_i(U) \partial_i U = 0, \quad (1.4)$$

где

$$A_0(U) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho a^2} & 0 & -\frac{1}{\rho a^2} H^\top & 0 \\ 0 & \rho I_d & O_d & 0 \\ -\frac{1}{\rho a^2} H & O_d & I_d + \frac{1}{\rho a^2} H \otimes H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_i(U) := \begin{pmatrix} \frac{v_i}{\rho a^2} & \mathbf{e}_i^\top & -\frac{v_i}{\rho a^2} H^\top & 0 \\ \mathbf{e}_i & \rho v_i I_d & -H_i I_d & 0 \\ -\frac{v_i}{\rho a^2} H & -H_i I_d & v_i I_d + \frac{v_i}{\rho a^2} H \otimes H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, d}.$$

Здесь d — размерность пространства ($d = 3$ или $d = 2$), O_m и I_m обозначают нулевую и единичную матрицы порядка m , соответственно, $\mathbf{e}_i := (\delta_{i1}, \dots, \delta_{id})^\top$, а δ_{ij} обозначает дельта-функцию Кронекера. Система (1.4) является гиперболической, если матрица A_0 положительно определена, т. е.

$$\rho > 0, \quad \rho_p > 0. \quad (1.5)$$

Задачи интерфейса плазма—вакуум для идеальных уравнений МГД возникают при математическом моделировании удержания плазмы магнитными полями (см., например, [2]). В астрофизике задача интерфейса плазма—вакуум может быть использована для моделирования движения звезды или солнечной короны с учетом магнитных полей. В классической постановке задачи интерфейса плазма—вакуум [2, 7] плазма описывается гиперболическими уравнениями

МГД (1.1)/(1.3), тогда как в области вакуума рассматривается эллиптическая система *домаксвелловской динамики*

$$\nabla \times h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0, \quad (1.6)$$

описывающая вакуумное магнитное поле $h = (h_1, h_2, h_3)^\top$. То есть током смещения $(1/c) \partial_t E$ пренебрегают не только при выводе нерелятивистских уравнений МГД (см., например, [9]), но и в уравнениях Максвелла в вакууме, где $E = (E_1, E_2, E_3)^\top$ — электрическое поле в вакууме, а c — скорость света. Тогда из

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \partial_t h, \quad \operatorname{div} E = 0$$

следует, что вакуумное электрическое поле E является вторичной переменной, которая может быть вычислена из магнитного поля $\mathcal{H}$. Напомним, что плазменное электрическое поле E^+ также является вторичной переменной, поскольку в идеальной МГД

$$E^+ = -\frac{1}{c} v \times H. \quad (1.7)$$

В релятивистской постановке током смещения $(1/c) \partial_t E$ нельзя пренебречь, и мы имеем уравнения Максвелла

$$\frac{1}{c} \partial_t h + \nabla \times E = 0, \quad \frac{1}{c} \partial_t E - \nabla \times h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0, \quad \operatorname{div} E = 0 \quad (1.8)$$

в области вакуума, тогда как в области плазмы вместо системы (1.1) рассматриваются уравнения релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД). Задача о релятивистском интерфейсе плазма—вакуум для случая специальной теории относительности впервые была изучена в [22].

Если, в отличие от классической постановки задачи о границе раздела плазма—вакуум в нерелятивистской МГД [2, 7, 16, 21], не пренебрегать током смещения $\varepsilon \partial_t E$ в вакуумной области, то нам снова придется рассматривать полную систему уравнений Максвелла

$$\varepsilon \partial_t h + \nabla \times E = 0, \quad \varepsilon \partial_t E - \nabla \times h = 0, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad \operatorname{div} E = 0, \quad (1.10)$$

где система (1.9)–(1.10) записана в безразмерной форме [10], а положительная константа $\varepsilon \ll 1$, являющаяся отношением характерной (средней) скорости потока плазмы к скорости света c , является малым (но *фиксированным*) параметром в нерелятивистской постановке. Бездивергентные уравнения (1.10) представляют собой ограничения на начальные данные $V|_{t=0} = V_0$ для вакуумного неизвестного $V = V(t, x) = (h^\top, E^\top)^\top \in \mathbb{R}^6$. Вакуумные уравнения Максвелла (1.9) переписываются в виде симметричной гиперболической системы:

$$\varepsilon \partial_t V + \sum_{i=1}^3 B_i \partial_i V = 0, \quad (1.11)$$

где

$$B_i = \begin{pmatrix} 0_3 & b_i \\ b_i^\top & 0_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку нас в первую очередь интересует корректность задачи о свободной границе для гиперболических систем (1.4) и (1.11), а не устойчивость стационарных решений этой задачи, как, например, в классической работе [2], геометрия плазменных и вакуумных областей не так важна. Поэтому для технической простоты мы предполагаем, что свободный интерфейс $\Gamma(t)$, разделяющий плазменные и вакуумные области $\Omega^\pm(t)$, имеет вид графика:

$$\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, x')\}, \quad x' = (x_2, x_3), \quad \Omega^\pm(t) = \{\pm(x_1 - \varphi(t, x')) > 0\}.$$

Задача со свободной границей завершается граничными условиями

$$\partial_t \varphi = v \cdot N, \quad (1.12)$$

$$q = \frac{1}{2} (|h|^2 - |E|^2), \quad (1.13)$$

$$E \cdot \tau_2 = \varepsilon h_3 \partial_t \varphi, \quad E \cdot \tau_3 = -\varepsilon h_2 \partial_t \varphi, \quad (1.14)$$

$$H \cdot N = 0, \quad h \cdot N = 0 \quad (1.15)$$

на свободном интерфейсе $\Gamma(t)$, где

$$N = (1, -\partial_2 \varphi, -\partial_3 \varphi)^\top, \quad \tau_2 = (\partial_2 \varphi, 1, 0)^\top, \quad \tau_3 = (\partial_3 \varphi, 0, 1)^\top.$$

Условие (1.12) означает, что интерфейс движется вместе с движением жидкости, тогда как условие (1.13) исходит из баланса нормальных напряжений на интерфейсе. Для понимания смысла условия (1.13) следует также отметить, что релятивистское полное давление $q = p + \frac{1}{2}(|H|^2 - |E^+|^2)$, где плазменное электрическое поле E^+ задается как (1.7), т. е. член $\frac{1}{2}|E^+|^2$ просто опускается в (1.13) в условиях нерелятивистской МГД. Условия (1.14) исходят из условий скачка [2, 7] для электрического поля. А именно, для законов сохранения

$$\partial_t(\varepsilon H^\pm) + \nabla \times E^\pm = 0 \quad \text{в } \Omega^\pm(t),$$

при $H^+ = H$, $H^- = h$, $E^+ = -\varepsilon(v \times H)$ (ср. (1.7)) и $E^- = E$, условия перехода имеют вид (см. [2])

$$N \times [E] = \varepsilon \partial_t \varphi [H] \quad \text{на } \Gamma(t),$$

при $[E] = E|_\Gamma^+ - E|_\Gamma$, $[H] = H|_\Gamma - h|_\Gamma$. Учитывая (1.12) и (1.15), исключаем из них скорость и магнитное поле плазмы:

$$N \times E = \varepsilon h \partial_t \varphi \quad \text{на } \Gamma(t). \quad (1.16)$$

Первое условие в (1.16) есть не что иное, как второе условие в (1.15), тогда как остальные два граничных условия в (1.16) совпадают с (1.14). Наконец, как и в [22], можно показать, что условия (1.15) — это просто граничные ограничения на начальные данные

$$U|_{t=0} = U_0, \quad V|_{t=0} = V_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \quad (1.17)$$

для задачи (1.4), (1.11)–(1.14).

Как было отмечено выше, постановка задачи (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) (с ограничениями (1.2), (1.10), (1.15)) исходит из релятивистской постановки [22] задачи свободного интерфейса. В классической постановке [2, 7, 16, 21], где пренебрегают током смещения $\varepsilon \partial_t E$ и рассматривают эллиптическую систему (1.6) в области вакуума, влияние вакуумного электрического поля E , напротив, по умолчанию не учитывается. Локальная по времени корректность классической задачи свободного интерфейса с граничными условиями (1.12), (1.13) (с $E \equiv 0$) и (1.15) была доказана в [16] при условии, что *условие неколлинеарности* $|H \times h| \neq 0$ выполняется в каждой точке начального интерфейса $\Gamma(0)$ (см. также обзор [17] и имеющуюся там библиографию). Наконец, отметим, что доказательство корректности классической задачи свободного интерфейса при условии знака типа Тейлора $\left(N \cdot \nabla \left(q - \frac{1}{2}|h|^2\right)\right)|_{\Gamma(0)}$ (которое является альтернативным условием корректности [23]) все еще остается открытой проблемой. Корректность при условии знака типа Тейлора доказана в [27] пока только для частного случая $h \equiv 0$.

Целью данной статьи является обзор существующих результатов по корректности задачи (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) и ее 2-мерной версии, полученных в [3, 4, 10, 18, 25]. Кроме того, мы приводим недавний результат [26], показывающий стабилизирующий эффект поверхностного натяжения на корректность линеаризации задачи (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17), в которой граничное условие (1.13) заменено на

$$q = \frac{1}{2}(|h|^2 - |E|^2) + \mathfrak{s} \mathcal{H}(\varphi), \quad (1.18)$$

где $\mathfrak{s} \geq 0$ — постоянный коэффициент поверхностного натяжения, $\mathcal{H}(\varphi)$ — удвоенная средняя кривизна $\Gamma(t)$, определяемая как

$$\mathcal{H}(\varphi) := \nabla' \cdot \left(\frac{\nabla' \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla' \varphi|^2}} \right), \quad \text{где } \nabla' := \begin{pmatrix} \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что влияние поверхностного натяжения становится особенно важным при моделировании течений жидких металлов [13]. То есть, для краткости мы называем задачу (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) задачей на интерфейсе плазма–вакуум, но на самом деле сжимаемая невязкая идеально проводящая жидкость, описываемая уравнениями МГД (1.11), не обязательно является плазмой и, в частности, может быть жидким металлом.

План остальной части этой статьи следующий. В разделе 2 мы сводим задачу со свободной границей (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) к задаче в фиксированных областях. В разделе 3 мы описываем так называемую вторичную симметризацию уравнений Максвелла в вакууме и формулируем эквивалентную задачу с фиксированной границей с характеристиками постоянной кратности. В разделе 4 мы записываем линеаризованную задачу, связанную с нелинейной задачей с фиксированной границей, и обсуждаем существующие результаты для нее. Наконец, в разделе 5 мы обсуждаем недавние результаты для 2-мерной линейной и нелинейной задачи МГД–Максвелла со свободным интерфейсом.

2. УПРОЩЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА В ФИКСИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

Мы сводим задачу со свободной границей (1.4), (1.11)–(1.14) к эквивалентной задаче с фиксированной границей, вводя новые неизвестные $U_{\sharp}(t, x) := U(t, \Phi(t, x), x')$ и $V_{\sharp}(t, x) := V(t, \Phi(t, x), x')$, которые являются гладкими в полупространствах $\mathbb{R}_{\pm}^3 = \{\pm x_1 > 0, x' \in \mathbb{R}^2\}$, где

$$\Phi(t, x) := x_1 + \chi(x_1)\varphi(t, x'), \quad (2.1)$$

а $\chi \in C_0^\infty(-1, 1)$ — срезающая функция, которая удовлетворяет $\|\chi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1/2$ и равна 1 в малой окрестности начала координат. Требование $\partial_1 \Phi > 0$ невырожденности замены переменных выполняется для решений с $\|\varphi\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \leq 1$. Последнее верно, если, не теряя общности, мы рассматриваем начальные данные, удовлетворяющие $\|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1/2$, и время T в нашей теореме существования достаточно мало.

Замена переменных (2.1) сводит задачу со свободной границей (1.4), (1.11)–(1.14) к следующей задаче с фиксированной границей:

$$\mathbb{L}_+(U, \Phi) := L_+(U, \Phi)U = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^+, \quad (2.2a)$$

$$\mathbb{L}_-(V, \Phi) := L_-(\Phi)V = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^-, \quad (2.2b)$$

$$\mathbb{B}(U, V, \varphi) = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (2.2c)$$

$$U|_{t=0} = U_0, \quad V|_{t=0} = V_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad (2.2d)$$

где мы опустили нижний индекс « $\sharp$ » для удобства, $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ — плоскость $x_1 = 0$, а

$$L_+(U, \Phi) := A_0(U)\partial_t + \tilde{A}_1(U, \Phi)\partial_1 + \sum_{k=2}^3 A_k(U)\partial_k, \quad L_-(\Phi) := \varepsilon\partial_t + \tilde{B}_1(\Phi)\partial_1 + \sum_{k=2}^3 B_k\partial_k,$$

$$\mathbb{B}(U, V, \varphi) := \begin{pmatrix} \partial_t \varphi - v \cdot N \\ E \cdot \tau_2 - \varepsilon h_3 \partial_t \varphi \\ E \cdot \tau_3 + \varepsilon h_2 \partial_t \varphi \\ q - \frac{1}{2}|h|^2 + \frac{1}{2}|E|^2 \end{pmatrix},$$

с

$$\tilde{A}_1(U, \Phi) := \frac{1}{\partial_1 \Phi} (A_1(U) - \partial_t \Phi A_0(U) - \partial_2 \Phi A_2(U) - \partial_3 \Phi A_3(U)),$$

$$\tilde{B}_1(\Phi) = \frac{1}{\partial_1 \Phi} (B_1 - \varepsilon \partial_t \Phi I_3 - \partial_2 \Phi B_2 - \partial_3 \Phi B_3).$$

Следующие предложения были доказаны в [3, 10, 22] при условиях (1.2), (1.10) и (1.15).

Предложение 2.1. Пусть начальные данные (2.2d) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \quad (2.3)$$

$$H_N|_{x_1=0} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\mathcal{H} = (H_N, H_2 \partial_1 \Phi, H_3 \partial_1 \Phi), \quad H_N = H_1 - H_2 \partial_2 \Phi - H_3 \partial_3 \Phi.$$

Если задача (2.2) имеет достаточно гладкое решение (U, V, φ) , то это решение удовлетворяет (2.3) и (2.4) для всех $t \in [0, T]$.

Предложение 2.2. Пусть начальные данные (2.2d) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0, \quad (2.5)$$

$$h_N|_{x_1=0} = 0, \quad (2.6)$$

где

$$h_N = h_1 - h_2 \partial_2 \Phi - h_3 \partial_3 \Phi, \quad \mathfrak{h} = (h_N, h_2 \partial_1 \Phi, h_3 \partial_1 \Phi),$$

$$\mathfrak{e} = (E_N, E_2 \partial_1 \Phi, E_3 \partial_1 \Phi), \quad E_N = E_1 - E_2 \partial_2 \Phi - E_3 \partial_3 \Phi.$$

Если задача (2.2) имеет достаточно гладкое решение (U, V, φ) со свойством

$$\partial_t \varphi \leq 0, \quad (2.7)$$

то это решение удовлетворяет (2.5) и (2.6) для всех $t \in [0, T]$. Если задача (2.2) с двумя дополнительными граничными условиями

$$\operatorname{div} \mathfrak{h}|_{x_1=0} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathfrak{e}|_{x_1=0} = 0 \quad (2.8)$$

имеет достаточно гладкое решение (U, V, φ) со свойством

$$\partial_t \varphi > 0, \quad (2.9)$$

то это решение снова удовлетворяет (2.5) и (2.6) для всех $t \in [0, T]$.

Можно показать, что граничная матрица $\tilde{A}_1(U, \Phi)|_{x_1=0}$ на границе Γ имеет одно положительное и одно отрицательное собственное значение, а остальные равны нулю. Это означает, что граница Γ является *характеристикой*, и в соответствии с числом входящих/исходящих характеристик гиперболическая система (2.2a) в полупространстве $\mathbb{R}_+^3$ требует одного граничного условия на Γ . Для уравнений Максвелла (2.2b) граничная матрица $B = B(\varphi) := \tilde{B}_1(\Phi)|_{x_1=0}$ имеет собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(B) &= -\varepsilon \partial_t \varphi - \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2}, & \lambda_{3,4}(B) &= -\varepsilon \partial_t \varphi, \\ \lambda_{5,6}(B) &= -\varepsilon \partial_t \varphi + \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Если выполнено (2.7), то матрица B имеет два отрицательных собственных значения (напомним, что $\varepsilon \ll 1$). Это означает, что гиперболическая система (2.2b) в $\mathbb{R}_+^3$ требует двух граничных условий на Γ , т. е. при предположении (2.7) мы имеем правильное количество граничных условий в (2.2c), поскольку первое условие в (2.2c) необходимо для определения функции φ .

Если выполнено (2.9), то матрица B имеет четыре отрицательных собственных значения. То есть правильное число граничных условий равно шести, и в задаче (2.2) отсутствуют два граничных условия. Однако, если, как было предложено в [22], мы дополним (2.2c) дополнительными граничными условиями (2.8), что позволяет доказать (2.5), то у нас будет правильное число граничных условий и для случая (2.9). Дополняя нашу задачу условиями

$$\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0 \quad \text{на} \quad [0, T] \times \Gamma \cap \{\partial_t \varphi > 0\}, \quad (2.10)$$

приходим к задаче (2.2), (2.10), которая корректно сформулирована по числу граничных условий.

3. ВТОРИЧНАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

Мы задаем разное количество граничных условий на разных участках границы Γ . То есть граница является неравномерно характеристической. Для преодоления этой трудности в [3] было предложено ввести такую новую неизвестную в вакуумной области, что граница становится характеристикой постоянной кратности. С другой стороны, существует альтернативный способ, предполагающий применение так называемой *вторичной симметризации* [19, 20, 22] к симметричной гиперболической системе вакуумных уравнений Максвелла. Эта симметризация, предложенная в [22], позволяет свести нелинейную задачу (2.2), (2.10) к задаче с характеристиками

постоянной кратности и вывести априорную оценку энергии [3, 10, 22] для линеаризованной задачи, связанной с (2.2), (2.10).

Забудем на минуту нашу нелинейную начально-краевую задачу (2.2), (2.10) и рассмотрим просто линейную систему (1.11) вакуумных уравнений Максвелла во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для системы (1.11) в $\mathbb{R}^3$ вместе с очевидным тождеством

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |V|^2 = 0$$

(для $|V| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$) мы имеем следующие три дополнительных интеграла сохранения (сохранение импульса поля в вакууме):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} h \times E = 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \{|V|^2 + \nu_1(h_2 E_3 - h_3 E_2) + \nu_2(h_3 E_1 - h_1 E_3) + \nu_3(h_1 E_2 - h_2 E_1)\} = 0 \quad (3.1)$$

где ν_1, ν_2 и ν_3 — произвольные константы.

Последнее энергетическое тождество переписывается как

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{B}_0 V \cdot V) = 0,$$

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\nu_3 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_2 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & -\nu_3 & \nu_2 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь ν_i — произвольные функции $\nu_i(t, x)$. С учетом условий на дивергенцию (1.10) из системы (1.11) следует, что

$$\varepsilon \mathcal{B}_0 \partial_t V + \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_j \partial_j V + R_1 \operatorname{div} h + R_2 \operatorname{div} E = 0 \quad (3.2)$$

для некоторых произвольных векторов $R_1 \in \mathbb{R}^6$ и $R_2 \in \mathbb{R}^6$. Мы можем выбрать векторы R_1 и R_2 так, что (3.2) переписывается как новая симметричная система

$$\varepsilon \mathcal{B}_0 \partial_t V + \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_j \partial_j V = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_2 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \nu_3 & 0 & -\nu_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} -\nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_3 & -\nu_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\nu_2 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} -\nu_3 & 0 & \nu_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\nu_3 & \nu_2 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\nu_3 & 0 & \nu_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Система (3.3) эквивалентна (1.11), и она снова является гиперболической, если $\mathcal{B}_0 > 0$, т. е.

$$|\nu| < 1 \quad (3.4)$$

для вектор-функции $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Используя условия на дивергенцию (2.5) и отсылая читателя за техническими подробностями к [3, 10], мы получаем следующий аналог вторичной симметризации (3.3) для системы (2.2b):

$$\varepsilon \mathcal{B}_0(\nu) \partial_t V + \tilde{\mathcal{B}}_1(\nu, \Phi) \partial_1 V + \sum_{k=2}^3 \mathcal{B}_k(\nu) \partial_k V = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^-, \quad (3.5)$$

где

$$\tilde{\mathcal{B}}_1(\nu, \Phi) = \frac{1}{\partial_1 \Phi} (\mathcal{B}_1(\nu) - \varepsilon \partial_t \Phi \mathcal{B}_0(\nu) - \partial_2 \Phi \mathcal{B}_2(\nu) - \partial_3 \Phi \mathcal{B}_3(\nu)).$$

Теперь зададим $\nu(t, x)$ в соответствии с выбором, сделанным в [3, 10] для соответствующей линеаризованной задачи:

$$\nu = \varepsilon v^-, \quad (3.6)$$

где $v^- = v^-(t, x) := v(t, -x_1, x')$. Поскольку ε — малый параметр, условие гиперболичности (3.4) выполняется для такого ν . Мы можем показать, что гладкие решения (3.5) удовлетворяют условиям на дивергенцию (2.5) для всех $t \in [0, T]$, если они были истинны при $t = 0$ (см. доказательство в [3, 15]). Это означает эквивалентность задачи (2.2), (2.10) и задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.5).

С обозначениями

$$\mathfrak{B}_k(v^-) := \mathcal{B}_k(\varepsilon v^-), \quad k = 0, 2, 3, \quad \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi) := \tilde{\mathcal{B}}_1(\varepsilon v^-, \Phi), \quad (3.7)$$

система (3.5) переписывается в виде

$$\mathbb{L}_-(v^-, V, \Phi) := L_-(v^-, \Phi) V = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^-, \quad (3.8)$$

где

$$L_-(v^-, \Phi) := \varepsilon \mathfrak{B}_0(v^-) \partial_t + \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi) \partial_1 + \mathfrak{B}_2(v^-) \partial_2 + \mathfrak{B}_3(v^-) \partial_3.$$

Используя первое граничное условие в (2.2c), вычисляем собственные значения граничной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{B}(v|_{x_1=0}, \varphi) := \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi)|_{x_1=0}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(\mathcal{B}) &= -\sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \lambda_{3,4}(\mathcal{B}) = 0, \\ \lambda_{5,6}(\mathcal{B}) &= \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Это означает, что гиперболическая система (3.8) требует два граничных условия на Γ . Следовательно, задача (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8) имеет правильное количество граничных условий в (2.2c) независимо от знака $\partial_t \varphi$. С этого момента мы будем рассматривать начально-краевую задачу (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8), для которой граница является характеристикой постоянной кратности.

4. ПРОСТАЯ АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Пусть

$$(\dot{U}(t, x), \dot{V}(t, x), \dot{\varphi}(t, x')) \quad (4.1)$$

— заданная достаточно гладкая вектор-функция, где $\dot{U} = (\dot{q}, \dot{v}^\top, \dot{H}^\top, \dot{S})^\top$, $\dot{V} = (\dot{h}^\top, \dot{E})^\top$ и

$$\|\dot{U}\|_{W_\infty^3(\Omega_T^\pm)} + \|\dot{V}\|_{W_\infty^3(\Omega_T^-)} + \|\dot{\varphi}\|_{W_\infty^4(\Gamma_T)} \leq K,$$

где $K > 0$ — константа,

$$\Omega_T^\pm := (-\infty, T] \times \mathbb{R}_\pm^3, \quad \Gamma_T := (-\infty, T] \times \Gamma.$$

Здесь и далее все обозначения с «кружком» типа $\dot{U}$ будут относиться к базовому состоянию (4.1). Следуя [3, 10, 22], мы также предполагаем, что базовое состояние (4.1) удовлетворяет условиям гиперболичности (1.5), первым трем граничным условиям в (2.2c), уравнениям для H и h , содержащимся в (2.2a) и (2.2b), ограничениям (2.3)–(2.6) при $t = 0$ и неравенству $\|\dot{\varphi}\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \leq 1$.

Линеаризованные операторы для задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8) имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_+(\dot{U}, \dot{\Phi})(U, \Phi) &:= \frac{d}{d\theta} \mathbb{L}_+(\dot{U} + \theta U, \dot{\Phi} + \theta \Phi) \Big|_{\theta=0}, \\ \mathbb{L}'_-(\dot{W}, \dot{\Phi})(W, \Phi) &:= \frac{d}{d\theta} \mathbb{L}_-(\dot{W} + \theta W, \dot{\Phi} + \theta \Phi) \Big|_{\theta=0}, \\ \mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(U, V, \varphi) &:= \frac{d}{d\theta} \mathbb{B}(\dot{U} + \theta U, \dot{V} + \theta V, \dot{\varphi} + \theta \varphi) \Big|_{\theta=0},\end{aligned}$$

где $\dot{\Phi}(t, x) := x_1 + \chi(x_1)\dot{\varphi}(t, x')$, $\dot{W} := (\dot{V}^\top, \dot{v}^-)^\top$, $W := (V^\top, v^-)^\top$ и $\dot{v}^- = \dot{v}^-(t, x) := \dot{v}(t, -x_1, x')$. Линеаризованные операторы могут быть легко вычислены. Например, линеаризованные внутренние уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_+(\dot{U}, \dot{\Phi})(U, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e+}(\dot{U}, \dot{\Phi})U - \frac{L_+(\dot{U}, \dot{\Phi})\Phi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{U}, \\ \mathbb{L}'_-(\dot{W}, \dot{\Phi})(W, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e-}(\dot{W}, \dot{\Phi})W - \frac{L_-(\dot{v}^-, \dot{\Phi})\Phi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{V},\end{aligned}\tag{4.2}$$

где

$$\mathbb{L}'_{e+}(\dot{U}, \dot{\Phi})U := L_+(\dot{U}, \dot{\Phi})U + \mathcal{C}_+(\dot{U}, \dot{\Phi})U, \quad \mathbb{L}'_{e-}(\dot{W}, \dot{\Phi})W := L_-(\dot{v}^-, \dot{\Phi})V + \mathcal{C}_-(\dot{V}, \dot{\Phi})v^-,$$

а конкретный вид матриц $\mathcal{C}_\pm$ не представляет интереса (см. [3, 10, 22]).

Линеаризованные внутренние уравнения содержат производные возмущения интерфейса φ . Для получения стандартных линейных гиперболических систем мы сначала переходим к «хорошим неизвестным Алианака» [1]

$$\dot{U} = (\dot{q}, \dot{v}^\top, \dot{H}^\top, \dot{S})^\top := U - \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{U}, \quad \dot{V} = (\dot{h}^\top, \dot{E})^\top := V - \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{V},\tag{4.3}$$

где $\Psi(t, x) := \chi(x_1)\varphi(t, x')$. В обозначениях (4.3) операторы в (4.2) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_+(\dot{U}, \dot{\Phi})(U, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e+}(\dot{U}, \dot{\Phi})\dot{U} + \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \mathbb{L}_+(\dot{U}, \dot{\Phi}), \\ \mathbb{L}'_-(\dot{W}, \dot{\Phi})(W, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e-}(\dot{W}, \dot{\Phi})\dot{W} + \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \mathbb{L}_-(\dot{W}, \dot{\Phi}),\end{aligned}\tag{4.4}$$

где $\dot{W} := (\dot{V}^\top, \dot{v}^-)^\top$ и $\dot{v}^- = \dot{v}^-(t, x) := \dot{v}(t, -x_1, x')$. Затем мы отбрасываем члены нулевого порядка в Ψ в (4.4), которые в последующем нелинейном анализе будут рассматриваться как величины погрешности на каждом шаге итерации Нэша—Мозера. Это дает нам следующую окончательную форму нашей линеаризованной задачи для $(\dot{U}, \dot{V}, \varphi)$:

$$L_+(\dot{U}, \dot{\Phi})\dot{U} + \mathcal{C}_+(\dot{U}, \dot{\Phi})\dot{U} = f \quad \text{в } \Omega_T^+, \tag{4.5a}$$

$$L_-(\dot{v}^-, \dot{\Phi})\dot{V} + \mathcal{C}_-(\dot{V}, \dot{\Phi})\dot{v}^- = 0 \quad \text{в } \Omega_T^-, \tag{4.5b}$$

$$\mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \tag{4.5c}$$

$$(\dot{U}, \dot{V}, \varphi)|_{t<0} = 0, \tag{4.5d}$$

где

$$\mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) := \begin{pmatrix} (\partial_t + \dot{v}' \cdot \nabla' - \partial_1(\dot{v} \cdot \dot{N}))\varphi - \dot{v} \cdot \dot{N} \\ \dot{E} \cdot \dot{\tau}_2 - \varepsilon(\partial_t \dot{\varphi})\dot{h}_3 - \varepsilon \partial_t(\dot{h}_3 \varphi) + \partial_2(\dot{E}_1 \varphi) \\ \dot{E} \cdot \dot{\tau}_3 + \varepsilon(\partial_t \dot{\varphi})\dot{h}_2 + \varepsilon \partial_t(\dot{h}_2 \varphi) + \partial_3(\dot{E}_1 \varphi) \\ \dot{q} - \dot{h} \cdot \dot{h} + \dot{E} \cdot \dot{E} + [\partial_1 \dot{q}] \varphi \end{pmatrix},$$

$$\dot{v}' = (\dot{v}_2, \dot{v}_3)^\top, \quad \nabla' = (\partial_2, \partial_3)^\top, \quad \dot{N} = (1, -\partial_2 \dot{\varphi}, -\partial_3 \dot{\varphi})^\top,$$

$$\dot{\tau}_2 = (\partial_2 \dot{\varphi}, 1, 0)^\top, \quad \dot{\tau}_3 = (\partial_3 \dot{\varphi}, 0, 1)^\top, \quad [\partial_1 \dot{q}] = (\partial_1 \dot{q})|_\Gamma - (\dot{h} \cdot \partial_1 \dot{h})|_\Gamma + (\dot{E} \cdot \partial_1 \dot{E})|_\Gamma.$$

Предположение о том, что базовое состояние (4.1) удовлетворяет уравнению для h , содержащемуся в (2.2b), использовалось при записи второго и третьего граничных условий в (4.5c) (см. [3, 10, 22]). Более того, мы предполагаем, что заданный исходный член f обращается в нуль в прошлом и рассматриваем случай нулевых начальных данных, что является обычным предположением. Случай ненулевых начальных данных откладывается до построения так называемого приближенного решения (см., например, [16]) в нелинейном анализе.

Заметим, что мы можем рассматривать однородные уравнения в системе (4.5b) (с нулевыми исходными членами) и однородные граничные условия (4.5c). Это возможно, поскольку, следуя [3, 10, 22], линеаризованная задача с неоднородными вакуумными уравнениями и неоднородными граничными условиями может быть сведена к задаче (4.5). Более того, процесс сведения линеаризованной задачи к задаче с однородными вакуумными уравнениями и однородными граничными условиями, описанный в [3, 22], организован таким образом, что решения редуцированной задачи (4.5) автоматически удовлетворяют следующим линейным версиям ограничений (2.3)–(2.6):

$$\operatorname{div} \dot{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{в } \Omega_T^+, \quad (4.6)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{h}} = 0, \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}} = 0 \quad \text{в } \Omega_T^-, \quad (4.7)$$

$$\dot{H}_N = \dot{H}_2 \partial_2 \varphi + \dot{H}_3 \partial_3 \varphi - \varphi \partial_1 (\dot{H} \cdot \dot{N}) \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.8)$$

$$\dot{h}_N = \dot{h}_2 \partial_2 \varphi + \dot{h}_3 \partial_3 \varphi - \varphi \partial_1 (\dot{h} \cdot \dot{N}) \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.9)$$

где

$$\dot{\mathcal{H}} = (\dot{H}_N, \dot{H}_2 \partial_1 \dot{\Phi}, \dot{H}_3 \partial_1 \dot{\Phi})^\top, \quad \dot{H}_N = \dot{H}_1 - \dot{H}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{H}_3 \partial_3 \dot{\Phi}, \quad \dot{H}_N|_\Gamma = (\dot{H} \cdot \dot{N})|_\Gamma,$$

$$\dot{\mathbf{h}} = (\dot{h}_N, \dot{h}_2 \partial_1 \dot{\Phi}, \dot{h}_3 \partial_1 \dot{\Phi})^\top, \quad \dot{h}_N = \dot{h}_1 - \dot{h}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{h}_3 \partial_3 \dot{\Phi}, \quad \dot{h}_N|_\Gamma = (\dot{h} \cdot \dot{N})|_\Gamma,$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\dot{E}_N, \dot{E}_2 \partial_1 \dot{\Phi}, \dot{E}_3 \partial_1 \dot{\Phi})^\top, \quad \dot{E}_N = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{E}_3 \partial_3 \dot{\Phi}.$$

Далее мы используем $A \underset{a_1, \dots, a_m}{\lesssim} B$ для обозначения того, что $A \leq C(a_1, \dots, a_m)B$ при заданных параметрах $a_1, \dots, a_m$, где мы обозначаем через C некоторую универсальную положительную константу, а через $C(\cdot)$ некоторую положительную константу, зависящую от величин, перечисленных в скобках. Следуя стандартным рассуждениям энергетического метода, примененным к симметричным гиперболическим системам (4.5a) и (4.5b), получаем

$$I(t) + \int_{\Gamma_t} \mathcal{Q} \lesssim_K \|f\|_{L_2(\Omega_T^+)}^2 + \|\dot{U}\|_{L^2(\Omega_t^+)} + \|\dot{V}\|_{L^2(\Omega_t^-)}, \quad (4.10)$$

где

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}_+^3} A_0(\dot{U}) \dot{U} \cdot \dot{U} + \int_{\mathbb{R}_-^3} \mathfrak{B}_0(\dot{v}) \dot{V} \cdot \dot{V}, \quad \mathcal{Q} = -(\tilde{A}_1(\dot{U}, \dot{\Phi}) \dot{U} \cdot \dot{U})|_\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{B}_1(\dot{v}^-, \dot{\Phi}) \dot{V} \cdot \dot{V})|_\Gamma.$$

В частности,

$$(\tilde{A}_1(\dot{U}, \dot{\Phi}) \dot{U} \cdot \dot{U})|_\Gamma = 2q \dot{v}_N|_\Gamma, \quad (4.11)$$

где $\dot{v}_N = \dot{v}_1 - \dot{v}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{v}_3 \partial_3 \dot{\Phi}$ (очевидно, $\dot{v}_N|_\Gamma = (\dot{v} \cdot \dot{N})|_\Gamma$).

Благодаря выбору (3.6) с использованием граничных условий и (4.8)–(4.9), в [3, 10, 22] было показано, что квадратичная форма $\mathcal{Q}$ приводится к виду

$$\mathcal{Q} = \partial_t (\dot{\mu} \varphi \dot{E}_N) + \partial_2 (\dot{\mu} \varphi (\dot{E}_2 \partial_t \dot{\varphi} - \dot{h} \cdot \dot{\tau}_3)) + \partial_3 (\dot{\mu} \varphi (\dot{E}_3 \partial_t \dot{\varphi} + \dot{h} \cdot \dot{\tau}_2)) + \mathcal{L} \quad \text{на } \Gamma, \quad (4.12)$$

где $\dot{\mu} = 2(\dot{E}_1 + \varepsilon \dot{v}_2 \dot{h}_3 - \varepsilon \dot{v}_3 \dot{h}_2)$ и $\mathcal{L}$ — это сумма членов типа $\text{coeff } \dot{q} \varphi$, $\text{coeff } \dot{v}_N \varphi$, $\text{coeff } \dot{h}_i \varphi$, $\text{coeff } \dot{E}_i \varphi$, $\text{coeff } \varphi^2$. Здесь и далее coeff — это общий коэффициент, который зависит от базового состояния (4.1), точная форма которого не представляет интереса и может меняться от строки к строке.

Из (4.10) и (4.12) выводим энергетическое неравенство

$$I(t) + \int_{\Gamma} \dot{\mu} \varphi \dot{E}_N + \int_{\Gamma_t} \mathcal{L} \lesssim_K \|f\|_{L_2(\Omega_T^+)}^2 + \|\dot{U}\|_{L^2(\Omega_t^+)} + \|\dot{V}\|_{L^2(\Omega_t^-)} + \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_t)}^2. \quad (4.13)$$

Как мы видим, нам не удастся замкнуть априорную оценку в L^2 , но подготовительное энергетическое неравенство (4.13) имело решающее значение в [3, 10] (см. также [22] для релятивистского случая) для замкнутой оценки в H^1 . Точнее, поскольку граница Γ является характеристической, естественная функциональная настройка обеспечивается анизотропными весовыми пространствами Соболева H_*^m , см. [6, 14] (мы также ссылаемся на [12] и имеющуюся там библиографию), и базовая априорная оценка в [3, 10, 22] была замкнута в H_*^1 .

Для удобства читателя определим здесь пространства H_*^m . Введем символ D_*^α :

$$D_*^\alpha := \partial_t^{\alpha_0} (\sigma \partial_1)^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \partial_1^{\alpha_{d+1}}, \quad \langle \alpha \rangle := |\alpha| + \alpha_{d+1}, \quad |\alpha| := \sum_{i=0}^{d+1} \alpha_i,$$

где $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+2}$ ($d = 3$ и $d = 2$ для 3-мерного и 2-мерного случаев, соответственно), $\sigma = \sigma(x_1)$ — возрастающая гладкая функция на $[0, +\infty)$ такая, что $\sigma(x_1) = x_1$ при $0 \leq x_1 \leq 1/2$ и $\sigma(x_1) = 1$ при $x_1 \geq 1$. Для любого целого числа $m \in \mathbb{N}$ и интервала $I \subset \mathbb{R}$ функциональное пространство $H_*^m(I \times \Omega)$ определяется как

$$H_*^m(I \times \Omega) := \{u \in L^2(I \times \Omega) : D_*^\alpha u \in L^2(I \times \Omega) \text{ для } \langle \alpha \rangle \leq m\},$$

с нормой $\|\cdot\|_{H_*^m(I \times \Omega)}$:

$$\|u\|_{H_*^m(I \times \Omega)}^2 := \sum_{\langle \alpha \rangle \leq m} \|D_*^\alpha u\|_{L^2(I \times \Omega)}^2.$$

Для краткости мы будем писать $\|u\|_{m,*,t} := \|u\|_{H_*^m(\Omega_t)}$. По определению имеем

$$H^m(I \times \Omega) \hookrightarrow H_*^m(I \times \Omega) \hookrightarrow H^{\lfloor m/2 \rfloor}(I \times \Omega) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}, \quad I \subset \mathbb{R}.$$

Отметим также, что $H_*^1(\Omega_t)$ совпадают с $H_{\tan}^1(\Omega_t)$, где $H_{\tan}^m(\Omega_t)$ — так называемые конормальные пространства Соболева [3, 25].

Для системы (4.5b) граница Γ также характеристична, но потеря контроля над производными в нормальном направлении может быть компенсирована использованием линейаризованных дивергентных ограничений (4.7) (более подробно см. в [10, 22]). Поэтому для вакуумного неизвестного $\dot{V}$ мы можем использовать обычные нормы Соболева. Отсылая читателя к [3, 10] за доказательством, здесь мы просто представим основную априорную оценку, полученную для линейаризованной задачи (4.5).

Теорема 4.1. Пусть базовое состояние (4.1) удовлетворяет всем предположениям выше. Пусть также выполняется условие неколлинеарности

$$|\dot{H}_2 \dot{h}_3 - \dot{H}_3 \dot{h}_2| \geq \delta > 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.14)$$

где δ — фиксированная константа. Тогда существует положительная константа $\dot{E}_1^*$ такая, что если основное состояние удовлетворяет условию $|\dot{E}_1| < \dot{E}_1^*$ на Γ_T , то для всех $f \in H_*^1(\Omega_T)$, которые обращаются в нуль в прошлом, любое решение $(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) \in H_*^1(\Omega_T) \times H^1(\Omega_T) \times H^{3/2}(\Gamma_T)$ задачи (4.5) подчиняется априорной оценке

$$\|\dot{U}\|_{1,*,T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T,\delta} \|f\|_{1,*,T}. \quad (4.15)$$

Напомним, что, как было доказано в [16], классическая задача свободного интерфейса, в которой не учитывается влияние вакуумного электрического поля, корректно поставлена при условии, что начальные данные удовлетворяют условию неколлинеарности (4.14). Отметим, что условие неколлинеарности появляется как условие эллиптичности символа интерфейса (это означает, что граничные условия (4.8) и (4.9) разрешены относительно $\partial_t \varphi$ и $\nabla' \varphi$). С другой стороны, в [10] было показано, что несмотря на то, что ε является малым параметром в нерелятивистской постановке, достаточно большое вакуумное электрическое поле может сделать плоский интерфейс сильно неустойчивым, т. е. линейаризованная задача с постоянным коэффициентом, связанная с (4.5), может быть некорректно поставлена, если невозмущенное вакуумное электрическое поле достаточно велико. То есть условия неколлинеарности недостаточно, и вакуумное электрическое поле E играет решающую роль для корректности неклассической задачи.

Как мы видим, априорная оценка (4.15) была доказана в предположении, что нормальная компонента невозмущенного вакуумного электрического поля достаточно мала. Но этого предположения достаточно только для корректности. К сожалению, по техническим причинам невозможно найти необходимое и достаточное условие корректности для общего случая невозмущенного течения как аналитически, так и численно (численной проверкой условия Крайса—Лопатинского [8] для линеаризованной задачи с постоянным коэффициентом). Это было сделано в [24] только для случая идеальной *несжимаемой* МГД. Точнее, для задачи несжимаемой МГД—Максвелла о свободном интерфейсе в [24] было показано, что плоский интерфейс плазма—вакуум $x_1 = 0$ является *сильно неустойчивым*, т. е. соответствующая линеаризованная задача с постоянным коэффициентом является некорректной тогда и только тогда, когда

$$\dot{E}_1^2 > \frac{|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2 - \sqrt{(|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2)^2 - 4|\dot{H} \times \dot{h}|^2}}{2} \quad (4.16)$$

для невозмущенного потока. Легко видеть, что как только условие неколлинеарности (4.14) нарушается (т. е. $\dot{H} \times \dot{h} = 0$), выполняется неравенство (4.16) и линеаризованная задача с постоянными коэффициентами в несжимаемой МГД становится некорректной. Более того, если коэффициенты этой задачи удовлетворяют противоположному строгому неравенству

$$\dot{E}_1^2 < \frac{|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2 - \sqrt{(|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2)^2 - 4|\dot{H} \times \dot{h}|^2}}{2}, \quad (4.17)$$

то в [11] была выведена априорная оценка в L^2 с помощью «несжимаемой» адаптации метода симметризатора Крайса [8].

Если учесть влияние поверхностного натяжения, т. е. заменить граничное условие (1.13) на (1.18), то в линеаризованной задаче (4.5) последнее граничное условие в (4.5с) следует заменить на

$$\dot{q} - \dot{h} \cdot \dot{h} + \dot{E} \cdot \dot{E} + [\partial_1 \dot{q}] \varphi - \mathfrak{s} \nabla' \cdot (\dot{B} \nabla' \varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.18)$$

где $\dot{B}$ — положительно определенная матрица, определяемая как (см. [29])

$$\dot{B} := \frac{I_2}{|\dot{N}|} - \frac{\nabla' \dot{\varphi} \otimes \nabla' \dot{\varphi}}{|\dot{N}|^3}.$$

В этом случае вместо (4.13) справедливо следующее энергетическое неравенство:

$$\begin{aligned} I(t) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\mathfrak{s} |\nabla' \varphi|^2}{|\dot{N}|^3} + \dot{\mu} \varphi \dot{E}_N \right\} + \int_{\Gamma_t} \mathcal{L} &\lesssim_K \\ &\lesssim_K \|f\|_{L^2(\Omega_T^+)} + \|\dot{U}\|_{L^2(\Omega_t^+)} + \|\dot{V}\|_{L^2(\Omega_t^-)} + \|(\varphi, \nabla' \varphi)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

выведенное в [26]. То есть, как и в случае $\mathfrak{s} = 0$, мы не можем замкнуть априорную оценку в L^2 .

Дифференцируя линеаризованную задачу (4.5) по t , x_2 и x_3 и применяя рассуждения, аналогичные тем, что были применены к доказательству неравенства (4.19), удастся замкнуть априорную оценку в H^1 . А именно, следующая теорема была доказана в [26].

Теорема 4.2. Пусть базовое состояние (4.1) удовлетворяет сформулированным выше предположениям, а исходный член $f \in H_*^1(\Omega_T^+)$ обращается в нуль в прошлом. Пусть задача (4.5), в которой последнее граничное условие (4.5с) заменено на (4.18), имеет решение $(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) \in H_*^1(\Omega_T^+) \times H^1(\Omega_T^-) \times H^1(\Gamma_T)$, причем $\nabla' \varphi \in H^1(\Gamma_T)$. Тогда это решение подчиняется априорной оценке

$$\|\dot{U}\|_{1,*T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T^-)} + \|(\varphi, \nabla' \varphi)\|_{H^1(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T} \|f\|_{1,*T}. \quad (4.20)$$

Другими словами, стабилизирующий эффект поверхностного натяжения на эволюцию свободного интерфейса был проверен в [26]. Действительно, в теореме 4.2 не предполагается никаких условий корректности, таких как (4.14) или (4.17) для невозмущенного потока.

В то же время, доказательство локальной по времени корректности исходной нелинейной задачи свободного интерфейса при $\mathfrak{s} = 0$ или $\mathfrak{s} \neq 0$ все еще остается открытой проблемой. Фактически, с помощью априорных оценок (4.15) и (4.20), выведенных для линеаризованной задачи (при $\mathfrak{s} = 0$ или $\mathfrak{s} \neq 0$ соответственно), можно доказать (стандартными рассуждениями — см., например, [16]) единственность гладкого решения нелинейной задачи. Более того, мы считаем, что, имея доказательство существования гладких решений линейной задачи, разрешимость нелинейной задачи можно доказать модифицированной итерационной схемой Нэша—Мозера (как, например, в [16, 28, 29]). То есть отсутствие доказательства существования решений линеаризованной задачи теперь является главным препятствием к доказательству локальной корректности нелинейной задачи. Обратим внимание, что классический аргумент двойственности [5] не может быть напрямую применен к линейной задаче (4.5) (или ее аналогу при $\mathfrak{s} \neq 0$), поскольку для нее мы не можем замкнуть априорную оценку в L^2 .

5. ЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ КОРРЕКТНОСТЬ 2-МЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Что касается 2-мерной версии нелинейной задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8), ее локальная по времени корректность была недавно доказана в [18]. Давайте теперь рассмотрим 2-мерный случай. То есть, следуя [4], мы предполагаем, что все величины не зависят от x_3 , тогда как $v_3 = H_3 = h_3 = 0$. Это подразумевает, что $E_1 = E_2 = 0$ для всех $t > 0$, если это верно при $t = 0$. Предполагая последнее, мы имеем $E = (0, 0, E_3)$. Немного злоупотребляя обозначениями, пусть ниже $E := E_3$ будет скалярным неизвестным. Таким образом, мы рассматриваем 2-мерные плоские МГД-течения, т. е. когда пространственные переменные $x = (x_1, x_2)$, скорость $v = (v_1, v_2)^T$ и магнитное поле $H = (H_1, H_2)^T$ имеют только две компоненты. В области вакуума нашими неизвестными являются магнитное поле $h = (h_1, h_2)^T$ и скалярная функция E .

Для неизвестного $U \in \mathbb{R}^6$ 2-мерная МГД-система записывается в симметричной форме (1.4), с $d = 2$. Двумерные уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h_1 + \partial_2 E = 0, \\ \varepsilon \partial_t h_2 - \partial_1 E = 0, \\ \varepsilon \partial_t E - \partial_1 h_2 + \partial_2 h_1 = 0 \end{cases}$$

для $V = (h^T, E)^T \in \mathbb{R}^3$ также образуют симметричную гиперболическую систему

$$\varepsilon \partial_t V + B_1 \partial_1 V + B_2 \partial_2 V = 0 \quad (5.1)$$

с условием на дивергенцию

$$\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 = 0 \quad (5.2)$$

на начальных данных для (5.1), где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Движущийся интерфейс теперь представляет собой кривую $\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, x_2)\}$ и $N = (1, -\partial_2 \varphi)^T$. Для 2-мерного случая граничные условия (1.12)–(1.14) на $\Gamma(t)$ имеют вид

$$\partial_t \varphi = v_1 - v_2 \partial_2 \varphi, \quad q = \frac{1}{2} (|h|^2 - E^2), \quad E = -\varepsilon h_2 \partial_t \varphi. \quad (5.3)$$

Граничные условия

$$H_1 = H_2 \partial_2 \varphi \quad \text{и} \quad h_1 = h_2 \partial_2 \varphi \quad (5.4)$$

на $\Gamma(t)$ не включены в (1.12), поскольку они являются всего лишь граничными ограничениями на начальных данных. Таким образом, задача на интерфейсе плазма—вакуум в 2-мерном случае является задачей со свободной границей для МГД-системы (1.4) (с $d = 2$) в области $\Omega^+(t) = \{x_1 > \varphi(t, x_2)\}$ и уравнений Максвелла (5.1) в области $\Omega^-(t) = \{x_1 < \varphi(t, x_2)\}$ с граничными условиями (5.3) на свободном интерфейсе $\Gamma(t)$ и начальными данными (1.17), которые должны удовлетворять условиям на дивергенцию (1.2) и (5.2) в $\Omega^+(0)$ и $\Omega^-(0)$, соответственно, а также граничным ограничениям (5.4) на $\Gamma(0)$.

Замена переменных (2.1) (с $x' := x_2$) сводит задачу со свободной границей (1.4), (5.1), (5.3), (1.17) к 2-мерной версии задачи с фиксированной границей (2.2), в которой $\mathbb{R}_\pm^3$ заменяются на $\mathbb{R}_\pm^2$, линия $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$\mathbb{B}(U, V, \varphi) := \begin{pmatrix} \partial_t \varphi - v_1 + v_2 \partial_2 \varphi \\ E + \varepsilon \mathcal{H}_2 \partial_t \varphi \\ q - \frac{1}{2} |\mathcal{H}|^2 + \frac{1}{2} E^2 \end{pmatrix},$$

и т. д. (подробнее см. в [4, 25]). Более того, можно доказать 2-мерные версии предложений 2.1 и 2.2.

Для 2-мерной версии задачи (2.2) мы снова сталкиваемся с трудностями, вызванными тем, что граница неравномерно характеристична. Для преодоления этой трудности мы снова используем вторичную симметризацию. Двумерная версия вторичной симметризации (3.3) имеет вид

$$\varepsilon \mathcal{B}_0 \partial_t V + \mathcal{B}_1 \partial_1 V + \mathcal{B}_2 \partial_2 V = 0, \quad (5.5)$$

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\nu_2 \\ 0 & 1 & \nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & -\nu_1 & -1 \\ 0 & -1 & -\nu_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} -\nu_2 & \nu_1 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ 1 & 0 & -\nu_2 \end{pmatrix},$$

и условие гиперболичности $\mathcal{B}_0 > 0$ снова неравенство (3.4) при $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Мы должны сделать естественные изменения в 2-мерном аналоге системы (3.8), где выбор ν такой же, как в (3.6), а собственные значения граничной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{B}(v|_{x_1=0}, \varphi) := \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi)|_{x_1=0}$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\mathcal{B}) = \pm \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \lambda_3(\mathcal{B}) = 0.$$

Гиперболическая система (3.8) (ее 2-мерная версия в $\mathbb{R}_-^2$) требует одного граничного условия на Γ . То есть, 2-мерная версия задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8) имеет правильное количество граничных условий в (2.2c) независимо от знака $\partial_t \varphi$. Двумерная версия линеаризованной задачи (4.5) имеет тот же вид, где теперь $\Omega_T^\pm := (-\infty, T] \times \mathbb{R}_\pm^2$,

$$\mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(U, V, \varphi) := \begin{pmatrix} (\partial_t + \dot{v}_2 \partial_2 - \partial_1(\dot{v} \cdot \dot{N}))\varphi - \dot{v} \cdot \dot{N} \\ \dot{E} + \varepsilon \partial_t \dot{\varphi} \dot{\mathcal{H}}_2 + \varepsilon \dot{\mathcal{H}}_2 \partial_t \varphi + \dot{b} \varphi \\ \dot{q} - \dot{\mathcal{H}} \cdot \dot{\mathcal{H}} + \dot{E} \dot{E} + [\partial_1 \dot{q}] \varphi \end{pmatrix},$$

$\dot{b} = \partial_1 \dot{E} + \varepsilon \partial_t \dot{\varphi} \partial_1 \dot{\mathcal{H}}_2$, и т. д.

Корректность 2-мерной линеаризованной задачи была недавно доказана в [25].

Теорема 5.1. Пусть базовое состояние (4.1) удовлетворяет всем сформулированным выше предположениям. Пусть также

$$|\dot{H}| + |\dot{\mathcal{H}}| \geq \delta > 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (5.6)$$

где δ — фиксированная константа. Тогда 2-мерная версия задачи (4.5) имеет единственное решение $(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi}) \in H_*^1(\Omega_T^+) \times H^1(\Omega_T^-) \times H^{3/2}(\Gamma_T)$ для всех $f \in H_*^1(\Omega_T^+)$, обращающихся в нуль в прошлом. Более того, это решение подчиняется априорной оценке

$$\|\dot{U}\|_{1,*T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T^-)} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T,\delta} \|f\|_{1,*T}. \quad (5.7)$$

Условие (5.6) является 2-мерным аналогом условия неколлинеарности (4.14) в том смысле, что (5.6) также появляется как условие эллиптичности символа интерфейса, т. е. 2-мерные версии граничных ограничений (4.8) и (4.9) разрешимы для $\partial_t \varphi$ и $\partial_2 \varphi$, если выполняется (5.6). Как мы видим, в отличие от 3-мерного случая, в теореме 1.3 не требуется никаких предположений о невозмущенном вакуумном электрическом поле. Однако это вполне естественно, поскольку в 3-мерном случае нормальная компонента $\dot{E}_1$ играет дестабилизирующую роль, тогда как $\dot{E}_1$ выпадает из 2-мерной постановки. Благодаря выбору ν в (3.4) граничные условия для 2-мерной линеаризованной задачи являются диссипативными для случая постоянных коэффициентов, для которого мы можем даже замкнуть априорную оценку в L^2 (но из-за наличия членов низшего порядка априорная оценка для переменных коэффициентов замкнута в H_*^1 ; более подробно см.

в [25]). Единственность решения линейризованной задачи следует из оценки (5.7). Доказательство существования решений снова основано на использовании априорной оценки (5.7), если мы используем аргумент с фиксированной точкой из [15] (см. [25]).

Априорная оценка (5.7) не теряет производных от исходного члена f , но (5.7) подразумевает следующую априорную оценку для линейризованной задачи с неоднородными уравнениями Максвелла и граничными условиями [25]:

$$\|\dot{U}\|_{1,*,T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T^-)} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T,\delta} \|f\|_{3,*,T} + \|f^-\|_{H^3(\Omega_T^-)} + \|g\|_{H^3(\Gamma_T)}, \quad (5.8)$$

где f^- и g — исходные члены в уравнениях Максвелла и граничные условия, соответственно. Априорная оценка (5.8) *теряет производные* из исходных членов. Вот почему для компенсации этой потери производных существование гладких решений нелинейной задачи доказывается в [18] подходящими итерациями Нэша—Мозера. Отсылая читателя к [18] за подробностями, здесь мы только отметим, что решающую роль в доказательстве сходимости итераций Нэша—Мозера играют так называемые *ручные* априорные оценки в высоких нормах Соболева, выведенные для линейризованной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alinhac S. Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels // Commun. Part. Differ. Equ. — 1989. — 14. — С. 173–230.
2. Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. An energy principle for hydromagnetic stability problems // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1958. — 244. — С. 17–40.
3. Catania D., D'Abbicco M., Secchi P. Stability of the linearized MHD-Maxwell free interface problem // Commun. Pure Appl. Anal. — 2014. — 13. — С. 2407–2443.
4. Catania D., D'Abbicco M., Secchi P. Weak stability of the plasma–vacuum interface problem // J. Differ. Equ. — 2016. — 261. — С. 3169–3219.
5. Chazarain J., Piriou A. Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations. — Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1982.
6. Chen S. Initial boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary // Front. Math. China. — 2007. — 2. — С. 87–102.
7. Goedbloed H., Keppens R., Poedts S. Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2019.
8. Kreiss H.-O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems // Commun. Pure Appl. Math. — 1970. — 23. — С. 277–298.
9. Landau L. D., E. Lifshitz M. Electrodynamics of Continuous Media. — Oxford: Pergamon Press, 1984.
10. Mandrik N., Trakhinin Y. Influence of vacuum electric field on the stability of a plasma–vacuum interface // Commun. Math. Sci. — 2014. — 12. — С. 1065–1100.
11. Morando A., Secchi P., Trakhinin Y., Trebeschi P. Stability of an incompressible plasma–vacuum interface with displacement current in vacuum // Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — 43. — С. 7465–7483.
12. Morando A., Secchi P., Trebeschi P. Regularity of solutions to characteristic initial-boundary value problems for symmetrizable systems // J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2009. — 6, № 4. — С. 753–808.
13. Samulyak R., Du J., Glimm J., Xu Z. A numerical algorithm for MHD of free surface flows at low magnetic Reynolds numbers // J. Comput. Phys. — 2007. — 226. — С. 1532–1549.
14. Secchi P. Some properties of anisotropic Sobolev spaces // Arch. Math. (Basel). — 2000. — 75. — С. 207–216.
15. Secchi P., Trakhinin Y. Well-posedness of the linearized plasma–vacuum interface problem // Interfaces Free Bound. — 2013. — 15. — С. 323–357.
16. Secchi P., Trakhinin Y. Well-posedness of the plasma–vacuum interface problem // Nonlinearity. — 2014. — 27. — С. 105–169.
17. Secchi P., Trakhinin Y., Wang T. On vacuum free boundary problems in ideal compressible magnetohydrodynamics // Bull. London Math. Soc. — 2023. — 55. — С. 2087–2111.
18. Secchi P., Trakhinin Y., Wang T. Well-posedness of the two-dimensional relativistic plasma–vacuum interface problem // *готовится в печать*.
19. Trakhinin Y. Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications to shock waves and characteristic discontinuities // SIAM J. Math. Anal. — 2006. — 37. — С. 1988–2024.
20. Trakhinin Y. The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2009. — 191. — С. 245–310.

21. *Trakhinin Y.* On the well-posedness of a linearized plasma–vacuum interface problem in ideal compressible MHD// J. Differ. Equ. — 2010. — 249. — C. 2577–2599.
22. *Trakhinin Y.* Stability of relativistic plasma–vacuum interfaces// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2012. — 9. — C. 469–509.
23. *Trakhinin Y.* On well-posedness of the plasma-vacuum interface problem: The case of non-elliptic interface symbol// Commun. Pure Appl. Anal. — 2016. — 15. — C. 1371–1399.
24. *Trakhinin Y.* On violent instability of a plasma–vacuum interface for an incompressible plasma flow and a nonzero displacement current in vacuum// Comm. Math. Sci. — 2020. — 18. — C. 321–337.
25. *Trakhinin Y.* On well-posedness of the two-dimensional MHD–Maxwell free interface problem// Lobachevskii J. Math. — 2024. — 45. — C. 1528–1540.
26. *Trakhinin Y.* Stabilizing effect of surface tension for the linearized MHD–Maxwell free interface problem// ArXiv. — 2024. — 2409.14758.
27. *Trakhinin Y., Wang T.* Well-posedness of free boundary problem in non-relativistic and relativistic ideal compressible magnetohydrodynamics// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2021. — 239. — C. 1131–1176.
28. *Trakhinin Y., Wang T.* Well-posedness for the free-boundary ideal compressible magnetohydrodynamic equations with surface tension// Math. Ann. — 2022. — 383. — C. 761–808.
29. *Trakhinin Y., Wang T.* Well-posedness for moving interfaces with surface tension in ideal compressible MHD// SIAM J. Math. Anal. — 2022. — 54. — C. 5888–5921.

Ю. Л. Трахинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: trakhin@math.nsc.ru

UDC 517.956.35, 537.84

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193

EDN: VLOCPJ

On well-posedness of the free boundary problem for ideal compressible MHD equations and Maxwell equations in vacuum

Yu. L. Trakhinin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Abstract. We survey results on the well-posedness of the free interface problem when an interface separates a perfectly conducting inviscid fluid (e.g., plasma) from a vacuum. The fluid flow is governed by the equations of ideal compressible magnetohydrodynamics (MHD). Unlike the classical statement, when the vacuum magnetic field obeys the div-curl system of pre-Maxwell dynamics, we do not neglect the displacement current in the vacuum region and consider the Maxwell equations for electric and magnetic fields. With boundary conditions on the interface this forms a nonlinear hyperbolic problem with a characteristic free boundary. The statement of this free boundary problem comes from the relativistic setting where the displacement current in vacuum cannot be neglected. We also briefly discuss the recent result showing the stabilizing effect of surface tension.

Keywords: ideal compressible magnetohydrodynamics equations, free boundary problem, displacement current, Maxwell's equations, nonlinear hyperbolic problem, well-posedness.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was carried out at the Sobolev Institute of Mathematics within the framework of a government contract (project No. FVNF-2022-0008).

For citation: Yu. L. Trakhinin, “On well-posedness of the free boundary problem for ideal compressible MHD equations and Maxwell equations in vacuum,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 176–193. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193>

REFERENCES

1. S. Alinhac, “Existence d’ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1989, **14**, 173–230.
2. I. Bernstein, E. Frieman, M. Kruskal, and R. Kulsrud, “An energy principle for hydromagnetic stability problems,” *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1958, **244**, 17–40.
3. D. Catania, M. D’Abbicco, and P. Secchi, “Stability of the linearized MHD-Maxwell free interface problem,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2014, **13**, 2407–2443.
4. D. Catania, M. D’Abbicco, and P. Secchi, “Weak stability of the plasma–vacuum interface problem,” *J. Differ. Equ.*, 2016, **261**, 3169–3219.
5. J. Chazarain and A. Piriou, *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.
6. S. Chen, “Initial boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary,” *Front. Math. China*, 2007, **2**, 87–102.
7. H. Goedbloed, R. Keppens, and S. Poedts, *Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.
8. H.-O. Kreiss, “Initial boundary value problems for hyperbolic systems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1970, **23**, 277–298.
9. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, Oxford, 1984.
10. N. Mandrik and Y. Trakhinin, “Influence of vacuum electric field on the stability of a plasma–vacuum interface,” *Commun. Math. Sci.*, 2014, **12**, 1065–1100.
11. A. Morando, P. Secchi, Y. Trakhinin, and P. Trebeschi, “Stability of an incompressible plasma–vacuum interface with displacement current in vacuum,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, **43**, 7465–7483.
12. A. Morando, P. Secchi, and P. Trebeschi, “Regularity of solutions to characteristic initial-boundary value problems for symmetrizable systems,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2009, **6**, No. 4, 753–808.
13. R. Samulyak, J. Du, J. Glimm, and Z. Xu, “A numerical algorithm for MHD of free surface flows at low magnetic Reynolds numbers,” *J. Comput. Phys.*, 2007, **226**, 1532–1549.
14. P. Secchi, “Some properties of anisotropic Sobolev spaces,” *Arch. Math. (Basel)*, 2000, **75**, 207–216.
15. P. Secchi and Y. Trakhinin, “Well-posedness of the linearized plasma–vacuum interface problem,” *Interfaces Free Bound.*, 2013, **15**, 323–357.
16. P. Secchi and Y. Trakhinin, “Well-posedness of the plasma–vacuum interface problem,” *Nonlinearity*, 2014, **27**, 105–169.
17. P. Secchi, Y. Trakhinin, and T. Wang, “On vacuum free boundary problems in ideal compressible magnetohydrodynamics,” *Bull. London Math. Soc.*, 2023, **55**, 2087–2111.
18. P. Secchi, Y. Trakhinin, and T. Wang, “Well-posedness of the two-dimensional relativistic plasma–vacuum interface problem,” *in preparation*.
19. Y. Trakhinin, “Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications to shock waves and characteristic discontinuities,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2006, **37**, 1988–2024.
20. Y. Trakhinin, “The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **191**, 245–310.
21. Y. Trakhinin, “On the well-posedness of a linearized plasma–vacuum interface problem in ideal compressible MHD,” *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, 2577–2599.
22. Y. Trakhinin, “Stability of relativistic plasma–vacuum interfaces,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2012, **9**, 469–509.
23. Y. Trakhinin, “On well-posedness of the plasma–vacuum interface problem: The case of non-elliptic interface symbol,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2016, **15**, 1371–1399.
24. Y. Trakhinin, “On violent instability of a plasma–vacuum interface for an incompressible plasma flow and a nonzero displacement current in vacuum,” *Comm. Math. Sci.*, 2020, **18**, 321–337.
25. Y. Trakhinin, “On well-posedness of the two-dimensional MHD–Maxwell free interface problem,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, 1528–1540.
26. Y. Trakhinin, “Stabilizing effect of surface tension for the linearized MHD–Maxwell free interface problem,” *ArXiv*, 2409.14758, 2024.
27. Y. Trakhinin and T. Wang, “Well-posedness of free boundary problem in non-relativistic and relativistic ideal compressible magnetohydrodynamics,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2021, **239**, 1131–1176.

28. Y. Trakhinin and T. Wang, “Well-posedness for the free-boundary ideal compressible magnetohydrodynamic equations with surface tension,” *Math. Ann.*, 2022, **383**, 761–808.
29. Y. Trakhinin and T. Wang, “Well-posedness for moving interfaces with surface tension in ideal compressible MHD,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2022, **54**, 5888–5921.

Yu. L. Trakhinin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

E-mail: `trakhin@math.nsc.ru`

УДК 517.954, 517.956.226, 517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212

EDN: VPSNGM

ОБ УСРЕДНЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ В ПОЛУПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕТЬИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦЕ ПОЛОСТЕЙ. ДОКРИТИЧЕСКИЙ, КРИТИЧЕСКИЙ И ЗАКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАИ

Г. А. ЧЕЧКИН

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Институт математики с компьютерным центром Уфимского федерального исследовательского
центра РАН, Уфа, Россия*

Аннотация. Рассмотрена задача для уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной модельной области, имеющей характерный размер микронеоднородностей ε , с краевым условием третьего рода на границе полостей (условием Фурье), которое имеет в коэффициентах в качестве множителя малый параметр ε^α , и условием Дирихле на внешней части границы. Для этой задачи построена усреднённая задача и доказана сходимость решений исходной задачи к решению усреднённой в трёх случаях. Докритический (субкритический) случай $\alpha > 1$ характеризуется тем, что диссипация на границе полостей пренебрежимо мала, в критическом случае $\alpha = 1$ в уравнении из-за диссипации появляется потенциал, а в закритическом (суперкритическом) случае $\alpha < 1$ диссипация играет главную роль, она приводит к вырождению решения всей задачи.

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева—Бицадзе, усреднение, перфорированная область.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор очень признателен анонимному рецензенту за внимательное прочтение работы. Замечания и рекомендации уважаемого рецензента помогли существенно улучшить изложение результатов и исправить досадные неточности.

Для цитирования: Г. А. Чечкин. Об усреднении уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей. Докритический, критический и закритический случаи // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 194–212. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212>

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотический анализ задач в микронеоднородных средах является важной частью теории дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают во многих прикладных областях, таких как материаловедение, современное производство композиционных материалов с различными свойствами, строительство, нефтеразработка, ракетостроение и др., а также в естественных науках, таких как химия, физика, биология, биофизика и биохимия, геология и др. Эти исследования приводят к математическим моделям, включающим уравнения и краевые условия с малыми параметрами, характеризующими размеры микронеоднородностей. Часто рассматриваются уравнения в перфорированных или полуперфорированных областях, которые требуют применения

методов асимптотического анализа, теории усреднения, теории пограничного слоя и т. д. Случай уравнения Стокса рассмотрен в [25, 26, 29, 30, 33]. Модельные задачи для оператора Лапласа с различными граничными условиями на границе полостей рассмотрены в работах [4, 5, 12, 13, 27, 28]. Краевые условия третьего рода рассматривались в работах [2, 3, 22–24]. Интересные результаты получены для сходимости аттракторов в перфорированных областях. В работах [14, 16] рассмотрена ситуация случайных полостей. Двумерное уравнение Навье—Стокса изучено в [1, 20]. В этих работах доказана слабая сходимость аттракторов. Сильная сходимость доказана в [15]. Уравнения Гинзбурга—Ландау изучены в [17–19]. В этих работах рассмотрены докритический, критический и закритический случаи.

В работах [7, 8] моделировались задачи, связанные с изучением физико-химических свойств струи газа в камере сгорания и сопле жидкостного реактивного двигателя.

В настоящей работе рассматривается уравнение переменного типа Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области. В соответствии с моделью предполагается, что перфорация находится только в «эллиптической» части области, а в «гиперболической» она отсутствует, как, впрочем, и правая часть уравнения в «гиперболической» части области предполагается равной нулю.

Доказательство существования и единственности решения такой задачи в полуперфорированной области можно найти в [7]. Отметим, что вопросы существования и единственности решений задач для уравнения Лаврентьева—Бицадзе поднимались ранее. В работе [32] изучалась смешанная задача для такого уравнения. Там установлена нормальная разрешимость задачи в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до угловых точек области. Отметим также, что в случае, когда область, в которой рассматривается задача, является односвязной (например, она может быть конформно отображена на полукруг), однозначная разрешимость в Соболевском пространстве W_2^1 установлена в [9].

В работе строится усреднённая задача (аналогично см. [7]) и доказывается оценка отклонения решения исходной задачи от решения усреднённой задачи в интегральной норме.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты будем рассматривать двумерную область. В многомерном случае потребуется более сложный анализ уравнения в «гиперболической» части области.

Рассматривается уравнение вида

$$-u_{yy}^\varepsilon - (\operatorname{sign} y) u_{xx}^\varepsilon = f(x, y)$$

в полуперфорированной области D_ε , перфорированная часть которой расположена в полуплоскости $y > 0$ и имеет локально периодическую структуру с характерным размером ε , а часть, лежащая в нижней полуплоскости $y < 0$, имеет однородную структуру. На внешней границе области выставлено однородное условие Дирихле, тогда как на границе полостей выставлено краевое условие третьего рода (условие Фурье) с параметром ε^α , отвечающим за диссипацию энергии. Исследуется асимптотическое поведение решения при стремлении малого параметра ε к нулю. Полагаем, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и обращается в ноль при $y < 0$.

Выделяются три различных случая: $\alpha > 1$ (*докритический*, или *субкритический* случай), $\alpha = 1$ (*критический* случай) и $\alpha < 1$ (*закритический*, или *суперкритический* случай).

Перейдём к строгому определению области и краевой задачи в этой области.

Определим сначала перфорированную часть области. Пусть D^1 — полукруг, лежащий в полуплоскости $y > 0$, граница области ∂D^1 состоит из двух частей Γ_0 и Γ , где Γ_0 — является частью окружности единичного радиуса с центром в точке $(x = 1, y = 0)$, а Γ — отрезок $[0, 2]$ на оси абсцисс $y = 0$. Обозначим

$$J^\varepsilon = \left\{ j \in \mathbb{Z}^2 : \operatorname{dist}(\varepsilon j, \Gamma_0) \geq \varepsilon\sqrt{2}, \operatorname{dist}(\varepsilon j, \Gamma) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$\square \equiv \left\{ (\xi, \eta) : -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2} \right\}.$$

Задавая 1-периодическую по ξ и η гладкую функцию $\Phi(x, y, \xi, \eta)$ такую, что $\Phi|_{(\xi, \eta) \in \partial \square} \geq \text{const} > 0$, $\Phi(x, y, 0, 0) < 0$, $\nabla_{\xi\eta} \Phi \neq 0$ при $(\xi, \eta) \in \square \setminus \{0\}$, определяем

$$Q_j^\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \varepsilon(\square + j) \mid \Phi\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}^2,$$

и строим перфорированную область следующим образом:

$$D_\varepsilon^1 = D^1 \setminus \bigcup_{j \in J^\varepsilon} Q_j^\varepsilon.$$

В соответствии с приведённой конструкцией, граница области D_ε^1 состоит из Γ_0 , Γ , которые формируют внешнюю границу области, и границы «дырок», которую мы обозначим $S_\varepsilon = (\partial D_\varepsilon^1) \cap D$. Также обозначим

$$\tilde{D}_\varepsilon^1 = D^1 \setminus \bigcup_{j \in J^\varepsilon} (\varepsilon(\square + j)),$$

т. е. тонкий слой около границы области без перфорации.

Обозначим также

$$S(x, y) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{T}^2 \mid \Phi(x, y, \xi, \eta) = 0\}, \quad \omega(x, y) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{T}^2 \mid \Phi(x, y, \xi, \eta) > 0\}.$$

Здесь $\mathbb{T}^2$ — 2-мерный тор. Далее мы будем опускать буквы (x, y) в обозначении ячейки периодичности и границы полости, будем писать S и ω , соответственно.

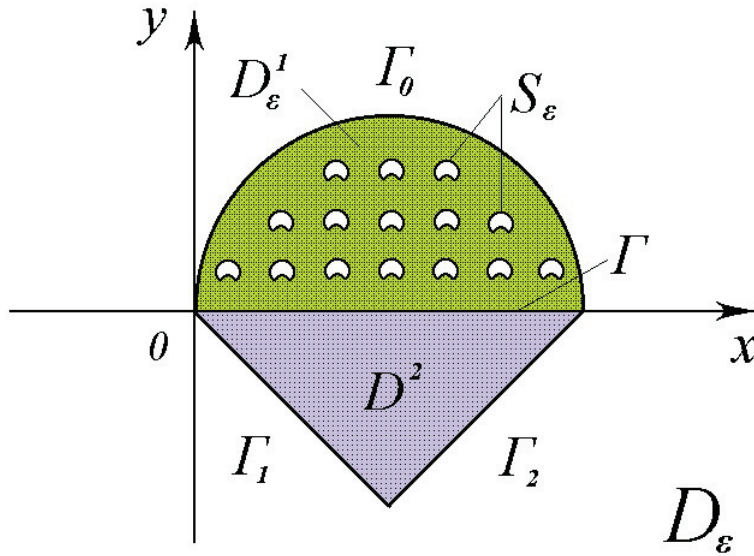


Рис. 1. Двумерная полуперфорированная область

FIG. 1. Two-dimensional partially perforated domain

Замечание 1.1. Следует отметить, что перфорация области подходит непосредственно к оси $\{y = 0\}$. Поэтому ожидается влияние перфорации на эффективное поведение решения в окрестности интерфейса Γ .

Теперь остаётся добавить к «эллиптической» области D_ε^1 «гиперболическую» часть D^2 , которую мы определяем как часть полуплоскости $y < 0$, ограниченную сверху отрезком Γ , а снизу — отрезками прямых («характеристик» уравнения) $\Gamma_1 := \{(x, y) : x = -y, x \in [0, 1]\}$ и $\Gamma_2 := \{(x, y) : x = y + 2, x \in [1, 2]\}$. Итак, построена область $D_\varepsilon = D_\varepsilon^1 \cup (\text{int } \Gamma) \cup D^2$ (см. рис. 1).

Рассматривается задача

$$\begin{cases} -u_{yy}^\varepsilon - (\operatorname{sign} y)u_{xx}^\varepsilon = f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $n_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ — внутренняя нормаль к границе включений. Предполагается, что коэффициент q является неотрицательной достаточно гладкой функцией в D^1 , а также 1-периодической по третьему и четвёртому аргументу. Будем исследовать асимптотическое поведение решения $u^\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи (1.1) может быть разбито на две части. Сначала мы решаем уравнение в «гиперболической» части D^2 . В этой области функция $u(x, y) = F(x + y) + G(x - y)$, где $F(s)$ и $G(t)$ — произвольные достаточно гладкие функции. С учётом краевых условий на Γ_1 получаем, что $F(0) + G(2x) = 0$ и, следовательно, $G \equiv 0$, а $F(0) = 0$. Такое решение инициирует на «интерфейсе» Γ между «эллиптической» и «гиперболической» частями области D_ε условие $u_x = u_y$. Решая отдельно краевую задачу для уравнения Пуассона в области D_ε^1 вида

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = -f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon^1, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon & \text{на } \Gamma, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.2)$$

получаем условия для однозначного нахождения функции $F(s)$ (см. аналогично [32]).

Введём обозначения пространств

$$W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1) := \left\{ u : \int_{D_\varepsilon^1} \left(|\nabla^2 u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} + |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} + u^2 \rho_1^{\delta_1-4} \rho_2^{\delta_2-4} \right) dx dy < +\infty \right\},$$

$$W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0) := \left\{ u : u \in W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1), u = 0 \text{ на } \Gamma_0, u_x = u_y \text{ на } \Gamma, u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon \text{ на } \Gamma, \frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} = -\varepsilon^\alpha q u \text{ на } S_\varepsilon \right\},$$

где $\delta_j \in (0, 1/2]$, $j = 1, 2$, $\rho_1 = \rho_1(x, y)$ — расстояние до начала координат, $\rho_2 = \rho_2(x, y)$ — расстояние до точки $(2, 0)$, здесь $|\nabla^2 u|^2$ — сумма квадратов обобщённых частных производных второго порядка, а равенства $u_x = u_y$ и $\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} = -\varepsilon^\alpha q u$ понимаются в смысле следов функций.

Пусть $u \in W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1)$. Обозначим $v_1 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}} \rho_2^{\frac{\delta_1}{2}} u$, $v_2 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}-1} \rho_2^{\frac{\delta_1}{2}-1} u$. Ясно, что $v_1 \in W_2^2(D_\varepsilon^1)$, $v_2 \in H^1(D_\varepsilon^1)$. В силу классической теоремы о следе $v_1 \in W_2^1(\Gamma)$, $v_2 \in L_2(\Gamma)$, и следовательно,

$$\int_{\Gamma} |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx < \infty, \quad \int_{\Gamma} u^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} dx < \infty. \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.2) понимается как элемент пространства $W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$, который удовлетворяет уравнению задачи (1.2) почти всюду, а граничные значения понимаются в смысле следов.

Замечание 1.2. В работе [32] изучалась задача (1.2) в однородной области без перфорации с целью решения модели Лаврентьева—Бицадзе для смешанной задачи. Там установлена нормальная разрешимость задачи (1.2) в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до точек $(0, 0)$ и $(2, 0)$.

Принципиальным же является вопрос об однозначной разрешимости (которая в общем случае не следует из нормальной). Доказательство однозначной разрешимости в пространстве $W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$ с некоторыми $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ для перфорированной области с условием Неймана на границе полостей проведено в [7]. Доказательство для задачи с третьим краевым условием на границе полостей совершенно аналогично доказательству из [7], которое опирается на лемму Хопфа—Олейник (см. [11]), а также на вложение $W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0) \hookrightarrow C(\overline{D_\varepsilon^1})$ (см. [7, предложение 1]), доказательство которого опирается на результаты из [6, 10], и мы его здесь не приводим.

Умножим уравнение задачи на u^ε и проинтегрируем по частям. Запишем это равенство:

$$\int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy + \varepsilon^\alpha \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) (u^\varepsilon)^2 ds - \int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \int_{D_\varepsilon^1} f u^\varepsilon dx dy. \quad (1.4)$$

Здесь u_x^ε понимается в смысле следа функции. При этом (см. (1.3))

$$\int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon u^\varepsilon| dx \leq \int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx + \int_{\Gamma} |u^\varepsilon|^2 \rho_1^{-\delta_1} \rho_2^{-\delta_2} dx < \infty.$$

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (1.2). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Решение u^ε задачи (1.2) удовлетворяет неравенству*

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)} \leq K,$$

где константа $K > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. В равенстве (1.4) рассмотрим третье слагаемое в левой части. Имеем

$$\int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial ((u^\varepsilon)^2)}{\partial x} dx \equiv 0.$$

Далее, используя стандартную технику интегральных оценок, учитывая неравенство для следов

$$\int_{S_\varepsilon} q (u^\varepsilon)^2 ds \leq C \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy$$

и неравенство типа Фридрихса

$$\int_{D_\varepsilon^1} (u^\varepsilon)^2 dx dy \leq C \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy,$$

получаем необходимую оценку. Теорема доказана. $\square$

3. УСРЕДНЕНИЕ В «ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ» ЧАСТИ ОБЛАСТИ И ОЦЕНКИ

Этот раздел посвящён изучению асимптотического поведения решений уравнения Пуассона $\Delta u^\varepsilon = -f(x, y)$ в области D_ε^1 с краевыми условиями $u^\varepsilon = 0$ на Γ_0 , $u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon$ на Γ и $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon = 0$ на S_ε .

В последующих пунктах отдельно разберёмся с докритическим, критическим и закритическим случаями.

3.1. Критический случай $\alpha = 1$.

3.1.1. Формальная асимптотическая процедура. Выпишем ведущие члены асимптотического разложения решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.2) в виде

$$u^\varepsilon(x, y) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u^2 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^3 u^3 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \dots \quad (3.1)$$

Подставляя выражение (3.1) в уравнение (1.2), принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \zeta \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \zeta(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \zeta \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \zeta(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} \zeta(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\eta=\frac{y}{\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

получаем в области D_ε^1 равенство

$$\begin{aligned}
-f(x, y) = \Delta_{xy} u^\varepsilon(x, y) \cong \Delta_{xy} u^0(x, y) + \varepsilon \left(\Delta_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ 2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ \varepsilon^2 \left(\Delta_{xy} u^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ \left(\Delta_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^3 \left(\Delta_{xy} u^3(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ 2\varepsilon^2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^3(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon \left(\Delta_{\xi\eta} u^3(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \dots \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Аналогично, подставляя (3.1) в граничные условия задачи (1.2), получаем на S_ε соотношение

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon \cong (\nabla_{xy} u^0, n_\varepsilon) + \varepsilon q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^0 + \varepsilon (\nabla_{xy} u^1, n_\varepsilon) + \\
+ \left(\nabla_{\xi\eta} u^1 \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^2 q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^1 + \varepsilon^2 (\nabla_{xy} u^2, n_\varepsilon) + \varepsilon \left(\nabla_{\xi\eta} u^2 \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \\
+ \varepsilon^3 q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^2 + \varepsilon^3 (\nabla_{xy} u^3, n_\varepsilon) + \varepsilon^2 \left(\nabla_{\xi\eta} u^3 \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^4 q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^3 + \dots \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Заметим, что нормальный вектор n_ε имеет вид

$$n_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) = \tilde{n}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon n'_\varepsilon(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, \quad (3.5)$$

где $\tilde{n}$ — нормаль к $S(x, y) = \{\xi, \eta \mid \Phi(x, y, \xi, \eta) = 0\}$,

$$n'_\varepsilon = n' + O(\varepsilon).$$

Можно увидеть, что

$$\begin{aligned}
n_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \equiv \frac{\nabla_{xy} \Phi(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})}{|\nabla_{xy} \Phi(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})|} = \left(\frac{\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|} + \varepsilon \frac{\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|} - \right. \\
\left. - \varepsilon \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta) \frac{(\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta))}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|^3} + O(\varepsilon^2) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Поэтому, $\tilde{n}(x, y, \xi, \eta) = \frac{\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|},$

$$n'(x, y, \xi, \eta) = \frac{\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|} - \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta) \frac{(\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta))}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|^3}.$$

Собирая члены порядка ε^{-1} в (3.3) и порядка ε^0 в (3.4), получаем задачу на ячейке периодичности

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) = 0 & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy}(u^0(x, y)), \tilde{n}) & \text{на } S(x, y), \end{cases} \quad (3.6)$$

которая рассматривается в классе 1-периодических по ξ и η функций; здесь x и y — параметры.

Условием разрешимости задачи является равенство

$$\int_S (\nabla_{xy} u^0(x, y), \tilde{n}) \, d\sigma = 0,$$

которое выполняется автоматически. Решение этой задачи является первым корректором в (3.1).

На следующем шаге собираем члены порядка ε^0 в (3.3) и порядка ε^1 в (3.4). Имеем

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) = -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - 2(\nabla_{\xi\eta}, \nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta)) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta), \tilde{n}) - (\nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta), n') - \\ - (\nabla_{xy} u^0(x, y), n') - q(x, y, \xi, \eta) u^0(x, y) & \text{на } S(x, y). \end{cases} \quad (3.7)$$

1-периодическое по ξ и η решение этой задачи является следующим членом разложения решения $u^\varepsilon(x, y)$.

Из структуры задачи (3.6) естественно искать решение $u^1(x, y, \xi, \eta)$ в виде

$$u^1(x, y, \xi, \eta) = (\nabla_{xy} u^0(x, y), M(x, y, \xi, \eta)),$$

где 1-периодические по ξ и η функции $M(x, y, \xi, \eta) = (M_1(x, y, \xi, \eta), M_2(x, y, \xi, \eta))$ являются классическими решениями задач

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} M_i(x, y, \xi, \eta) = 0 & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial M_i(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -\tilde{n}_i & \text{на } S(x, y). \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь x и y играют роль параметров.

Теперь перепишем задачу (3.7) в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) &= -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} - \\ &\quad - 2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} &= - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} (M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 + M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1) - \\ &\quad - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1 - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ &\quad - q(x, y, \xi, \eta) u^0(x, y) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} n'_1 - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} n'_2 & \text{на } S(x, y). \end{aligned} \right.$$

Записываем условие разрешимости этой задачи и с помощью формулы Гаусса—Остроградского, имея в виду самосопряжённость предельного оператора (подробнее см. [22]), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) - Q(x, y) u^0(x, y) = -|\square \cap \omega| f. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначен интеграл $\int_{\square \cap \omega} \cdot d\xi d\eta$ по ячейке периодичности, 1-периодические по ξ и η функции $M_i(x, y, \xi, \eta)$ являются решениями ячеечных задач (3.8), а также

$$Q(x, y) = \int_S q(x, y, \xi, \eta) d\sigma.$$

Применяя методы из [11], можно показать, что матрица этого уравнения является положительно определённой (см. аналогично [22]).

Далее подставляем анзац (3.1) в краевое условие задачи (1.2) на Γ и приравниваем члены с соответствующими степенями ε ; приходим к усреднённой (предельной) задаче вида

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) - \\ \quad - Q(x, y) u^0(x, y) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ u_x^0 = \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle u_y^0 + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle u_x^0 & \text{на } \Gamma, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Замечание 3.1. Отметим, что функции $M_i\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ не определены во всей области D^1 . Применяя технику симметрического продолжения (см. [31, теорема 8.1]), можно продолжить функции $M(x, y, \xi, \eta)$ во внутренность полостей, сохраняя регулярность этих функций. За продолженными функциями сохраняем те же обозначения.

Замечание 3.2. Отметим интересную особенность краевого условия задачи (3.10) на Γ . В усреднённой задаче нормальная составляющая косой производной перешла в конормальную, тогда как касательная составляющая осталась без изменений.

Имеет место теорема.

Теорема 3.1. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и пусть $q(x, y, \xi, \eta)$ — достаточно гладкая неотрицательная функция, 1-периодическая по ξ и η . Тогда для достаточно малых ε задача (1.2) имеет единственное решение, которое удовлетворяет оценке

$$\|u^0 + \varepsilon u^1 - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq K_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

где u^0 и u^1 — решения задач (3.10) и (3.6) соответственно, а константа K_1 не зависит от ε .

Замечание 3.3. На самом деле в теореме 3.1 условие неотрицательности $q(x, y, \xi, \eta) \geq 0$ может быть заменено на более слабое $Q(x, y) \geq 0$.

3.1.2. Вспомогательные утверждения. В этом пункте сформулируем леммы из [2, 21, 22], которые нам понадобятся в дальнейшем анализе.

Лемма 3.1. Если выполнены условия теоремы 3.1, то имеет место неравенство

$$\int_{D_\varepsilon^1} |\nabla v|^2 dx dy + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) v^2 ds \geq C_1 \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)}^2$$

для любой $v \in H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$ с константой C_1 , не зависящей от ε .

Лемма 3.2. Если

$$|\square \cap \omega| Q(x, y) - \int_S q(x, y, \xi, \eta) d\sigma \equiv 0,$$

то

$$\left| \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1} Q v \, dx dy - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) v \, ds \right| \leq C_2 \varepsilon \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}$$

для любой $v(x) \in H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$; константа C_2 не зависит от ε .

Лемма 3.3. Пусть y_ε — решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = h^\varepsilon(x, y) & \text{в } D_\varepsilon^1, \\ y_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases}$$

где функция $h^\varepsilon(x, y) = f(x, y)$ для $(x, y) \in \tilde{D}_\varepsilon^1$ и равна 0 в остальных случаях. Тогда

$$\|y_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq C_3 \varepsilon.$$

3.1.3. Основная оценка.

Доказательство теоремы 3.1. Для обоснования построенной формальной асимптотики необходимо оценить невязку

$$\|u^0 + \varepsilon u^1 - u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Продолжим функции $M_i(x, y, \xi, \eta)$ в слой $\tilde{D}_\varepsilon^1$ (см. замечание 1.1) и подставим

$$z_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = u^0(x, y) + \varepsilon \chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^1\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) - u^\varepsilon(x, y)$$

в уравнение (1.2). Здесь $\chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ — гладкая срезающая функция $0 \leq \chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \leq 1$, такая что $\chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = 0$ при $x \in \tilde{D}_\varepsilon^1$ и $\chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = 1$ при $\text{dist}(x, \tilde{D}_\varepsilon^1) \geq \text{dist}(S_\varepsilon, \tilde{D}_\varepsilon^1)$; более того, $|\nabla_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta)|$ и $|\Delta_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta)|$ равномерно ограничены. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} \left(z_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \right) &= \Delta_{xy} u^0(x, y) + \varepsilon \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \Delta_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ 2 \left(\chi^\varepsilon(\xi, \eta) \nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ 2 \left(\nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\chi^\varepsilon(\xi, \eta) \Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(u^1(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{2}{\varepsilon} \left(\nabla_\xi \chi^\varepsilon(\xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} - \Delta_{xy} u^\varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Принимая во внимание равенства

$$\Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad \text{в } D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1, \quad \Delta_{xy} u^\varepsilon(x) = -f(x) \quad \text{в } D_\varepsilon^1,$$

$$\begin{aligned} &2 \left(\nabla_{xy}, \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) = \\ &= 2 \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \left(\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} + \right. \\ &+ \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y \partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} + \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y \partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

и (3.9), можно переписать (3.12) в области $D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1$ (см. аналогично [22]). Также мы поступаем с выражением $\frac{\partial z_\varepsilon(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})}{\partial n_\varepsilon}$ на S_ε . Далее, имея в виду, что

$$z_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \equiv 0$$

на Γ_0 , умножаем полученное уравнение из (3.12) на $v(x, y)$ и интегрируем по области D_ε^1 . После применения формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon^1} \Delta_{xy} \left(z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right) v(x, y) \, dx dy &= \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} v \, ds - \int_{D_\varepsilon^1} \nabla z_\varepsilon \nabla v \, dx dy = \\ &= \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon v \, ds + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial n_\varepsilon} v \, ds + \\ &+ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(\nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) v(x, y) \, ds + \\ &+ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(\nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta), n'_\varepsilon(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds + \\ &+ \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \right) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds - \\ &\quad - \int_{D_\varepsilon^1} \nabla z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \nabla v(x, y) \, dx dy. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Теперь, используя (3.13) и граничное условие из (3.10), оцениваем

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_\varepsilon^1} \nabla z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \nabla v(x, y) \, dx dy + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) v(x, y) \, ds \right| &\leq \\ &\leq \varepsilon \left| \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^1 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) v(x, y) \, ds \right| + \\ &+ \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^0(x, y) v(x, y) \, ds - \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} Q(x, y) u^0(x, y) v(x, y) \, dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_{\tilde{D}_\varepsilon^1} \Delta_{xy} u^0(x, y) v(x, y) \, dx dy \right| + \left| \varepsilon \int_{D_\varepsilon^1} \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \Delta_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial n_\varepsilon} + \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \right) + \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds \Big| + \\
& + \left| \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} \left(\left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\langle 1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] - \right. \right. \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] \Big) + \left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\langle \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] \Big) + \left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\langle \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] \Big) + \left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\langle 1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] \right) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy - \\
& - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (\nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta), n'_\varepsilon(x, y, \xi, \eta)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds \Big| + \left| \int_{\tilde{D}_\varepsilon^1} f(x, y) v(x, y) \, dxdy \right| + \\
& + \left| \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} (\chi^\varepsilon(\xi, \eta) - 1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right) \Big) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy \Big| + \\
& + \left| \int_{D_\varepsilon^1} \frac{1}{\varepsilon} (u^1(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy + \right. \\
& + \left. \int_{D_\varepsilon^1} \frac{2}{\varepsilon} (\nabla_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy \right| + \\
& + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Используя лемму 3.2, оцениваем

$$\begin{aligned}
I_2 & = \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^0(x, y) v(x, y) \, ds - \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} Q(x, y) u^0(x, y) v(x, y) \, dxdy \right| \leq \\
& \leq C_4 \varepsilon \|u^0\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.
\end{aligned}$$

Члены I_1 и I_4 удовлетворяют

$$|I_1| + |I_4| \leq C_5 \varepsilon \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Тождество $I_5 \equiv 0$ следует из граничных условий задачи (3.6). Для оценки слагаемого I_6 применяем технику доказательства леммы 3.2 (см. [22]). Получаем

$$|I_6| \leq C_6 \varepsilon \|\mathcal{D}^2 u^0(x, y)\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)};$$

здесь мы использовали C^1 -гладкость функции $f(x, y)$. Учитывая лемму 3.3, можно считать, что функция $f(x)$ равна нулю в слое $\tilde{D}_\varepsilon^1$. Поэтому $I_7 = 0$. Слагаемое I_3 оценивается следующим образом:

$$I_3 \leq C_7 \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Из свойств срезающей функции $\chi^\varepsilon(\xi, \eta)$ следует, что

$$|I_8| + |I_9| \leq C_8 \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Подставляя $v = u^0 + \varepsilon \chi^\varepsilon u^1 - u^\varepsilon$ в (3.14) и учитывая полученные выше оценки, с помощью леммы 3.1 и очевидной оценки $\|\varepsilon u^1(1 - \chi^\varepsilon)\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq C_9 \sqrt{\varepsilon}$ получаем (3.11). Теорема доказана. $\square$

3.2. Докритический случай $\alpha > 1$.

3.2.1. *Формальная процедура и главная оценка.* Подставляем выражение

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, y) = & u^0(x, y) + \varepsilon^{\alpha-1} u^{1,-1}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^{0,1}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^\alpha u^{1,0}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \\ & + \varepsilon^2 u^{0,2}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{\alpha+1} u^{1,1}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \dots + \varepsilon^{k\alpha+l} u^{k,l}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \dots \end{aligned}$$

в уравнение (1.2). С учетом (3.2) выводим

$$\begin{aligned} -f(x, y) = & \Delta_{xy} u^\varepsilon(x, y) \cong \\ \cong & \Delta_{xy} u^0(x, y) + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\Delta_{xy} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^{\alpha-2} \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha-3} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon \left(\Delta_{xy} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + 2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^\alpha \left(\Delta_{xy} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^{\alpha-1} \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha-2} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 \left(\Delta_{xy} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \left(\Delta_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha+1} \left(\Delta_{xy} u^{1,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^\alpha \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{1,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{1,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \dots + \varepsilon^{k\alpha+l} \left(\Delta_{xy} u^{k,l}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + 2\varepsilon^{k\alpha+l-1} \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{k,l}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{k\alpha+l-2} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{k,l}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \dots \quad (3.15) \end{aligned}$$

Аналогично на S_ε получаем

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon \cong \left(\nabla_{xy} u^0, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^0 + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\nabla_{xy} u^{1,-1}, n_\varepsilon \right) + \\ & + \varepsilon^{\alpha-2} \left(\nabla_{\xi\eta} u^{1,-1} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{2\alpha-1} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{1,-1} + \varepsilon \left(\nabla_{xy} u^{0,1}, n_\varepsilon \right) + \\ & + \left(\nabla_{\xi\eta} u^{0,1} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{\alpha+1} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{0,1} + \varepsilon^\alpha \left(\nabla_{xy} u^{1,0}, n_\varepsilon \right) + \\ & + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\nabla_{\xi\eta} u^{1,0} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{2\alpha} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{1,0} + \\ & + \varepsilon^2 \left(\nabla_{xy} u^{0,2}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon \left(\nabla_{\xi\eta} u^{0,2} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{\alpha+2} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{0,2} + \\ & + \varepsilon^{\alpha+1} \left(\nabla_{xy} u^{1,1}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^\alpha \left(\nabla_{\xi\eta} u^{1,1} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{2\alpha+1} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{1,1} + \dots + \\ & + \varepsilon^{k\alpha+l} \left(\nabla_{xy} u^{k,l}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{k\alpha+l-1} \left(\nabla_{\xi\eta} u^{k,l} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{(k+1)\alpha+l} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{k,l} + \dots \quad (3.16) \end{aligned}$$

Используя (3.5) и собирая слагаемые с соответствующими степенями ε в (3.15) и (3.16), приходим к следующим вспомогательным задачам:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) = 0 & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = 0 & \text{на } S(x, y), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) = -2(\nabla_{\xi\eta}, \nabla_{xy} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta)) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{1,0}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta), \tilde{n}) & \text{на } S(x, y) \end{cases} \quad (3.18)$$

и задаче (3.6) для $u^{0,1}(x, y, \xi, \eta)$, решения которых рассматриваются в классе 1-периодических по ξ и η функций.

Из (3.17) получаем, что функция $u^{1,-1}$ не зависит от ξ . Фактически можно взять $u^{1,-1} \equiv 0$. Тогда $u^{1,0} \equiv 0$ решает задачу (3.18).

На следующем шаге собираем слагаемые порядка ε^0 в (3.15) и порядка ε^1 в (3.16). Получаем

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) = -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - 2(\nabla_{\xi\eta}, \nabla_{xy} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta)) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{0,2}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta), \tilde{n}) - (\nabla_{\xi\eta} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta), n') - & \\ -(\nabla_{xy} u^0(x, y), n') & \text{на } S(x, y). \end{cases} \quad (3.19)$$

Представляя $u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) = (\nabla_{xy} u^0(x, y), M(x, y, \xi, \eta))$, где 1-периодические компоненты вектор-функции $M(x, y, \xi, \eta) = (M_1(x, y, \xi, \eta), M_2(x, y, \xi, \eta))$ являются решениями задач (3.8), выведем из (3.19) следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) = -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - \\ -2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) - \\ -2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} - \\ -2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) - \\ -2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{0,2}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -\frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} (M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 + M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1) - \\ -\frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1 - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 - \\ -\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ -\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ -q(x, y, \xi, \eta) u^0(x, y) - \\ -\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ -\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ -\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} n'_1 - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} n'_2 & \text{на } S(x, y). \end{cases}$$

Действуя так же, как и в пункте 3.1.1, записываем условие разрешимости и применяем те же рассуждения, что и в пункте 3.1.1. В результате получаем усреднённую (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ u_x^0 = \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle u_y^0 + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle u_x^0 & \text{на } \Gamma, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Предельное поведение решения задачи (1.2) в этом случае определяется следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Предположим, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, и пусть $q(x, y, \xi, \eta)$ — достаточно гладкая неотрицательная функция, 1-периодическая по ξ и η . Тогда для достаточно малых ε задача (1.2) имеет единственное решение, которое удовлетворяет неравенству*

$$\|u^0 + \varepsilon u^{0,1} - u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq K_2 \max(\varepsilon^{\alpha-1}, \sqrt{\varepsilon}),$$

где u^0 и $u^{0,1}$ — решения задач (3.20) и (3.6), соответственно, с константой K_2 , не зависящей от ε .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 и основано на следующей лемме (см. аналогично [22]).

Лемма 3.4. *Для любой $v \in H^1(D_\varepsilon^1)$*

$$\left| \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^0(x, y) v(x, y) ds \right| \leq C_{10} \varepsilon^{-1} \|u^0\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

3.3. Закритический случай $\alpha < 1$.

3.3.1. *Теорема усреднения.* Следующая теорема описывает предельное поведение решения.

Теорема 3.3. *Если $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и $q(x, y, \xi, \eta)$ — достаточно гладкая положительная функция, 1-периодическая по ξ и η , то для всех достаточно малых ε задача (1.2) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке*

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} \leq K_3 \max(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}}, \sqrt{\varepsilon}), \quad (3.21)$$

где K_3 не зависит от ε .

Доказательство теоремы 3.3. Записываем интегральное тождество задачи (1.2), из которого с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем равномерную ограниченность семейства $u^\varepsilon(x)$ в $H^1(D_\varepsilon^1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}^2 &\leq C_{11} \left| \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon(x, y)|^2 dx dy + \varepsilon^\alpha \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2(x, y) ds \right| = \\ &= \left| \int_{D_\varepsilon^1} f(x, y) u^\varepsilon(x, y) dx dy \right| \leq \|f\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} \|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq C_{12}. \quad (3.22)$$

Если выполняются условия теоремы, то $Q(x, y)$ — строго положительная функция, которая удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon^1} (u^\varepsilon)^2 dx dy &\leq \frac{C_{13}}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1} Q(x, y) (u^\varepsilon)^2 dx dy = C_{13} \left\{ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1} Q(x, y) (u^\varepsilon)^2 dx dy - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds \right\} \leq \\ &\leq C_{13} \left\{ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds + \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Это неравенство может быть легко доказано с использованием шагов доказательства леммы 3.2 (см. [22]). С другой стороны, имеем

$$\left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds \right| = \varepsilon^{1-\alpha} \left| \int_{D_\varepsilon^1} f(x, y) u^\varepsilon dx dy - \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon^{1-\alpha} \|f\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} \|u^\varepsilon\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} + O(\varepsilon^{1-\alpha}).$$

Используя последние оценки с учётом (3.22), выводим (3.21). Теорема доказана. $\square$

4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВО ВСЕЙ ОБЛАСТИ

Чтобы завершить построение предельной задачи во всей области, надо вспомнить, что в «гиперболической» области решение имеет вид $F(x+y)$, которое, в свою очередь, инициирует на «интерфейсе» Γ условие $u_x = u_y$. После усреднения изменилась задача в «эллиптической» части области, а значит, и условие на «интерфейсе». Кроме того, в критическом случае $\alpha = 1$ в задаче появляется дополнительный потенциал, и она во всей области принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} \right) - \\ - Q(x, y) u_+^0(x, y) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial x^2} = 0 & \text{в } D^2, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \left(1 - \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \right) (u_+^0)_x - \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle (u_+^0)_y = (u_-^0)_x - (u_-^0)_y & \text{на } \Gamma, \\ [u^0] = 0 & \text{на } \Gamma. \end{array} \right.$$

В докритическом случае $\alpha > 1$ задача имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} \right) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial x^2} = 0 & \text{в } D^2, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \left(1 - \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \right) (u_+^0)_x - \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle (u_+^0)_y = (u_-^0)_x - (u_-^0)_y & \text{на } \Gamma, \\ [u^0] = 0 & \text{на } \Gamma. \end{array} \right.$$

Здесь $u^0 = u_-^0$ в «гиперболической» части и $u^0 = u_+^0$ в «эллиптической» части области D_ε . Символом $[\cdot]$ обозначается скачок функции.

В закритическом случае $\alpha < 1$ решение в эллиптической части стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условие согласования на интерфейсе Γ сразу влечёт в пределе $F \equiv 0$. Таким образом, решение исходной задачи для уравнения Лаврентьева—Бицадзе во всей области стремится к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекмаганбетов К. А., Толеубай А. М., Чечкин Г. А. Об аттракторах системы уравнений Навье—Стокса в двумерной пористой среде // Пробл. мат. анализа. — 2022. — 115. — С. 15–28. — DOI: 10.1007/s10958-022-05814-y.
2. Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб. мат. ж. — 1998. — 39, № 4. — С. 730–754.
3. Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Мат. сб. — 2001. — 192, № 7. — С. 3–20.
4. Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С. О задаче усреднения для уравнения Лапласа в частично перфорированной области // Докл. РАН. — 1993. — 333, № 4. — С. 424–427.

5. *Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С.* Об асимптотике решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с краевыми условиями третьего рода на границах полостей// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1997. — 58. — С. 187–223.
6. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — 16. — С. 209–292.
7. *Кондратьев В. А., Чечкин Г. А.* Усреднение уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области// Дифф. уравн. — 2002. — 38, № 10. — С. 1390–1396.
8. *Кондратьев В. А., Чечкин Г. А.* Об асимптотике решений уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 645–655.
9. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. — М.: Изд-во Моск. ун-в., 1988.
10. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
11. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными: учебник. — М.: Изд-во Моск. ун-в., 2024.
12. *Олейник О. А., Шамаев А. С.* Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с условием Дирихле на границе полостей// Докл. РАН. — 1994. — 337, № 2. — С. 168–171.
13. *Олейник О. А., Шапошникова Т. А.* О задаче усреднения в частично перфорированной области со смешанными краевыми условиями на границе полостей// Дифф. уравн. — 1995. — 31, № 7. — С. 1140–1150.
14. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V.* «Strange term» in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain// Chaos, Solitons Fractals. — 2020. — 140. — 110208. — DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110208.
15. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V.* Application of Fatou’s lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles// Mathematics. — 2023. — 11, № 6. — 1448. — DOI: 10.3390/math11061448.
16. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V.* Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2024. — 44, № 11. — С. 3474–3490. — DOI: 10.3934/dcds.2024066.
17. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V., Tolemis A. A.* Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2023. — 3. — С. 11–27. — DOI: 10.31489/2023M3/11-27.
18. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V., Tolemis A. A.* Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure// Appl. Anal. — 2024. — 103, № 1. — С. 29–44. — DOI: 10.1080/00036811.2023.2173182.
19. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V., Tolemis A. A.* Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2024. — 2. — С. 40–56. — DOI: 10.31489/2024M2/40-56.
20. *Bektaganbetov K. A., Chechkin G. A., Toleubay A. M.* Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — 3. — С. 35–50. — DOI: 10.31489/2022M3/35-50.
21. *Chechkin G. A., Friedman A., Piatnitski A. L.* The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 231, № 1. — С. 213–234.
22. *Chechkin G. A., Piatnitski A. L.* Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain// Appl. Anal. — 1999. — 71, № 1-4. — С. 215–235.
23. *Cioranescu D., Donato P.* On a Robin problem in perforated domains// В сб.: «Homogenization and Applications to Material Sciences». — Tokyo: Gakkōtoshō, 1997. — С. 123–136.
24. *Cioranescu D., Saint Jean Paulin J.* Truss structures, Fourier conditions and eigenvalue problems// В сб.: «Boundary Variation». — Berlin–New York: Springer, 1992. — С. 6–12.
25. *Ene H. I., Sanchez-Palencia E.* Equations et phénomènes de surface por l’écoulement dans un modèle de milieu poreux// J. Mécan. — 1975. — 14. — С. 73–108.
26. *Jäger W., Mikelić A.* On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impermeable solid// В сб.: «Progress in partial differential equations». — London: Longman Sci. Tech., 1994. — С. 145–161.
27. *Jäger W., Mikelić A.* On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). — 1996. — 23, № 3. — С. 403–465.

28. Jäger W., Mikelić A. Homogenization of the Laplace equation in a partially perforated domain// В сб.: «Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov». — River Edge: World Sci. Publ., 1999. — С. 259–284.
29. Larson R. E., Higdon J. J. L. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part I — axial flow// J. Fluid Mech. — 1986. — 178. — С. 449–472.
30. Larson R. E., Higdon J. J. L. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part II — traverse flow// J. Fluid Mech. — 1986. — 166. — С. 119–136.
31. Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I. — Paris: Dunod, 1968.
32. Osher S. Boundary value problems for equations of mixed type I. The Lavrent'ev–Bitsadze model// Commun. Part. Differ. Equ. — 1977. — 2, № 5. — С. 499–547.
33. Saffman P. G. On the boundary conditions at the interface of a porous medium// Stud. Appl. Math. — 1971. — 1. — С. 93–101.

Г. А. Чечкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Институт математики с компьютерным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

UDC 517.954, 517.956.226, 517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212

EDN: VPSNGM

On homogenization of the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain with the third boundary condition on the boundary of the cavities.

Subcritical, critical and supercritical cases

G. A. Chechkin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

Abstract. For the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated model domain with a characteristic size of microinhomogeneities ε , we consider the problem with the third-kind boundary condition on the boundary of the cavities (the Fourier condition), which has a small parameter ε^α as a multiplier in the coefficients, and the Dirichlet condition on the outer part of the boundary. For this problem, we construct a homogenized problem and prove the convergence of the solutions of the original problem to the solution of the homogenized problem in three cases. The subcritical case with $\alpha > 1$ is characterized by the fact that dissipation at the boundary of the cavities is negligibly small, in the critical case with $\alpha = 1$ a potential appears in the equation due to dissipation, and in the supercritical case with $\alpha < 1$ the dissipation plays the major role, it leads to degeneracy of the solution of the entire problem.

Keywords: Lavrent'ev–Bitsadze equation, homogenization, perforated domain.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author is very grateful to the anonymous reviewer for a careful reading of the work. The comments and recommendations of the respected reviewer helped to significantly improve the presentation of the results and correct annoying inaccuracies.

For citation: G. A. Chechkin, “On homogenization of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain with the third boundary condition on the boundary of the cavities. Subcritical, critical and supercritical cases,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 194–212. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212>

REFERENCES

1. K. A. Bekmaganbetov, A. M. Toleubay, and G. A. Chechkin, “Ob attraktorakh sistemy uravneniy Nav’e—Stoksa v dvumernoy poristoy srede” [On attractors of the Navier–Stokes equations in a two-dimensional porous medium], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2022, **115**, 15–28, DOI: 10.1007/s10958-022-05814-y (in Russian).
2. A. G. Belyaev, A. L. Piatnitski, and G. A. Chechkin, “Asimptoticheskoe povedenie resheniya kraevoy zadachi v perforirovannoy oblasti s ostsilliruyushchey granitse” [Asymptotic behavior of the solution of a boundary-value problem in a perforated domain with oscillating boundary], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1998, **39**, No. 4, 730–754 (in Russian).
3. A. G. Belyaev, A. L. Piatnitski, and G. A. Chechkin, “Usrednenie v perforirovannoy oblasti s ostsilliruyushchim tret’im kraevym uslovиеm” [Homogenization in a perforated domain with oscillating third boundary condition], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 7, 3–20 (in Russian).
4. W. Jäger, O. A. Oleynik, and A. S. Shamaev, “O zadache usredneniya dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti” [On the homogenization problem for the Laplace equation in a partially perforated domain], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **333**, No. 4, 424–427 (in Russian).
5. W. Jäger, O. A. Oleynik, and A. S. Shamaev, “Ob asimptotike resheniy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti s kraevymi usloviyami tret’ego roda na granitsakh polostey” [On the asymptotics of solutions of a boundary-value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with boundary conditions of the third kind on the boundaries of the cavities], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1997, **58**, 187–223 (in Russian).
6. V. A. Kondrat’ev, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi i uglovymi tochkami” [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical and angular points], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
7. V. A. Kondrat’ev and G. A. Chechkin, “Usrednenie uravneniya Lavrent’eva—Bitsadze v poluperforirovannoy oblasti” [Homogenization of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 10, 1390–1396 (in Russian).
8. V. A. Kondrat’ev and G. A. Chechkin, “Ob asimptotike resheniy uravneniya Lavrent’eva—Bitsadze v poluperforirovannoy oblasti” [On the asymptotics of solutions of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, No. 5, 645–655 (in Russian).
9. E. I. Moiseev, *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral’nym parametrom* [Mixed Type Equations with Spectral Parameter], Moscow Univ., Moscow, 1988 (in Russian).
10. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, *Ellipticheskie zadachi v oblastyakh s kusochno gladkoy granitse* [Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundary], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
11. O. A. Oleynik, *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi: uchebnik* [Lectures on Partial Differential Equations: Textbook], Moscow Univ., Moscow, 2024 (in Russian).
12. O. A. Oleynik and A. S. Shamaev, “Ob usrednenii resheniy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti s uslovиеm Dirikhle na granitse polostey” [On homogenization of solutions of a boundary-value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with a Dirichlet condition on the boundary of the cavities], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **337**, No. 2, 168–171 (in Russian).
13. O. A. Oleynik and T. A. Shaposhnikova, “O zadache usredneniya v chastichno perforirovannoy oblasti so smeshannymi kraevymi usloviyami na granitse polostey” [On the homogenization problem in a partially perforated domain with mixed boundary conditions on the boundary of the cavities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 7, 1140–1150 (in Russian).
14. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzhov, “«Strange term» in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain,” *Chaos, Solitons Fractals*, 2020, **140**, 110208, DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110208.

15. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzhov, “Application of Fatou’s lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles,” *Mathematics*, 2023, **11**, No. 6, 1448, DOI: 10.3390/math11061448.
16. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzhov, “Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2024, **44**, No. 11, 3474–3490, DOI: 10.3934/dcds.2024066.
17. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, and A. A. Tolemis, “Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2023, **3**, 11–27, DOI: 10.31489/2023M3/11-27.
18. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, and A. A. Tolemis, “Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure,” *Appl. Anal.*, 2024, **103**, No. 1, 29–44, DOI: 10.1080/00036811.2023.2173182.
19. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, and A. A. Tolemis, “Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2024, **2**, 40–56, DOI: 10.31489/2024M2/40-56.
20. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and A. M. Toleubay, “Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, **3**, 35–50, DOI: 10.31489/2022M3/35-50.
21. G. A. Chechkin, A. Friedman, and A. L. Piatnitski, “The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **231**, No. 1, 213–234.
22. G. A. Chechkin and A. L. Piatnitski, “Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain,” *Appl. Anal.*, 1999, **71**, No. 1-4, 215–235.
23. D. Cioranescu and P. Donato, “On a Robin problem in perforated domains,” In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*, Gakkōtoshō, Tokyo, 1997, pp. 123–136.
24. D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin, “Truss structures, Fourier conditions and eigenvalue problems,” In: *Boundary Variation*, Springer, Berlin–New York, 1992, pp. 6–12.
25. H. I. Ene and E. Sanchez-Palencia, “Equations et phénomènes de surface por l’écoulement dans un modèle de milieu poreux,” *J. Mécan.*, 1975, **14**, 73–108.
26. W. Jäger and A. Mikelić, “On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impermeable solid,” In: *Progress in partial differential equations*, Longman Sci. Tech., London, 1994, pp. 145–161.
27. W. Jäger and A. Mikelić, “On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1996, **23**, No. 3, 403–465.
28. W. Jäger and A. Mikelić, “Homogenization of the Laplace equation in a partially perforated domain,” In: *Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov*, World Sci. Publ., River Edge, 1999, pp. 259–284.
29. R. E. Larson and J. J. L. Higdon, “Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part I — axial flow,” *J. Fluid Mech.*, 1986, **178**, 449–472.
30. R. E. Larson and J. J. L. Higdon, “Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part II — traverse flow,” *J. Fluid Mech.*, 1986, **166**, 119–136.
31. J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I*, Dunod, Paris, 1968.
32. S. Osher, “Boundary value problems for equations of mixed type I. The Lavrent’ev–Bitsadze model,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1977, **2**, No. 5, 499–547.
33. P. G. Saffman, “On the boundary conditions at the interface of a porous medium,” *Stud. Appl. Math.*, 1971, **1**, 93–101.

G. A. Chechkin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

E-mail: chechkin@mech.math.msu.su