

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 71, № 2, 2025

Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,
к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Аграчев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 30.06.2025. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 17,21. Тираж 110 экз. Заказ 785.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 71, No. 2, 2025

Modern Methods of Theory of Boundary Value Problems.
Pontryagin Readings — XXXV

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2
<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,
RUDN University
Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,
RUDN University
Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,
RUDN University
Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бондарев А. С., Петрова А. А., Пировских О. М.</i> Слабая разрешимость вариационного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение	213
<i>Гурина Е. И., Сомова П. А.</i> Численное и компьютерное моделирование для оценки теплопередачи в стеклопакетах	221
<i>Качалов В. И.</i> Об одной нелинейной спектральной задаче	233
<i>Левина Л. В., Пеньков В. Б., Лаврентьева М. А.</i> Актуальное состояние и перспективы исследований в термоупругости	240
<i>Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рощупкин С. А.</i> Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова	253
<i>Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапшина М. Г.</i> О представлении преобразования Радона—Киприянова потенциалом Рисса	267
<i>Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж.</i> Диффузия квантовых состояний, порождаемая классическим случайным блужданием	275
<i>Прядиев В. Л.</i> Метод граничных режимов в решении начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе	287
<i>Семенов М. Е., Борзунов С. В., Канищева О. И., Прошунин А. И., Мелешенко П. А.</i> Континуальные системы реле	299
<i>Степанов А. В.</i> Об оценивании интервала охвата стандартного двустороннего степенного распределения по выборочным данным	341

CONTENTS

<i>Bondarev A. S., Petrova A. A., Pirovskikh O. M.</i> Weak solvability of a variational parabolic equation with a nonlocal-in-time condition on the solution	213
<i>Gurina E. I., Somova P. A.</i> Numerical and computer modeling for assessing heat transfer in double-glazed windows	221
<i>Kachalov V. I.</i> On a nonlinear spectral problem	233
<i>Levina L. V., Pen'kov V. B., Lavrentieva M. A.</i> Current state and prospects of research in thermoelasticity	240
<i>Lyakhov L. N., Bulatov Yu. N., Roschupkin S. A.</i> Kipriyanov–Katrakhov singular pseudodifferential operators	253
<i>Lyakhov L. N., Kalitvin V. A., Lapshina M. G.</i> On the representation of the Radon–Kipriyanov transform by the Riesz potential	267
<i>Orlov Yu. N., Sakbaev V. Zh.</i> Diffusion of quantum states generated by a classical random walk	275
<i>Pryadiev V. L.</i> The boundary regimes method in solving of the initial-boundary value problem for the wave equation on a geometrical graph	287
<i>Semenov M. E., Borzunov S. V., Kanischeva O. I., Proshunin A. I., Meleshenko P. A.</i> Continual systems of relays	299
<i>Stepanov A. V.</i> On estimating the coverage interval of a standard two-sided power distribution from sample data	341

УДК 517.954.988.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220

EDN: MMQHRH

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВАРИАЦИОННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А. С. БОНДАРЕВ, А. А. ПЕТРОВА, О. М. ПИРОВСКИХ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве для абстрактного линейного параболического уравнения с весовым интегральным условием специального вида по времени на решение доказаны существование и единственность слабого решения. Для этого задача решается приближённо полудискретным методом Галёркина. Для последовательности приближённых решений устанавливаются априорные оценки, после чего доказывается, что слабый предел этой последовательности и есть точное решение исходной задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелокальное по времени условие, слабая разрешимость, метод Галёркина.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы выражают благодарность В. В. Смагину за постановку задачи. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. С. Бондарев, А. А. Петрова, О. М. Пировских. Слабая разрешимость вариационного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 213–220. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V , а пространство H отождествляется со своим двойственным H' . Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u, v)| \leq \eta \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1.1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \rightarrow V'$ такой, что $a(u, v) = (Au, v)$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением в H (см. [5, с. 58]). Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V \rightarrow V'} \leq \eta$.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int_0^T p(t)u'(t) dt = \bar{u}. \quad (1.2)$$

В (1.2) на $[0, T]$ заданы функция $t \rightarrow f(t) \in V'$ и функция $t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\bar{u}$. Производные функций в настоящей работе понимаются в обобщённом смысле.

Отметим, что вопросы разрешимости параболических задач с нелокальными по времени условиями на решение — активно разрабатываемая в настоящее время область исследования многих авторов. В работе [9] для абстрактных дифференциальных уравнений с нелокальным по времени условием на решение наиболее общего вида получен критерий единственности в терминах собственных значений. Разрешимость периодической по времени задачи для параболического уравнения с переменным оператором $A(t)$ изучалась в работе [1]. Вопросы слабой разрешимости абстрактного параболического уравнения с интегральными по времени условиями на решения рассматривались в работах [3, 6].

При доказательстве слабой разрешимости в настоящей работе, как и в работах [1, 3, 6], точная задача аппроксимируется приближённой задачей, использующейся в методе Галёркина, с последующим обоснованием слабого предельного перехода. При этом доказательство, приведенное в работе [6], здесь адаптировано для нелокального условия в (1.2). Так, получена равномерная оценка приближенного решения в начальной точке $\|u_m(0)\|_H$, отличная от подобной в работе [6]. Кроме того, ослаблено условие на элемент $\bar{u}$, что позволяет в приближённой задаче вместо проектора Ритца использовать оператор ортогонального проектирования. В априорной оценке приближенных решений оказывается необходимым оценить норму не только самого решения, но и его производной. Помимо этого, доказательство выполнения интегрального условия для слабого предела последовательности приближенных решений проводится аналогично работе [6], но с опорой на другие установленные факты. Некоторые требования на данные задачи (1.2) в сравнении с работой [6] усилены: так, большая гладкость необходима от правой части уравнения в (1.2), а также требуется компактность вложения $V \subset H$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2.1. Пусть в задаче (1.2) выполнены условия (1.1) и вложение $V \subset H$ компактно. Пусть также функция $f \in L_2(0, T; H)$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0, T]$, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0, T]$. Предположим, что $\bar{u} \in V$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, такая что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$, удовлетворяющая в (1.2) уравнению почти всюду на $[0, T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (2.1)$$

Доказательство.

1. *Единственность решения задачи (1.2).* В силу линейности задачи (1.2) достаточно установить, что однородная задача

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad \int_0^T p(t)u'(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

имеет только нулевое решение.

Как показано в [4, с. 116], задача Коши для однородного параболического уравнения

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0 \in H$$

имеет единственное решение в пространстве

$$W(0, T) = \{u \mid u \in L_2(0, T; V), u' \in L_2(0, T; V')\},$$

где T — произвольное конечное число. Таким образом, определено семейство линейных ограниченных операторов $G(t) : H \rightarrow H$, такое что решение задачи (2.2) записывается в виде $u(t) = G(t)u_0$. Функция $t \rightarrow G(t)u_0$ является непрерывным отображением $[0, \infty)$ в H , и выполнены свойства $G(0) = I$ и полугрупповое свойство $G(t)G(s) = G(s)G(t) = G(t+s)$ для всех $t, s \geq 0$.

Далее в работе полугруппу $G(t)$ будем обозначать e^{-At} , тогда решение задачи (2.2) задается формулой $u(t) = e^{-At}u(0)$, где элемент $u(0) \in H$. В работе [6] для полугруппы e^{-At} получена оценка

$$\|e^{-At}\|_{H \rightarrow H} \leq e^{-\lambda t}, \quad (2.3)$$

где $\lambda > 0$.

Поскольку функции $p(t)$ и $t \rightarrow u(t) \in V'$ абсолютно непрерывны на $[0, T]$, то, учитывая весовое интегральное условие, получим

$$0 = \int_0^T p(t)u'(t) dt = p(T)u(T) - p(0)u(0) - \int_0^T p'(t)u(t) dt. \quad (2.4)$$

Запишем равенство (2.4) в терминах оператора e^{-At} :

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)u(0) + \frac{1}{p(0)} \int_0^T p'(t)e^{-At} dt u(0) = 0.$$

Из последнего равенства, воспользовавшись результатами из [6], получим, что $u(0) = 0$, т. е. решение задачи (2.2) $u(t) = e^{-At}u(0) = e^{-At}0 = 0$. Значит, задача (1.2) имеет не более одного решения.

Перейдём к доказательству существования решения задачи (1.2).

2. *Приближённая задача.* Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — полная линейно независимая система элементов в пространстве V . Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$.

На V_m можно рассматривать нормы пространств V , H и V' . Определим на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V'_m} = \sup |(u_m, v_m)|,$$

где точная верхняя граница берётся по всем $v_m \in V_m$ таким, что $\|v_m\|_V = 1$.

Через P_m обозначим ортогональный проектор в пространстве H на V_m . В [2] было замечено, что оператор P_m допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_m : V' \rightarrow V'_m$ и справедлива оценка

$$\|\bar{P}_m u\|_{V'_m} \leq \|u\|_{V'} \quad (u \in V').$$

Отметим также оценку [7]

$$\|u_m\|_{V'} \leq \|P_m\|_{V \rightarrow V} \|u_m\|_{V'_m} \quad (u_m \in V_m).$$

Если в последнем неравенстве возьмём $u_m = \bar{P}_m u$, то получим оценку

$$\|\bar{P}_m\|_{V' \rightarrow V'} \leq \|P_m\|_{V \rightarrow V}. \quad (2.5)$$

В пространстве V_m на отрезке $[0, T]$ рассмотрим приближённую для (1.2) задачу

$$u'_m(t) + \bar{P}_m A u_m(t) = P_m f(t), \quad \int_0^T p(t)u'_m(t) dt = \bar{u}_m. \quad (2.6)$$

Элемент $\bar{u}_m \in V_m$ определим позже.

Задача (2.6) сводится к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с весовым интегральным условием на решение. Заметим также, что решение задачи (2.6), как и задачи (1.2), единственно. Покажем, что решение существует.

Поскольку линейный оператор $\bar{P}_m A : V_m \rightarrow V_m$ ограничен, то всякое абсолютно непрерывное решение уравнения (2.6) имеет вид

$$u_m(t) = e^{-\bar{P}_m A t} u_m(0) + \int_0^t e^{-\bar{P}_m A (t-s)} P_m f(s) ds. \quad (2.7)$$

Укажем значение $u_m(0) \in V_m$, при котором решение $u_m(t)$ удовлетворяет интегральному условию в (2.6).

Продифференцируем равенство (2.7):

$$u'_m(t) = -\bar{P}_m A e^{-\bar{P}_m A t} u_m(0) + e^{-\bar{P}_m A(0)} P_m f(t) = -\bar{P}_m A e^{-\bar{P}_m A t} u_m(0) + P_m f(t).$$

Умножим последнее равенство на $p(t)$ и проинтегрируем его по t от 0 до T :

$$\int_0^T p(t) u'_m(t) dt = -\bar{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\bar{P}_m A(t)} u_m(0) dt + P_m \int_0^T p(t) f(t) dt.$$

В силу интегрального условия в (2.6) получим:

$$\bar{u}_m = -\bar{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\bar{P}_m A t} dt u_m(0) + P_m \int_0^T p(t) f(t) dt. \quad (2.8)$$

В [6] установлено, что оператор $B_m : V_m \rightarrow V_m$, заданный равенством

$$B_m = \bar{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\bar{P}_m A t} dt,$$

обратим в пространстве V_m с нормой пространства H , причем

$$B_m^{-1} = \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\bar{P}_m A T} \right)^{-1} \left(I + \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\bar{P}_m A T} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-\bar{P}_m A t} dt \right)^{-1}.$$

Из (2.8) тогда получим

$$u_m(0) = -B_m^{-1} \left(\bar{u}_m - P_m \int_0^T p(t) f(t) dt \right), \quad (2.9)$$

откуда следует однозначная разрешимость в V_m задачи (2.6).

3. *Априорные оценки приближённых решений.* Для решения $u_m(t)$ уравнения в (2.6) в [6] получена оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \leq C \left\{ \|u_m(0)\|_H^2 + \int_0^T \|f(t)\|_V^2 dt \right\}. \quad (2.10)$$

Покажем, что $\|u_m(0)\|_H$ оценивается равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

В [6] доказано, что

$$\|B_m^{-1}\|_{V_m \rightarrow V_m} \leq \left(\lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right)^{-1} = M, \quad (2.11)$$

где пространство V_m берется с нормой пространства H .

Теперь из (2.9) и (2.11) следует оценка

$$\|u_m(0)\|_H \leq M \|\bar{u}_m\|_H + M \left\| P_m \int_0^T p(t) f(t) dt \right\|_H. \quad (2.12)$$

Возьмём элемент

$$\bar{u}_m = Q_m \bar{u},$$

где Q_m — ортогональный проектор V на V_m .

В силу непрерывности вложения $V \subset H$ справедлива оценка

$$\|\bar{u}_m\|_H = \|Q_m \bar{u}\|_H \leq \beta \|Q_m \bar{u}\|_V \leq \beta \|\bar{u}\|_V,$$

где $\beta > 0$. Для второго слагаемого в правой части (2.12) получим оценку

$$\left\| \int_0^T p(t) P_m f(t) dt \right\|_H \leq \int_0^T |p(t)| \|P_m f(t)\|_H dt \leq p(0) \int_0^T \|f(t)\|_H dt,$$

поскольку $p(t)$ не возрастает и $p(t) > 0$.

Тогда (2.12) примет вид

$$\|u_m(0)\|_H \leq M \cdot \beta \|\bar{u}\|_V + p(0) M \int_0^T \|f(t)\|_H dt. \quad (2.13)$$

Из уравнения в (2.6), оценки (2.5) и непрерывности вложения $H \subset V'$ для $u'_m(t)$ получим:

$$\begin{aligned} \|u'_m(t)\|_{V'}^2 &= \|P_m f(t) - \overline{P_m} A u_m(t)\|_{V'}^2 \leq 2 (\|P_m f(t)\|_{V'}^2 + \|\overline{P_m} A u_m(t)\|_{V'}^2) \leq \\ &\leq 2 (\gamma \|f(t)\|_H^2 + \|P_m\|_{V \rightarrow V} \|A u_m(t)\|_{V'}^2) \leq 2 (\gamma \|f(t)\|_H^2 + \eta \|P_m\|_{V \rightarrow V} \|u_m(t)\|_V^2), \end{aligned}$$

где $\gamma > 0$. Тогда

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|_{V'}^2 dt \leq 2 \left(\gamma \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt + \eta \|P_m\|_{V \rightarrow V} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \right). \quad (2.14)$$

Поскольку вложение $V \subset H$ компактно, то в пространстве V существует полная линейно независимая система $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\|P_m\|_{V \rightarrow V}$ равномерно ограничены [8]. Будем считать, что выбранная ранее в доказательстве теоремы система $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ обладает необходимым свойством.

В результате, из оценок (2.10) и (2.14) с учётом (2.13) получим

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^T (\|u_m(t)\|_V^2 + \|u'_m(t)\|_{V'}^2) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (2.15)$$

4. *Обоснование слабого предельного перехода.* Оценка (2.15) показывает, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $W(0, T)$. А значит, существует подпоследовательность $\{u_{\mu}(t)\} \subset \{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $W(0, T)$ к некоторому элементу $u \in W(0, T)$. Покажем, следуя работам [1, 3, 6], что функция $u(t)$ является решением задачи (1.2).

Из (2.6) следует, что для любых $\mu \in \mathbb{N}$ и всех $i \in \overline{1, \mu}$ справедливо равенство

$$(u'_\mu(t), \varphi_i) + a(u_\mu(t), \varphi_i) = (f(t), \varphi_i). \quad (2.16)$$

Умножим (2.16) на скалярную функцию $\psi \in C_0^\infty(0, T)$, полученное равенство проинтегрируем по t от 0 до T . После интегрирования по частям первого слагаемого придем к равенству

$$-\int_0^T (u_\mu(t), \psi'(t) \varphi_i) dt + \int_0^T a(u_\mu(t), \psi(t) \varphi_i) dt = \int_0^T (f(t), \psi(t) \varphi_i) dt. \quad (2.17)$$

Заметим, что функции $\psi'(t) \varphi_i$, $\psi(t) \varphi_i \in L_2(0, T; V)$. Тогда из (2.17), устремив $\mu \rightarrow \infty$, для всех $i \in \mathbb{N}$ получим

$$-\int_0^T (u(t), \psi'(t) \varphi_i) dt + \int_0^T a(u(t), \psi(t) \varphi_i) dt = \int_0^T (f(t), \psi(t) \varphi_i) dt. \quad (2.18)$$

Так как система элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ является полной в пространстве V , то из (2.18) предельным переходом установим, что для всех $v \in V$ выполняется

$$-\int_0^T (u(t), v) \psi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt.$$

Последнее равенство означает, что в смысле обобщённых функций выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v),$$

из чего следует (см. [4, с. 113]), что функция $u(t)$ является решением уравнения в (1.2). В частности, имеем $\|u'_\mu - u'\|_{V'} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Покажем, что выполняется и интегральное условие в (1.2). Напомним, что для всех $\mu \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\int_0^T p(t)u'_\mu(t) dt = \bar{u}_\mu$. Следовательно, для любого $v \in V$

$$\left(\int_0^T p(t)u'_\mu(t) dt, v \right) = (\bar{u}_\mu, v). \quad (2.19)$$

Отметим, что в силу полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве V выполняется $\|\bar{u}_m - \bar{u}\|_V \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ (см. [5, с. 41]). Тогда в (2.19) $(\bar{u}_\mu, v) \rightarrow (\bar{u}, v)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Заметим теперь, что на функциях $z \in L_2(0, T; V')$ отображение $F_v(z) = \left(\int_0^T p(t)z(t) dt, v \right)$ при всяком фиксированном $v \in V$ есть линейный функционал. Отметим также, что этот функционал на $L_2(0, T; V')$ ограничен:

$$|F_v(z)| \leq \left\| \int_0^T p(t)z(t) dt \right\|_{V'} \|v\|_V \leq \left(\int_0^T p^2(t) dt \right)^{1/2} \|v\|_V \left(\int_0^T \|z(t)\|_{V'}^2 dt \right)^{1/2}.$$

В таком случае $F_v(u'_\mu) \rightarrow F_v(u')$ при $\mu \rightarrow \infty$. В результате из (2.19) предельным переходом получим

$$\left(\int_0^T p(t)u'(t) dt, v \right) = (\bar{u}, v)$$

для любого $v \in V$, т. е. $\int_0^T p(t)u'(t) dt = \bar{u}$.

Покажем, что решение задачи (1.2) $u \in W(0, T)$ обладает дополнительной гладкостью $u \in C([0, T], H)$, а также обоснуем оценку (2.1).

Поскольку $u(t)$ есть слабый предел в $W(0, T)$ последовательности функций $\{u_\mu(t)\}$, для которых выполняется оценка (2.15), то и для $u(t)$ верно

$$\int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (2.20)$$

Заметим, что если функция $u \in L_2(0, T; V)$ и производная $u' \in L_2(0, T; V')$, то функция $u \in C([0, T], H)$ (см. [4, с. 110]) и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 \leq K \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt. \quad (2.21)$$

Из (2.20) и (2.21) следует окончательная оценка (2.1). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарев А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 4. — С. 78–88.
2. Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и скорости сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифф. уравн. — 1975. — 11, № 7. — С. 1269–1277.
3. Критская Е. А., Смагин В. В. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2008. — № 1. — С. 222–225.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.

5. *Обэн Ж.-П.* Приближённое решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
6. *Петрова А. А., Смагин В. В.* Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 4. — С. 160–169.
7. *Смагин В. В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Тр. мат. ф-та. Воронеж. гос. ун-та. — 1997. — № 2. — С. 63–67.
8. *Смагин В. В., Тужикова М. В.* О слабой разрешимости нелинейной вариационной задачи параболического типа // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2004. — № 1. — С. 153–156.
9. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 2. — С. 133–166.

А. С. Бондарев

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: bondarev@math.vsu.ru

А. А. Петрова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: rezolwenta@mail.ru

О. М. Пировских

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: pirovskiholeg@yandex.ru

UDC 517.954.988.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220

EDN: MMQHRH

Weak solvability of a variational parabolic equation with a nonlocal-in-time condition on the solution

A. S. Bondarev, A. A. Petrova, and O. M. Pirovskikh

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In a separable Hilbert space, for an abstract linear parabolic equation with a weighted integral condition of a special type in time on the solution, the existence and uniqueness of a weak solution are proved. For this, the problem is solved approximately by the semidiscrete Galerkin method. A priori estimates are established for a sequence of approximate solutions, after which it is proved that the weak limit of this sequence is the exact solution of the original problem.

Keywords: parabolic equation, nonlocal-in-time condition, weak solvability, Galerkin method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors express their gratitude to V. V. Smagin for posing the problem. The authors declare no financial support.

For citation: A. S. Bondarev, A. A. Petrova, O. M. Pirovskikh, “Weak solvability of a variational parabolic equation with a nonlocal-in-time condition on the solution,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 2, 213–220. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220>

REFERENCES

1. A. S. Bondarev, “Razreshimost’ variatsionnogo parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim uslovиеm na reshenie” [Solvability of a variational parabolic equation with a periodic condition on the solution], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2015, No. 4, 78–88 (in Russian).
2. G. M. Vaynikko and P. É. Oja, “O skhodimosti i bystrote skhodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh evolyutsionnykh uravneniy” [The convergence and rate of convergence of the Galerkin method for abstract evolution equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1975, **11**, No. 7, 1269–1277 (in Russian).
3. E. A. Kritskaya and V. V. Smagin, “O slaboy razreshimosti variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa s integral’nym uslovиеm” [On the weak solvability of a variational problem of parabolic type with an integral condition], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2008, No. 1, 222–225 (in Russian).
4. J.-L. Lions, *Optimal’noe upravlenie sistemami, opisываемыми уравнениями с частными производными* [Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
5. J.-P. Aubin, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
6. A. A. Petrova and V. V. Smagin, “Razreshimost’ variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral’nym uslovиеm” [Solvability of a variational problem of parabolic type with a weighted integral condition], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2014, No. 4, 160–169 (in Russian).
7. V. V. Smagin, “Otsenki pogreshnosti proektsionnogo metoda dlya parabolicheskikh uravneniy s nesimmetrichnymi operatorami” [Error estimates of the projection method for parabolic equations with nonsymmetric operators], *Tr. Mat. F-ta. Voronezh. Gos. Un-ta* [Proc. Math. Fac. Voronezh State Univ.], 1997, No. 2, 63–67 (in Russian).
8. V. V. Smagin and M. V. Tuzhikova, “O slaboy razreshimosti nelineynoy variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa” [On the weak solvability of a nonlinear variational problem of parabolic type], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2004, No. 1, 153–156 (in Russian).
9. I. V. Tikhonov, “Teoremy edinstvennosti v lineynykh nelokal’nykh zadachakh dlya abstraktnykh differentsial’nykh uravneniy” [Uniqueness theorems in linear nonlocal problems for abstract differential equations], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2003, **67**, No. 2, 133–166 (in Russian).

A. S. Bondarev

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: bondarev@math.vsu.ru

A. A. Petrova

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: rezolwenta@mail.ru

O. M. Pirovskikh

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: pirovskiholeg@yandex.ru

УДК 519.6, 532.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-221-232

EDN: МОСМQH

ЧИСЛЕННОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В СТЕКЛОПАКЕТАХ

Е. И. Гурина, П. А. Сомова

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании осуществляется анализ теплопередачи однокамерного и двухкамерного стеклопакетов, устанавливаемых в наружной и внутренней створках составной конструкции оконного блока с наполнением межстекольного пространства осушенным воздухом и инертными газами. Математическая модель строится на основе решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в двумерной постановке, учитывающей слоистую структуру конструкции с использованием граничных условий III и IV рода. Численная реализация поставленной задачи осуществляется с помощью метода конечных разностей на равномерной сетке с использованием языка программирования C++. Для учета конвективного теплообмена через стеклопакеты проведена серия численных расчетов в ПО ANSYS Fluent. Показано, что снижение конвективных тепловых потерь в стеклопакетах возможно за счёт увеличения толщины дистанционной рамки и применения инертных газов с низкой теплопроводностью. Выявлена оптимальная толщина газонаполненной камеры однокамерного стеклопакета (при наполнении воздухом, осушенным воздухом, аргоном, криптоном, ксеноном), обеспечивающая максимальное термическое сопротивление.

Ключевые слова: теплопередача, стеклопакет, уравнение теплопроводности, численное решение, метод конечных разностей.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Е. И. Гурина, П. А. Сомова. Численное и компьютерное моделирование для оценки теплопередачи в стеклопакетах // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 221–232. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-221-232>

1. ВВЕДЕНИЕ

Энергосбережение — это рациональное использование ресурсов через технически и экономически обоснованные решения. В России цель энергополитики — эффективное использование ресурсов для устойчивого развития экономики и улучшения жизни населения (энергетическая стратегия РФ до 2035 года). Основную роль играют энергосберегающие технологии, минимизирующие тепловые потери. Особое значение имеет строительство энергоэффективных зданий. К главным задачам строителей можно отнести улучшение теплотехнических характеристик материалов, модернизацию оконных конструкций и повышение общей энергоэффективности зданий [2].

Обзор существующих научных работ, посвященных оконным блокам, показывает неоднозначность и неполноту имеющихся данных. Несмотря на значительный интерес к этой теме, отсутствует единый стандарт оценки эффективности и методологии исследований. Это создает определенные трудности при сравнении результатов различных исследований и формулировании общих выводов. В работе [1] авторами показано, что инертные газы (аргон, криптон) в сочетании с теплоотражающими покрытиями значительно снижают теплопотери в стеклопакетах за счёт уменьшения конвективных и лучистых тепловых потоков. Исследования [5, 6] демонстрируют, что окна с электроподогревом могут сократить теплопотери до 50%, но только при поддержании температуры стекла близкой к комнатной. Повышение температуры стекла вызывает обратный эффект вследствие интенсификации конвективного теплообмена, обусловленной существенным температурным градиентом. Исследование [7] показало, что электрический обогрев окон может снижать теплопотери и улучшать комфорт, но его эффективность сильно зависит от конструкции окна, наружной температуры и ветра. В оптимальных условиях (например, при -10°C) система может работать с высоким КПД ($\sim 70\%$), но в реальности её энергоэффективность может быть ниже из-за потерь. Авторы отмечают, что в некоторых случаях улучшение теплоизоляции окна экономичнее, чем его обогрев.

Для оценки теплоизоляционных свойств оконных профилей применяют различные методы от упрощенных расчетов (ISO 2003, ISO 15099:2003(E)) до сложного численного моделирования. Оптимизация оконных конструкций требует комплексного подхода, сочетающего натурные эксперименты и численное моделирование.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе проводится подробный анализ процесса теплопередачи в составной конструкции теплоизоляционного окна, состоящего из однокамерного стеклопакета, установленного во внешней створке (4M1-16-4M1), и двухкамерного стеклопакета, который размещен во внутренней створке (4M1-14-4M1-14-4M1). Между этими стеклопакетами предусмотрен воздушный зазор 200 мм. Формула остекления, используемая в данном исследовании, представляется в следующем виде: 4M1-16-4M1-200-4M1-14-4M1-14-4M1.

Главным элементом любого современного окна, изготовлено оно из дерева, пластика или алюминия, является стеклопакет. Его характеристики оказывают решающее влияние на свойства всего оконного блока, так как стеклопакет составляет от 68% до 85% площади окна. Стеклопакет представляет собой светопрозрачную конструкцию, состоящую из двух или более стеклянных полотен, разделённых дистанционными рамками, оснащёнными абсорбентом для поглощения избыточной влаги [4]. Стекла герметично соединены между собой, образуя замкнутые камеры, которые могут быть заполнены либо осушенным воздухом, либо инертными газами, такими как аргон, ксенон или криптон. Наполнение инертными газами пространства между стеклами используется для повышения теплоизоляционных свойств стеклопакета. Сравнительно небольшой коэффициент теплопроводности таких сред способствует более высокому термическому сопротивлению всего окна.

На первом этапе исследования была смоделирована теплопередача внутри однокамерного стеклопакета, где межстекольное пространство заполнялось осушенным воздухом и инертными газами (рис. 1).

Однокамерные стеклопакеты, заполненные обычным воздухом или осушенным воздухом и не имеющие энергосберегающего покрытия (например, низкоэмиссионного), обладают низкими теплоизоляционными свойствами. Такие конструкции пропускают значительное количество тепла, что делает их менее эффективными по сравнению с двухкамерными стеклопакетами или стеклопакетами с энергосберегающими покрытиями.

На втором этапе исследования проводилось численное исследование процесса передачи тепла в конструкции двухкамерного стеклопакета с дальнейшим анализом распределения температуры по толщине однокамерного и двухкамерного стеклопакетов. Двухкамерный стеклопакет с формулой остекления 4M1-14-4M1-14-4M1, состоит из трех стеклянных панелей толщиной 4 мм, между которыми находятся две воздушные камеры шириной 14 мм, заполненные осушенным воздухом или инертными газами.

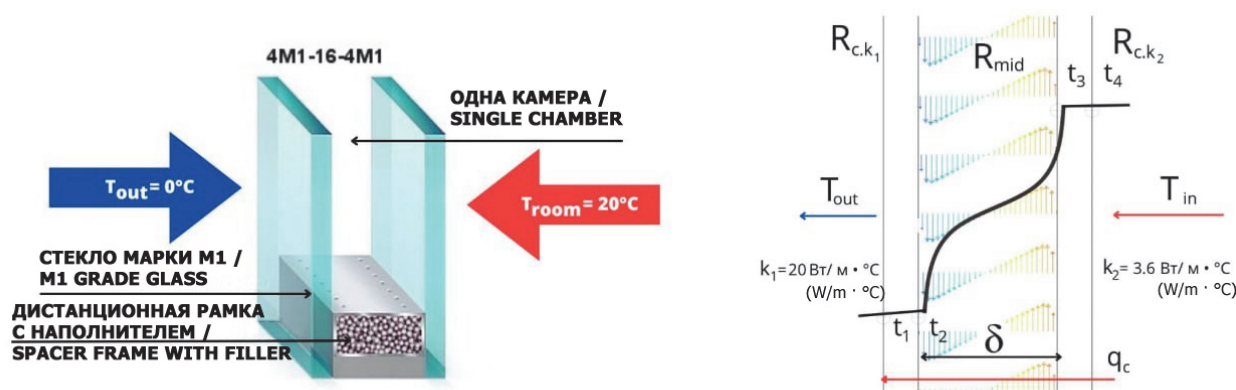


РИС. 1. Геометрия и модель конвективного теплообмена в однокамерном стеклопакете.

FIG. 1. Geometry and model of convective heat exchange in a single-chamber glass unit.



РИС. 2. Теплозвукоизоляционное окно с воздухообменным клапаном: (а) — общий вид; (б) — 2D-сечение; $L = 0,264$ м; $H = 1,470$ м.

FIG. 2. Heat and sound insulating window with air exchange valve: (a) — general view; (b) — 2D section; $L = 0.264$ m; $H = 1.470$ m.

На третьем этапе с помощью численного и компьютерного моделирования исследовался процесс теплопередачи в теплозвукоизоляционном окне в отдельных переплетах, состоящем из многослойной конструкции, основанной на формуле остекления 4M1-16-4M1-200-4M1-14-4M1-14-4M1. Такие конструкции способствуют значительному снижению теплопотерь, обеспечивают высокий уровень звукоизоляции. Использование тепло- и звукоизоляционных окон позволяет достигать высоких показателей энергоэффективности зданий [3]. Геометрия расчетного 2D-домена составной конструкции окна и габаритные параметры представлены на рис. 2.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слоистую структуру конструкции двухкамерного стеклопакета (4M1-14-4M1-14-4M1): 1-й слой (стекло марки М1) — $l_1 = 0,004$ м; 2-й слой (осушенный воздух) — $l_2 = 0,016$ м; 3-й слой (стекло марки М1) — $l_3 = 0,004$ м; 4-й слой (осушенный воздух) — $l_4 = 0,016$ м; 5-й слой (стекло марки М1) — $l_5 = 0,004$ м.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, совместно с начально-краевыми условиями для описания физического процесса (передача тепла теплопроводностью), протекающего в двухкамерном стеклопакете, представляется в виде:

$$\rho_i C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \right), \quad L_{i-1} < x < L_i, \quad 0 < y < H; \quad i \in \overline{1, 5},$$

где $L_0 = 0, L_5 = L = 0,264$ м, $H = 1,470$ м, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 1,15$ (Вт/м · °С); $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = 2560$ (кг/м³); $C_{\rho_1} = C_{\rho_3} = C_{\rho_5} = 670$ (Дж/кг · °С) — параметры стекла марки М1; $\lambda_2 = \lambda_4, \rho_2 = \rho_4, C_{\rho_2} = C_{\rho_4}$ — параметры воздуха или инертных газов, теплофизические характеристики которых представлены в таблице ниже.

ТАБ. 1. Теплофизические свойства газов

ТАБ. 1. Thermophysical properties of gases

Наполнение / Filler	λ , Вт/м · °С λ , W/m · °С	ρ , кг/м ³ ρ , kg/m ³	C_ρ , Дж/кг · °С C_ρ , J/kg · °С	Молярный вес, кг/моль Molar weight, kg/mol
Воздух / Air	0,0257	1,204	1005	28,80
Осушенный воздух / Dehumidified air	0,0251	1,184	1012	28,97
Аргон / Argon	0,0177	1,636	523	39,94
Криптон / Krypton	0,0093	3,430	251	83,79
Ксенон / Xenon	0,0057	5,8	159	131,29

В начальный момент времени в каждой точке расчетного домена принимается постоянное значение температуры $T_0 = 20^\circ\text{C}$. На левой и правой границах используются ГУ III рода с целью учета в математической постановке задачи конвективного теплообмена между стеклом и атмосферной средой, а также стеклом и комнатным воздухом соответственно:

$$x = 0 : \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = k_1 (T_1 - T_{out}), \quad t > 0,$$

$$x = L : \quad \lambda_5 \left(\frac{\partial T_5}{\partial x} \right) = k_2 (T_5 - T_{room}), \quad t > 0,$$

где $k_1 = 20$ (Вт/м · °С) — коэффициент теплообмена между стеклом и воздухом из атмосферы, T_1 — температура поверхности левого стекла двухкамерного стеклопакета, $T_{out} = 0^\circ\text{C}$ — температура воздуха атмосферы, $k_2 = 3,6$ (Вт/м · °С) — коэффициент теплообмена между стеклом и комнатным воздухом, T_5 — температура поверхности правого стекла двухкамерного стеклопакета, $T_{room} = 20^\circ\text{C}$ — температура комнатного воздуха. Две горизонтальные границы являются адиабатическими (ГУ II рода):

$$y = 0 : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad t > 0,$$

$$y = H : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad t > 0.$$

Граничные условия IV рода действуют в зоне контакта стекла и межстекольного пространства, заполненного воздухом или инертными газами:

$$\begin{cases} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=L_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=L_i}, \\ T_i(t, L_i) = T_{i+1}(t, L_i), \end{cases} \quad i \in \overline{1, 4}.$$

Для однокамерного стеклопакета математическая постановка задачи для слоистой структуры конструкции при $i \in \overline{1, 3}$ выглядит аналогичным образом. Численное моделирование распространения тепла теплопроводностью в пятислойной конструкции двухкамерного стеклопакета проводится с помощью метода конечных разностей (МКР) на равномерной сетке ($h_x = h_y = \text{const} = 0,0001$ м) с использованием явной разностной схемы, который реализован на языке программирования C++.

Для учета свободно-конвективного течения в газонаполненных камерах стеклопакета построено 2D-сечение расчетного домена в ПО Gambit (препроцессор для построения геометрии домена и конечно-элементной сетки), а также проведены численные эксперименты с помощью пакета вычислительной гидрогазодинамики ANSYS Fluent [9]. В случае конвективного теплопереноса в двухкамерном стеклопакете тепловой поток представляется в виде:

$$q_c = \frac{T_{room} - T_{out}}{R_c},$$

где известно $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ и требуется рассчитать составляющие общего термического сопротивления конвективного теплообмена R_c для формулы 4M1-14-4M1-14-4M1:

$$R_c = \frac{1}{k_1} + \frac{\delta_{4M1}}{\lambda_1} + \frac{1}{k_{12}} + \frac{\delta_{4M1}}{\lambda_3} + \frac{1}{k_{34}} + \frac{\delta_{4M1}}{\lambda_5} + \frac{1}{k_2},$$

где термическое сопротивление слоев стекла марки M1 известно и является постоянным:

$$\frac{\delta_{4M1}}{\lambda_1} = \frac{\delta_{4M1}}{\lambda_3} = \frac{\delta_{4M1}}{\lambda_5} = \frac{0,004}{1,15} = 0,0035 \text{ (м}^2 \cdot ^\circ\text{C/Вт)}$$

Сопротивления теплопередачи пристеночных слоев воздуха (со стороны жилой комнаты и окружающей среды) также являются постоянными: $R_{c.k_1} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ (м}^2 \cdot ^\circ\text{C/Вт)}$, $R_{c.k_2} = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{3,6} = 0,278 \text{ (м}^2 \cdot ^\circ\text{C/Вт)}$. Выражения для неизвестных членов $R_{c.k_{12}}$, $R_{c.k_{34}}$ конвективного тепло-

обмена через две газонаполненные камеры можно записать: $R_{k_{12}} = \frac{1}{Nu_{12}} \cdot \frac{\delta_{12}}{\lambda_2}$, $R_{k_{34}} = \frac{1}{Nu_{34}} \cdot \frac{\delta_{34}}{\lambda_4}$,

где величины числа Нуссельта $Nu_{12} = \frac{k_{12}\delta_{12}}{\lambda_2}$, $Nu_{34} = \frac{k_{34}\delta_{34}}{\lambda_4}$ зависят от нескольких ключевых факторов: толщины газовой прослойки δ_{12} и δ_{34} , температурного перепада между стеклянными поверхностями ΔT_{12} и ΔT_{34} , физических характеристик используемого газового наполнителя. Рассмотрим воздействие некоторых из этих параметров на общее термическое сопротивление R_c в отдельности.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Авторами проведена серия расчетов для однокамерного и двухкамерного стеклопакетов, наполненных воздухом и инертными газами. Учтено влияние теплофизических свойств газов и толщин газовых прослоек на общее термическое сопротивление конструкций стеклопакетов.

4.1. Особенности свободно-конвективного теплообмена через газонаполненные камеры однокамерного и двухкамерного стеклопакетов. В таб. 2 приведены численные результаты, полученные с помощью реализованного на C++ МКР и результаты, полученные с помощью ПО ANSYS Fluent для 2D-случая, показывающие, что в однокамерных стеклопакетах с толщиной дистанционной рамки до $\delta = 10$ мм ввиду вязкости используемых газов практически отсутствует конвективный поток в газонаполненных камерах. Передача тепла осуществляется в большей степени за счет теплопроводности ($R_{c.t}$ — передача тепла теплопроводностью, МКР; $R_{c.tc}$ — передача тепла теплопроводностью и конвекцией, ANSYS Fluent) при использовании воздуха, осушенного воздуха, аргона, криптона и ксенона.

В рамках сопряженной задачи (передача тепла теплопроводностью в стеклянных полотнах и свободно-конвективный теплообмен в газонаполненной камере) для однокамерного стеклопакета было проведено численное моделирование с использованием различных наполнителей при переменной толщине газонаполненной камеры. В качестве данных для верификации были использованы результаты авторов, представленные в работе [8] для воздуха, аргона и криптона в качестве наполнителей. Отметим хорошую согласованность полученных результатов (см. [8, Tab. 1-2]).

Анализ зависимости $R_{c.mid}$, члена термического сопротивления конвективного теплообмена в газонаполненной камере однокамерного стеклопакета (рис. 1), от ширины дистанционной рамки δ при различном межстекольном наполнении показал, что увеличение δ до 14–16 мм (воздух, осушенный воздух, аргон), до 10–12 мм (криптон, ксенон) приводит к заметному росту термического

ТАБ. 2. Зависимость теплового сопротивления однокамерного стеклопакета от толщины газовой камеры при постоянном температурном перепаде $\Delta T = 20^\circ\text{C}$.ТАБ. 2. Dependence of thermal resistance of a single-chamber glass unit on the thickness of the gas chamber at a constant temperature difference $\Delta T = 20^\circ\text{C}$.

Наполнение / Filler	δ , мм δ , mm	$R_{c,t}$, $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$ $R_{c,t}$, $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$	$R_{c,tc}$, $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$ $R_{c,tc}$, $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$	Δ , % Δ , %
Воздух / Air	6	0,233	0,232	0,43
Воздух / Air	8	0,311	0,311	0
Воздух / Air	10	0,388	0,386	0,52
Осушенный воздух / Dehumidified air	6	0,238	0,237	0,42
Осушенный воздух / Dehumidified air	8	0,319	0,318	0,31
Осушенный воздух / Dehumidified air	10	0,398	0,395	0,75
Аргон / Argon	6	0,338	0,338	0
Аргон / Argon	8	0,452	0,451	0,22
Аргон / Argon	10	0,564	0,559	0,87
Криптон / Krypton	6	0,645	0,641	0,62
Криптон / Krypton	8	0,861	0,842	2,2
Криптон / Krypton	10	1,075	1,013	5,77
Ксенон / Xenon	6	1,052	1,033	1,81
Ксенон / Xenon	8	1,4	1,317	5,93
Ксенон / Xenon	10	1,754	1,498	14,6

ТАБ. 3. Основные характеристики сопряженного теплообмена через однокамерный стеклопакет с расстоянием между стеклами $\delta = 16$ мм (см. рис. 1).ТАБ. 3. Main characteristics of conjugate heat exchange through a single-chamber glass unit with a distance between the glasses $\delta = 16$ mm (see Fig. 1).

Наполнение / Filler	$ \Delta T $, $^\circ\text{C}$ $ \Delta T $, $^\circ\text{C}$	t_1 , $^\circ\text{C}$ t_1 , $^\circ\text{C}$	t_2 , $^\circ\text{C}$ t_2 , $^\circ\text{C}$	t_3 , $^\circ\text{C}$ t_3 , $^\circ\text{C}$	t_4 , $^\circ\text{C}$ t_4 , $^\circ\text{C}$	R_c , $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$ R_c , $\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$	q_c , $\text{Вт}/\text{м} \cdot ^\circ\text{C}$ q_c , $\text{W}/\text{m} \cdot ^\circ\text{C}$	$R_{c,mid}$ $R_{c,mid}$
Воздух / Air	20	1,044	1,113	14,071	14,183	0,911	21,942	0,576
Осушенный воздух / Dehumidified air	20	1,051	1,121	14,054	14,165	0,945	21,146	0,610
Аргон / Argon	20	0,804	0,857	15,369	15,47	1,139	17,552	0,804
Криптон / Krypton	20	0,574	0,611	16,509	16,605	1,401	14,270	1,066
Ксенон / Xenon	20	0,623	0,666	17,074	17,175	1,691	11,823	1,356

сопротивления, после чего дальнейшее увеличение толщины уже не приводит к значительному улучшению теплоизоляционных свойств стеклопакета (рис. 3).

Использование ксенона и криптона в качестве наполнителей для стеклопакетов демонстрирует более высокую энергоэффективность по сравнению с аргонном. Однако их применение ограничено из-за значительной стоимости и сложности технологических процессов, связанных с заполнением камер. Благодаря оптимальному сочетанию энергоэффективности и доступности, аргон является наиболее распространённым газовым наполнителем среди инертных газов.

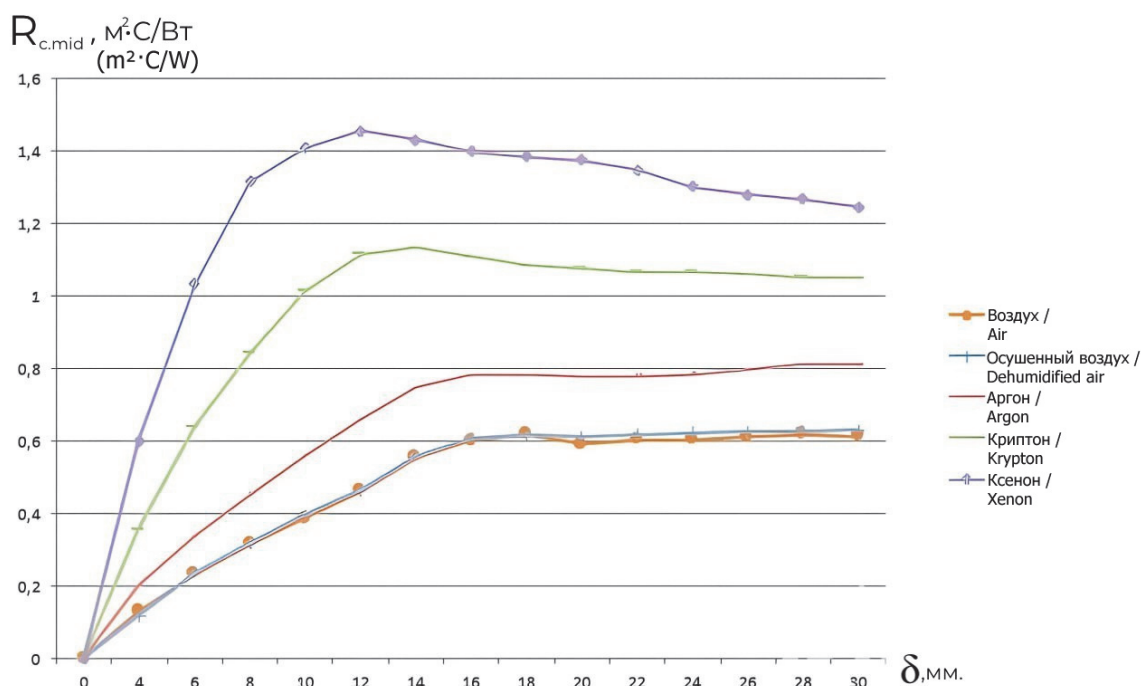


Рис. 3. Влияние физических свойств газа на зависимость термического сопротивления газонаполненной камеры $R_{c,mid}$ от межстекольного расстояния δ .

FIG. 3. The influence of physical properties of a gas on the dependence of thermal resistance of a gas-filled chamber $R_{c,mid}$ on the inter-glass distance δ .

Аналогичным образом проводится численный анализ для двухкамерных стеклопакетов с различными газовыми наполнителями (воздух и инертные газы). При моделировании приняты следующие допущения: равная толщина всех газовых камер, идентичный состав газового наполнителя в камерах, температура внутренней среды $T_{room} = +20^\circ\text{C}$, температура наружного воздуха $T_{out} = 0^\circ\text{C}$. Модель движения среды внутри газонаполненных камер двухкамерного стеклопакета, а также точки контроля температуры изображены на рис. 4.

В таб. 4 приведены основные характеристики конвективного теплообмена через двухкамерный стеклопакет с расстоянием между стеклами $\delta = 16$ мм. Отметим также хорошую согласованность полученных результатов с результатами авторов, представленными в [8, Tab. 3].

Как видно из полученных данных, двухкамерные стеклопакеты демонстрируют на 39–50% более высокое термическое сопротивление R_c по сравнению с однокамерными при одинаковом газовом наполнении. Замена воздуха на инертные газы значительно улучшает теплоизоляцию. Например, аргон снижает тепловой поток q_c на 20% для однокамерного и на 25% для двухкамерного стеклопакета. Температура точек контроля (t_1, t_2) на поверхности левого стекла у двухкамерных конструкций на $0,3\text{--}0,45^\circ\text{C}$ ниже, чем у однокамерных, что свидетельствует о лучшей изоляции. Температура в точках контроля (t_3, t_4) на поверхности крайнего правого стекла при использовании инертных газов выше на $1,5\text{--}2,5^\circ\text{C}$, что снижает риск образования конденсата. Наименьшие потери тепла зафиксированы у двухкамерного стеклопакета с ксеноном: 5,861 против 21,942 у однокамерного с воздухом (разница в 3,7 раза). Можно дать следующие практические рекомендации: для климата с холодными зимами оптимальны двухкамерные конструкции с криптоном или ксеноном, но в большинстве случаев достаточно аргонового заполнения, которое улучшает показатели на 20–25% относительно воздуха. Выбор стеклопакета с инертными газами и увеличенным числом камер существенно повышает энергоэффективность оконных конструкций.

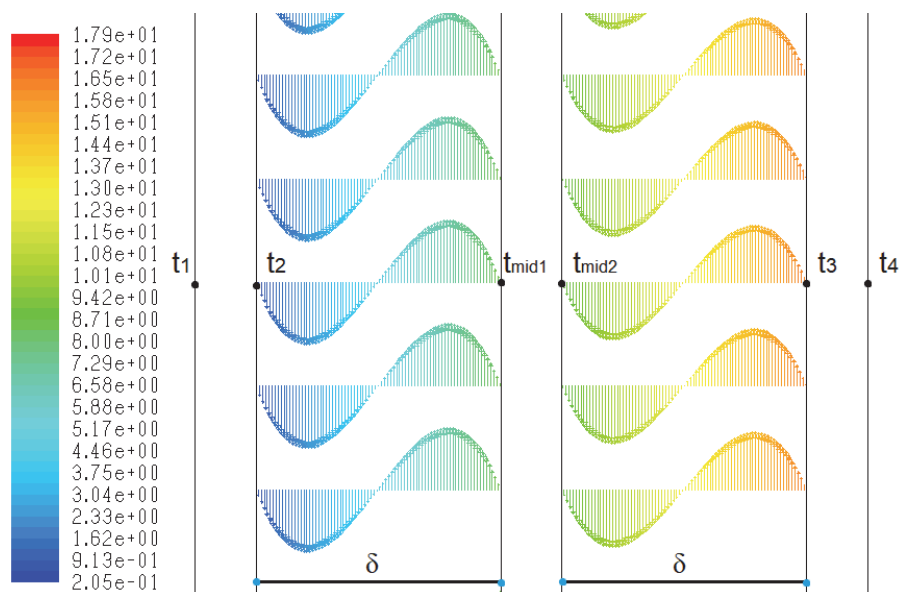


Рис. 4. Модель движения воздуха внутри газонаполненных камер двухкамерного стеклопакета.

FIG. 4. Model of air movement inside gas-filled chambers of a double-chamber glass unit.

ТАБ. 4. Основные характеристики сопряженного теплообмена через двухкамерный стеклопакет с расстоянием между стеклами $\delta = 16$ мм.

ТАБ. 4. Main characteristics of conjugate heat exchange through a double-chamber glass unit with a distance between the glasses $\delta = 16$ mm.

Наполнение / Filler	$t_1, ^\circ\text{C}$ $t_1, ^\circ\text{C}$	$t_2, ^\circ\text{C}$ $t_2, ^\circ\text{C}$	$t_{mid1}, ^\circ\text{C}$ $t_{mid1}, ^\circ\text{C}$	$t_{mid2}, ^\circ\text{C}$ $t_{mid2}, ^\circ\text{C}$	$t_3, ^\circ\text{C}$ $t_3, ^\circ\text{C}$	$t_4, ^\circ\text{C}$ $t_4, ^\circ\text{C}$	$R_c, \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$ $R_c, \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$	$q_c, \text{Вт}/\text{м} \cdot ^\circ\text{C}$ $q_c, \text{W}/\text{m} \cdot ^\circ\text{C}$
Воздух/Air	0,632	0,673	8,509	8,602	16,42	16,487	1,5	13,329
Осушенный воздух / Dehumidi- fied air	0,620	0,661	8,535	8,627	16,485	16,551	1,524	13,123
Аргон/ Argon	0,465	0,496	8,887	8,972	17,35	17,407	2,001	9,991
Криптон/ Krypton	0,295	0,314	8,948	9,055	18,087	18,156	2,686	7,444
Ксенон/ Xenon	0,202	0,215	9,361	9,443	18,626	18,698	3,412	5,861

4.2. Свободно-конвективный теплообмен в составной конструкции тепловозвукоизоляционного окна. На третьей стадии исследования был изучен процесс теплопередачи в конструкции тепловозвукоизоляционного окна с установленными в нем однокамерным и двухкамерным стеклопакетами, имеющего сложную слоистую структуру по схеме 4M1-16-4M1-200-4M1-14-4M1-14-4M1. Распределение температуры в 2D сечении расчетного домена представлено на рис. 5.

Составная конструкция тепловозвукоизоляционного окна демонстрирует на 32–43% более высокое общее термическое сопротивление R_c по сравнению с обычным двухкамерным стеклопакетом при всех типах газового наполнения. Это делает конструкцию с воздушным зазором 200 мм более предпочтительным выбором для энергоэффективного строительства, особенно в условиях северных регионов.

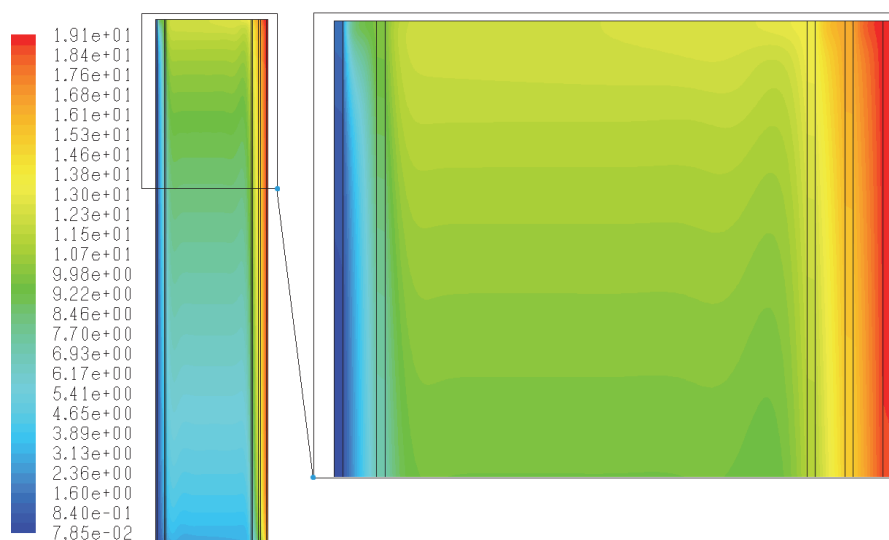


Рис. 5. Распределение температуры в 2D-сечении теплозвукоизоляционного окна с наполнением однокамерного и двухкамерного стеклопакетов аргоном.

FIG. 5. Temperature distribution in a 2D section of a heat and sound insulating window with single-chamber and double-chamber glass units filled with argon.

ТАБ. 5. Основные характеристики теплообмена через составную конструкцию теплозвукоизоляционного окна по формуле остекления 4M1-16-4M1-200-4M1-14-4M1-14-4M1; (t_1, t_2) — точки контроля на поверхности крайнего правого стекла, (t_3, t_4) — точки контроля на поверхности крайнего правого стекла со стороны жилой комнаты.

ТАБ. 5. Main characteristics of heat exchange through the composite structure of heat and sound insulating window according to glazing formula 4M1-16-4M1-200-4M1-14-4M1-14-4M1; (t_1, t_2) are the control points on the surface of the extreme right glass, (t_3, t_4) are the control points on the surface of the extreme right glass from the living room side.

Наполнение / Filler	$t_1, ^\circ\text{C}$ $t_1, ^\circ\text{C}$	$t_2, ^\circ\text{C}$ $t_2, ^\circ\text{C}$	$t_3, ^\circ\text{C}$ $t_3, ^\circ\text{C}$	$t_4, ^\circ\text{C}$ $t_4, ^\circ\text{C}$	$R_c, \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$ $R_c, \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$	$q_c, \text{Вт}/\text{м} \cdot ^\circ\text{C}$ $q_c, \text{W}/\text{m} \cdot ^\circ\text{C}$
Воздух / Air	0,518	0,553	17,254	17,311	2,22	9,009
Осушенный воздух / Dehumidified air	0,487	0,52	17,383	17,425	2,218	9,015
Аргон / Argon	0,261	0,278	18,392	18,427	3,35	5,969
Криптон / Krypton	0,142	0,151	19,024	19,054	4,776	4,188
Ксенон / Xenon	0,126	0,134	19,205	19,234	5,753	3,476

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в работе исследование представляет собой комплексный анализ теплопередачи в современных стеклопакетах с использованием методов численного и компьютерного моделирования. Суть работы заключается в разработке математической модели, учитывающей слоистую структуру оконных конструкций, переменную толщину газонаполненных камер и различные типы газовых наполнителей. Авторам удалось установить критические значения толщины газовых прослоек: 14–16 мм для воздуха и аргона, и 10–12 мм для криптона и ксенона, при которых достигается максимальное термическое сопротивление. Особый интерес представляет обнаруженный эффект насыщения — дальнейшее увеличение толщины за этими пределами не дает существенного улучшения теплоизоляционных свойств стеклопакетов.

Выявлена зависимость температурного распределения от типа газового наполнителя в межстекольном пространстве. Использование инертных газов не только снижает теплопотери, но и изменяет температурный профиль стеклопакета: наружные поверхности становятся на 0,3–0,45°C холоднее (что свидетельствует о лучшей изоляции), а внутренние — на 1,5–2,5°C теплее, существенно уменьшая риск образования конденсата. Сформулированы рекомендации по выбору конструкции стеклопакета. Для умеренного климата оптимальны двухкамерные стеклопакеты с аргоном, обеспечивающие улучшение теплоизоляции на 20–25% по сравнению с воздушным заполнением. В северных регионах предпочтительны составные конструкции, демонстрирующие на 32–43% более высокое термическое сопротивление по сравнению с обычными двухкамерными решениями. Разработанная методика исследования, сочетающая математическое и CFD-моделирование, имеет важное значение для проектирования энергосберегающих зданий, и может служить инструментом для оценки энергоэффективности оконных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гныря А. И., Низовцев М. И., Петров Е. В., Терехов В. И. Термическое сопротивление заполнений оконных блоков// Изв. вузов. Строительство. — 1998. — № 11-12. — С. 90.
2. Иванова Е. А. Теплоперенос в теплонапряженных элементах многослойных ограждающих конструкций// Дисс. к.ф.-м.н. — Томск: ТГАСУ, 2023. — URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:001009126>.
3. Овсянников С. Н., Самохвалов А. С. Окна в раздельных переплетах с высокой теплозвукоизоляцией// Строит. матер. — 2012. — № 6. — С. 42-43.
4. ГОСТ 24866-2014. Стеклопакеты клееные. Технические условия// Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200120572> (дата обращения: 27.06.2025).
5. Basok B., Pavlenko A., Novikov V., Koshlak H., Ciosek A., Moroz M. Comprehensive investigation of the thermal performance of an electrically heated double-glazed window: a theoretical and experimental approach// Energies. — 2024. — 17. — С. 4491. — DOI: 10.3390/en17174491.
6. Kabore M., Michaux G., Le D. J., Salagnac P., Greffet R. Parametric study of the thermal performance of a single-family house equipped with an airflow window integrating a heated glazing// В сб.: «Proceedings of the 16th IBPSA Conference, Rome, Italy, 2–4 September 2019». — Рим, 2019. — DOI: 10.26868/25222708.2019.211049
7. Kurnitski J., Jokisalo J., Palonen J., Jokiranta K., Seppnen O. Efficiency of electrically heated windows// Energy Build. — 2004. — 36. — С. 1003–1010. — DOI: 10.1016/j.enbuild.2004.06.007.
8. Maiorov V. A. Heat transfer through a double-glazed window by convection// IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Engng. — 2020. — 939. — 012049. — DOI: 10.1088/1757-899X/939/1/012049.
9. ANSYS FLUENT 12.0 User's Guide// ENEAGRID Projects Web Pages [электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/main_pre.htm (дата обращения: 27.06.2025).

Е. И. Гурина

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия
E-mail: elena.gyrina@mail.tsu.ru

П. А. Сомова

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия
E-mail: polina.somova01@yandex.ru

UDC 519.6, 532.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-221-232

EDN: MOCMQH

Numerical and computer modeling for assessing heat transfer in double-glazed windows

E. I. Gurina and P. A. Somova

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

Abstract. In this study, we analyze the heat transfer of single-chamber and double-chamber glass units installed in the outer and inner sashes of a composite window unit with the inter-glass space filled with dehumidified air and inert gases. We construct the mathematical model based on the solution of the heat conductivity equation with constant coefficients in a two-dimensional setting, taking into account the layered structure of the structure and using boundary conditions of the III and IV kind. Our numerical implementation of the problem uses the finite difference method on a uniform grid using the C++ programming language. To take into account convective heat exchange through glass units, we perform a series of numerical calculations in ANSYS Fluent software. We show that convective heat loss in glass units can be reduced by increasing the thickness of the spacer frame and using inert gases with low thermal conductivity. We identify the optimal thickness of the gas-filled chamber of a single-chamber glass unit (when filled with air, dry air, argon, krypton, xenon), ensuring maximum thermal resistance.

Keywords: heat transfer, double glazed window, heat conduction equation, numerical solution, finite difference method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: E. I. Gurina, P. A. Somova, “Numerical and computer modeling for assessing heat transfer in double-glazed windows,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 221–232. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-221-232>

REFERENCES

1. A. I. Gnyrya, M. I. Nizovtsev, E. V. Petrov, and V. I. Terekhov, “Termicheskoe soprotivlenie zapolneniy okonnykh blokov” [Thermal resistance of window block fillings], *Izv. vuzov. Stroitel'stvo* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Constr.], 1998, No. 11-12, 90 (in Russian).
2. E. A. Ivanova, “Teploperenos v teplonapryazhennykh elementakh mnogosloynnykh ograzhdayushchikh konstruktsiy” [Heat transfer in heat-stressed elements of multilayer enclosing structures], PhD Thesis, TGASU, Tomsk, 2023, URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:001009126>.
3. S. N. Ovsyannikov and A. S. Samokhvalov, “Okna v razdel'nykh perepletakh s vysokoy teplozvukoizolyatsiey” [Windows in separate frames with high heat and sound insulation], *Stroitel. mater.* [Constr. Mater.], 2012, No. 6, 42-43 (in Russian).
4. “GOST 24866-2014. Steklopakety kleenye. Tekhnicheskie usloviya” [GOST 24866-2014. Glued glass units. Technical conditions], *Electronic Fund of Legal and Regulatory Documents*. Available online: <https://docs.cntd.ru/document/1200120572>, accessed on June 27, 2025 (in Russian).



5. B. Basok, A. Pavlenko, V. Novikov, H. Koshlak, A. Ciosek, and M. Moroz, “Comprehensive investigation of the thermal performance of an electrically heated double-glazed window: a theoretical and experimental approach,” *Energies*, 2024, **17**, 4491, DOI: 10.3390/en17174491.
6. M. Kabore, G. Michaux, D. J. Le, P. Salagnac, and R. Greffet, “Parametric study of the thermal performance of a single-family house equipped with an airflow window integrating a heated glazing,” In: *Proceedings of the 16th IBPSA Conference, Rome, Italy, 2–4 September 2019*, Rome, 2019, DOI: 10.26868/25222708.2019.211049
7. J. Kurnitski, J. Jokisalo, J. Palonen, K. Jokiranta, and O. Seppnen, “Efficiency of electrically heated windows,” *Energy Build.*, 2004, **36**, 1003–1010, DOI: 10.1016/j.enbuild.2004.06.007.
8. V. A. Maiorov, “Heat transfer through a double-glazed window by convection,” *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Engng.*, 2020, **939**, 012049, DOI: 10.1088/1757-899X/939/1/012049.
9. “ANSYS FLUENT 12.0 User’s Guide,” *ENEAGRID Projects Web Pages*. Available online: https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/main_pre.htm, accessed on June 27, 2025.

E. I. Gurina

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

E-mail: elena.gyrina@mail.tsu.ru

P. A. Somova

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

E-mail: polina.somova01@yandex.ru

УДК 517.956.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239

EDN: MUMPFR

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

В. И. Качалов

НИУ «МЭИ», Москва, Россия

Аннотация. Задача возмущения спектра линейного оператора линейным же оператором решена благодаря введенным понятиям голоморфных семейств операторов типа (А) и в смысле Като. Построенные при этом ряды Рэлея—Шрёдингера уже сходились в обычном смысле, а не асимптотически. В данной работе найдены условия голоморфности по малому параметру собственных пар в ситуации, когда линейный оператор возмущается нелинейным оператором, порожденным произведением в банаховой алгебре.

Ключевые слова: возмущение спектра, голоморфные семейства операторов, банахова алгебра, оснащенное банахово пространство.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00496).

Для цитирования: В. И. Качалов. Об одной нелинейной спектральной задаче // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 233–239. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239>

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из вопросов, связанным с аналитическими аспектами теории возмущений, является вопрос зависимости от малого параметра собственных векторов и собственных значений операторов вида $L_\varepsilon = A + \varepsilon B$, когда оба оператора линейные и известен спектр оператора A . Такого рода задачи, как правило, решаются методом малого параметра (методом Пуанкаре), причем во многих случаях (см. [6, гл. XII, п. 3]) ряды, представляющие собственные векторы и собственные значения, сходятся асимптотически при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако для квантовой механики собственные значения — это уровни энергии атомов, и желательно было, чтобы вышеупомянутые ряды (ряды Рэлея—Шрёдингера) сходились в обычном смысле. В рассматриваемом линейном случае это имело место, когда L_ε представляло собой голоморфное семейство типа Като [2, гл. VII, § 2, п. 2]. Если $D_B \supset D_A$ и оператор B подчинен оператору A [6, гл. XII, п. 2], то L_ε является голоморфным семейством типа (А) и собственные пары спектральной задачи для L_ε также голоморфным образом зависят от ε . Следует также указать на фундаментальный труд К. Фридрихса [10], в котором детально изучена проблема возмущения спектра оператора в линейном случае.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\mathcal{B}$ — коммутативная банахова алгебра с единицей, оснащенная скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_s$. Норму в $\mathcal{B}$ обозначим через $\|\cdot\|$, а норму, порожденную скалярным произведением,

обозначим через $\|\cdot\|_s$. Рассмотрим в $\mathcal{B}$ спектральную задачу

$$Au + \varepsilon u \cdot Hu = \Lambda u, \quad (1)$$

с малым комплексным параметром ε , когда A и H являются замкнутыми неограниченными операторами с областями определения D_A и D_H соответственно.

Условие (α). Оператор A обладает системой нормированных собственных векторов $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, являющейся ортонормированной в введенном скалярном произведении. Соответствующие собственные значения обозначим через $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.

Условие (β). Обозначим через E_m одномерное подпространство, натянутое на вектор e_m , и пусть $\mathcal{B} \setminus E_m$ — подпространство в $\mathcal{B}$, причем $e_m \perp \mathcal{B} \setminus E_m$ в смысле введенного скалярного произведения, $m = 1, 2, \dots$

Условие (γ). При каждом натуральном m оператор $A - \lambda_m I$, где I — тождественный оператор, непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B} \setminus E_m$.

Будем искать собственные векторы и собственные значения в виде рядов по степеням малого параметра:

$$u_m(\varepsilon) = u_{0,m} + \varepsilon u_{1,m} + \dots + \varepsilon^n u_{n,m} + \dots, \quad (2)$$

$$\Lambda_m(\varepsilon) = \lambda_{0,m} + \varepsilon \lambda_{1,m} + \dots + \varepsilon^n \lambda_{n,m} + \dots \quad (3)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, имеем серию задач:

$$\begin{aligned} Au_{0,m} &= \lambda_{0,m} u_{0,m}, \\ Au_{1,m} + u_{0,m} \cdot Hu_{0,m} &= \lambda_{0,m} u_{1,m} + \lambda_{1,m} u_{0,m}, \\ &\dots \dots \dots \\ Au_{n,m} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m} &= \sum_{k=0}^n \lambda_{k,m} u_{n-k,m}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Действуя так же, как и в линейной теории возмущений [6, гл. XII, п. 1], пользуясь условием (β), получим следующую серию равенств:

$$\begin{aligned} \lambda_{0,m} &= \lambda_m, \\ u_{0,m} &= e_m; \\ \lambda_{1,m} &= (u_{0,m} \cdot Hu_{0,m}, u_{0,m})_s, \\ (A - \lambda_m I)u_{1,m} &= -u_{0,m} \cdot Hu_{0,m} + \lambda_{1,m} u_{0,m}; \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m}, u_{0,m})_s, \\ (A - \lambda_m I)u_{n,m} &= -\sum_{k=0}^{n-1} u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m} u_{n-k}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Из условия (γ) следует, что λ_m принадлежит резольвентному множеству оператора A_m , являющемуся сужением оператора A на пространство $\mathcal{B} \setminus E_m$. Пусть $R_{A_m}(\lambda_m) = (A_m - \lambda_m I)^{-1}$ и $\|R_{A_m}(\lambda_m)\| = r_m$. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть заданы две последовательности $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_k q_{n-k-1}; \\ q_0 &= 1, \quad q_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_k q_{n-k-1} + \sum_{k=1}^n p_k q_{n-k}; \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда функции

$$\begin{aligned} S_p(z) &= 1 + zS_q^2(z), \\ S_q(z) &= \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{z}} \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{(z+18)\sqrt{z}}{(z+3)\sqrt{z+3}}\right)\right) - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

являются производящими для них.

Доказательство. В соответствии с правилом Коши произведение рядов $S_p(z)$ и $S_q(z)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} S_p(z) = 1 + zS_q^2(z), \\ S_q(z) = S_p(z) + S_q^3(z), \end{cases}$$

из которой следует уравнение для определения $S_q(z)$:

$$S_q^3(z) + zS_q^2(z) - S_q(z) + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим доказываемые формулы (см. также [9]). Лемма 1 доказана. $\square$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_p(z) &= 1 + z + 4z^2 + 24z^3 + 172z^4 + 1360z^5 + \dots, \\ S_q(z) &= 1 + 2z + 10z^2 + 66z^3 + 498z^4 + 4066z^5 + \dots \end{aligned}$$

Можно доказать, что оба ряда сходятся в круге $|z| < \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \approx 0,09$. В [10] приведена формула коэффициентов ряда $S_p(z)$:

$$p_n = 2 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(2n+m-1)!}{m!(n-m-1)!(n+m+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ алгебру непрерывных в $\mathcal{B}$ операторов.

Теорема 1. Если выполнены условия (α) , (β) , (γ) , $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ и $D_H \supset D_A$, то собственные векторы и собственные значения спектральной задачи (1) голоморфны в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $G = HA^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. По теореме Банаха о замкнутом графике [7, гл. III, § 15, п. 4], $G \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, так как H — замкнутый оператор, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ и $D_H \supset D_A$. Пусть $\|G\| = g$. Также введем в рассмотрение операторы $T_m = AR_{A_m}(\lambda_m)$, $m = 1, 2, \dots$, которые также являются ограниченными по теореме Банаха о замкнутом графике, и пусть $\|T_m\|_{\mathcal{B} \setminus E_m} = t_m$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\|A^{-1}\| = 1$ и $1 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$

Из равенств (5) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_{0,m} &= \lambda_m, \\ u_{0,m} &= R_m; \\ \lambda_{1,m} &= (u_{0,m} \cdot Hu_{0,m}, u_{0,m})_s, \\ u_{1,m} &= R_{A_m}(\lambda_m)[-u_{0,m} \cdot Hu_{0,m} + \lambda_{1,m}u_{0,m}]; \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m}, u_{0,m})_s, \\ u_{n,m} &= R_{A_m}(\lambda_m) \left[-\sum_{k=0}^{n-1} u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m}u_{n-k} \right]; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $Au_{n,m} = v_{n,m}$, $n = 0, 1, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Запишем равенства для $v_{n,m}$, используя ранее введенные операторы:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{0,m} &= \lambda_m, \\
 v_{0,m} &= Ae_m = \lambda_m e_m; \\
 \lambda_{1,m} &= (A^{-1}u_{0,m} \cdot Gv_{0,m}, A^{-1}v_{0,m})_s, \\
 v_{1,m} &= T_m[-A^{-1}v_{0,m} \cdot Gv_{0,m} + \lambda_{1,m}A^{-1}v_{0,m}]; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \lambda_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} (A^{-1}v_{k,m} \cdot Gv_{n-k-1,m}, A^{-1}v_{0,m})_s, \\
 v_{n,m} &= T_m \left[-\sum_{k=0}^{n-1} A^{-1}v_{k,m} \cdot Gv_{n-k-1,m} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m}A^{-1}v_{n-k} \right]; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

Докажем методом математической индукции, что

$$|\lambda_{n,m}| \leq p_n t_m^{n-1} g^n |\lambda_m|^{2n} \gamma^n, \tag{8}$$

$$\|v_{n,m}\| \leq q_n t_m^n g^n |\lambda_m|^{2n+1} \gamma^n, \tag{9}$$

с учетом того, что в банаховой алгебре $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \forall u, v \in \mathcal{B}$ (см. [1, гл. XI, п. 1]) и $(u, v)_s \leq \gamma \|u\| \cdot \|v\|$ для некоторого $\gamma > 0$ (см. [7, гл. I, § 6, п. 7]). При $n = 1$ неравенство (8) очевидно. Рассмотрим неравенство (9):

$$\|v_{1,m}\| \leq q_1 t_m g |\lambda_m|^2 \gamma + q_1 t_m g |\lambda_m|^3 \gamma \leq t_m g |\lambda_m|^3 \gamma,$$

т. е. оно также выполняется.

Пусть неравенства (8) и (9) верны при $n = s$. Докажем, что отсюда вытекает их справедливость при $n = s + 1$:

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{s+1,m}| &\leq \gamma g \sum_{k=0}^s q_k t_m^k g^k |\lambda_m|^{2k+1} \gamma^k \cdot q_{s-k} t_m^{s-k} g^{s-k} |\lambda_m|^{2s-2k+1} \gamma^{s-k} = \\
 &= g \gamma \left(\sum_{k=0}^s q_k q_{s-k} \right) t_m^s g^s |\lambda_m|^{2s+2} \gamma^s = p_{s+1} t_m^s g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+2} \gamma^{s+1}; \\
 \|v_{s+1,m}\| &\leq t_m \left[g \sum_{k=0}^s q_k t_m^k g^k |\lambda_m|^{2k+1} \gamma^k \cdot q_{s-k} t_m^{s-k} |\lambda_m|^{2s-2k+1} \gamma^{s-k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{s+1} p_k t_m^{k-1} g^k |\lambda_m|^{2k} \gamma^k \cdot q_{s+1-k} t_m^{s+1-k} g^{s+1-k} |\lambda_m|^{2s-2k+3} \gamma^{s-k+1} \right] = \\
 &= \left(\sum_{k=0}^s q_k q_{s-k} \right) t_m^{s+1} g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+1} \gamma^{s+1} + \\
 &\quad + \left(\sum_{k=1}^{s+1} p_k q_{s+1-k} \right) t_m^{s+1} g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+3} \gamma^{s+1} \leq q_{s+1} t_m^{s+1} g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+3} \gamma^{s+1}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства (8), (9) верны при всех натуральных n .

Из леммы 1 и оценок (8), (9) вытекает сходимость ряда (3) и ряда

$$v_m(\varepsilon) = v_{0,m} + \varepsilon v_{1,m} + \dots + \varepsilon^n v_{n,m} + \dots$$

Но тогда, ввиду ограниченности оператора A^{-1} , сходится и ряд (2). Итак,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{n,m} &= u_m(\varepsilon), \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A u_{n,m} &= A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{n,m} = v_m(\varepsilon),
 \end{aligned}$$

что ввиду замкнутости оператора A означает, что $u_m(\varepsilon) \in D_A$ и $v_m(\varepsilon) = A(u_m(\varepsilon))$. Вместе с тем фактом, что ряды (2), (3) обращают уравнение (1) в тождество, это доказывает, что $\{u_m(\varepsilon), \Lambda_m(\varepsilon)\}$ — собственная пара, голоморфная в точке $\varepsilon = 0$. Теорема 1 доказана. $\square$

Пример 1. Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра вещественнозначных функций

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с нормой $\|w\| = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$. Оснастим $\mathcal{B}$ скалярным произведением по формуле

$$(u, v)_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx. \quad (10)$$

Ясно, что $|(u, v)_s| \leq \gamma \|u\| \cdot \|v\|$ с $\gamma = 2$.

Пусть в уравнении (1) $A = -\partial_x^2$, $D_A = \{w \in \mathcal{B} : \partial_x^2 w \in \mathcal{B}, w(0) = w(2\pi) = 0\}$, $H = \partial_x$, $D_H = \{w \in \mathcal{B} : \partial_x w \in \mathcal{B}, w(0) = 0\}$.

Ясно, что $D_H \supset D_A$, $e_m = \sin mx$, $\lambda_m = m^2$, $\|e_m\| = \|e_m\|_s = 1$, $E_m = \{\mu \sin mx, \mu \in \mathbb{R}\}$, $E_m \perp_{\mathcal{B}} E_m$ в смысле скалярного произведения (10). Итак, имеем спектральную задачу

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 u + \varepsilon u \cdot \partial_x u &= \Lambda u, \quad u \in \mathcal{B}, \\ u(0) &= u(2\pi) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Если воспользоваться формулами (5), (6), то можно найти несколько первых членов рядов (2), (3) при $m = 1, 2, \dots$, представляющих решение спектральной задачи (11):

$$\begin{aligned} u_m(x, \varepsilon) &= \sin mx - \frac{\varepsilon}{6m} \sin 2mx + \frac{\varepsilon^2}{32m^2} \sin 3mx - \dots; \\ \Lambda_m(\varepsilon) &= m^2 + \frac{1}{12} \varepsilon^2 + \frac{1}{384m^2} \varepsilon^4 + \dots \end{aligned}$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если $D_H \not\supset D_A$, то возмущение оператора A является сингулярным [5, гл. I, § 1], [11], а ряд (2) не будет аналитическим образом зависеть от ε . В этом случае нужно будет искать условия псевдоголоморфности $u(\varepsilon)$ (см. [3]). Примечательно, что задача построения рядов по степеням малого параметра, сходящихся в обычном смысле, систематически начала изучаться именно в теории сингулярных возмущений, в рамках метода регуляризации С. А. Ломова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
3. Качалов В. И. Псевдоголоморфные и ε -псевдoreгулярные решения сингулярно возмущенных задач // Дифф. уравн. — 2022. — 58, № 3. — С. 361–370.
4. Качалов В. И., Ломов С. А. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Докл. РАН. — 1994. — 334, № 6. — С. 694–695.
5. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: МГУ, 2011.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
8. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1969.
9. Deutch E. Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis) and where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$ // On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — 2000. — URL: <http://oeis.org/A027307>.
10. Deutch E. Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis), where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$ and start with $(2, 1)$ // On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — 2000. — URL: <http://oeis.org/A032349>.

11. Glizer V. Y. Asymptotic analysis of spectrum and stability for the one class of singularity perturbed neutral time delay systems // *Axioms*. — 2021. — 10, № 4. — С. 325.

В. И. Качалов
НИУ «МЭИ», Москва, Россия
E-mail: vikachalov@rambler.ru

UDC 517.956.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239

EDN: MUMPFR

On a nonlinear spectral problem

V. I. Kachalov

NRU "MPEI," Moscow, Russia

Abstract. The problem of perturbation of the spectrum of a linear operator by a linear operator is solved thanks to the introduced concepts of holomorphic families of operators of type (A) and in the sense of Kato. The Rayleigh–Schrödinger series constructed in this case already converged in the usual sense, and not asymptotically. In this paper, conditions for holomorphy with respect to a small parameter of eigenpairs are found in the situation when a linear operator is perturbed by a nonlinear operator generated by a product in a Banach algebra.

Keywords: spectrum perturbation, holomorphic families of operators, Banach algebra, framed Banach space.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00496).

For citation: V. I. Kachalov, “On a nonlinear spectral problem,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 233–239. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239>

REFERENCES

1. K. Iosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
3. V. I. Kachalov, “Psevdogolomorfnye i ε -pseudoregulyarnye resheniya singulyarno vozmushchennykh zadach” [Pseudoholomorphic and ε -pseudoregular solutions of singularly perturbed problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 3, 361–370 (in Russian).
4. V. I. Kachalov and S. A. Lomov, “Psevdoanaliticheskie resheniya singulyarno vozmushchennykh zadach” [Pseudoanalytical solutions of singularly perturbed problems], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **334**, No. 6, 694–695 (in Russian).
5. S. A. Lomov and I. S. Lomov, *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya* [Fundamentals of the Mathematical Theory of the Boundary Layer], MGU, Moscow, 2011 (in Russian).
6. M. Reed and B. Simon, *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 4. Analiz operatorov* [Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators], Mir, Moscow, 1982 (Russian translation).
7. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

8. K. Friedrichs, *Vozmushchenie spektra operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Perturbation of Spectra in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1969 (Russian translation).
9. E. Deutch, "Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis) and where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$," *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 2000, URL: <http://oeis.org/A027307>.
10. E. Deutch, "Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis), where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$ and start with $(2, 1)$," *On-Line Encyclopedia of Integer Sequence*, 2000, URL: <http://oeis.org/A032349>.
11. V. Y. Glizer, "Asymptotic analysis of spectrum and stability for the one class of singularity perturbed neutral time delay systems," *Axioms*, 2021, **10**, No. 4, 325.

V. I. Kachalov

E-mail: vikachalov@rambler.ru

NRU "MPEI," Moscow, Russia

УДК 518.5, 539.3

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252

EDN: MVAOUM

АКТУАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В ТЕРМОУПРУГОСТИ

Л. В. ЛЕВИНА, В. Б. ПЕНЬКОВ, М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

Аннотация. Выполнен обзор работ последнего времени по термоупругости. Рекомендуется применение метода граничных состояний (МГС) для построения численно-аналитических решений задач средствами вычислительных систем, поддерживающих «компьютерные алгебры». Сформированы структуры гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний термоэластостатической среды (ТЕ) и определен способ описания скалярных произведений обоих изоморфных пространств. Обнаружена возможность экономии вычислительных средств для выполнения процедуры ортогонализации базисов сепарабельных пространств. При решении связанных/несвязанных по граничным условиям (ГУ) задач термоупругости отпала необходимость в декомпозиции их на традиционную последовательность из температурной и упругой задачи. Проведена классификация ТЕ-задач. Выполнены расчеты и прокомментированы результаты для двух классов задач.

Ключевые слова: термоупругость, термоэластостатика, метод граничных состояний, МГС, задача Дирихле, задача Неймана, энергетические методы.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. В. Левина, В. Б. Пеньков, М. А. Лаврентьева. Актуальное состояние и перспективы исследований в термоупругости // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 240–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252>

1. ОБЗОР АКТУАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Классические описания постановок задач термоупругости приведены в фундаментальных трудах [2, 3, 8, 12].

Актуальное состояние исследований отражено в ряде диссертационных работ последнего времени [15, 17, 20, 23, 25, 26, 30, 34]. Фоном для этих работ служат примыкающие к их тематикам исследования [4, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 27–29, 31–33]. Кратко обсудим тематику актуальных исследований.

Работа [26] посвящена динамике термоупругих пластин и имеет целью разработку эффективного метода решения сложных задач динамики физически нелинейных термоупругих объектов. Пластины подвержены возбуждающим поперечным силовым гармоническим воздействиям с задаваемой частотой. Обнаружены точки бифуркации и установлены две фазы разрушения. Вычислительные алгоритмы реализованы в MATCONF. Результаты исследований подтверждены средствами ANSYS.

Исследование [17] в контексте решения обратных задач термоупругости имеет целью идентификацию параметров среды на основе анализа общей информации о процессах, происходящих в теле. Выполнен глубокий обзор смежных работ; использованы средства теории игр для анализа неоднозначной информации о процессе в теле. Рекомендованы приложения этого подхода: 1) в медицине, в частности — электрокардиографии; 2) в термоупругости для идентификации зарождающихся трещин.

Тематика исследований [30] имеет целью обоснование эффективной численной схемы метода граничных элементов, организуемых на основе учета характеров включений в среде. Включение произвольной формы порождает окрестное состояние, оказывающее влияние на термоупругие характеристики на границе тела. Это влияние учитывается при формировании граничных элементов. Изучены приложения к анализу стационарных и стоковских потоков, теории упругости и теплопроводности.

Целью работы [23] является разработка численно-аналитического высокоскоростного метода граничных элементов для решения задач термоэластостатики и анализа причин разрушения тел произвольной геометрической формы. Эффективно строятся картины, отражающие концентрацию напряжений в теплопроводной среде, позволяющие делать прогнозы о достижении критических состояний в теле.

Исследования [20] посвящены разработке численных методов для использования в сложных инженерных приложениях, основанных на конечно-элементной дискретизации объекта и учёте решений, выполненных для гидродинамики «гладких» частиц. Оценена сложность и практическая невозможность построения аналитических решений задач термоупругости при наличии в описании нелинейностей физической и геометрической природы. Выполнен обзор численных методов, в частности, существенное внимание уделено методу конечных элементов.

В настоящее время также продолжается совершенствование конечно-элементного подхода к обеспечению устойчивости процесса построения решения задач термоупругости [33].

Прогнозированию зарождения микротрещин посвящена работа [25]. Ее цель — разработка численного метода анализа состояний среды неоднородной (поликристаллической) микроструктуры на основе использования «быстрого преобразования Фурье». Объектами исследования являются классическая и нелинейная механика. Изучен процесс развития термоупругого состояния в таблетке, подвергаемой различным видам нагружения вплоть до достижения хрупкого разрушения. Устанавливаются остаточные напряжения, отвечающие поликристаллической микроструктуре среды, включая микротрещины. Производится учет необратимости характера повреждений.

Терминологически нетрадиционным в формализации постановок задач термомеханики является «пространственно-временной» подход [15], посвящённый описанию релятивистской модели термоупругости для учета конечных деформаций. Изучаются термоэластические модели при больших деформациях. Сравняются предложенная «релятивистская» и ньютоновская модели. Уделено существенное внимание конкретному изучению меняющихся состояний в процессе сгибания труб, сопровождающегося развитием значительных деформаций. Описывающая этот процесс модель обозначена как «термоупругое поведение». Достоверность подтверждается совместностью результатов с таковыми для ньютоновской среды при малых деформациях.

Весьма полезной с практической точки зрения представляется работа [34], посвящённая проектированию форм для предстоящих к изготовлению отливок изделий. Конкретной целью является описание процедуры итерационного проектирования литейной полости «подходящей» формы. Рассматривается процесс литья под давлением. Остывание среды приводит к дефекту формы. Выполняется численное моделирование процесса отливки термовязкоупругого материала. Получена серия моделей для пошаговых этапов процесса. Итерационный подход позволил приблизиться к установлению эффективных параметров исходной полости для отливок.

Обзор рассмотренных выше диссертационных работ по тематике термоупругости выполнен за последние шесть лет. Параллельно с этими исследованиями в печати имеют место иные серьезные результаты.

В [16] обоснована реальная возможность формулировки граничных условий Вентцеля для задач анализа термоупругого состояния трехмерного тела, покрытого тонкослойной оболочкой.

Работа [22] посвящена разработке метода «прямого» интегрирования для решения задач упругости и термоупругости «поперечной» анизотропии тел, составленных из цилиндрических слоев. Используются интегральные уравнения двойной размерности.

Процесс передачи тепла через гауссовские источники тепла в теле изучен в [24] средствами упрощающих дифференциальных преобразований, позволяющих построить аналитические решения. Объектами исследования явились круглая пластина с гауссовским круговым источником тепла, выполненная из меди.

Разработке аналитического метода решения на базе теории функций комплексного переменного для анализа термоупругих состояний при наличии трещин посвящена работа [31]. Тепло индуцируется электротоком. Роль трещины выполняет эллиптическая полость. При стремлении формы полости к линейной трещине обнаружено стремительное возрастание интенсивности напряжений у квазисингулярных вершин. Выполнена сверка результатов решения с классическими сведениями в частных случаях.

В статье [28] организован искусственный подход к описанию температурных полей комбинацией решений Треффца и вспомогательного поля, описываемого линейными функциями формы при неизвестных коэффициентах. Установка значений коэффициентов отвечает удовлетворению граничным условиям в узлах. Объектами пробных расчетов служат цилиндрические композитные слоистые материалы. Выполнено качественное тестирование.

Работа [18] посвящена построению «фоновому» решению в численно-аналитической форме для неоднородной термоупругой среды, содержащей большое количество включений. Изучаются плоские термоупругие поля, допускающие колебания температуры в условиях равномерного теплового потока. Численный подход строится при использовании конформных отображений.

Наряду с методами конечных и граничных элементов для анализа термоэластостатических полей трехмерных и двумерных тел при ударных нагрузках эффективно используется метод конечных разностей в работе [27].

При больших перепадах температуры и соответствующих им изменениях теплоёмкостных свойств среды потребовалось развитие конечно-элементного подхода в [32]. Усовершенствованный подход подтвержден сравнением результатов счёта с экспериментальными данными.

Для задач двумерной термоэластостатики анизотропных тел применен подход на основе использования фундаментальных решений в [21]. Естественная декомпозиция, весьма эффективная в описании подхода к решению несвязанных задач, приводит к последовательности постановок задач. На первом шаге строится явная форма решения, отвечающего температурному полю и его деформационным следствиям. На втором шаге используются фундаментальные решения задач со скорректированными граничными условиями. Выполнена оценка точности метода.

В работе [4] решена осесимметричная задача термоэластостатического состояния матрицы, содержащей шаровые термоупругие включения с теплоисточниками регулярного характера. Для конкретного примера построено высокоточное численное решение. Серьезного внимания заслуживает итерационный численно-аналитический подход к решению задачи о термомеханическом взаимодействии теплопроводящего индентора с поверхностью термоупругого тела произвольной формы в зоне контакта. Выполнены параметрические анализы для типичных форм основания индентора в [29].

Принципиальную новизну для практически-ориентированных вычислений представляет работа [19]. С целью преодоления трудностей расчета состояния традиционными вычислительными средствами, требующими серьезных вычислительных затрат (время счета, точность, сходимость) предложено и частично реализовано использование нейронной сети для приближенных оценок решений методом глубокого обучения.

Существенным «пробелом» в отмеченных работах является упор на использование компьютерных технологий, ориентированных на «число». Современные вычислительные системы, поддерживающие компьютерные алгебры, позволяют представлять результаты в численно-аналитической форме и даже выписывать полнопараметрические аналитические решения.

2. СРЕДСТВА МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИКИ

Энергетический метод граничных состояний (МГС) представляется важнейшим средством анализа термоупругого состояний теплопроводных тел. Основные результаты по развитию МГС были получены в XXI веке и отражены в последовательной серии диссертационных работ [1, 5, 7, 9–11, 13, 14].

В [7] дано фундаментальное обоснование МГС, описаны процедуры назначения и совершенствования базиса пространства внутренних состояний для односвязного ограниченного тела, обоснованы средства решения основных задач линейной теории упругости.

Диссертация [13] посвящена применению МГС для восстановления гармонических полей и их характеристик в формулировках задач Дирихле, Неймана, основной смешанной задачи. Продемонстрированы приложения к задачам изучения призматических стержней, электростатики, движению идеальной жидкости.

Работа [10] посвящена теоретическому и алгоритмическому обоснованию МГС с возмущениями (МГСВ); рассмотрены задачи для неоднородных тел, задачи стационарной термоупругости.

Распространению МГС на анизотропные упругие тела посвящена диссертация [1]. Изучены плоские задачи для анизотропных объектов, рассмотрена обобщенная задача Сен-Венана.

МГС применён к решению задач о колебаниях изотропных тел в [11]: выработана методология решения основных задач (1-я, 2-я, основная смешанная) в условиях установившегося колебательного процесса.

Серьезным шагом стало развитие МГС для неограниченных 3D-областей (однополостных, многополостных) в работе [14]. Обоснованы алгоритмы наполнения базисов пространств состояний в случаях системы полостей в ограниченном или неограниченном теле.

Во всех вышеперечисленных случаях вырисовывались проблемы, связанные с наличием факторов, порождающих в решениях сингулярности физического и геометрического характера. Учёт специальных решений, «схватывающих» такие особенности, проведён в работе [9], но только в 2D-варианте.

Уникальный интерес при решении задач математической физики составляет возможность предъявления полнопараметрического аналитического решения (ППР), содержащего в символьном виде параметры геометрии тела, параметры среды, параметры нагружения. Исследования в [5] позволили успешно достигать такой цели использованием многочленов Чебышёва, Лагранжа и, в особенности, — метода возмущений.

2.1. Пространства состояний температурной и упругой сред. Состояние термоупругого объекта, заключённого в области V с границей ∂V представляет собой суперпозицию температурной T и эластостатической E сред. Внутреннее состояние ξ^T стационарной температурной среды описывается уравнением Пуассона

$$T_{,ii} + \frac{1}{\varkappa} Q = 0, \quad x \in V, \quad (2.1)$$

где Q — объёмный теплоисточник, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Удобно элемент пространства внутренних состояний Ξ^T описывать избыточным набором взаимообусловленных характеристик: $\xi^T = \{T, T_{,i}\}$ (см. [10, 13]). Его след на границе тела ∂V составляет граничное состояние $\gamma^T = \left\{T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\right\}$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль. Если объёмный теплоисточник описывается многочленом произвольного конечного порядка, то частное решение уравнения (2.1) выписывается с абсолютной точностью (см. [6]). Декомпозиция решения (2.1) приводит к необходимости построения краевой задачи для уравнения Лапласа при скорректированных ГУ. Ниже будем полагать $Q = 0$, а возможные варианты для T считать гармоническими функциями.

Введение скалярных произведений

$$(\xi^{T(1)}, \xi^{T(2)})_{\Xi^T} \equiv \int_V T_{,i}^{(1)} T_{,i}^{(2)} dV = \int_{\partial V} T^{(1)} \frac{dT^{(2)}}{d\mathbf{n}} \equiv (\gamma^{T(1)}, \gamma^{T(2)})_{\Gamma^T},$$

для которых равенство значений интегралов для изоморфных пар элементов обеспечивается фундаментальными свойствами гармонических функций, устанавливает «гильбертов изоморфизм» обоих гильбертовых пространств: $\Xi^T \longleftrightarrow \Gamma^T$.

Внутренние состояния ξ^E уравновешенной изотропной упругой среды определяются набором соотношений (2.2)–(2.4) (см. [1, 7, 9, 10]). Соотношения Коши выражают связь между перемещением u_i^E и малыми деформациями ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2}(u_{i,j}^E + u_{j,i}^E). \quad (2.2)$$

Обобщенный закон Гука в форме Ламе определяет компоненты σ_{ij}^E тензора напряжений через деформации ε_{ij}^E :

$$\sigma_{ij}^E = \lambda \varepsilon_{kk}^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E, \quad (2.3)$$

где λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера.

Уравнения равновесия при наличии объемных сил X_i суть

$$\sigma_{ij,j}^E + X_i = 0. \quad (2.4)$$

Природа объемных сил может быть разнообразной. В любом случае, если силы выражаются многочленами конечного порядка, частное решение выписывается с абсолютной точностью (см. [6]). После декомпозиции построение базиса пространства состояний Ξ^E выполняется для однородного случая.

Внутреннему состоянию $\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E$ при фиксированном перемещении тела как жёсткого целого изоморфно соответствует граничное состояние $(x \in \partial V) \gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$, где $p_i^E = \sigma_{ij}^E n_j$. Оба пространства сопряжены «гильбертовым изоморфизмом» $\Xi^E \longleftrightarrow \Gamma^E$ при определении равных для изоморфных пар элементов скалярных произведений

$$(\xi^{E(1)}, \xi^{E(2)})_{\Xi^E} \equiv \int_V \sigma_{ij}^{E(1)} \varepsilon_{ij}^{E(2)} \partial V = \int_{\partial V} p_i^{E(1)} u_i^{E(2)} dS \equiv (\gamma^{E(1)}, \gamma^{E(2)})_{\Gamma^E}.$$

2.2. Пространства состояний термоэластостатической среды. В термоэластостатике под внутренним состоянием следует понимать набор $\xi = \{u_i^E, u_i^T, \varepsilon_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^E, \sigma_{ij}^T, T, T_i\} \in \Xi$, $x \in V$. Предполагается, что распределённая по V температура вызывает шаровую деформацию интенсивности αT , где α — коэффициент температурного расширения. Каждая компонента тензора температурных деформаций

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}$$

приобретена без силового воздействия. Она могла бы быть вызвана тензором напряжений, регламентируемым обобщённым законом Гука

$$\sigma_{ij}^* = \lambda \varepsilon_{kk}^T \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^T.$$

Это — «потерянные напряжения». Следовательно, термосостояние вносит поправку в поле напряжений, равную

$$\sigma_{ij}^T = -\sigma_{ij}^* = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}.$$

Полная картина термоупругого НДС является суперпозицией:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^T, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T. \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений является законом Дюамеля—Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Внутреннему состоянию ξ отвечает граничное состояние

$$\gamma = \left\{ u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right\} \in \Gamma, \quad x \in \partial V.$$

Пространства внутренних и граничных состояний изоморфны: $\Xi \longleftrightarrow \Gamma$.

Если ввести скалярные произведения в обоих пространствах по правилу

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = \tilde{\alpha}(\xi^{E(k)}, \xi^{E(m)})_{\Xi^E} + \tilde{\beta}(\xi^{T(k)}, \xi^{T(m)})_{\Xi^T}, \quad (2.6)$$

$$(\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma} = \tilde{\alpha}(\gamma^{E(k)}, \gamma^{E(m)})_{\Gamma^E} + \tilde{\beta}(\gamma^{T(k)}, \gamma^{T(m)})_{\Gamma^T}, \quad (2.7)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ — произвольные положительные действительные числа, то для изоморфных пар элементов выполняется равенство

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma},$$

устанавливающее «гильбертов изоморфизм» обоих пространств.

Определяющие соотношения рассматриваемых сред приводятся к разрешающим уравнениям эллиптического типа относительно температуры или перемещения (уравнения Пуассона, Ламе). Базисы состояний в каждом случае строятся на основе однородных гармонических многочленов [7, 10, 14] посредством использования общих решений разрешающих уравнений [3, 8]. Процедуры дифференцирования в (2.2), (2.4) порождают три линейно-зависимых элемента. После «чистки» базис ортонормируется. Любое термоупругое состояние представляется рядом Фурье по элементам ортонормированных базисов:

$$\xi^T = \sum_k c_k^T \xi^{T(k)}, \quad \xi^E = \sum_k c_k^E \xi^{E(k)}. \quad (2.8)$$

Аналогичную форму имеют изоморфные объекты базиса граничных состояний (с теми же коэффициентами).

Использование ГУ сводит решение краевой задачи к системе уравнений относительно коэффициентов Фурье.

Структура скалярных произведений (2.6), (2.7) позволяет сделать важные выводы: 1) после организации базисов сепарабельных гильбертовых пространств Ξ^T, Ξ^E их ортогонализации можно проводить независимо друг от друга; 2) независимость процедур ортогонализации снижает объем вычислений более чем вдвое.

3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИКИ

В качестве основы для классификации ТЕ-задач логично использовать классификации температурных и эластостатических задач: задачи Дирихле («D»), Неймана («N»); первая («1») и вторая («2») задачи теории упругости в терминах Н. И. Мусхелишвили. Возникает серия основных задач (1D, 1N, 2D, 2N) и их смешанных вариантов (12D, 12N, 1DN, 2DN, 12DN, ...), смысл постановок которых достаточно легко интерпретируется.

Например, «12D» означает, что граница области V разбита на два класса $\partial V = S_p \cup S_u$, $S_p \cap S_u = \emptyset$. Температура T задана на всей границе ∂V ; на S_p определены поверхностные усилия $\mathbf{p}$, на S_u — перемещения $\mathbf{u}$.

В каждом варианте порождаются особенности, которыми следует пользоваться, формируя эффективный и экономичный подход к процедуре построения решения.

В случаях ГУ линейного типа относительно характеристик граничного состояния задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье. Структура матрицы уравнений зависит от конкретного типа ГУ, а значения элементов определяются только базисными элементами. Вектор правых частей содержит также информацию о значениях характеристик ГУ. В основных задачах (1D, 1N, 2D, 2N) при $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$ матрицы систем уравнений — единичные.

Рассмотрим варианты первой основной задачи теории упругости при заданных на границе ∂V поверхностных усилиях и температуры (1D) либо нормальному потоку тела (1N). Естественное желание декомпозировать решение на последовательность термостатической, а затем упругой задач приводит к формированию как состояний $\xi^T \longleftrightarrow \gamma^T$, им отвечающих наборов характеристик $\{\varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^T\} \longleftrightarrow \{u_i^T, p_i^T\}$, а также объемных сил температурного характера X_i^T . При решении «упругой» части задачи формально возникает необходимость первоначального построения частного решения, отвечающего объемным силам, затем корректировке граничных условий за счет p_i^T и поправки от частного решения, и только потом можно строить состояние ξ^E . Обозначенную двухшаговую корректировку нет необходимости проводить. Этот вывод обусловлен тем, что поле $(-\xi^E)$ благодаря единственности решения первой основной задачи теории упругости и удовлетворяющих определяющим соотношениям объемным силам в сумме составляют тривиальное

нулевое состояние. Отсюда следует, что нет необходимости проводить обозначенную декомпозицию решения. Результат решения зависит от назначения последовательности задач из упругой и температурной.

Рассмотрим примеры решения задач 1D, 1N для кругового цилиндра. Полагаем все определяющие соотношения безразмерными: $\lambda = \mu = 1$, $\alpha = 0,0045$. Тело занимает область $V = \{(x, y, z) | x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1], z \in [-1, 1]\}$, ограниченную поверхностями

$$S_{1,3} = \{(x, y, z) | x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1], z = \pm 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) | x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, \varphi \in [-\pi, \pi], r = 1, z \in [-1, 1]\}.$$

В обеих задачах цилиндр сжимается осевыми усилиями безразмерной интенсивности p_0 :

$$\mathbf{p} = p_0 \begin{cases} \{0, 0, 1\}, & S_1, \\ \{(1 - z^2) \cos \varphi, (1 - z^2) \sin \varphi, 0\}, & S_2, \\ \{0, 0, -1\}, & S_3. \end{cases}$$

В задаче 1D задано распределение температуры по границе тела:

$$T = \begin{cases} 0, & S_1, \\ \sqrt{4 - (z - 1)^2}, & S_2, \\ 2, & S_3. \end{cases}$$

В задаче 1N на поверхности тела указывается сбалансированный требованием стационарности поток температуры

$$\frac{dT}{d\mathbf{n}} = \begin{cases} 0, & S_1, \\ -1 - z, & S_2, \\ 8(1 - r^2), & S_3. \end{cases}$$

Формирование конечного отрезка счётного базиса проводилось в соответствии с рекомендациями, описанными в [7, 10, 13]. Точность решения, оценённая среднеквадратичной невязкой характеристик, фигурирующих в построенном граничном состоянии γ с соответствующими граничными условиями, составила $1,245 \cdot 10^{-14}$ ед. в задаче 1D, и $4,26 \cdot 10^{-10}$ ед. в задаче 1N.

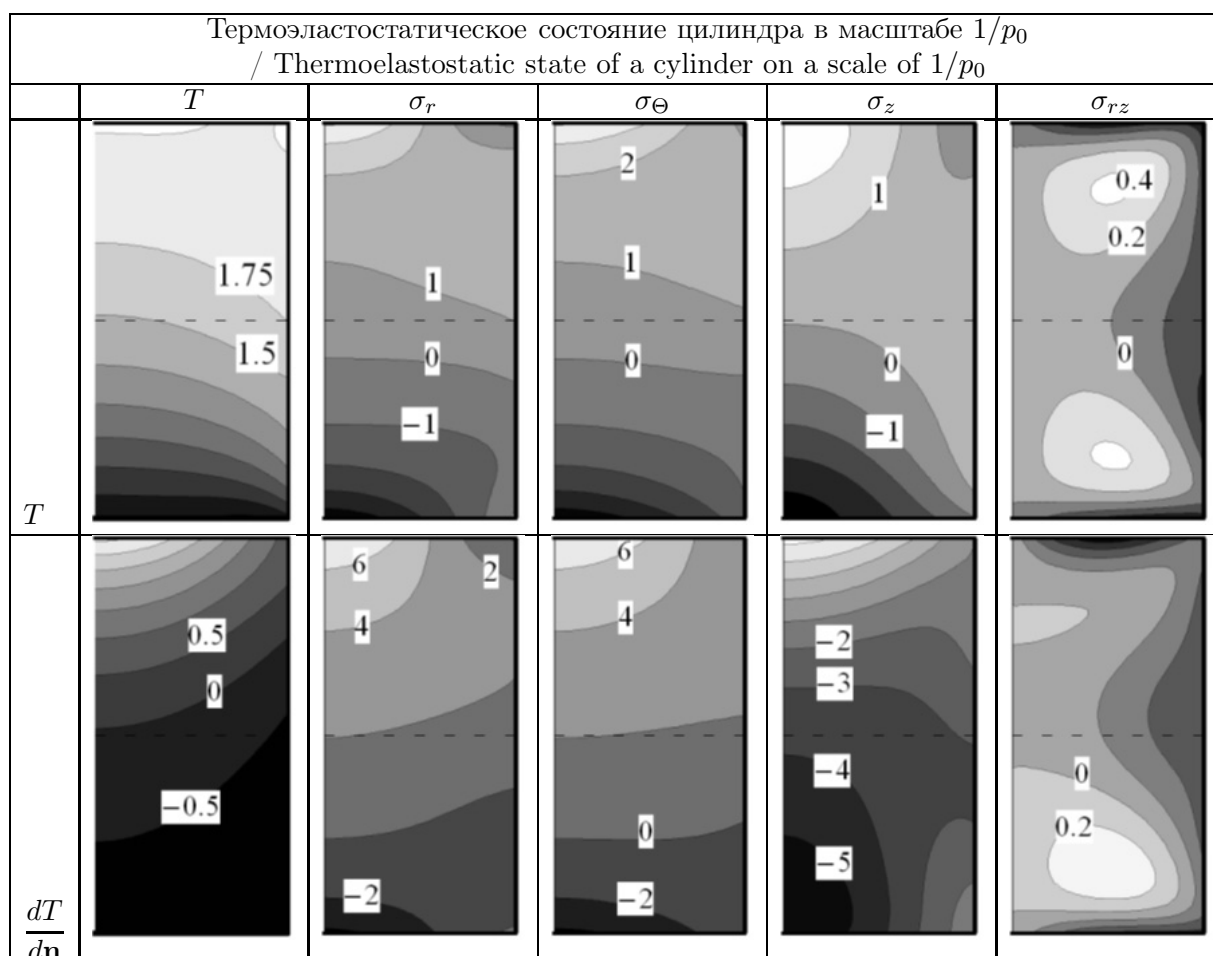
В таблице приведён график распределения температуры и напряжений в масштабе $1/p_0$ (радиальные σ_r , окружные σ_θ , осевые σ_z , сдвиговые σ_{rz} в осевом сечении $\varphi = 0$).

Анализ распределения характеристик термоупругого состояния позволяет сделать ряд качественных выводов.

3.1. Задача 1D. В силу единичности матрицы коэффициентов системы уравнений значения коэффициентов Фурье вычисляются «напрямую»:

$$c_k^T = \int_{\partial V} T \frac{dT^{(k)}}{d\mathbf{n}} ds, \quad c_k^E = \int_{\partial V} p_i u_i^{E(k)} ds.$$

Искажение поля температуры обусловлено неравномерностью её распределения по границе S_2 тела: наибольшее значение достигается в верхней половине боковой поверхности цилиндра. При этом наибольшие растягивающие значения главных напряжений наблюдаются в центре нижнего основания. Осевые волокна на боковой поверхности S_2 почти всюду — растягивающие. Исключение имеют участки, примыкающие к верхней кромке цилиндра, но, возможно, этот эффект обусловлен не внешним температурным воздействием, а наличием геометрической сингулярности на границе тела (включение в базис Ξ специальных решений, «схватывающих» особенности границы, требует специальных исследований; пока таковые отсутствуют в 3D-варианте). Сдвиговые напряжения σ_{rz} свидетельствуют о том, что область тела, примыкающая к его центру, практически формы не меняет. Выпучивание происходит вблизи середины боковой поверхности. Белые пятна на графике говорят о том, что в их окрестности происходит сужение углов между любой парой волокон, выделенных в плоскости сечения.



3.2. Задача 1N. Коэффициенты c_k^E вычисляются так же, как в 1D. Для температурных разложений справедливо:

$$c_k^T = \int_{\partial V} \frac{dT}{dn} T^{(k)} ds.$$

В соответствии с ГУ первоначально равномерный поток тепла у нижнего основания концентрируется в форму приосевой струи у верхнего основания. Радиальные и окружные напряжения у нижнего основания — сжимающие, у верхнего — растягивающие, причем концентрируются вблизи оси цилиндра. Осевые напряжения имеют существенные отличия от такого варианта: вблизи нижней кромки цилиндра ощущается ослабление эффекта сжатия. Характер сдвиговых напряжений вблизи боковой поверхности не меняется в сравнении с 1D, но есть особенность: сужение угла между парой волокон тела наблюдается в сравнении с 1D только в нижней части. В верхней части этого не наблюдается за исключением малого участка вблизи оси посередине верхней части.

3.3. Выводы.

1. Выполнен обзор диссертационных работ последнего времени, посвящённых изучению термомеханических процессов. «Очерчен» фон соответствующих научных исследований, проведённых в мире. Серьёзных результатов в плане построения численно-аналитических решений задач не наблюдается.
2. Изложены основные результаты в плане зарождения и развития метода граничных состояний, позволяющего строить не только численно-аналитические решения задач математической физики (в первую очередь — механики), но даже выписывать их полнопараметрические аналитические решения. Метод обоснованно приспособлен к задачам термоэластостатики.
3. Актуальный подход не оговаривает возможности использования декомпозиции процесса построения решения на последовательность сначала температурной задачи, затем упругой.

Это открывает возможность для решения задач с граничными условиями, в которых температурные и механические характеристики связаны общим соотношением.

4. Выполнено решение двух классов задач для термоупругого цилиндра в условиях стационарности анализируемого состояния среды. Даны комментарии.

Ближайшие перспективы исследований в термоэластостатике связаны: 1) с анализом влияния сингулярностей физического и геометрического характера 3D-тела на его внутреннее состояние; 2) с решением задач термоэластостатики, в которых температурные и механические факторы «завязаны» в граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванычев Д. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости для анизотропных сред// Дисс. к.ф.-м.н. — Тула: ТулГУ, 2010.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. — Киев: Наукова Думка, 1970.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970.
4. *Николаев О. Г., Скицка М. В.* Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation// Пробл. обчисл. мех. і міцн. констр. — 2024. — 1, № 38. — С. 248–268.
5. *Новикова О. С.* Построение полнопараметрических аналитических решений задач теории упругости на основе метода граничных состояний// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2019.
6. *Пеньков В. Б., Левина Л. В.* Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2022. — № 3. — С. 91–101.
7. *Пеньков В. В.* Метод граничных состояний в задачах линейной механики// Дисс. к.ф.-м.н. — Тула, 2002.
8. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979.
9. *Рязанцева Е. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2015.
10. *Саталкина Л. В.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2010.
11. *Стебенев И. Н.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости об установившихся колебаниях изотропных тел// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2003.
12. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
13. *Харитоненко А. А.* Моделирование состояний гармонических сред// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2006.
14. *Шульмин А. С.* Равновесие изотропного упругого пространства, содержащего полости и включения// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2014.
15. *Al Nahas R.* On the use of a spacetime formalism for thermomechanical applications// Дисс. PhD. — Troyes: Univ. de Technologie de Troyes, 2021.
16. *Boudrahem N., Berboucha A.* Theoretical justification of Ventcel's boundary conditions for a thin layer three-dimensional thermoelasticity problem// Miskolc Math. Notes. — 2021. — 22, № 2. — С. 581–598.
17. *Chamekh R.* Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses// Дисс. PhD. — COMUE Univ. Côte d'Azur, 2015–2019; Univ. de Tunis El Manar, 2019.
18. *Ebrahimi M. T., Balint D. S., Dini D.* An analytical solution for multiple inclusions subject to a general applied thermal field// J. Thermal Stresses. — 2023. — 46, № 11. — С. 1180–1198.
19. *Fang R., Zhang K., Song K., Kai Y.* A deep learning method for solving thermoelastic coupling problem// Z. Naturforschung A. — 2024. — 79, № 8. — С. 851–871.
20. *Ghavamian A. A.* Computational framework for a first-order system of conservation laws in thermoelasticity// Дисс. PhD. — Ecole centrale de Nantes, Swansea Univ., 2020.
21. *Hematiyan M. R., Mohammadi M., Tsai Ch.-Ch.* Method of fundamental solutions for anisotropic thermoelastic problems// Appl. Math. Model. — 2021. — 95. — С. 200–218.
22. *Kushnir R. M., Tokovyy Y. V., Boiko D. S.* Direct integration method in three-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous transversely isotropic solids: governing equations in terms of stresses// Bull. T. Shevchenko Natl. Univ. Kyiv. Ser. Phys. Math. — 2019. — № 1. — С. 102–105.
23. *Liu B.* A high-performance boundary element method and its applications in engineering// Дисс. PhD. — Swansea: Swansea Univ., 2022.
24. *Pimpale S. B., Sutar C. S., Chaudhari K. K.* An analytical approach of heat transfer modelling with thermal stresses in circular plate by means of Gaussian heat source and stress function// Phys. Scripta. — 2021. — 97, № 1. — 015205.

25. *Rabette F.* Prédiction de la microfissuration par champ de phase et méthode FFT pour les matériaux énergétiques comprimés// Дисс. PhD. — Paris: Univ. Paris Sciences et Lettres, 2021.
26. *Soni D.* Nonlinear dynamics of thermoelastic plates// Master's Thesis. — West Lafayette: School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2023.
27. *Tan Ch.-H., Xu B.-B., Zheng Y.-T., Zhang S.-Q., Jiang W.-W., Yang K., Gao X.-W.* Analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems based on element differential method// Int. J. Heat Mass Transfer. — 2024. — 222. — 125216.
28. *Wang K., Li P., Zhang K.* Hybrid Trefftz finite element method for heat conduction in cylindrical composite laminates// J. Thermal Stresses. — 2023. — 46, № 12. — С. 1296–1312.
29. *Wang Y., Li J., Wang L., Hu C., Shen H., Liu J.* Semi-analytical solutions of the three-dimensional size-dependent thermoelastic contact of the microstructured materials under a hot indenter// Math. Mech. Solids. — 2025. — DOI: doi:10.1177/10812865251315955.
30. *Wu C.* Virtual experiments and designs of composites with the inclusion-based boundary element method (iBEM)// Дисс. PhD. — New York: Columbia University, 2021.
31. *Xie K., Song H., Schiavone P., Gao C.* Analytical solution of the temperature-dependent thermoelastic problem induced by Joule heating and the presence of an elliptic cavity// J. Thermal Stresses. — 2024. — 47, № 1. — С. 115–142.
32. *Zhang H. L., Kim S., Choi G., Xie D. M., Cho H. H.* Analysis of thermoelastic problems in isotropic solids undergoing large temperature changes based on novel models of thermoelasticity// Int. J. Heat Mass Transfer. — 2021. — 177. — 121576.
33. *Zhao M.-J., Cen S., Shang Y., Li C.-F.* Development of new thermoelastic Petrov–Galerkin finite elements with enhanced precision and distortion tolerance// Acta Mech. — 2025. — 236, № 3. — С. 2233–2268. — DOI: 10.1007/s00707-025-04260-6.
34. *Zwicke F.* Design of inverse molds in pressure casting based on the finite element method// Дисс. PhD. — Aachen: RWTH Aachen Univ., 2020.

Л. В. Левина

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: sataalkina_lyubov@mail.ru

В. Б. Пеньков

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: vbpenkov@mail.ru

М. А. Лаврентьева

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: masy1997@gmail.com

UDC 518.5, 539.3

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252

EDN: MVAOUM

Current state and prospects of research in thermoelasticity

L. V. Levina, V. B. Pen'kov, and M. A. Lavrentieva

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Abstract. A review of recent works on thermoelasticity is provided. It is recommended to use the boundary state method (BSM) for constructing numerical-analytical solutions of problems by means of computing systems supporting “computer algebras”. The structures of Hilbert spaces of internal and boundary states of a thermoelastostatic medium (TE) are formed and a method for describing scalar products of both isomorphic spaces is determined. A possibility of saving computational resources for performing the procedure of orthogonalization of bases of separable spaces is discovered. When solving problems of thermoelasticity coupled/uncoupled by boundary conditions (BC), one does not need to decompose them into a traditional sequence of a temperature and elastic problems. A classification of TE problems is given. Calculations are performed and the results are commented for two classes of problems.

Keywords: thermoelasticity, thermoelastostatics, boundary state method, BSM, Dirichlet problem, Neumann problem, energy methods.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: L. V. Levina, V. B. Pen'kov, M. A. Lavrentieva, “Current state and prospects of research in thermoelasticity,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 240–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252>

REFERENCES

1. D. A. Ivanychev, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti dlya anizotropnykh sred” [The method of boundary states in problems of elasticity theory for anisotropic media], *PhD Thesis*, Tula State Univ., Tula, 2010 (in Russian).
2. A. D. Kovalenko, *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of Thermoelasticity], Naukova Dumka, Kiev, 1970 (in Russian).
3. A. I. Lurie, *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
4. O. G. Nikolaev and M. V. Skitska, “Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation,” *Probl. obchisl. mekh. i mitsn. konstr.* [Probl. Comp. Mech. Strength Constr.], 2024, **1**, No. 38, 248–268.
5. O. S. Novikova, “Postroenie polnparametricheskikh analiticheskikh resheniy zadach teorii uprugosti na osnove metoda granichnykh sostoyaniy” [Construction of full-parametric analytical solutions of elasticity theory problems based on the boundary state method], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2019 (in Russian).
6. V. B. Pen'kov and L. V. Levina, “Metod opornogo bazisa postroeniya chastnogo resheniya lineynogo neodnorodnogo operatornogo uravneniya matematicheskoy fiziki” [The method of the support basis for constructing a particular solution of a linear inhomogeneous operator equation of mathematical physics], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2022, No. 3, 91–101 (in Russian).
7. V. V. Pen'kov, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh lineynoy mekhaniki” [The boundary state method in problems of linear mechanics], *PhD Thesis*, Tula, 2002 (in Russian).

8. Yu. N. Rabotnov, *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
9. E. A. Ryazantseva, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera” [The method of boundary states in problems of elasticity theory with singularities of physical and geometric nature], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2015 (in Russian).
10. L. V. Satalkina, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti neodnorodnykh tel i termouprugosti” [The method of boundary states in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies and thermoelasticity], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2010 (in Russian).
11. I. N. Stebenev, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti ob ustanovivshikhsya kolebaniyakh izotropnykh tel” [The method of boundary states in problems of elasticity theory on steady-state oscillations of isotropic bodies], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2003 (in Russian).
12. C. Truesdell, *Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mekhaniki sploshnykh sred* [A First Course in Rational Continuum Mechanics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
13. A. A. Kharitonenko, “Modelirovanie sostoyaniy garmonicheskikh sred” [Modeling of States of Harmonic Media], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2006 (in Russian).
14. A. S. Shul'min, “Ravnovesie izotropnogo uprugogo prostranstva, sodержashchego polosti i vklyucheniya” [Equilibrium of an isotropic elastic space containing cavities and inclusions], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2014 (in Russian).
15. R. Al Nahas, “On the use of a spacetime formalism for thermomechanical applications,” *PhD Thesis*, Univ. de Technologie de Troyes, Troyes, 2021.
16. N. Boudrahem and A. Berboucha, “Theoretical justification of Ventcel’s boundary conditions for a thin layer three-dimensional thermoelasticity problem,” *Miskolc Math. Notes*, 2021, **22**, No. 2, 581–598.
17. R. Chamekh, “Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses,” *PhD Thesis*, COMUE Univ. Côte d’Azur, 2015–2019; Univ. de Tunis El Manar, 2019.
18. M. T. Ebrahimi, D. S. Balint, and D. Dini, “An analytical solution for multiple inclusions subject to a general applied thermal field,” *J. Thermal Stresses*, 2023, **46**, No. 11, 1180–1198.
19. R. Fang, K. Zhang, K. Song, and Y. Kai, “A deep learning method for solving thermoelastic coupling problem,” *Z. Naturforschung A*, 2024, **79**, No. 8, 851–871.
20. A. A. Ghavamian, “Computational framework for a first-order system of conservation laws in thermoelasticity,” *PhD Thesis*, Ecole centrale de Nantes, Swansea Univ., 2020.
21. M. R. Hematiyan, M. Mohammadi, and Ch.-Ch. Tsai, “Method of fundamental solutions for anisotropic thermoelastic problems,” *Appl. Math. Model.*, 2021, **95**, 200–218.
22. R. M. Kushnir, Y. V. Tokovyy, and D. S. Boiko, “Direct integration method in three-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous transversely isotropic solids: governing equations in terms of stresses,” *Bull. T. Shevchenko Natl. Univ. Kyiv. Ser. Phys. Math.*, 2019, No. 1, 102–105.
23. B. Liu, “A high-performance boundary element method and its applications in engineering,” *PhD Thesis*, Swansea Univ., Swansea, 2022.
24. S. B. Pimpare, C. S. Sutar, and K. K. Chaudhari, “An analytical approach of heat transfer modelling with thermal stresses in circular plate by means of Gaussian heat source and stress function,” *Phys. Scripta*, 2021, **97**, No. 1, 015205.
25. F. Rabette, “Prédiction de la microfissuration par champ de phase et méthode FFT pour les matériaux énergétiques comprimés,” *PhD Thesis*, Univ. Paris Sciences et Lettres, Paris, 2021.
26. D. Soni, “Nonlinear dynamics of thermoelastic plates,” *Master’s Thesis*, School of Mechanical Engineering, Purdue University, West Lafayette, 2023.
27. Ch.-H. Tan, B.-B. Xu, Y.-T. Zheng, S.-Q. Zhang, W.-W. Jiang, K. Yang, and X.-W. Gao, “Analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems based on element differential method,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2024, **222**, 125216.
28. K. Wang, P. Li, and K. Zhang, “Hybrid Trefftz finite element method for heat conduction in cylindrical composite laminates,” *J. Thermal Stresses*, 2023, **46**, No. 12, 1296–1312.
29. Y. Wang, J. Li, L. Wang, C. Hu, H. Shen, and J. Liu, “Semi-analytical solutions of the three-dimensional size-dependent thermoelastic contact of the microstructured materials under a hot indenter,” *Math. Mech. Solids*, 2025, DOI: doi:10.1177/10812865251315955.
30. C. Wu, “Virtual experiments and designs of composites with the inclusion-based boundary element method (iBEM),” *PhD Thesis*, Columbia University, New York, 2021.
31. K. Xie, H. Song, P. Schiavone, and C. Gao, “Analytical solution of the temperature-dependent thermoelastic problem induced by Joule heating and the presence of an elliptic cavity,” *J. Thermal Stresses*, 2024, **47**, No. 1, 115–142.

32. H. L. Zhang, S. Kim, G. Choi, D. M. Xie, and H. H. Cho, “Analysis of thermoelastic problems in isotropic solids undergoing large temperature changes based on novel models of thermoelasticity,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2021, **177**, 121576.
33. M.-J. Zhao, S. Cen, Y. Shang, and C.-F. Li, “Development of new thermoelastic Petrov–Galerkin finite elements with enhanced precision and distortion tolerance,” *Acta Mech.*, 2025, **236**, No. 3, 2233–2268. — DOI: 10.1007/s00707-025-04260-6.
34. F. Zwicke, “Design of inverse molds in pressure casting based on the finite element method,” *PhD Thesis*, RWTH Aachen Univ., Aachen, 2020.

L. V. Levina

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

E-mail: sataalkina_lyubov@mail.ru

V. B. Pen'kov

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

E-mail: vbpenkov@mail.ru

M. A. Lavrentieva

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

E-mail: masy1997@gmail.com

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266

EDN: MXJTH

СИНГУЛЯРНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ КИПРИЯНОВА—КАТРАХОВА

Л. Н. Ляхов^{1,2,3}, Ю. Н. Булатов², С. А. Рощупкин²¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия²Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия³Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Аннотация. Сингулярные псевдодифференциальные операторы, созданные на базе смешанного преобразования Фурье—Бесселя, принято называть сингулярными псевдодифференциальными операторами (СПДО) Киприянова. В работе приведен обзор трех видов таких операторов. СПДО Киприянова приспособлены для работы с сингулярными операторами Бесселя $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > -1$. Основное внимание в работе уделено двум модификациям, возникшим на базе «четных $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя» (т. е. при $\gamma \in (-1, 0)$) и «четных-нечетных $\mathbb{J}$ -преобразований Бесселя—Киприянова—Катрахова». Последние введены для исследования дифференциальных уравнений с сингулярными дифференциальными операторами $\frac{\partial}{\partial x_i} B_{\gamma_i}$ с отрицательным параметром оператора Бесселя $\gamma_i \in (-1, 0)$.

Ключевые слова: сингулярные псевдодифференциальные операторы, операторы Киприянова, операторы Киприянова—Катрахова, преобразование Фурье—Бесселя.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-21-00387).

Для цитирования: Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рощупкин. Сингулярные псевдодифференциальные операторы Киприянова—Катрахова // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 253–266. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266>

*Посвящается 100-летию со дня рождения
Ивана Александровича Киприянова
и 75-летию со дня рождения
Валерия Вячеславовича Катрахова*

1. ВВЕДЕНИЕ

j -функцией Бесселя (Клиффорда) будем называть функцию

$$j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{J_\nu(t)}{t^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{(-1)^k \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad \nu = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad \gamma > 0.$$

Эта функция является одним из линейно независимых решений сингулярного уравнения Бесселя (см. [6]):

$$B_\gamma u + u = 0, \quad B_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \gamma > 0.$$

Пусть $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_n > 0\}$. Смешанные прямое и обратное преобразования Фурье—Бесселя определяются выражениями

$$F_B[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} j_\nu(x_n \xi_n) f(x) x_n^\gamma dx,$$

$$F_B^{-1}[f](\xi) = C(\nu) \int_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} j_\nu(x_n \xi_n) f(x) x_n^\gamma dx,$$

где

$$\nu = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad C(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} = \frac{1}{(2\pi)^{n-1} 2^{\gamma-1} \Gamma^2\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)} = C_\gamma.$$

Изучение сингулярных псевдодифференциальных операторов на основе смешанного преобразования Фурье—Бесселя было инициировано И. А. Киприяновым в 1974 году. Формально этот класс псевдодифференциальных операторов построен в [5] по символу $a(x, \xi)$ следующим представлением:

$$A(x, D) = F_B^{-1} \left[a(x, \xi) F_B[u](\xi) \right] (x) = C_\gamma \int_{\mathbb{R}_n^+} \int_{\mathbb{R}_n^+} e^{-i\langle x' - y', \xi' \rangle} T_{x_n}^{y_n} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_n \xi_n) a(x, \xi) u(y) y_n^\gamma dy \xi_n^\gamma d\xi.$$

Это выражение будем называть *сингулярным j -псевдодифференциальным оператором Киприянова*. Также будем использовать сокращение — j -ПДО. Здесь $T_{x_n}^{y_n}$ — обобщенный сдвиг Пуассона¹

$$T_{x_n}^{y_n} f(x', x_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(x', \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos \alpha}\right) \sin^{2\nu} \alpha d\alpha. \quad (1.1)$$

В [6] для j -функции Бесселя доказана следующая теорема сложения:

$$j_\nu(\xi) j_\nu(t) = T_\xi^t j_\nu(\xi),$$

где оператор T_ξ^t определен формулой (1.1).

Поскольку в образах Фурье—Бесселя имеет место

$$B_{\gamma, x_n} u(x', x_n) = F_B^{-1} \left[-\xi^2 F_B[u](x', \xi_n) \right] (x),$$

то введенный Киприяновым класс j -ПДО приспособлен для исследования дифференциальных уравнений, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя $B_{\gamma, x_n} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x_n} \frac{d}{dx}$, $\gamma > 0$.

Из представления j -функции Бесселя видим, что эта функция четная, поэтому прямое и обратное j -преобразования Бесселя — четные функции. Далее преобразования F_B и F_B^{-1} будем называть *четными преобразованиями Фурье—Бесселя*.

Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства основных функций Л. Шварца, состоящее из четных по переменной x_n функций.

Теория j -ПДО и применение этой теории к построению регуляризаторов граничных задач для B -эллиптических уравнений было развито Л. Н. Ляховым в его кандидатской диссертации [7].

¹ Впервые название «обобщенный сдвиг» для представленного ниже интегрального оператора появилось в работах Ж. Дельсарта и А. Ванштейна, поэтому часто называется сдвигом Ванштейна—Дельсарта. В работе [6] «обобщенный сдвиг» применен для определения решения задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу, которое названо формулой Пуассона.

Однако было выяснено, что используемое «четное» преобразование Фурье—Бесселя не дает возможности построить алгебру таких операторов, как это сделано для классических псевдодифференциальных операторов, построенных на основе преобразования Фурье. Например, применение оператора Бесселя к произведению функций определено формулой

$$B_{x_n}(uv) = B_{x_n}u v + u B_{x_n}v + 2u'_{x_n}v'_{x_n},$$

в которой производные первого порядка по x_n оказываются нечетными функциями и не могут быть определены в рамках четного j -преобразования Бесселя. Поэтому регуляризаторы граничных задач построены для сингулярных дифференциальных уравнений главного типа, т. е. для линейных дифференциальных уравнений, в которых каждое слагаемое представлено дифференциальным оператором фиксированного порядка m . Было установлено, что невозможно в рамках четного j -преобразования Бесселя построить алгебру таких сингулярных j -ПДО истинного порядка $-\infty$.

Эта «неадекватность» введенных четных j -ПДО исправлена в работе И. А. Киприянова и В. В. Катрахова [4] введением «нечетного» j -преобразования Бесселя, называемого сейчас интегральным преобразованием Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова. Ядром служила «четная+нечетная» функция

$$k_{\nu}^{\pm}(t) = j_{\nu}(t) \pm i \frac{t}{2(\nu+1)} j_{\nu+1}(t), \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}, \quad \gamma > 0.$$

Введенное преобразование позволило исследовать решения уравнений, содержащих сингулярные дифференциальные операторы нечетного порядка вида

$$(D_B)_{x_n}^{2m+1} = \frac{\partial}{\partial x_n} B_{\gamma, x_n}^m.$$

Алгебра многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов, где преобразование Фурье—Бесселя—Киприянова—Катрахова применялось только по одной переменной, построена В. В. Катраховым и Л. Н. Ляховым уже в 2011 году в работе [2].

Для многих весовых переменных теория j -ПДО Киприянова—Катрахова построена в совместных работах Л. Н. Ляхова и С. А. Рощупкина [10, 14, 18].

2. ОБ ОПЕРАТОРАХ БЕССЕЛЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Исследовать уравнения, содержащие оператор Бесселя с отрицательным параметром, было предложено И. А. Киприяновым в 1980-х гг. на одном из научных семинаров в ВГУ. Такого рода исследования начаты были В. В. Катраховым, но публикаций по этой теме не было. В. В. Катрахов в начале 2000-х годов отметил, что требуется новый математический аппарат и продолжение исследований на эту тему оставлено «на потом». Этот математический аппарат возник в работах [8, 9, 11–13] для Δ_B -операторов Киприянова (название из работы [11])

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad -\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n), \quad -\gamma_i \in (-1, 0). \quad (2.1)$$

Представление оператора $\Delta_{B_{-\gamma}}$ в виде оператора Бельтрами на сфере позволяет считать сингулярный оператор Бесселя в качестве среднего между операторами Лапласа в $\mathbb{R}_n$ и оператором Лапласа в $\mathbb{R}_{n+1}$ (это замечено в [20], доказано в [12]). Отсюда повышенный интерес к исследованию сингулярных дифференциальных уравнений, инициированных И. А. Киприяновым еще в 1980 году.

Но принципиальной особенностью новых исследований оказалась теорема сложения функций Бесселя, удовлетворяющих сингулярному дифференциальному уравнению Бесселя с отрицательным параметром. Эта теорема сложения представлена через посредство интегрального оператора, который не является «оператором обобщенного сдвига» Б. М. Левитана, но при этом коммутирует с $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператором Киприянова (2.1).

Сингулярное дифференциальное уравнение Бесселя

$$B_{-\gamma} u(x) + u(x) = 0, \quad -1 < -\gamma < 0$$

имеет следующий набор линейно независимых решений:

$$u_1 = \mathbb{J}_{-\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1-\mu)}{m! \Gamma(m+1-\mu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} = \Gamma(1-\mu) 2^{-\mu} t^{\mu} J_{-\mu}(t) = t^{2\mu} j_{-\mu}, \quad (2.2)$$

$$u_2 = \mathbb{J}_{\mu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+\mu)}{m! \Gamma(m+1+\mu)} \frac{t^{2(m+\mu)}}{2^{2m}} = \Gamma(1+\mu) 2^{\mu} t^{\mu} J_{\mu}(t) = t^{2\mu} j_{\mu}. \quad (2.3)$$

где $J_{\mp\mu}$ — функции Бесселя первого рода и $j_{\mp\mu}$ — j -функции Бесселя. Можно заметить, что $\mathbb{J}$ -функции Бесселя удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2\mu} \mathbb{J}_{\mu}(x) = 1, \quad \mathbb{J}_{-\mu}(0) = 1.$$

Из (2.3) видна связь функций j_{μ} и $\mathbb{J}_{\mu}$ положительного индекса, откуда аналогично теореме сложения Б. М. Левитана (для j -функций Бесселя) вытекает теорема сложения для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_{\mu}(x) \mathbb{J}_{\mu}(y) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_{\mu}(x).$$

Оператор *обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига* имеет следующий вид:

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \int_0^{\pi} f\left(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y\right) \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{2}\right)} \frac{(xy)^{\gamma+1}}{(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y)^{\gamma+1}} (\sin \alpha)^{\gamma+1} d\alpha, \quad (2.4)$$

где $(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}$. Принципиально важно отметить, что $\mathbb{T}$ -псевдосдвиг не принадлежит классу обобщенных сдвигов Левитана (т. к. $\mathbb{T}^0 f(x) \neq f(x)$, $\mathbb{T}_x^y 1 \neq 1$).

Решение (2.2) более востребовано в спектральной теории сингулярных дифференциальных уравнений, что продемонстрировано в работах [15, 16]. Для построения теории соответствующих сингулярных псевдодифференциальных операторов подходит только $\mathbb{J}_{\mu}$ -функция Бесселя (2.3), которая имеет положительный порядок $\mu = \frac{\gamma+1}{2}$, $\gamma > 0$.

В [8] доказана обратимость на четных функциях $(x^2)^{-\gamma/2} f(x) \in L_2(\mathbb{R}_1^+)$ следующих интегральных преобразований:

$$\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_{\mu}(\xi y) f(y) y^{-\gamma} dy, \quad (2.5)$$

$$(\mathbb{F}_{B_{-\gamma}})^{-1}[f](x) = f(x) = C(\mu) \int_{\mathbb{R}_1^+} \mathbb{J}_{\mu}(\xi x) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi, \quad C(\mu) = \frac{1}{2^{2\mu} \Gamma^2(\mu+1)}, \quad \mu = \frac{\gamma+1}{2}, \quad (2.6)$$

которые в этой работе названы соответственно *прямым и обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя*.

Многомерное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя имеет своим ядром произведение $\mathbb{J}_{\mu}$ -функций Бесселя:

$$\mathbb{J}_{\mu}(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+,$$

где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — мультииндекс, каждая координата которого связана с параметром $-\gamma_i$ сингулярного дифференциального оператора Бесселя $B_{-\gamma_i}$ равенством $\mu_i = \frac{\gamma_i+1}{2}$, $\gamma_i \in (0, 1)$, $\mu_i \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $i = \overline{1, n}$.

Функцию, определенную на полуоси $x_n > 0$, будем называть *четной по Киприянову*, если возможно ее четное продолжение на отрицательную полуось с сохранением класса своей принадлежности.

Введем весовую билинейную форму следующего вида:

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_i x_i^{-\gamma_i}, \quad -\gamma_i \in (-1, 0). \quad (2.7)$$

Класс основных функций обозначим символом $S_{ev,-\gamma} = S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$. В этот класс входят два множества функций. К первому из них относятся функции из $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ такие, что $x^{-\gamma} \varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Ко второму множеству отнесем производные первого порядка от этих функций. Ясно, что

$$\forall \varphi \in S_{ev} \implies \varphi(x) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \in S_{ev,-\gamma}(\mathbb{R}_n^+) \quad (a_i \in \mathbb{R}_1).$$

Топология в $S_{ev,-\gamma}$ определяется системой норм

$$|\langle u \rangle|_N = \sup \left| (1+x)^k D_{B,-\gamma}^\alpha u(x) \right|,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ и всем k и α таким, что $k + \alpha \leq \mathbb{N}$.

Пространство, двойственное к $S_{ev,-\gamma}$ в смысле билинейной формы (2.7), будем называть *распределениями Киприянова* и обозначать $S'_{ev,-\gamma}$. Обобщенные D_B^α -производные распределений Киприянова понимаются в следующем смысле:

$$(D_B^\alpha u, \varphi(x))_{-\gamma} = (-1)^{|\alpha|} (u, D_B^\alpha \varphi(x))_{-\gamma}.$$

Ясно, что регулярными распределениями Киприянова могут быть как четные, так и нечетные (в смысле Киприянова) функции.

2.1. Теорема сложения Б.М. Левитана для ядер многомерного $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Из теоремы сложения для $\mathbb{J}$ -функций Бесселя (одного переменного) вытекает теорема сложения для ядер многомерного $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя:

$$\mathbb{J}_\mu(x) \mathbb{J}_\mu(y) = \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x).$$

Здесь оператор *обобщенного $\mathbb{T}$ -псевдосдвига* имеет следующий вид:

$$\mathbb{T}_x^y f(x, t) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y, t) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i, \quad (2.8)$$

где

$$(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y) = (\dots, x_i \overset{\alpha}{\rightarrow} y_i, \dots) = (\dots, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}, \dots).$$

Отметим, что далее будет указан только верхний индекс в левой части равенства (2.8), если переменная нижнего индекса полностью совпадает с аргументом функции.

Весовая билинейная форма (2.7) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma} = \{u : \|u\|_{L_2^{-\gamma}} = \sqrt{(u, u)_{-\gamma}} < \infty\}.$$

Приведем необходимые нам свойства $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (доказательства приведены в [8]).

Свойство 1. Эрмитовость $\mathbb{T}$ -псевдосдвига в $L_2^{-\gamma}$: если f и g — функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то

$$(\mathbb{T}^y f, g)_{-\gamma} = (f, \mathbb{T}^y g)_{-\gamma}.$$

Свойство 2. Коммутируемость с оператором $\Delta_{B,-\gamma}$: если $u(x)$ — суммируемая с весом $x^{-\gamma}$, дважды непрерывно дифференцируемая и четная по Киприянову функция, то

$$\mathbb{T}^y \Delta_{B,-\gamma, x} u(x) = \Delta_{B,-\gamma, x} \mathbb{T}^y u(x) = \Delta_{B,-\gamma, y} \mathbb{T}^y u(x).$$

Свойство 3. Переместительность и ассоциативность $\mathbb{T}$ -псевдосдвига: если функция f представлена равномерно сходящимся рядом Фурье по $\mathbb{J}$ -функциям Бесселя, то

$$\mathbb{T}_x^y \mathbb{T}_x^z f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x), \quad \mathbb{T}_y^z \mathbb{T}_x^y f(x) = \mathbb{T}_x^z \mathbb{T}_x^y f(x).$$

2.2. Рекуррентное соотношение для производных $\mathbb{J}$ -функций Бесселя.

Лемма 2.1. Пусть $2\mu_i = \gamma_i + 1$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Имеют место следующие формулы:

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i),$$

$$\nabla \mathbb{J}_\mu(x) = 2(\mu_1 x_1 \mathbb{J}_{\mu_1-1}(x_1), \dots, \mu_n x_n \mathbb{J}_{\mu_n-1}(x_n)).$$

Доказательство приведено в [1].

Следствие 2.1.

$$\frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i^2 x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i \xi_i).$$

Доказательство с очевидностью вытекает из леммы 2.1.

3. ЧЕТНОЕ, НЕЧЕТНОЕ И ПОЛНОЕ $\mathbb{J}$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕССЕЛЯ

Формула Ханкеля представления L_2 -функций, примененная к функции

$$u(x)x^{-\gamma} \in L_2(\mathbb{R}_n), \quad \text{где} \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n |x_i|^{-\gamma_i},$$

приводит к равенству

$$u(x) = C_\mu \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(x\xi) \xi^{-\gamma} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(y\xi) f(y) y^{-\gamma} dy d\xi,$$

которое будем называть *интегралом Фурье—Бесселя—Киприянова*¹. Из него вытекают определения (2.5) и (2.6) в одномерном случае. В общем случае: *четным прямым и четным обратным $\mathbb{J}$ -преобразованиями Бесселя* будем называть выражения

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}[f](\xi) &= \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(\xi y) f(y) y^{-\gamma} dy, \\ \left(\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}\right)^{-1}[f](\xi) &= C(\mu) \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{J}_\mu(\xi x) \widehat{f}(\xi) \xi^{-\gamma} d\xi, \quad C(\mu) = \frac{1}{2^{2\mu} \Gamma^2(\mu+1)}, \quad \mu = \frac{\gamma+1}{2}. \end{aligned}$$

Следуя [4] и следствию 2.1, введем *нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя*, основанное на функции

$$\frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} = 2\mu_i \xi_i x_i \mathbb{J}_{\mu_i-1}(x_i \xi_i),$$

которое имеет вид

$$\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(od)}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i \xi_i)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} dx_i,$$

где $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Несобственный интеграл здесь, как обычно, понимается в смысле главного значения по Коши. Как видим, ядро этого преобразования нечетно, поэтому для четных функций $\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(od)}[f](\xi) = 0$.

Лемма 3.1. Пусть $f \in S_{ev, -\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$. Тогда

$$\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(od)} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (\xi) = \xi_i \mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}[f](\xi) = \xi_i \widehat{f}(\xi),$$

где $\widehat{f}(\xi)$ — четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

¹Для j -функций Бесселя аналогичное представление функций L_2^γ , $\gamma > 0$, называется *интегралом Фурье—Бесселя*, см. [3].

Из леммы 3.1 видно, что преобразование $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(od)}$ производной четной функции свелось к преобразованию $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(ev)}$. Поэтому удобно ввести одно преобразование со смешанным ядром

$$\Lambda_{\mu}(x\xi) = \mathbb{J}_{\mu}(x\xi) - \psi \mathbb{J}_{\mu-1}(x\xi), \quad \psi = 2 \prod_{i=1}^n \mu_i x_i \xi_i.$$

При этом, полагая $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_{ev}(x) + f_{od}(x)$, получим

$$\mathbb{K}_{\mu}[f](\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \Lambda(x\xi) x^{-\gamma} dx = \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(ev)}[f_{ev}](\xi) + \mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(od)}[f_{od}](\xi),$$

где первое слагаемое представляет собой четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя, а второе — нечетное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

Приведем основные формулы $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Доказательства равенств 1) и 2) см. в [1], а равенства 3) и 4) доказаны в статье [8].

Теорема 3.1. Пусть $\varphi, \psi \in S_{ev}$. Тогда

- 1) $\int_{\mathbb{R}_n^+} \widehat{\varphi}(x) \psi(x) x^{-\gamma} dx = \int_{\mathbb{R}_n^+} \varphi(x) \widehat{\psi}(x) x^{-\gamma} dx$ (равенство Парсеваля);
- 2) $\int_{\mathbb{R}_n^+} \widehat{\varphi}(x) \overline{\widehat{\psi}(x)} x^{-\gamma} dx = C_{\mu} \int_{\mathbb{R}_n^+} \varphi(x) \overline{\widehat{\psi}(x)} x^{-\gamma} dx$ (равенство Планшереля);
- 3) $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(ev)}[(\varphi * \psi)_{-\gamma}](\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$;
- 4) $\mathbb{F}_{B_{-\gamma}}^{(ev)}[\varphi \psi](\xi) = C_{\mu} (\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})_{-\gamma}(\xi)$, где $(\varphi * \psi)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathbb{T}^y \varphi(x) \psi(y) y^{-\gamma} dy$.

Замечание 3.1. Легко видеть, что утверждения теоремы 3.1 справедливы для полного $\mathbb{K}$ -преобразования Бесселя.

Пусть $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Введем сингулярный дифференциальный оператор

$$\left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)_x = \left\{ \begin{array}{ll} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k \\ \frac{\partial}{\partial x_i} B_{-\gamma_i}^{\alpha_i/2}, & \text{если } \alpha_i = 2k + 1 \end{array} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что этот оператор ограниченно действует на четную по Киприянову по аргументу x_i функцию $u \in C^2$, поскольку

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} B_{\pm \gamma_i} u(x_i, x^i) = (1 \pm \gamma_i) u(x_i, x^i)|_{x_i=0} < \infty.$$

Теорема 3.2 (о символе $D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i}$ -оператора). Пусть $\mu_i = \frac{\gamma_i + 1}{2}$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$. Для $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ имеет место формула

$$\mathbb{K}_{\mu}[D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} f](\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} (-\xi_i^2)^k \widehat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k - \text{четное} \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i \widehat{f}(\xi), & \text{если } \alpha = 2k + 1 - \text{нечетное} \end{array} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство достаточно просто вытекает из определения $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя и определения $D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i}$ оператора (см. [1, 19]).

3.1. Представление линейного сингулярного дифференциального оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Рассмотрим линейный сингулярный дифференциальный оператор

$$L(D_{B_{-\gamma}}^{\alpha}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D_{B_{-\gamma}}^{\alpha},$$

где $D_{B_{-\gamma}}^{\alpha} = D_{B_{-\gamma_1}}^{\alpha_1} \dots D_{B_{-\gamma_n}}^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Пусть функция u — четная по Киприянову, $u \in C_{ev}^m$. Тогда $u(x) = \left(\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)} \right)^{-1} [\hat{u}](x)$. Следовательно,

$$L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u(x) = \mathbb{K}_{\mu, \xi \rightarrow x}^{-1} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \right] (x),$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha = 2k - \text{четное} \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i, & \text{если } \alpha = 2k + 1 - \text{нечетное} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Действие оператора $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя имеет следующий вид:

$$L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u(x) = \mathbb{K}_\mu^{-1} \left[a(x, \xi) \mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)} [u] \right], \quad (3.1)$$

где функция

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi_i^{\alpha_i}, \quad \xi_i^{\alpha_i} = \begin{cases} (-\xi_i^2)^k, & \text{если } \alpha = 2k - \text{четное}, \\ (-\xi_i^2)^k \xi_i, & \text{если } \alpha = 2k + 1 - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (3.2)$$

— символ сингулярного дифференциального оператора $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$.

3.2. Представление $L(D_{B-\gamma}^\alpha)$ -сопряженного оператора в рамках $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя. Рассмотрим весовую линейную форму (2.7) в виде

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(x) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_i |x_i|^{-\gamma_i}, \quad -\gamma_i \in (-1, 0).$$

Упрощая, предположим, что $u, v \in S_{ev}(\mathbb{R}_n)$. Тогда

$$\left(L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u, v \right)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u(x) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx.$$

Исходя из $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя оператора $L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right)$, получим

$$\begin{aligned} \left(L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u, v \right)_{-\gamma} &= C_\mu \int_{\mathbb{R}_n} x^{-\gamma} dx \int_{\mathbb{R}_n} \xi^{-\gamma} d\xi \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} u(y) y^{-\gamma} dy = \\ &= C_\mu \int_{\mathbb{R}_n} u(y) y^{-\gamma} dy \int_{\mathbb{R}_n} \xi^{-\gamma} d\xi \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) \overline{v(x)} x^{-\gamma} dx. \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$\tilde{L} \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) v(y) = C_\mu \int_{\mathbb{R}_n} x^{-\gamma} dx \int_{\mathbb{R}_n} \overline{\mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) v(x)} \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Тогда

$$\left(L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u, v \right)_{-\gamma} = \left(u, \tilde{L} \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) v \right)_{-\gamma}.$$

Таким образом, оператор $\tilde{L} \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right)$ с комплексно сопряженным символом $\overline{a(x, \xi)}$ оказывается формально сопряженным оператору $L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right)$.

Подобно (3.1) имеем следующую формальную запись действия сопряженного оператора

$$L \left(D_{B-\gamma}^\alpha \right) u(x) = \mathbb{K}_\mu^{-1} \left[\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)} \left[\overline{a(x; \xi)} u \right] \right], \quad (3.3)$$

где $\overline{a(x; \xi)}$ — символ оператора $\tilde{L}(B_{-\gamma})$, комплексно сопряженный символу (3.2).

3.3. Пространства Соболева—Киприянова, ассоциированные с оператором $D_{B-\gamma}^\alpha$. В этой работе вводится следующее пространство Соболева—Киприянова: для любого вещественного s через $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим пополнение множества $S_{ev,-\gamma}$ по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathbb{K}_\mu[u](\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad \xi^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{-\gamma_i}, \quad (3.4)$$

где $\mathbb{K}_\mu[u]$ — полное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

В рамках наших исследований нечетным по переменной ξ_i символом линейного сингулярного дифференциального оператора является производная четной по ξ_i функции $a(x, \xi)$. В результате первая производная интегрированием по частям окажется примененной к функции $x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x)}{\partial x_i}$.

При этом $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя с ядром Λ_μ превращается в $\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}$ -преобразование четной функции с ядром $\mathbb{J}_{\mu_i}$, что приводит к равенству

$$x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x)}{\partial x_i} \right) = B_{-\gamma_i} \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x) = -\xi_i^2 \mathbb{J}_{\mu_i}(\xi x).$$

После таких действий операторы с «нечетным» символом окажутся операторами с «четным» символом, и мы имеем дело с $\mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}$ преобразованием, для которого соответствующие результаты приведены в работах [17, 19].

Пусть $u \in S'_{ev,-\gamma}$. В рамках весовой билинейной формы (2.7) для любой функции $\varphi \in S_{ev}$ действие $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя принимает следующий вид:

$$(\mathbb{K}_\mu u, \varphi)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \mathbb{K}_\mu[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}[\varphi](\xi) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Если же регулярный функционал u представлен производной четной функции по координате x_i своего аргумента, то

$$(\mathbb{K}_\mu u, \varphi'_{x_i})_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n} u(\xi) \xi_i \mathbb{F}_{B-\gamma}^{(ev)}[\varphi](x) \xi^{-\gamma} d\xi.$$

Сказанное означает, что введенное нами пространство $H_{-\gamma}^s$ окажется пространством функций с конечной нормой

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (3.5)$$

где $\hat{u}$ — четное $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя.

Утверждение 3.1. Пусть $u = u(x) \in S_{ev,-\gamma}$, $-1 < -\gamma_i < 0$. При целом неотрицательном $s = m$ норма (3.4) эквивалентна норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^m}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}_n^+} \left| D_{B-\gamma}^\alpha u(x) \right|^2 x^{-\gamma} dx. \quad (3.6)$$

Доказательство. Из равенства Планшереля для $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя (см. теорему 3.1 и замечание 3.1) вытекает равенство

$$\left\| \sum_{|\alpha| \leq s} (D_B)^\alpha u \right\|_{L_2^{-\gamma}} = \|\mathbb{K}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}}, \quad (3.7)$$

где $\psi = \sum_{|\alpha| \leq s} (D_B)^\alpha u$. Но

$$\|\mathbb{K}_\mu[\psi]\|_{L_2^{-\gamma}} = \left\| \sum_{i=1}^n |\xi_i|^\alpha \hat{u} \right\|_{L_2^{-\gamma}}.$$

Теперь утверждение 3.1 для $m \in \mathbb{N}$ вытекает из практически очевидного неравенства

$$C^{-1}(1 + |\xi|^2)^s \leq \sum_{i=1}^n |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)^s$$

При $s = 0$ норма (3.6) совпадает с $L_2^{-\gamma}$ -нормой функции $\mathbb{K}_\mu[u]$, что вытекает из равенства (3.6). $\square$

4. СИНГУЛЯРНЫЕ $\mathbb{J}$ -ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Формулы (3.1) и (3.3) приводят к общим конструкциям операторов, включающих линейные сингулярные операторы типа $L \left(D_{B_{-\gamma}}^\alpha \right)$.

Поскольку норма, записанная в образах $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя, приведет к умножению на символ, представляющий многочлен порядка m , то для многочлена с ограниченными коэффициентами справедливо неравенство

$$\left| \sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(x)| (1 + |\xi|)^\alpha.$$

Определение 4.1. Через $\Xi_{-\gamma}^m = \Xi_{-\gamma}^m(\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных по Киприянову по каждой координате аргумента функций $a(x, \xi)$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)_x \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}},$$

константа $C_{\alpha, \beta}$ не зависит от x и ξ . Класс функций $\Xi_{-\gamma}^m$ будем называть *пространством символов* порядка m .

Из определения 4.1 следует

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{K}_{\mu, x \rightarrow \eta} \left[\left(\left(1 + D_{B_{-\gamma_i}}^{\alpha_i} \right)^p \right)_x \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi a(x, \xi) \right] \right| &= \\ &= \left| (1 + |\eta|^2)^p \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}, \end{aligned}$$

где ${}^1\hat{a}$ — обозначение $\mathbb{J}$ -преобразования Бесселя функции $a(x, \xi)$ по первой переменной. Следовательно, для любого положительного числа p найдется такая константа C , что

$$|{}^1\hat{a}(\eta, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\eta|^2)^{-p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}},$$

$$\left| \left(D_{B_{-\gamma_i}}^{\beta_i} \right)_\xi {}^1\hat{a}(\eta, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\eta|^2)^{-p} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}.$$

Определение 4.2. Операторы, действующие на функцию $u \in S_{ev, -\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$, по формулам

$$A u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{\Lambda}_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{A} u(x) = \int_{\mathbb{R}_n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathbb{T}_x^y \mathbf{\Lambda}(x\xi) a(y, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi, \quad (4.2)$$

будем называть *сингулярными $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальными операторами Киприянова ($\mathbb{J}$ -ПДО)*.

Приведем формулировки основных теорем сингулярных $\mathbb{J}$ -ПДО с символом из Ξ_{ev}^m , доказательства которых даны в работах [1, 17].

Теорема 4.1. Сингулярные $\mathbb{J}$ -ПДО (4.1), (4.2) с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$ является операторами порядка m , то есть

$$\|A u\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Теорема 4.2. *Сингулярный $\mathbb{J}$ -ПДО $(A - \mathcal{A})$ с символом $a(x, \xi) \in \Xi_{ev}^m$ является оператором порядка $m - 1$, т. е.*

$$\|(A - \mathcal{A})u\|_{H_{-\gamma}^{s-m+1}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

Лемма 4.1. *Пусть $A \in \Xi_{ev}^m$. Для любой функции $u \in H_{-\gamma}^s$ имеет место неравенство*

$$|(Au, u)_{-\gamma}| = |(u, \mathcal{A}u)_{-\gamma}| \leq \text{const} \|u\|_{\frac{m}{2}, -\gamma}$$

с константой, не зависящей от функции u .

Пусть $a_1(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_1}$, $a_2(x, \xi) \in \Xi_{ev}^{m_2}$, а A_1 и A_2 — соответствующие этим символам сингулярные $\mathbb{J}$ -ПДО. Утверждение, аналогичное теореме 4.1, справедливо для произведения $A_1 A_2$ и сингулярного псевдодифференциального оператора с символом, равным произведению символов операторов A_1 и A_2 . Этот оператор будем обозначать $A_1 \circ A_2$.

Теорема 4.3. *Оператор $[A_1 A_2 - A_1 \circ A_2]$ имеет порядок $m_1 + m_2 - 1$ в пространстве $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$, т. е.*

$$\|[A_1 A_2 - A_1 \circ A_2]u\|_{H_{-\gamma}^{s-m_1-m_2+1}} \leq C \|u\|_{H_{-\gamma}^s}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов Ю. Н. Преобразование Ганкеля—Катрахова и сингулярные К-псевдодифференциальные операторы // Мат. заметки СВФУ. — 2024. — 31, № 1. — С. 21–34.
2. Катрахов В. В., Ляхов Л. Н. Полное преобразование Фурье—Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифф. уравн. — 2011. — 47, № 5. — С. 681–695.
3. Киприянов И. А. Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. МИАН. — 1967. — 89. — С. 130–213.
4. Киприянов И. А., Катрахов В. В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сб. — 1977. — 104, № 1. — С. 49–68.
5. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1974. — 218, № 2. — С. 278–280.
6. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
7. Ляхов Л. Н. Граничные задачи для В-эллиптических уравнений // Дисс. к.ф.-м.н. — Воронеж, 1981.
8. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рошупкин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифф. уравн. — 2022. — 58, № 12. — С. 1654–1665.
9. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рошупкин С. А., Санина Е. Л. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова // Дифф. уравн. — 2022. — 59, № 4. — С. 483–493.
10. Ляхов Л. Н., Рошупкин С. А. Полное преобразование Фурье—Бесселя некоторых основных функциональных классов // Науч. вед. Белгород. гос. ун-в. Сер. Мат. Физ. — 2013. — 154, № 11. — С. 681–695.
11. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифф. уравн. — 2020. — 56, № 12. — С. 1610–1620.
12. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Мат. заметки. — 2023. — 113, № 4. — С. 517–528.
13. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л., Рошупкин С. А., Булатов Ю. Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2022. — № 7. — С. 52–65.
14. Рошупкин С. А. Классы основных функций для полного преобразования Фурье—Бесселя // Науч. вед. Белгород. гос. ун-в. Сер. Мат. Физ. — 2015. — 214, № 17. — С. 124–126.
15. Сабитов К. Б. О равномерной сходимости разложения функции в ряд Фурье—Бесселя // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2022. — № 11. — С. 89–96.
16. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В. Вторая начально-граничная задача для В-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2019. — № 10. — С. 75–86.
17. Lyakhov L. N., Bulatov Yu. N. Composition and commutator of singular $\mathbb{J}$ -pseudodifferential Kipriyanov operators in $\mathbb{R}_N$ // Lobachevskii J. Math. — 2023. — 44. — С. 3438–3454.
18. Lyakhov L. N., Roschupkin S. A. A priori estimate for solutions of singular B-elliptic pseudodifferential equations with Bessel ∂_B -operators // J. Math. Sci. — 2014. — 196. — С. 563–571.

19. *Lyakhov L. N., Roschupkin S. A., Bulatov Yu. N.* Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel $\mathbb{J}$ -transform // J. Math. Sci. — 2023. — 266. — С. 205–216.
20. *Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F.* Fractional model equation for anomalous diffusion // Phys. A: Stat. Mech. Appl. — 1994. — 211, № 1. — С. 13–24.

Л. Н. Ляхов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: levnllya@mail.ru

Ю. Н. Булатов

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

E-mail: y.bulatov@bk.ru

С. А. Рощупкин

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

E-mail: roshupkinsa@mail.ru

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266

EDN: MXJTII

Kipriyanov–Katrakhov singular pseudodifferential operators

L. N. Lyakhov^{1,2,3}, Yu. N. Bulatov², and S. A. Roschupkin²

¹ *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

² *Bunin Yelets State University, Yelets, Russia*

³ *Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia*

Abstract. Singular pseudodifferential operators created on the base of the mixed Fourier–Bessel transform are usually called Kipriyanov singular pseudodifferential operators (SPDO). The paper provides an overview of three types of such operators. The Kipriyanov SPDOs are adapted to work with singular Bessel operators $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > -1$. The main attention in our work is paid to two modifications that arose on the base of the “even $\mathbb{J}$ -Bessel transforms” (i.e., for $\gamma \in (-1, 0)$) and the “even-odd $\mathbb{J}$ -Bessel–Kipriyanov–Katrakhov transforms”. The latter are introduced to study differential equations with singular differential operators $\frac{\partial}{\partial x_i} B_{\gamma_i}$ with a negative parameter of the Bessel operator $\gamma_i \in (-1, 0)$.

Keywords: singular pseudodifferential operators, Kipriyanov operators, Kipriyanov–Katrakhov operators, Fourier–Bessel transform.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00387).

For citation: L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roschupkin, “Kipriyanov–Katrakhov singular pseudodifferential operators,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 253–266. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-253-266>

REFERENCES

1. Yu. N. Bulatov, “Preobrazovanie Gankelya–Katrakhova i singulyarnye K-psevdodifferentsial’nye operatory” [Hankel–Katrakhov transform and singular K-pseudodifferential operators], *Mat. zametki SVFU* [Math. Notes North-East Fed. Univ.], 2024, **31**, No. 1, 21–34 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov and L. N. Lyakhov, “Polnoe preobrazovanie Fur’e–Besselya i algebra singulyarnykh psevdodifferentsial’nykh operatorov” [The complete Fourier–Bessel transform and the algebra of singular pseudodifferential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 5, 681–695 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, “Preobrazovanie Fur’e–Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov” [Fourier–Bessel transform and embedding theorems for weight classes], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Acad. Sci.], 1967, **89**, 130–213 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov and V. V. Katrakhov, “Ob odnom klasse odnomernykh singulyarnykh psevdodifferentsial’nykh operatorov” [On a class of one-dimensional singular pseudodifferential operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **104**, No. 1, 49–68 (in Russian).
5. I. A. Kipriyanov and L. N. Lyakhov, “Ob odnom klasse psevdodifferentsial’nykh operatorov” [On a class of pseudodifferential operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1974, **218**, No. 2, 278–280 (in Russian).
6. B. M. Levitan, “Razlozhenie v ryady i integraly Fur’e po funktsiyam Besselya” [Expansion into series and Fourier integrals in Bessel functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
7. L. N. Lyakhov, “Granichnye zadachi dlya B-ellipticheskikh uravneniy” [Boundary-value problems for B-elliptic equations], *PhD Thesis*, Voronezh, 1981 (in Russian).
8. L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roschupkin, and E. L. Sanina, “Psevdosdvig i fundamental’noe reshenie Δ_B -operatora Kipriyanova” [Pseudoshift and the fundamental solution of the Kipriyanov Δ_B -operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 12, 1654–1665 (in Russian).
9. L. N. Lyakhov, Yu. N. Bulatov, S. A. Roschupkin, and E. L. Sanina, “Edinstvennost’ resheniya zadach Dirikhle dlya uravneniya Puassona s singulyarnym Δ_B -operatorom Kipriyanova” [Uniqueness of the solution of Dirichlet problems for the Poisson equation with a singular Kipriyanov Δ_B -operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **59**, No. 4, 483–493 (in Russian).
10. L. N. Lyakhov and S. A. Roschupkin, “Polnoe preobrazovanie Fur’e–Besselya nekotorykh osnovnykh funktsional’nykh klassov” [Full Fourier–Bessel transform of some basic functional classes], *Nauch. ved. Belgorod. gos. univ. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2013, **154**, No. 11, 681–695 (in Russian).
11. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, “Operator Kipriyanova–Bel’tami s otritsatel’noy razmernost’yu operatorov Besselya i singulyarnaya zadacha Dirikhle dlya B -garmonicheskogo uravneniya” [The Kipriyanov–Beltrami operator with negative dimension of Bessel operators and the singular Dirichlet problem for the B -harmonic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 12, 1610–1620 (in Russian).
12. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, “Differentsial’nye i integral’nye operatsii v skrytoy sfericheskoy simmetrii i razmernost’ krivoy Kokha” [Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 4, 517–528 (in Russian).
13. L. N. Lyakhov, E. L. Sanina, S. A. Roschupkin, and Yu. N. Bulatov, “Fundamental’noe reshenie singulyarnogo differentsial’nogo operatora Besselya s otritsatel’nym parametrom” [Fundamental solution of the singular differential Bessel operator with a negative parameter], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2022, No. 7, 52–65 (in Russian).
14. S. A. Roschupkin, “Klassy osnovnykh funktsiy dlya polnogo preobrazovaniya Fur’e–Besselya” [Classes of basic functions for the full Fourier–Bessel transform], *Nauch. ved. Belgorod. gos. univ. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2015, **214**, No. 17, 124–126 (in Russian).
15. K. B. Sabitov, “O ravnomernoy skhodimosti razlozheniya funktsii v ryad Fur’e–Besselya” [On the uniform convergence of the expansion of a function in a Fourier–Bessel series], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2022, No. 11, 89–96 (in Russian).
16. K. B. Sabitov and N. V. Zaytseva, “Vtoraya nachal’no-granichnaya zadacha dlya B-giperbolicheskogo uravneniya” [The second initial-boundary value problem for the B-hyperbolic equation], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2019, No. 10, 75–86 (in Russian).

17. L. N. Lyakhov and Yu. N. Bulatov, “Composition and commutator of singular $\mathbf{J}$ -pseudodifferential Kipriyanov operators in $\mathbb{R}_N$,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, 3438–3454.
18. L. N. Lyakhov and S. A. Roschupkin, “A priori estimate for solutions of singular B-elliptic pseudodifferential equations with Bessel ∂_B -operators,” *J. Math. Sci.*, 2014, **196**, 563–571.
19. L. N. Lyakhov, S. A. Roschupkin, and Yu. N. Bulatov, “Kipriyanov singular pseudodifferential operators generated by Bessel $\mathbb{J}$ -transform,” *J. Math. Sci.*, 2023, **266**, 205–216.
20. R. Metzler, W. G. Glöckle, and T. F. Nonnenmacher, “Fractional model equation for anomalous diffusion,” *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, 1994, **211**, No. 1, 13–24.

L. N. Lyakhov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Bunin Yelets State University, Yelets, Russia

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia

E-mail: levnllya@mail.ru

Yu. N. Bulatov

Bunin Yelets State University, Yelets, Russia

E-mail: y.bulatov@bk.ru

S. A. Roschupkin

Bunin Yelets State University, Yelets, Russia

E-mail: roshupkinsa@mail.ru

УДК 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274

EDN: MYCMMV

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА—КИПРИЯНОВА ПОТЕНЦИАЛОМ РИССА

Л. Н. Ляхов^{1,2,3}, В. А. Калитвин^{2,4,5}, М. Г. Лапшина²

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

³Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

⁴Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия

⁵Финансовый университет при Правительстве РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия

Аннотация. В работе получено представление преобразования Радона—Киприянова классическим потенциалом Рисса. На основе применения преобразования Радона—Киприянова к сингулярному дифференциальному оператору в частных производных получена формула преобразования линейного сингулярного дифференциального оператора в частных производных в обыкновенный (не сингулярный) дифференциальный оператор.

Ключевые слова: преобразование Радона—Киприянова, потенциал Рисса, сингулярный дифференциальный оператор, частные производные.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана фондом РНФ, проект № 24-21-00387.

Для цитирования: Л. Н. Ляхов, В. А. Калитвин, М. Г. Лапшина. О представлении преобразования Радона—Киприянова потенциалом Рисса // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 267–274. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274>

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Радона—Киприянова [4] позволяет существенно расширить представление об устройстве нашего мира. Как показано в работе [9], это преобразование представляет собой введение в преобразование Радона функций, определенных в дробно-размерных (псевдоевклидовых) областях, что позволяет работать с более широкими классами задач по сравнению с классическими задачами математической физики.

Эта работа продолжает исследования, начатые в [11, 15, 16]. Результатом данной работы является представление преобразования Радона—Киприянова потенциалом Рисса (классическим, в отличие от работы [9]). Рассматривается преобразование линейного сингулярного дифференциального уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение (не сингулярное). Приводится новая формула (по сравнению с [9]) обращения преобразования Радона—Киприянова. При этом задействовано двойственное преобразование Радона—Киприянова, введенное в [11].

1.1. Преобразование Радона—Киприянова. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_i > 0$ — мультииндекс и $\mathbb{R}_n^+$ — область в евклидовом пространстве точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $x_i > 0$.

Будем рассматривать многомерный оператор Пуассона как суперпозицию одномерных операторов

$$\mathcal{P}_x^\gamma = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_{x_i}^{\gamma_i},$$

где

$$\mathcal{P}_{x_i}^\gamma f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi f(x_i \cos \alpha_i, x^i) \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_i, \quad C(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\gamma_i}{2})}.$$

Здесь для удобства мы воспользовались перестановкой координат аргумента: $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

При $\gamma_i = 0$ одномерный оператор Пуассона не определен, а это значит, что в общем случае переменные должны разделяться на весовые и обычные. В этой работе рассмотрим наиболее принципиальный случай, когда $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ — подпространство пространства пробных функций Л. Шварца $\{\varphi\}$, состоящее из функций, четных по каждой координате x_i аргумента x . Соответствующий класс регулярных весовых распределений S'_{ev} определяется весовой билинейной формой

$$(f, \varphi)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \varphi(x) x^\gamma dx, \quad x^\gamma dx = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx, \quad \forall \varphi \in S_{ev}.$$

Через посредство оператора Пуассона введем в пространстве распределений S'_{ev} весовую обобщенную δ -функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_n^+$ (как правило, размерности $n - 1$):

$$(\mathcal{P}_x \delta(P(x)), \varphi)_\gamma = C(\gamma) \int_{\Gamma=\{z: P(z)=0\}} \tilde{\varphi}(z) Z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad Z_2^{\gamma-1} = \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}, \quad (1.1)$$

где $C(\gamma)$ — константа, нормирующая многомерный оператор Пуассона,

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}), \quad \tilde{\varphi}(z) = \varphi \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_i, \end{array} \right| \quad 0 < \alpha_i < \pi, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

где $-\infty < z_{2i-1} < \infty$, $0 < z_{2i} < \infty$.

Переменные с четными и нечетными номерами координат вектора z будем обозначать отдельно друг от друга:

$$Z_1 = (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1}), \quad Z_2 = (z_2, z_4, \dots, z_{2n}).$$

Поверхность интегрирования в (1.1), полученную отображением через посредство оператора Пуассона, будем называть $\mathcal{P}(P(x) = 0)$ -поверхностью ($\mathcal{P}$ -поверхностью). Заметим, что если бы первоначально поверхность $P(x) = 0$ была бы n -полусферой $|x| - R = 0$, $x_i > 0$, то $\mathcal{P}$ -сфера — уже $2n$ -полусфера $|z| = R$ в $\mathbb{R}_{2n}^+ = \{z : z_{2i} > 0\}$.

Пусть $\langle x, \theta \rangle = \sum_i x_i \theta_i$ и $p = \langle x, \theta \rangle$ — нормальная плоскость в $\mathbb{R}_n$. Тогда соответствующая $\mathcal{P}$ -плоскость:

$$\{x \in \mathbb{R}_n^+ : \langle x, \theta \rangle = p\} \xrightarrow{\text{def}(1)} \{z \in \mathbb{R}_{2n}^+ : \langle z, \Theta \rangle = p\}, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \theta_3, \dots, 0, \theta_n, 0). \quad (1.3)$$

Мы следуем классическому определению преобразования Радона (см. например, [1, с. 16] и [14, с. 20, формула (1.3)]).

Преобразование Радона—Киприянова (введено в работах [4, 9]; см. также книги [10, с. 211–225] и [2, с. 483–495]) определяется следующим образом:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_x^\gamma \delta(p - \langle x; \theta \rangle) x^\gamma dx. \quad (1.4)$$

По определению (1.1) формула (1.4) примет вид

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = C(\gamma) \int_{\Gamma = \{z: p = \langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) Z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z). \quad (1.5)$$

Здесь

$$\{z : p = \langle z, \Theta \rangle\}^+ = \{z : p = \langle z, \Theta \rangle, z_{2i} > 0\}, \quad \tilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}\right).$$

Так как интегрирование в (1.4) и (1.5) определено по $2n$ переменным, а координаты векторов $\theta \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Theta \in \mathbb{R}_{2n}^+$ связаны трансформацией (1.3), то определения преобразований (1.4) и (1.5) совпадают:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = K_\gamma[f](\Theta; p). \quad (1.6)$$

Обычно определение (1.5) носит вспомогательный характер. В нашей работе это будет основное определение Радона—Киприянова.

Таким образом, правая часть равенства (1.6) представляет собой *специальное весовое преобразование Радона* в $\mathbb{R}_{2n}$ (см. [4, 9]), которое представляется в классическом виде

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \Theta \rangle) Z_2^{\gamma-1} dz = C(\gamma) \int_{\{p = \langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) Z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z). \quad (1.7)$$

Правая часть равенства (1.7) представляет собой многомерное смешанное специальное преобразование Радона (по нечетным переменным Z_1) и преобразование Меллина (по четным переменным Z_2).

Если вектор θ фиксирован, то введем обозначение

$$K_\gamma[f](\theta; p) = K_{\gamma, \theta}[f](p) \iff K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p) \xrightarrow{(5)} K_{\gamma, \theta}[f](p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

В (1.7) n -полуплоскость интегрирования обозначим символом $\Theta_\perp^+$, т. е.

$$\Theta_\perp^+ = \{z: \langle \Theta, z \rangle = p, z_{2i} \geq 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{2n}^+}.$$

Применяя подход, рассмотренный в [14, с. 17], преобразование Радона—Киприянова можно записать в виде интеграла по $2n$ -полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в пространстве $\mathbb{R}_{2n}^+$:

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) Z_2^{\gamma-1} dz.$$

1.2. Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова. Двойственный оператор по отношению к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n$ введен в [11] следующим образом: пусть $S_1^+(2n)$ — часть единичной сферы в $\mathbb{R}_{2n}^+$, и пусть $\mathbb{Z}^+ = S_1^+(2n) \times \mathbb{R}_1$ — цилиндр в $\mathbb{R}_{2n+1}^+ = \mathbb{R}_{2n}^+ \times \mathbb{R}_1$, а функция $g \in S_{ev}(\mathbb{Z}^+)$; тогда оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова, определяется выражением

$$K_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(2n)} g(\Theta, \langle \Theta, x \rangle) \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1} dS(\Theta), \quad (1.8)$$

1.3. Элементы В-гармонического анализа. Б. М. Левитаном [5] введено классическое (одномерное) преобразование Фурье—Ганкеля. В работах И. А. Киприянова и его последователей (см. [3]) изучался многомерный аналог этого преобразования, называемый преобразованием Фурье—Бесселя.

Следуя Б. М. Левитану, j -функциями Бесселя будем называть функции

$$j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{J_\nu(t)}{t^\nu},$$

где $\nu > -\frac{1}{2}$ и J_ν — функция Бесселя первого рода.

j -функции Бесселя удовлетворяют сингулярному дифференциальному уравнению Бесселя

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right) j_\nu(t) + j_\nu(t) = 0, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\nu + 1$$

и условиям $j_\nu(0) = 1$, $j'_\nu(0) = 0$ (условие четности).

Обозначим через $F_B[f](\xi)$ многомерное прямое преобразование Фурье—Бесселя

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathbf{j}_\nu(x\xi) x^\gamma dx, \quad \mathbf{j}_\nu(t) = \prod_{i=1}^n j_{\nu_i}(t), \quad \nu_i = \frac{\gamma_i - 1}{2} > -\frac{1}{2},$$

и через $F_B^{-1}[g](x)$ — обратное преобразование Фурье—Бесселя

$$F_B^{-1}[g](x) = C(\gamma) F_B[g](-x), \quad C(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2^{2\nu_i} \Gamma^2(\nu_i + 1)}.$$

1.3.1. Представление В-потенциалов Рисса потенциалами Рисса. И. А. Киприяновым введены В-потенциалы Рисса.

Ядро В-потенциала Рисса имеет вид (см. [8] и монографии [10, гл. 4] и [2, гл. 14.1])

$$k_\lambda^\gamma = \frac{A}{|x|^{n+|\gamma|-\lambda}}, \quad \lambda < n + |\gamma|,$$

где $A = A(n, \gamma) = \text{const}$. В-потенциалами Рисса функции f порядка $\lambda < n + |\gamma|$ называется обобщенная свертка с ядром k_γ^λ :

$$(\mathbf{U}_\gamma^\lambda f)(x) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) T_x^y k_\gamma^\lambda(x_1, x' - y') y^\gamma dy, \quad -\infty < \lambda < n + |\gamma|,$$

где T^y — многомерный обобщенный сдвиг

$$T^y f(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x_i, x^i) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\omega) \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_i,$$

где ω — это n -мерный вектор с координатами $\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Воспользовавшись антиполярным преобразованием (1.2), получим

$$U_\gamma^\lambda f(x) = I_\gamma^\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} \frac{\widetilde{f}(z) Z_2^{\gamma-1} dz}{\left(\sum_{i=1}^n (z_{2i-1} - x_i)^2 + z_{2i}^2 \right)^{\frac{n+\gamma-\lambda}{2}}}, \quad Z_2^{\gamma-1} = \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}.$$

Как видим, выражение справа представляет собой специальный потенциал Рисса с особенностью в точке на координатной гиперплоскости, определенный в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2n}^+$, где сдвиг на вектор, принадлежащий $\mathbb{R}_n^+$, осуществляется в плоскости $Z_2 = 0$. Обращение классического потенциала Рисса осуществляется в рамках преобразования Фурье применением потенциала отрицательного порядка λ :

$$I_\gamma^{-\lambda} I_\gamma^\lambda = f(x) \quad (1.9)$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА—КИПРИЯНОВА ПОТЕНЦИАЛОМ РИССА

Теорема 2.1. Пусть $f = f(x) \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Тогда

$$K_\gamma^\# [K_\gamma[f](\Theta, p)] = |S_1(2n)|_{\gamma-1} \left(|z|^{-1} * \tilde{f}(z) \right)_{\gamma-1}.$$

где через $|S_1(2n)|_{\gamma-1}$ обозначена взвешенная площадь единичной сферы с центром в начале координат в пространстве переменных $z \in \mathbb{R}_{2n}^+$.

Доказательство. Преобразование Радона—Киприянова и оператор, двойственный к нему, определены соответственно следующими равенствами:

$$K_\gamma[f](p, \Theta) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + y) Y_2^{\gamma-1} dy, \quad K_\gamma^\# g(z) = \int_{S_1^+(2n)} g(\Theta, \langle \Theta, z \rangle) \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1} dS(\Theta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_\gamma^\# [K_{\gamma, \Theta}[f](p)](z) &= \int_{S_1^+(2n)} K_{\gamma, \Theta}[f](p) \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1} dS(\Theta) = \\ &= \int_{S_1^+(2n)} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + y) Y_2^{\gamma-1} dy \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1} dS(\Theta) = \int_{S_1^+(2n)} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(\langle z, \Theta \rangle \Theta + y) Y_2^{\gamma-1} \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1} dS(\Theta). \end{aligned}$$

Учтем, что для любого фиксированного вектора Θ и y , удовлетворяющего уравнению плоскости $\langle y, \Theta \rangle = p$, точка $p\Theta$ есть проекция начала координат на плоскость. Поэтому вектор (с координатами начала и конца, соответственно, $p\Theta$ и y) принадлежит этой плоскости: $\langle z, \Theta \rangle \Theta - y \in \Theta_\perp^+$. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$dy = d(\langle z, \Theta \rangle \Theta - z + y).$$

Произведя соответствующую замену координат, получим

$$K_\gamma^\# [K_{\gamma, \Theta}[f](z)] = \int_{S_1^+(2n)} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(z + y) Y_2^{\gamma-1} dy \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1} dS(\Theta).$$

В плоскости $\Theta_\perp^+$ введем локальные координаты с центром в точке $p\Theta$ и введем на плоскости сферические координаты $y = r\omega$, $|\omega| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}_{n-1}^+$. Учитывая принадлежность функции f пространству Л. Шварца, можем поменять порядки интегрирования сферических интегралов по ω и Θ . Тогда

$$K_\gamma^\# [K_{\gamma, \Theta}[\tilde{f}]](z) = |S_1^+(2n-1)|_{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} f(z+y) |y|^{-1} Y_{2i}^{\gamma-1} dy.$$

Отсюда

$$K_\gamma^\# [K_{\gamma, \Theta}[f](z)] = |S_1^+(2n-1)|_{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} \tilde{f}(y) |z-y|^{-1} Y_{2i}^{\gamma-1} dy.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Граев И. М., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1952.
2. Катрахов В. В., Катрахова А. А., Ляхов Л. Н., Муравник А. Б., Ситник С. М., Хе Кан Чер. Сингулярные краевые задачи. — Воронеж: Научная книга, 2024.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
4. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона // Докл. АН СССР. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
5. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.

6. Ляхов Л. Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР. — 1990. — 315, № 2. — С. 466–469.
7. Ляхов Л. Н. Обращение В-потенциалов // Докл. РАН. — 1991. — 321, № 3. — С. 466–469.
8. Ляхов Л. Н. Пространство В-потенциалов Рисса // Докл. РАН. — 1994. — 334, № 3. — С. 278–280.
9. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова–Радона // Тр. МИАН. — 2005. — 248. — С. 153–163.
10. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их применение к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
11. Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапшина М. Г. О преобразовании, двойственном к преобразованию Радона–Киприянова // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2024. — 232. — С. 70–77.
12. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха // Мат. заметки. — 2023. — 113, № 4. — С. 517–528.
13. Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л. Обращение общих В-потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых классах функций // Докл. РАН. — 2009. — 426, № 4. — С. 443–447.
14. Hammerer Ф. Математические основы компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.
15. Kalitvin V. A., Lapshina M. G. Radon–Kipriyanov transform of Laplace series by weight spherical functions // Lobachevskii J. Math. — 2023. — 44, № 8. — С. 3323–3330.
16. Kalitvin V. A., Lapshina M. G. Radon–Kipriyanov transform of finite functions // Lobachevskii J. Math. — 2024. — 45, № 11. — С. 5537–5545.

Л. Н. Ляхов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

E-mail: levnlya@mail.ru

В. А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия

Финансовый университет при Правительстве РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия

E-mail: kalitvinv@yandex.ru

М. Г. Лапшина

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: marina.lapsh@ya.ru

UDC 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274

EDN: MYCMMV

On the representation of the Radon–Kipriyanov transform by the Riesz potential

L. N. Lyakhov^{1,2,3}, V. A. Kalitvin^{2,4,5}, and M. G. Lapshina²¹ Voronezh State University, Voronezh, Russia² Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia³ Bunin Yelets State University, Yelets, Russia⁴ Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia⁵ Financial University under the Government of the Russian Federation, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia

Abstract. In this paper, a representation of the Radon–Kipriyanov transform by the classical Riesz potential is obtained. Based on the application of the Radon–Kipriyanov transform to a singular partial differential operator, a formula for transformation of a linear singular partial differential operator into an ordinary (nonsingular) differential operator is obtained.

Keywords: Radon–Kipriyanov transform, Riesz potential, singular differential operator, partial derivatives.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00387).

For citation: L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina, “On the representation of the Radon–Kipriyanov transform by the Riesz potential,” *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.*, 2025, vol. 71, No. 2, 267–274. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274>

REFERENCES

1. I. M. Gel'fand, I. M. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Integral'naya geometriya i svyazannye s ney voprosy teorii predstavleniy* [Integral Geometry and Related Topics in Representation Theory], GIFML, Moscow, 1952 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov, A. A. Katrakhova, L. N. Lyakhov, A. B. Muravnik, S. M. Sitnik, and Khe Kan Cher, *Singulyarnye kraevye zadachi* [Singular Boundary-Value Problems], Nauchnaya kniga, Voronezh, 2024 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov and L. N. Lyakhov, “O preobrazovaniyakh Fur'e, Fur'e–Besselya i Radona” [On the Fourier, Fourier–Bessel, and Radon transforms], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1998, **360**, No. 2, 157–160 (in Russian).
5. B. M. Levitan, “Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya” [Expansion into series and Fourier integrals in Bessel functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
6. L. N. Lyakhov, “Ob odnom klasse gipersingulyarnykh integralov” [On a class of hypersingular integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 2, 466–469 (in Russian).
7. L. N. Lyakhov, “Obrashchenie V-potentsialov” [Inversion of B-potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1991, **321**, No. 3, 466–469 (in Russian).



8. L. N. Lyakhov, “Prostranstvo V-potentsialov Rissa” [Riesz B-potentials space], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **334**, No. 3, 278–280 (in Russian).
9. L. N. Lyakhov, “Preobrazovanie Kipriyanova–Radona” [Kipriyanov–Radon transform], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 153–163 (in Russian).
10. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh primeneniye k opisaniyu funktsional’nykh klassov Kipriyanova i k integral’nym uravneniyam s V-potentsial’nymi yadrami* [B-hypersingular Integrals and Their Application to the Description of Kipriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-Potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
11. L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, and M. G. Lapshina, “O preobrazovanii, dvoystvennom k preobrazovaniyu Radona–Kipriyanova” [On the transform dual to the Radon–Kipriyanov transform], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2024, **232**, 70–77 (in Russian).
12. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, “Differentsial’nye i integral’nye operatsii v skrytoy sfericheskoy simmetrii i razmernost’ krivoy Kokha” [Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve], *Mat. zametki* [Math. Digest], 2023, **113**, No. 4, 517–528 (in Russian).
13. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, “Obrashchenie obshchikh B-potentsialov Rissa s odnorodnoy kharakteristikoy v vesovykh klassakh funktsiy” [Inversion of general Riesz B-potentials with homogeneous characteristic in weighted classes of functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **426**, No. 4, 443–447 (in Russian).
14. F. Natterer, *Matematicheskie osnovy komp’yuternoy tomografii* [The Mathematics of Computerized Tomography], Mir, Moscow, 1990 (Russian translation).
15. V. A. Kalitvin and M. G. Lapshina, “Radon–Kipriyanov transform of Laplace series by weight spherical functions,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 8, 3323–3330.
16. V. A. Kalitvin and M. G. Lapshina, “Radon–Kipriyanov transform of finite functions,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 11, 5537–5545.

L. N. Lyakhov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia

Bunin Yelets State University, Yelets, Russia

E-mail: levnllya@mail.ru

V. A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia

Financial University under the Government of the Russian Federation, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia

E-mail: kalitvinv@yandex.ru

M. G. Lapshina

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia

E-mail: marina.lapsh@ya.ru

УДК 517.983+517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286

EDN: NENHXZ

ДИФФУЗИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ, ПОРОЖДАЕМАЯ КЛАССИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ

Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Аннотация. Исследована модель, сопоставляющая случайным блужданиям в конечномерном евклидовом координатном пространстве классической системы случайные квантовые блуждания, т. е. случайные преобразования множества состояний квантовой системы, возникающей при квантовании классической. Как известно, сверточная полугруппа гауссовских мер на координатном пространстве допускает представление полугруппой самосопряженных сжатий в пространстве квадратично интегрируемых функций, описываемой уравнением теплопроводности. Получено представление сверточной полугруппы гауссовских мер на координатном пространстве квантовой динамической полугруппой в пространстве ядерных операторов. Дано описание квантовой динамической полугруппы решениями задачи Коши для вырожденного уравнения диффузии. Установлена обобщенная сходимости по распределению последовательности квантовых случайных блужданий к операторнозначному случайному процессу со значениями в абелевой алгебре операторов сдвига на вектор с нормальным распределением.

Ключевые слова: квантовое управляющее уравнение, квантовое состояние, квантовое случайное блуждание, теорема Чернова, квантовый канал.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев. Диффузия квантовых состояний, порождаемая классическим случайным блужданием // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 275–286. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе будет исследована эволюция множества квантовых состояний, порождаемая случайными блужданиями в евклидовом координатном пространстве E классической системы, при квантовании которой возникает гильбертово пространство векторных состояний $\mathcal{H} = L_2(E)$.

Случайным блужданием в евклидовом пространстве E называется последовательность E -значных случайных процессов $\{\eta_n(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, допускающая представление

$$\eta_n(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k\left(\frac{t}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

где $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных E -значных случайных процессов, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Унитарное представление π в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ абелевой группы E каждому случайному процессу ξ со значениями в пространстве E сопоставляет операторнозначный случайный процесс со значениями в унитарной абелевой алгебре операторов сдвига аргумента: $\pi(\xi(t)) = S_{\xi(t)}$, $t \geq 0$, где $S_{\xi(t)}u(x) = u(x + \xi(t))$, $x \in E$, $t \geq 0$; $u \in \mathcal{H}$.

Для операторнозначных процессов $\pi(\eta_n)$ со значениями в группе унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}$, являющихся образами случайных блужданий (1.1) под действием унитарного представления π , в работах [9, 16, 17] получены предельные теоремы, устанавливающие сходимость по распределению и сходимость по вероятности операторнозначных случайных процессов.

В настоящей работе исследуются предельные свойства представления случайных блужданий (1.1) в пространстве квантовых состояний. Исследование представления квантовых систем с помощью вероятностных мер проведено в работе [3]. В работе [18] приведен пример динамики квантовых состояний с разрушением чистых состояний, порожденной сингулярным гамильтонианом. В работах [5, 12] исследуются случайные операторы со значениями в пространстве ограниченных линейных преобразований банахова пространства $T_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов в пространстве $\mathcal{H}$, снабженного следовой нормой [6].

В [13] исследованы свойства квантовых каналов, порождаемых некоммутативными стационарными случайными процессами. В работе [7] предложена схема получения квантовых динамических полугрупп в пространстве квантовых состояний за счет усреднения по сверточной полугруппе гауссовских мер на множестве преобразований квантовых состояний, порожденных унитарными группами в пространстве векторных состояний. В настоящей статье эта схема исследована в случае гауссовских мер на подгруппе унитарных преобразований, порождаемых сдвигами аргумента. Исследовано представление τ случайных блужданий (1.1) в пространстве $T_1(\mathcal{H})$, задаваемых на чистых векторных состояниях $\rho_u = |u\rangle\langle u|$, $u \in S^1(\mathcal{H})$ равенством $T_\xi(\rho_u) = S_\xi \rho_u S_{-\xi} = \rho_{S_\xi u}$, продолженным по линейности и непрерывности на все пространство ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$.

В настоящей работе исследована полугруппа $\mathbb{T}$, реализующая представление τ в пространстве $T_1(\mathcal{H})$ сверточной полугруппы центрированных гауссовских мер на пространстве E . Теоремой 3.1 установлена сильная непрерывность полугруппы $\mathbb{T}$ и показано, что она является квантовой динамической полугруппой. Установлено, что существенной областью определения генератора этой полугруппы $\mathbb{T}$ в пространстве ядерных операторов является линейная оболочка операторов плотности чистых векторных состояний, соответствующих векторам из пространства Шварца. Доказано, что для произвольной орбиты $\mathbb{T}_t \rho$, $t \geq 0$, полугруппы $\mathbb{T}$ однопараметрическое семейство интегральных ядер операторов $\mathbb{T}_t \rho$, $t \geq 0$, является решением задачи Коши для уравнения Фоккера—Планка с вырожденным оператором диффузии. Установлена взаимосвязь дифференцируемости функции $\mathbb{T}_t \rho$, $t \geq 0$, со значениями в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ и дифференцируемости интегральных ядер однопараметрического семейства операторов плотности. С помощью полученного описания генератора квантовой динамической полугруппы $\mathbb{T}$ установлена сходимость к этой полугруппе представления в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ центрированных случайных блужданий вида (1.1).

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть E — конечномерное евклидово пространство размерности d , λ — мера Лебега на пространстве E , $\mathcal{H} = L_2(E, \lambda, \mathbb{C})$ — пространство комплекснозначных квадратично интегрируемых по мере Лебега функций на пространстве E . Пусть $B(\mathcal{H})$ — банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Через $T_1(\mathcal{H})$ обозначим банахово пространство действующих в $\mathcal{H}$ ядерных операторов, наделенное следовой нормой. Пусть $B(\mathcal{H})^*$ — банахово пространство, сопряженное пространству $B(\mathcal{H})$.

Для произвольного нормированного пространства $\mathcal{X}$ единичная сфера пространства $\mathcal{X}$ обозначается через $S_1(\mathcal{X})$, и пусть $\mathcal{X}^1$ — единичный шар в $\mathcal{X}$.

Множество $\Sigma(\mathcal{H})$ состояний квантовой системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ представляет собой пересечение единичной сферы $S_1(B(\mathcal{H})^*)$ с конусом $B(\mathcal{H})_+^*$ неотрицательных элементов пространства, сопряженного банахову пространству ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H})$, наделенному операторной нормой [4]. Множество нормальных квантовых состояний, обладающих свойством непрерывности относительно ультраслабой топологии [8], представимо как пересечение единичной сферы $S_1(T_1(\mathcal{H}))$ с конусом $T_1(\mathcal{H})_+$ неотрицательных элементов пространства $T_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов, предсопряженного банахову пространству ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H})$, наделенному операторной нормой [4, 8].

Евклидово пространство E как абелева топологическая группа относительно операции сложения элементов имеет непрерывное в сильной операторной топологии унитарное представление $\pi : E \rightarrow B(\mathcal{H})$ в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\pi(h) = \mathbf{S}_h,$$

где

$$\mathbf{S}_h u(x) = u(x + h), \quad x \in E, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Как известно, если h — центрированный гауссовский случайный вектор пространства E , обладающий ограниченным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, то однопараметрическое семейство операторов $\mathbf{V}_t$, $t \geq 0$, задаваемое равенством

$$\mathbf{V}_t u(x) = \mathbf{M}[\mathbf{S}_{\sqrt{t}\mathbf{h}} u(x)], \quad t \geq 0, \quad x \in E, \quad u \in \mathcal{H},$$

является однопараметрической сильно непрерывной полугруппой самосопряженных сжатий в пространстве $\mathcal{H}$, реализующей представление в пространстве $\mathcal{H}$ сверточной полугруппы гауссовских мер $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$. При этом непрерывная функция $\|u(t)\|_{\mathcal{H}}$ монотонно убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим, что сверточная полугруппа $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, гауссовских мер имеет также представление в банаховом пространстве $L_1(E)$. Образом полугруппы $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, при таком представлении является сильно непрерывная полугруппа сжимающих преобразований в пространстве $L_1(E)$, сохраняющих конус неотрицательных функций в $L_1(E)$ и $L_1(E)$ -норму в этом конусе.

Далее символом $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_1(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим двойственность между банаховым пространством ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ и банаховым пространством ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H})$, действующую по правилу $\langle \rho, \mathbf{A} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{A})$.

В настоящей работе мы исследуем представление сверточной полугруппы $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, гауссовских мер в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ (см. [15]). Будет установлено, что такое представление может быть задано отображением $\pi(\gamma_{\mathbf{D}}) = \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}_t, t \geq 0\}$ — однопараметрическое семейство операторов в пространстве $T_1(\mathcal{H})$, при каждом $t \geq 0$ действующих на произвольный оператор $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ согласно равенству

$$\langle \mathbb{T}_t(\rho), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*, \mathbf{A} \rangle d\gamma_{t\mathbf{D}}(h), \quad \forall \mathbf{A} \in B(\mathcal{H}). \quad (2.1)$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала опишем динамику оператора состояния, связанную с гауссовскими случайными блужданиями.

Лемма 3.1. Пусть $\rho \in \Sigma_n(\mathcal{H}) = S_1^+(T_1(\mathcal{H}))$. При каждом $t \geq 0$ усреднение сдвигов квантового состояния ρ

$$\int_E \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^* d\gamma_{t\mathbf{D}}(h) \equiv \sigma(t, \rho) \quad (3.1)$$

является нормальным квантовым состоянием.

Доказательство. Действительно, усредненное состояние $\sigma(t, \rho)$ действует на произвольный оператор $\forall \mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$ согласно равенству (2.1):

$$\langle \sigma(t, \rho), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \mathbf{S}_{\sqrt{t}\mathbf{h}} \rho \mathbf{S}_{\sqrt{t}\mathbf{h}}^*, \mathbf{A} \rangle d\gamma_{\mathbf{D}}(h) = \int_E \langle \rho, \mathbf{S}_h^* \mathbf{A} \mathbf{S}_h \rangle d\gamma_{t\mathbf{D}}(h).$$

Поэтому $\sigma(t, \rho)$ является линейным функционалом, определенным на пространстве $B(\mathcal{H})$, неотрицательным и удовлетворяющим условию нормировки $\langle \sigma(t, \rho), \mathbf{I} \rangle = 1$; таким образом, $\sigma(t, \rho) \in S_1^+((B(\mathcal{H}))^*)$.

Докажем, что состояние $\sigma(t, \rho)$ является нормальным. Сначала исследуем случай, когда оператор ρ в равенстве (2.1) является оператором плотности чистого квантового состояния, т. е.

является одномерным ортогональным проектором $\rho_u = |u\rangle\langle u|$ на некоторый единичный вектор $u \in S_1(\mathcal{H})$. В этом случае

$$\sigma(t, \rho_u) = \int_E \rho_{\mathbf{S}_h u} d\gamma_{t\mathbf{D}}(h) = \int_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e d\mu_{u,t\mathbf{D}}(e), \quad (3.2)$$

где $\mu_{u,t\mathbf{D}}$ — мера на единичной сфере пространства $\mathcal{H}$, задаваемая на каждом борелевском множестве $B \subset S_1(\mathcal{H})$ равенством

$$\mu_{u,t\mathbf{D}}(B) = \gamma_{t\mathbf{D}}(\{h \in E : \mathbf{S}_h u \in B\}).$$

Поскольку образ борелевского множества B при непрерывном отображении $\Phi_u : h \rightarrow \mathbf{S}_h u$ является борелевским, то мера $\mu_{u,t\mathbf{D}}$ является борелевской. Поскольку мера $\gamma_{t\mathbf{D}}$ является вероятностной мерой на пространстве E , то мера $\gamma_{t\mathbf{D}} \circ \Phi_u^{-1}$ является вероятностной мерой на единичной сфере $S_1(\mathcal{H})$. Следовательно, в силу теоремы 2.2 работы [2], состояние (3.2) является нормальным.

В общем случае ρ является нормальным квантовым состоянием, допускающим представление $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \rho_{u_k}$, где $\{p_k\} \in S_1^+(\ell_1)$, $\{u_k\}$ — некоторый ОНБ в пространстве $\mathcal{H}$. Тогда состояние $\sigma(t, \rho)$

допускает представление $\sigma(t, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sigma(t, u_k)$ и потому является нормальным. $\square$

Теорема 3.1. Пусть центрированный случайный вектор h имеет ограниченный ковариационный оператор $\mathbf{D}$. Тогда задаваемое равенством (2.1) семейство отображений $\mathbb{T}_t : \rho \rightarrow \sigma(t, \rho)$, $t \geq 0$, — квантовая динамическая полугруппа в пространстве нормальных состояний $T_1(\mathcal{H})$, непрерывная в сильной операторной топологии.

Доказательство. При каждом $t \geq 0$ преобразование $\mathbb{T}_t$, отображающее множество квантовых состояний в себя в силу леммы 3.1, допускает продолжение по линейности на все пространство $T_1(\mathcal{H})$ до линейного сжимающего преобразования, сохраняющего конус положительных элементов.

Докажем, что отображение $\mathbb{T}_t$ является вполне положительным. Это свойство следует из того, что отображение $\rho \rightarrow \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*$ является вполне положительным при каждом $h \in E$, а потому усреднение по вероятностной мере (3.1) набора вполне положительных отображений также является вполне положительным.

Докажем полугрупповое свойство у семейства отображение $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$. Пусть $t, \tau \geq 0$, тогда согласно свойству гауссовских мер $\gamma_{(t+\tau)\mathbf{D}} = \gamma_{\tau\mathbf{D}} * \gamma_{t\mathbf{D}}$.

Пусть $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ и $\mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$. Тогда в силу свойства непрерывности в среднем квадратичном оператора сдвига функция $f_{\rho, \mathbf{A}}(h) = \langle \rho, \mathbf{S}_h^* \mathbf{A} \mathbf{S}_h \rangle$, $h \in E$, непрерывна на E . Потому

$$\begin{aligned} \langle s(\tau, s(t, \rho)), \mathbf{A} \rangle &= \int_E \langle s(t, \rho), \mathbf{S}_{h_1}^* \mathbf{A} \mathbf{S}_{h_1} \rangle d\gamma_{\tau\mathbf{D}}(h_1) = \int_E \int_E \langle \rho, \mathbf{S}_{h_1+h_2}^* \mathbf{A} \mathbf{S}_{h_1+h_2} \rangle d\gamma_{\tau\mathbf{D}}(h_1) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h_2) = \\ &= \int_E \int_E f_{\rho, \mathbf{A}}(h_1 + h_2) d\gamma_{\tau\mathbf{D}}(h_1) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h_2) = \int_E f_{\rho, \mathbf{A}}(h) d(\gamma_{\tau\mathbf{D}} * \gamma_{t\mathbf{D}})(h) = \langle s(t + \tau, \rho), \mathbf{A} \rangle. \end{aligned}$$

Докажем непрерывность в сильной операторной топологии однопараметрической полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, преобразований пространства $T_1(\mathcal{H})$. Пусть $u \in S_1(\mathcal{H})$ и ρ_u — соответствующее чистое векторное состояние. Поскольку $\mathbf{S}_{\tau h}$, $\tau > 0$, — сильно непрерывная однопараметрическая группа в пространстве $\mathcal{H}$, то $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h} u$, $t \geq 0$, — непрерывная функция со значениями в $\mathcal{H}$. Поэтому при каждом $h \in E$ отображение $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^*$, $t \geq 0$, полуоси $\mathbb{R}_+$ в пространство $T_1(\mathcal{H})$ непрерывно. Поскольку интеграл $\int_E (\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^*\|_{T_1(\mathcal{H})}) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h)$ сходится, то интеграл $\int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{t\mathbf{D}}(h)$ сходится равномерно на полуоси $t \geq 0$. Следовательно, отображение $t \rightarrow \int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{t\mathbf{D}}(h)$, $\mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$, непрерывно.

Таким образом, $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, — квантовая динамическая полугруппа в пространстве $T_1(\mathcal{H})$, непрерывная в сильной операторной топологии. $\square$

Теперь опишем класс случайных процессов, аппроксимирующих квантовую динамическую полугруппу $\mathbb{T}$.

Пусть h — центрированный гауссовский случайный вектор в пространстве $E = \mathbb{R}^n$ с невырожденным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, т. е. $\mathbf{D} : M[(x, h)(h, y)] = (x, \mathbf{D}y) \forall x, y \in E$, и с конечным третьим моментом нормы $M[\|h\|_E^3] < +\infty$.

Положим $\mathbf{T}_h \rho = \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*$, $\rho \in T_1(\mathcal{H})$, для каждого $h \in E$.

Пусть $\mathbf{T}_{\sqrt{t}h}$, $t \geq 0$, — однопараметрическое семейство случайных линейных операторов в пространстве $B(T_1(\mathcal{H}))$, порожденное случайным вектором h в пространстве E .

Положим $\mathbf{F}(t)\rho = M[\mathbf{T}_{\sqrt{t}h}\rho]$, $t \geq 0$, для каждого $\rho \in T_1(\mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{F}$ — однопараметрическое семейство линейных преобразований пространства $T_1(\mathcal{H})$.

Теорема 3.2. Пусть $E = \mathbb{R}^d$ и h — центрированный гауссовский случайный вектор в пространстве E с невырожденным ковариационным оператором $\mathbf{D}$ и с конечным третьим моментом нормы. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \tau]} \|(\mathbb{T}_t - (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n)\rho\|_{T_1(\mathcal{H})} = 0$$

для любого $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ и любого $\tau > 0$.

Для доказательства теоремы 3.2 нам потребуется установить свойства представления группы сдвигов на векторы конфигурационного пространства в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ и ее генератора, а также исследовать с помощью теоремы Чернова [10] сходимость последовательности представлений композиций независимых случайных сдвигов, чему посвящены дальнейшие рассуждения.

4. ГЕНЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$

Пусть $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$ и $\rho_u = |u\rangle\langle u|$ — оператор плотности чистого векторного состояния u , т. е. одномерный ортогональный проектор на подпространство $\text{span}(u)$ в пространстве $\mathcal{H}$.

Лемма 4.1. Если оператор $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ ранга 1 удовлетворяет условию

$$(\rho f, g) = (u, f)(g, v) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

при некоторых $u, v \in \mathcal{H}$ (т. е. если $\rho = v \otimes u$), то $\|\rho\|_{T_1(\mathcal{H})} \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. В условиях леммы 4.1 имеем

$$\|\rho\|_{T_1(H)} = \sup_{\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}=1} |\text{Tr}(\rho \mathbf{A})| \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.1)$$

□

Из оценки (4.1) следует утверждение.

Лемма 4.2. Если векторнозначная функция $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, непрерывна (дифференцируема) в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$, то операторнозначная функция $\rho_{u(\cdot)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ также непрерывна (дифференцируема) в точке t_0 .

Доказательство. Если $u, v \in S_1(\mathcal{H})$ и ρ_u, ρ_v — соответствующие операторы плотности векторных состояний, то $\|\rho_u - \rho_v\|_{T_1(\mathcal{H})} \leq 2\|u - v\|_{\mathcal{H}}$. Поэтому, если векторнозначная функция $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, непрерывна (дифференцируема) в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$, то операторнозначная функция $\rho_{u(\cdot)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ также непрерывна (дифференцируема) в точке t_0 . □

Каждому оператору плотности $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ сопоставим его ядро $\rho(x, y)$, $(x, y) \in E \times E$, определяемое условием $(\rho f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{E \times E} \rho(x, y) f(x) \bar{g}(y) dx dy \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$. Оператор плотности одно-

значно определяется своим ядром, причем отображение пространства $T_1(\mathcal{H})$ в пространство $\{\{\rho(x, y), (x, y) \in E^2\}, \rho \in T_1(H)\}$, сопоставляющее оператору плотности $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ его ядро $\rho(x, y)$, $(x, y) \in E^2$, биективно. Сюръективность следует из определения пространства образов, а инъективность следует из того, что если $\rho_1(x, y) = \rho_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in E^2$, то

$$\int_{E^2} \rho_1(x, y) f(x) \bar{g}(y) dx dy = \int_{E^2} \rho_2(x, y) f(x) \bar{g}(y) dx dy \quad (4.2)$$

при всех $f, g \in \mathcal{H}$, а значит, $\rho_1 = \rho_2$.

Пусть $\mathcal{S}(E)$ — пространство основных функций Шварца на евклидовом пространстве E . Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{H}$. Преобразование Фурье унитарно в пространстве $\mathcal{H}$, и пространство Шварца является инвариантным относительно преобразования Фурье плотным подпространством пространства $\mathcal{H}$. Заметим, что если $\mathbf{S}_h \in B(\mathcal{H})$ — оператор сдвига аргумента на вектор $h \in E$, то

$$\mathcal{F}\mathbf{S}_h\mathcal{F}^{-1} = \mathbf{M}_{e^{i(h,x)}},$$

где $\mathbf{M}_{e^{i(h,x)}}$ — оператор умножения на функцию $e^{i(h,x)}$ в пространстве $\mathcal{H}$; т. е. если $u \in \mathcal{H}$ и $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$, то $\mathcal{F}(\mathbf{S}_h u) = \mathbf{M}_{e^{i(h,x)}}\hat{u}$. Кроме того, в силу унитарности преобразования Фурье выполняется равенство $\mathcal{F}\rho_u\mathcal{F}^{-1} = \rho_{\hat{u}}$ в том смысле, что $(\mathcal{F}\rho_u\mathcal{F}^{-1}f, g) = (\hat{u}, f)(g, \hat{u})$ для любых $f, g \in \mathcal{H}$.

Лемма 4.3. Пусть h — центрированный гауссовский вектор пространства E , обладающий ковариационным оператором $\mathbf{D}$. Если $u \in \mathcal{S}(E)$, то $\frac{d}{dt}\mathbb{T}_t\rho_u|_{t=0} = \mathbf{L}\rho_u$, где

$$(\mathbf{L}\rho_u f, g) = \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\mathbf{D}}\rho_u + \rho_u\Delta_{\mathbf{D}} + 2 \sum_{j=1}^n d_j \rho_{\partial_j u} \right) f, g \right) \equiv (\mathbf{L}\rho_u f, g)$$

при всех $f, g \in \mathcal{H}$. Здесь $\Delta_{\mathbf{D}}u = \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla u)$, $u \in \mathcal{S}(E)$, $d_1, \dots, d_n$ — собственные значения ковариационного оператора $\mathbf{D}$, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис из соответствующих собственных векторов оператора $\mathbf{D}$ и $\partial_j = \frac{\partial}{\partial e_j}$.

Доказательство. Заметим, что в силу унитарности преобразования Фурье операторнозначная функция $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ дифференцируема в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда в точке t_0 дифференцируема функция $\tilde{\rho}(t) = \mathcal{F}\rho(t)\mathcal{F}^{-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, причем $\frac{d}{dt}\rho(t_0) = \mathcal{F}^{-1}\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t_0)\mathcal{F}$.

Поскольку $\rho_u(t) \equiv \mathbb{T}_t\rho_u = \int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}\rho_u\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{\mathbf{D}}(h)$, то $\rho_{\hat{u}}(t) = \mathcal{F}\mathbb{T}_t\rho_u\mathcal{F}^{-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, и при всех $t \geq 0$

$$\rho_{\hat{u}}(t) = \mathcal{F} \int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}\rho_u\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{\mathbf{D}}(h) \mathcal{F}^{-1} = \int_E \mathcal{F}\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}\rho_u\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* \mathcal{F}^{-1} d\gamma_{\mathbf{D}}(h) = \int_E \mathbf{M}_{e^{i\sqrt{t}(h,x)}}\rho_{\hat{u}}\mathbf{M}_{e^{-i\sqrt{t}(h,x)}} d\gamma_{\mathbf{D}}(h).$$

Поэтому для $u \in \mathcal{S}(E)$ в силу формулы Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа существует такая принимающая значения на отрезке $[0, 1]$ измеримая функция $\theta(t, x, h)$, $(t, x, h) \in \mathbb{R}_+ \times E \times E$, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \rho_{\hat{u}}(t) = \int_E \left(\mathbf{I} + i\sqrt{t}\mathbf{M}_{(h,x)} - \frac{t}{2}\mathbf{M}_{(h,x)^2} - i\frac{t^{3/2}}{6}\mathbf{M}_{\theta(t,x,h)(h,x)^3} \right) \rho_{\hat{u}} \times \\ \times \left(\mathbf{I} - i\sqrt{t}\mathbf{M}_{(h,x)} - \frac{t}{2}\mathbf{M}_{(h,x)^2} + i\frac{t^{3/2}}{6}\mathbf{M}_{\theta(t,x,h)(h,x)^3} \right) d\gamma_{\mathbf{D}}(h). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь и далее символ $\mathbf{M}_{f(x)}$ обозначает действующий в пространстве $\mathcal{H}$ оператор умножения на функцию f .

Поскольку случайный вектор h — центрированный гауссовский, то ряд слагаемых в выражении (4.3) обращаются в нуль. Потому с учетом утверждения леммы 4.1 получаем

$$\rho_{\hat{u}}(t) = \rho_{\hat{u}} + t\hat{\mathbf{L}}\rho_{\hat{u}} + \hat{r}_{\hat{u}}(t), \quad (4.4)$$

где оператор $\hat{\mathbf{L}}\rho_{\hat{u}}$ задан значением своей полуторалинейной формы на векторах $\phi, \psi \in H$

$$(\psi, (\hat{\mathbf{L}}(\rho_{\hat{u}})\phi) = -\frac{1}{2}(\psi, \mathbf{M}_{(\mathbf{D}x,x)}\hat{u})(u, \phi) - \frac{1}{2}(\psi, u)(\mathbf{M}_{(\mathbf{D}x,x)}\hat{u}, \phi) + \int_E (\psi, \mathbf{M}_{(h,x)}\hat{u})(\mathbf{M}_{(h,x)}\hat{u}, \phi) d\gamma_{\mathbf{D}}(h)$$

и, в силу леммы 4.1,

$$\|\hat{r}_{\hat{u}}(t)\|_{T_1(\mathcal{H})} \leq C(1 + \mathbf{M}[|h|^6])t^{3/2}\|\mathbf{M}_{\sqrt{1+\|x\|_E^6}}\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Здесь C — константа, не зависящая от u .

Отсюда и из равенства (4.4) следует, что операторнозначная функция $\rho_{\hat{u}}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ дифференцируема в точке $t_0 = 0$ и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\rho_{\hat{u}}(t)|_{t=0} = \hat{\mathbf{L}}\rho_{\hat{u}}.$$

Следовательно, ρ_u входит в область определения генератора полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, и существует производная $\left(\frac{d}{dt}\mathbb{T}_t\rho_u\right)\Big|_{t=0} = \mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{L}}\mathcal{F}\rho_u = \mathbf{L}\rho_u$. Таким образом, справедливо утверждение леммы 4.3. $\square$

Рассмотрим задачу Коши для ядра $\rho_t(x, y)$, $x, y \in E$, оператора плотности

$$\frac{d}{dt}\rho_t(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d d_k \left(\frac{d^2}{dx_k^2} + \frac{d^2}{dy_k^2} + 2 \frac{d^2}{dx_k dy_k} \right) \rho_t(x, y), \quad t > 0, (x, y) \in E^2, \quad (4.5)$$

$$\rho_t(x, y)|_{t=0} = \rho_0(x, y) \equiv u(x)\bar{u}(y). \quad (4.6)$$

Совершив ортогональную замену переменных $\xi_k = \frac{x_k + y_k}{\sqrt{2}}$, $\eta_k = \frac{x_k - y_k}{\sqrt{2}}$, $k = 1, \dots, d$, и известной функции $\tilde{\rho}_t(\xi, \eta) = \rho_t\left(\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}\right)$, получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_t(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^d d_k \frac{d^2}{d\xi_k^2} \tilde{\rho}_t(\xi, \eta), \quad t > 0, (\xi, \eta) \in E^2, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\rho}_t(\xi, \eta)|_{t=0} = \rho_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\right)\bar{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right). \quad (4.8)$$

Каждому оператору плотности чистого векторного состояния ρ_u , $u \in S_1(\mathcal{H})$ (каждому оператору плотности $\rho \in T_1(\mathcal{H})$) сопоставим однопараметрическое семейство абсолютно интегрируемых на пространстве E функций $\{\tilde{\rho}_\eta, \eta \in E\} \subset L_1(E)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\eta(\xi) &= u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\right)\bar{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right), \quad \xi \in \mathbb{R} \\ \left(\tilde{\rho}_\eta(\xi) &= \rho\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right), \quad \xi \in \mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

Тогда в силу неравенства Коши—Буняковского $\rho_\eta(\cdot) \in L_1(E) \forall \eta \in E$ и $\rho(\xi) \in L_1(E) \forall \xi \in E$.

Пусть $\Delta_{\mathbf{D}}$ — оператор, действующий в пространстве $L_1(E)$ с областью определения $\mathcal{D} = \mathcal{S}(E)$ согласно правилу

$$\Delta_{\mathbf{D}}f(\xi) = \sum_{k=1}^d d_k \frac{d^2}{d\xi_k^2} f(\xi), \quad \xi \in E, f \in \mathcal{D}.$$

Известно (см. [11]), что оператор $\Delta_{\mathbf{D}} : \mathcal{D} \rightarrow L_1(E)$ замыкаем, а его замыкание является генератором C_0 -полугруппы сжимающих операторов $e^{t\Delta_{\mathbf{D}}}$, $t \geq 0$, в пространстве $L_1(E)$.

Если $u \in \mathcal{S}(H)$, то при каждом значении $\eta \in E$ принадлежащее пространству $C(\mathbb{R}_+, L_1(E))$ решение дифференциального уравнения (4.7) с начальным условием

$$\tilde{\rho}_0(\xi, \eta) = \rho_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right), \quad \xi \in E,$$

существует, единственно и имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t(\xi, \eta) &= \left(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi d_k t}} \right) \int_E \tilde{\rho}_0(z, \eta) \exp\left(-\sum_{k=1}^d \frac{1}{4td_k} (z_k - \xi_k)^2\right) dz = \\ &= \left(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi d_k t}} \right) \int_E u_0\left(\frac{z + \eta}{\sqrt{2}}\right)\bar{u}_0\left(\frac{z - \eta}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^d \frac{1}{4td_k} (z_k - \xi_k)^2\right) dz, \quad t \geq 0, \xi \in E; \quad \eta \in E. \end{aligned}$$

Следовательно, переходя с помощью обратной замены переменных от задачи (4.7), (4.8) к задаче (4.5), (4.6), получаем утверждение.

Лемма 4.4. Пусть $u \in \mathcal{S}(H)$. Тогда решение задачи (4.5), (4.6), значения которого при каждом $x \in E$ абсолютно интегрируемы на E по y и наоборот, существует, единственно и задается равенством

$$\rho_t(x, y) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{8\pi d_k t}} \right) \int_E u_0 \left(\frac{z+x-y}{2} \right) \bar{u}_0 \left(\frac{z-x+y}{2} \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n \frac{1}{8td_k} (z_k - x_k - y_k)^2 \right) dz. \quad (4.9)$$

Лемма 4.5. Пусть $u \in \mathcal{S}(E)$. Если $\rho(t, x, y)$ — решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{2} \left(\Delta_{\mathbf{D}} + \Delta_{\mathbf{D}} + 2 \sum_{j=1}^n d_j \partial_j \rho \partial_j \right) \equiv \mathbf{L} \rho_u$$

с начальным условием $\rho_0(x, y) = u(x)\bar{u}(y)$, то $\rho(t, x, y)$ является ядром оператора плотности $(\mathbb{T}_t \rho_u)(x, y)$.

Доказательство. Проверим, что ядро $\rho(t, \cdot, \cdot)$ задает неотрицательный ограниченный оператор как неотрицательный функционал, определенный на пространстве ядерных операторов. Для этого покажем, что функционал определен и неотрицателен на множестве всех одномерных ортогональных проекторов. Для произвольного единичного вектора $v \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{E \times E} \rho_t(x, y) v(x) \bar{v}(y) dx dy &= \int_{E \times E} \tilde{\rho}_t(\xi, \eta) v \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \right) \bar{v} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \right) d\xi d\eta = \\ &= \int_{E \times E} \int_E \tilde{\rho}_0(s, \eta) \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} e^{-\frac{(\xi-s)^2}{4t}} v \left(\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{v} \left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} \right) ds d\xi d\eta = \\ &= \int_{E^3} \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} \exp \left[-\frac{(\xi-s)^2}{4t} \right] u_0 \left(\frac{s+\eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_0 \left(\frac{s-\eta}{\sqrt{2}} \right) v \left(\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{v} \left(\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}} \right) ds d\xi d\eta = \\ &= \int_{E^3} \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} \exp \left[-\frac{(h)^2}{4t} \right] u_0 \left(\frac{\xi-h+\eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_0 \left(\frac{\xi-h-\eta}{\sqrt{2}} \right) v \left(\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{v} \left(\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}} \right) dh d\xi d\eta = \\ &= \int_E \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} \exp \left[-\frac{(h)^2}{4t} \right] \int_E u_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}h \right) v(x) dx \int_E \bar{u}_0 \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}h \right) \bar{v}(y) dy dh = \\ &= \int_E (\mathbf{S}_h u, v)(v, \mathbf{S}_h u) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Следовательно, при каждом $t \geq 0$ решение $\rho_t(x, y)$, $(x, y) \in E^2$, задачи Коши (4.5), (4.6) задает неотрицательный функционал на множестве одномерных ортогональных проекторов, который продолжается по линейности до неотрицательного функционала ρ_t на пространстве $T_1(H)$, действующего, согласно (4.10), по правилу

$$\langle \rho_t, \mathbf{P}_f \rangle = \int_E (\mathbf{S}_h u, f)(f, \mathbf{S}_h u) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h).$$

При этом если $\{f_k\}$ — ОНБ в пространстве $\mathcal{H}$ и $\mathbf{P}_N = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}_{e_k}$, то числовая последовательность $\{\langle \rho_t, \mathbf{P}_N \rangle\}$ возрастает. Поскольку последовательность функций $\{(\mathbf{S}_h u, \mathbf{P}_N \mathbf{S}_h u), h \in E\}$ монотонно возрастает с ростом N и равномерно на каждом компакте $K \subset E$ сходится к предельной функции, тождественно равной единице, то в силу регулярности счетно-аддитивной гауссовской меры $\gamma_{t\mathbf{D}}$ имеем, что независимо от выбора ОНБ $\{f_k\}$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \rho_t, \mathbf{P}_N \rangle = \langle \rho_t, \mathbf{I} \rangle = 1$. Значит, неотрицательный функционал ρ_t непрерывен на пространстве операторов в ультра-слабой топологии. Следовательно, он является нормальным квантовым состоянием.

Согласно (4.10), $\rho_t(\mathbf{P}_v) = \mathbb{T}_t \rho_u(\mathbf{P}_v) \forall v \in S_1(\mathcal{H})$, следовательно, $\rho_t = \mathbb{T}_t \rho_u \forall t \geq 0$. $\square$

Рассмотрим в пространстве $T_1(H)$ линейное подпространство $\mathbb{D}$ операторов плотности вида $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \rho_{u_k}$, где $w_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = 1$; $\{u_k\}$ — последовательность единичных векторов в пространстве $\mathcal{H}$, каждый из которых принадлежит пространству $\mathcal{S}(E)$. Данное подпространство, введенное в работах [1, 14] для изучения операторов плотности и их томографического представления, послужит нам в качестве существенной области определения генератора квантовой динамической полугруппы.

Лемма 4.6. *Оператор $\mathbf{L} : \mathbb{D} \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, в пространстве $T_1(\mathcal{H})$.*

Пусть $\rho_u \in T_1(\mathcal{H})$ — чистое векторное состояние, соответствующее вектору $u \in S^1(\mathcal{H})$. Тогда $\rho_u(x, y) = u(x)\bar{u}(y)$ и $\tilde{\rho}(\xi, \eta) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\right)\bar{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right)$, а в силу леммы 4.5 задача Коши (4.7), (4.8) имеет единственное решение $\tilde{\rho}_t$, являющееся орбитой полугруппы $\mathbb{T}_t \rho_u$, $t \geq 0$.

Произвольное состояние $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ представимо как барицентр некоторой вероятностной меры на множестве чистых векторных состояний. В частности, существует такой ОНБ $\{u_k\}$ в пространстве $\mathcal{H}$ и такая вероятностная мера ν на множестве натуральных чисел, что $\rho = \int_{\mathbb{N}} \rho_{u_k} d\nu(k)$. Тогда однопараметрическое семейство преобразований $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, заданных на пространстве начальных условий $\rho_u(x, y)$, $u \in S_1(\mathcal{H})$, продолжается по линейности и по непрерывности до полугруппы линейных преобразований пространства $\{\rho(x, y), \rho \in T_1(\mathcal{H})\}$.

Для каждого $u \in \mathcal{S}(E)$ состояние ρ_u входит в область определения генератора $\mathbf{T}'_0$ полугруппы $\mathbb{T}$. Этот факт доказывается также, как и лемма 4.3, с помощью разложения (4.3) и оценок (4.1) леммы 4.1.

Поскольку пространство $\mathcal{S}(E)$ инвариантно относительно полугруппы $e^{t\Delta_D}$, $t \geq 0$, то пространство $\mathbb{D}$ инвариантно относительно полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, и входит в область определения генератора $\mathbf{T}'_0$ согласно лемме 4.3. Поскольку при этом пространство $\mathbb{D}$ плотно в пространстве $T_1(\mathcal{H})$ в силу леммы 4.1, то оно является существенной областью определения генератора в силу [11, предложение 1.7, с. 53].

5. АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРАМИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ

Пусть h — центрированный гауссовский случайный вектор в пространстве $E = \mathbb{R}^n$ с невырожденным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, т. е. $\mathbf{D} : M[(x, h)(h, y)] = (x, \mathbf{D}y) \forall x, y \in E$, и с конечным третьим моментом нормы $M(\|h\|_E^3) < +\infty$.

Положим $\mathbf{T}_h \rho = \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*$, $\rho \in T_1(\mathcal{H})$, для каждого $h \in E$. Пусть $\mathbf{T}_{\sqrt{th}}$, $t \geq 0$, — однопараметрическое семейство случайных линейных операторов в пространстве $B(T_1(\mathcal{H}))$, порожденное случайным вектором h в пространстве E .

Положим $\mathbf{F}(t)\rho = M[\mathbf{T}_{\sqrt{th}}\rho]$, $t \geq 0$, для каждого $\rho \in T_1(\mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{F}$ — однопараметрическое семейство линейных преобразований пространства $T_1(\mathcal{H})$.

Лемма 5.1. *Однопараметрическое семейство преобразований обладает следующими свойствами:*

- i) $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}_{T_1(\mathcal{H})}$ — тождественный оператор;
- ii) если $\rho \in T_1(\mathcal{H})$, $\rho \geq 0$, то $\mathbf{F}(t)\rho \geq 0$;
- iii) $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(T_1(\mathcal{H}))} \leq 1$ при всех $t \geq 0$;
- iv) $\mathbf{F}$ является непрерывным в сильной операторной топологии отображением $\mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Свойства i)–iii) очевидны. Доказательство свойства iv) подобно доказательству аналогичного свойства в теореме 3.1. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть $u \in \mathbb{D}$. Тогда вектор-функция $\mathbf{F}(t)\rho_u$, $t \geq 0$ имеет производную в нуле и*

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\rho_u\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\Delta_D \rho_u + \rho_u \Delta_D + 2 \sum_j d_j \partial_j \rho_u \partial_j\right) \equiv \mathbf{L}\rho_u.$$

Доказательство. Поскольку пространство $\mathbb{D}$ инвариантно относительно операторов $\mathbf{T}_h$, $h \in E$, то оно инвариантно относительно операторов $\mathbf{F}(t)$, $t \geq 0$. Как и в доказательстве леммы 4.3, наряду с оператор-функцией $\mathbf{F}(t)\rho_u$ рассмотрим и оператор-функцию $\mathcal{F}\mathbf{F}(t)\rho_u\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathbf{F}(t)\mathcal{F}^{-1}\rho_u$.

Для последней в доказательстве леммы 4.3 установлено равенство (4.3). Следовательно, оператор-функция $\mathcal{F}\mathbf{F}(t)\rho_u\mathcal{F}^{-1}$ допускает асимптотическое разложение (4.4), из чего следует дифференцируемость справа функции $\mathbf{F}(t)\rho_0$ в точке $t_0 = 0$ и утверждаемое леммой 5.2 равенство. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Согласно леммам 5.1 и 5.2, функция $\mathbf{F} : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(T_1(\mathcal{H}))$ удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова, а значит, справедливо утверждение теоремы 3.2. $\square$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована квантовая динамическая полугруппа, возникающая при усреднении квантовых случайных блужданий, порожденных унитарными операторами сдвига аргумента на векторы координатного пространства с гауссовским распределением. Установлено, что эволюция ядра оператора плотности под действием такой полугруппы описывается решением задачи Коши для вырожденного уравнения диффузии. Доказана сходимости последовательности композиций преобразований квантовых состояний, порожденных операторами сдвига на независимые случайные векторы, к рассматриваемой квантовой динамической полугруппе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Г. Г. О различных функциональных представлениях пространства операторов Шварца // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2018. — 151. — С. 3–9.
2. Амосов Г. Г., Бикчентаев А. М., Сакбаев В. Ж. О крайних точках множеств в пространствах операторов и пространствах состояний // Тр. МИАН. — 2024. — 324. — С. 10–23.
3. Амосов Г. Г., Манько В. И. Эволюция вероятностных мер, связанных с квантовыми системами // Теор. и мат. физ. — 2005. — 142, № 2. — С. 365–370.
4. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
5. Гоф Дж., Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г. Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Докл. РАН. — 2021. — 498, № 1. — С. 31–36.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
7. Холево А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика // Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — 83. — С. 5–132.
8. Шерстнев А. Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. — М.: Физматлит, 2008.
9. Berger M. A. Central limit theorem for products of random matrices // Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — 285, № 2. — С. 777–803.
10. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. — 1968. — 2, № 2. — С. 238–242.
11. Engel K. J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer-Verlag, 2000.
12. Gough J. E., Ding H., Amini N. Reproducing kernel Hilbert space approach to non-Markovian quantum stochastic models // ArXiv. — 2024. — 2407.07231 [quant-ph].
13. Holevo A. S. Quantum noise as noncommutative stationary random process // Int. J. Modern Phys. A. — 2022. — 37, № 20–21. — 2243011.
14. Keyl M., Kiukas J., Werner R. F. Schwartz operators // Rev. Math. Phys. — 2016. — 28, № 3. — 1630001.
15. Kossakowski A. On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems // Rept. Math. Phys. — 1972. — 3, № 4. — С. 247–274.
16. Orlov Yu. N., Sakbaev V. Zh., Shmidt E. V. Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators // Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 10. — С. 2413–2426.
17. Sakbaev V. Zh. On the law of large numbers for compositions of independent random semigroups // Russ. Math. — 2016. — 60, № 10. — С. 72–76.
18. Volovich I. V., Sakbaev V. Zh. On quantum dynamics on C^* -algebras // Proc. Steklov Inst. Math. — 2018. — 301, № 1. — С. 25–38.

Ю. Н. Орлов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: ov3159f@yandex.ru

В. Ж. Сакбаев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: fumi2003@mail.ru

UDC 517.983+517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286

EDN: NEHHXZ

Diffusion of quantum states generated by a classical random walk

Yu. N. Orlov and V. Zh. Sakbaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. We investigate a model that associates random walks in a finite-dimensional Euclidean coordinate space of a classical system with random quantum walks, i.e. random transformations of the set of states of a quantum system arising from quantization of a classical system. As is known, the convolution semigroup of Gaussian measures on a coordinate space admits a representation by a semigroup of self-adjoint contractions in the space of square-integrable functions described by the heat equation. We obtain a representation of the convolution semigroup of Gaussian measures on a coordinate space by a quantum dynamic semigroup in the space of nuclear operators. We give a description of the quantum dynamic semigroup by solutions of the Cauchy problem for a degenerate diffusion equation. We establish the generalized convergence in distribution of a sequence of quantum random walks to an operator-valued random process with values in the Abelian algebra of shift operators by a vector with a normal distribution.

Keywords: quantum master equation, quantum state, quantum random walk, Chernoff's theorem, quantum channel.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, “Diffusion of quantum states generated by a classical random walk,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 2, 275–286. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286>

REFERENCES

1. G. G. Amosov, “O razlichnykh funktsional'nykh predstavleniyakh prostranstva operatorov Shvartsa” [On various functional representations of the space of Schwartz operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2018, **151**, 3–9 (in Russian).
2. G. G. Amosov, A. M. Bikchentaev, and V. Zh. Sakbaev, “O kraynikh tochkakh mnozhestv v prostranstvakh operatorov i prostranstvakh sostoyaniy” [On extreme points of sets in operator spaces and state spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2024, **324**, 10–23 (in Russian).
3. G. G. Amosov and V. I. Man'ko, “Evolutsiya veroyatnostnykh mer, svyazannykh s kvantovymi sistemami” [Evolution of probability measures associated with quantum systems], *Teor. i mat. fiz.* [Teor. Math. Phys.], 2005, **142**, No. 2, 365–370 (in Russian).
4. O. Bratteli and D. Robinson, *Operatornye algebry i kvantovaya statisticheskaya mekhanika* [Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics], Mir, Moscow, 1982 (Russian translation).
5. J. E. Gough, Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, and O. G. Smolyanov, “Randomizirovannoe kvantovanie gamil'tonovykh sistem” [Random quantization of Hamiltonian systems], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **498**, No. 1, 31–36 (in Russian).

6. I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
7. A. S. Kholevo, “Kvantovaya veroyatnost’ i kvantovaya statistika” [Quantum probability and quantum statistics], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1991, **83**, 5–132 (in Russian).
8. A. N. Sherstnev, *Metody bilineynykh form v nekommutativnoy teorii mery i integrala* [Methods of Bilinear Forms in Noncommutative Measure and Integral Theory], Fizmatlit, Moscow, 2008 (in Russian).
9. M. A. Berger, “Central limit theorem for products of random matrices,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1984, **285**, No. 2, 777–803.
10. P. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups,” *J. Funct. Anal.*, 1968, **2**, No. 2, 238–242.
11. K. J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
12. J. E. Gough, H. Ding, and N. Amini, “Reproducing kernel Hilbert space approach to non-Markovian quantum stochastic models,” *ArXiv*, 2024, 2407.07231 [quant-ph].
13. A. S. Holevo, “Quantum noise as noncommutative stationary random process,” *Int. J. Modern Phys. A*, 2022, **37**, No. 20-21, 2243011.
14. M. Keyl, J. Kiukas, and R. F. Werner, “Schwartz operators,” *Rev. Math. Phys.*, 2016, **28**, No. 3, 1630001.
15. A. Kossakowski, “On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems,” *Rept. Math. Phys.*, 1972, **3**, No. 4, 247–274.
16. Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, and E. V. Shmidt, “Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 10, 2413–2426.
17. V. Zh. Sakbaev, “On the law of large numbers for compositions of independent random semigroups,” *Russ. Math.*, 2016, **60**, No. 10, 72–76.
18. I. V. Volovich and V. Zh. Sakbaev, “On quantum dynamics on C^* -algebras,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, **301**, No. 1, 25–38.

Yu. N. Orlov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ov3159f@yandex.ru

V. Zh. Sakbaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: fumi2003@mail.ru

УДК 517.958; 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298

EDN: NGZDSK

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ В РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

В. Л. ПРЯДИЕВ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Осуществляется один подход к описанию решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе Γ . Линейные условия трансмиссии имеют вид более общий, нежели рассмотренные в предыдущих работах. Подход основан на толковании поведения решения в вершинах Γ как граничных режимов по отношению к примыкающим рёбрам. Набор этих граничных режимов оказывается решением начальной задачи для системы дифференциальных уравнений на $[0; +\infty)$ с запаздывающими аргументами, с количеством запаздываний, неограниченно растущим при неограниченном росте аргумента.

Ключевые слова: волновое уравнение на геометрическом графе, условие трансмиссии, распространение граничного режима, система дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами, существование и единственность решения, формула решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1530.

Для цитирования: В. Л. Прядиев. Метод граничных режимов в решении начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 287–298. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье осуществлён один из возможных подходов к описанию решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе Γ при условиях трансмиссии вида

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; t) u_h^+(a, t) = k(a)u(a, t) + \varkappa(a)u_t(a, t) + m(a)u_{tt}(a, t), \quad a \in J, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

Здесь u обозначает вещественное решение названного уравнения, J — множество внутренних вершин Γ , $D(a)$ — множество единичных векторов, допустимых в точке a относительно Γ , $u_h^+(a, t)$ — правую производную функции $u(\cdot, t)$ в точке a по направлению h , $u_t(a, t)$ и $u_{tt}(a, t)$ — первую и вторую производные по временной переменной t от функции $u(a, \cdot)$; вещественные числа $k(a)$, $\varkappa(a)$ и $m(a)$ для каждой вершины a фиксированы, как и вещественные функции $\alpha(a, h; \cdot)$ — для каждой пары $(a; h)$. Заметим, что существование правых производных $u_h^+(a, t)$ влечёт непрерывность $u(\cdot, t)$ в точке a .

В случае, когда $k(a) = 0 = \kappa(a) = m(a)$ и $\alpha(a, h; \cdot) \equiv \text{const}$ для всех $a \in J$ и $h \in D(a)$, исследованию такой задачи на топологически произвольном Γ посвящены работы [2, 4, 6, 7], в которых получены разные по форме аналоги формулы Даламбера. При этом в [7] в качестве промежуточного этапа был использован метод Фурье, а в [2, 4, 6] метод Фурье не применялся, а использовалось правило прохождения бегущей волны через узел, представляющее собой, по сути, принцип Гюйгенса.

В случае же, когда $\alpha(a, h; \cdot) \not\equiv \text{const}$ или $\kappa(a) \neq 0$ хотя бы для одной $a \in J$, во-первых, метод Фурье неприменим, а во-вторых, отсутствует принцип Гюйгенса. Эти обстоятельства тем более имеют место, если вдобавок хотя бы одно из чисел $k(a)$ или $m(a)$ отлично от нуля. В этом случае подход, который мы назовём *методом граничных режимов*, был успешно применён в ситуации, когда $\alpha(a, h; \cdot) \equiv 1$, $m(a) = 0$, и ровно один из коэффициентов $\kappa(a)$ и $k(a)$ положителен, а другой равен 0 (см. [1, 5]). Метод граничных режимов, если кратко, основан на трактовке функции $u(a, \cdot)$ для каждой $a \in J$ как граничного режима для решений волновых уравнений на примыкающих рёбрах. Этот метод реализован в настоящей статье для любых функций $\alpha(a, h; \cdot)$ из $C^1[0; +\infty)$ и чисел $k(a)$, $\kappa(a)$ и $m(a)$, удовлетворяющих приводимому ниже условию (4.1). Заметим: в случаях, рассмотренных в [1, 5] и имеющих ясную физическую интерпретацию, (4.1) выполняется.

2. ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть Γ — связный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, понимаемый в соответствии с монографией [3] (см. там п. 3.1.1, первый абзац). Это означает, что Γ есть связное объединение конечного числа интервалов вида $(a; b) = \{a + \lambda(b - a) \mid 0 < \lambda < 1\}$, называемых *рёбрами*, и некоторого подмножества J множества всех концов этих интервалов. О рёбрах дополнительно предполагается, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ для любых различных рёбер γ_1 и γ_2 ; здесь и далее: если $M \subset \mathbb{R}^n$, то $\overline{M}$ — замыкание M по евклидовой метрике $\mathbb{R}^n$. Точки из J называются *внутренними вершинами* Γ . Концы рёбер, не вошедшие в J (а значит, и в Γ), называются *граничными вершинами* Γ , а их множество обозначается символом $\partial\Gamma$. Объединение всех рёбер обозначается $R(\Gamma)$. Отметим, что $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ и $\Gamma \cap \partial\Gamma = \emptyset$.

Для определения производной от функции, заданной на Γ или на $R(\Gamma)$, все рёбра Γ ориентируются, а именно, каждому $\gamma = (a, b)$, являющемуся ребром Γ , ставится в соответствие один из двух векторов единичной длины, коллинеарных вектору $b - a$. Этот вектор обозначим через h_γ .

Если вещественная функция w определена в точках ребра γ и $x \in \gamma$, то производной функции w в точке x называется число $w'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}[w(x + \varepsilon h_\gamma) - w(x)]$, т. е. производная w в точке x по вектору h_γ . Ясно, что $w'(x)$ от выбора ориентации γ (от выбора вектора h_γ) не зависит. Если вещественная функция w определена в вершине c и на примыкающих к c рёбрах, а

$$D(c) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid |h| = 1 \text{ и } (c + \varepsilon h) \in \Gamma \text{ для достаточно малых } \varepsilon > 0\}$$

— множество допустимых в точке c относительно $\overline{\Gamma}$ единичных векторов, то символом $w_h^+(c)$ обозначим правую производную w в точке c по вектору h . Если существуют $w_h^+(c + \varepsilon h)$ для достаточно малых $\varepsilon \geq 0$, то $w_{hh}^{++}(c)$ будет обозначать правую производную от функции w_h^+ в точке c по вектору h .

Если вещественная функция u определена в точках множества $R(\Gamma) \times [0; +\infty)$, то $u_x(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ будут обозначать, соответственно, первую и вторую производные функции $u(\cdot, t)$ в точке x . Если к тому же u определена в точках множества $\overline{\Gamma} \times [0; +\infty)$, и c — вершина Γ , то $u_h^+(c, t)$ и $u_{hh}^{++}(c, t)$ будут обозначать, соответственно, первую и вторую правые производные $u(\cdot, t)$ в вершине c по вектору $h \in D(c)$. Наконец, для вещественной функции u , определённой в точках множества $R(\Gamma) \times (0; +\infty)$ или в точках множества $\overline{\Gamma} \times (0; +\infty)$, символы $u_t(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$ будут обозначать, соответственно, первую и вторую производные $u(x, \cdot)$ в точке t .

Основной объект исследования в данной работе — это начально-краевая задача для волнового уравнения

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad x \in R(\Gamma), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

при условиях трансмиссии (1.1), начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Gamma}, \quad (2.2)$$

и краевых условиях

$$u(b, t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad t \geq 0; \quad (2.3)$$

здесь $u : \bar{\Gamma} \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — искомая функция, а вещественные числа $k(a)$, $\varkappa(a)$ и $m(a)$ и вещественные функции $\alpha(a, h; \cdot)$, φ и ψ заданы.

Всюду далее $J \neq \emptyset$, так как при $J = \emptyset$ задача (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) есть начально-краевая задача для волнового уравнения на конечном интервале с однородными краевыми условиями первого рода, имеющая хорошо известные эффективные представления решения, и исследование которой поэтому в настоящей статье не предполагается.

Решение u задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) понимается классически, а именно, предполагается:

- 1) u , u_t и u_{tt} непрерывны на $\bar{\Gamma} \times [0; +\infty)$,
- 2) для любого ребра γ выполнено $u|_{\gamma \times [0; +\infty)} \in C^2(\gamma \times [0; +\infty))$.

Из выполнения этих требований и уравнения (2.1) вытекает, что $u_{xx}(\cdot, t)$ при любом $t \geq 0$, во-первых, непрерывна на $R(\Gamma)$, а во-вторых, доопределяема по непрерывности на $\bar{\Gamma}$. Но тогда для любой $c \in J \cup \partial\Gamma$ и любого $h \in D(c)$ существуют $u_h^+(c, t)$ и $u_{hh}^{++}(c, t)$ (при всех $t \geq 0$). Беря теперь в (2.1) $x = c + \varepsilon h$, где $c \in J \cup \partial\Gamma$, $h \in D(c)$, а $\varepsilon \geq 0$ достаточно мало, и устремляя ε к 0, получим:

$$u_{hh}^{++}(c, t) = u_{tt}(c, t), \quad c \in J \cup \partial\Gamma, \quad h \in D(c), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Перейдём к согласованию начальных условий (2.2) с уравнением (2.1), краевыми условиями (2.3) и условиями трансмиссии (1.1). Из требований к регулярности решения задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) следует, что $\varphi \in C(\bar{\Gamma})$ и $\psi \in C(\bar{\Gamma})$, а также, что для любого ребра γ выполнены $\varphi|_{\gamma} \in C^2(\gamma)$ и $\psi|_{\gamma} \in C^1(\gamma)$. Кроме того, беря в (2.4) $t = 0$, получим

$$\varphi_{hh}^{++}(c) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(c) = u_{tt}(c, 0), \quad c \in J \cup \partial\Gamma, \quad h \in D(c), \quad \eta \in D(c). \quad (2.5)$$

Из (2.3) следует, что для любой $b \in \partial\Gamma$ не только $u(b, \cdot) \equiv 0$, но и $u_t(b, \cdot) \equiv 0 \equiv u_{tt}(b, \cdot)$, что влечёт

$$\varphi(b) = 0 = \psi(b), \quad b \in \partial\Gamma, \quad (2.6)$$

и, с учётом ещё и (2.5),

$$\varphi_{hh}^{++}(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad h \in D(b). \quad (2.7)$$

Наконец, подстановка $t = 0+$ в условия трансмиссии (1.1) даёт, в сочетании с (2.2) и (2.5), равенства

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \varphi_h^+(a) = k(a) \varphi(a) + \varkappa(a) \psi(a) + m(a) \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad a \in J, \quad \eta \in D(a). \quad (2.8)$$

Если $m(a) = 0$, то, сначала дифференцируя по t левую и правую части в условии трансмиссии (1.1) и затем полагая там $t = 0+$, получим, вдобавок к (2.8):

$$\sum_{h \in D(a)} [\alpha(a, h; 0) \psi_h^+(a) + \alpha'(a, h; 0) \varphi_h^+(a)] = k(a) \psi(a) + \varkappa(a) \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad a \in J, \quad \eta \in D(a), \quad (2.9)$$

— если, например, дополнительно $\alpha(a, h; \cdot) \in C^1[0; +\infty)$ при $a \in J$ и $h \in D(a)$. Все вышеперечисленные условия на φ и ψ , а также включения $\alpha(a, h; \cdot) \in C^1[0; +\infty)$, $a \in J$, $h \in D(a)$, ниже предполагаются выполненными.

В следующих двух разделах, начиная с леммы 3.1, мы рассматриваем только случай, когда $\partial\Gamma = \emptyset$, а в пятом разделе покажем, как случай $\partial\Gamma \neq \emptyset$ можно свести к случаю $\partial\Gamma = \emptyset$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ, СВОДЯЩЕЕ В СЛУЧАЕ $\partial\Gamma = \emptyset$ ЗАДАЧУ (2.1), (1.1), (2.2) К НАБОРУ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ

Вершины a и b из $J \cup \partial\Gamma$ назовём *смежными*, если интервал $(a; b)$ является ребром Γ . Если a и b смежны, то будем писать: $a \leftrightarrow b$. Через $h(a, b)$ обозначается далее вектор $|b - a|^{-1} \cdot (b - a)$. Поскольку для любой $a \in J$ соответствие $b \mapsto h(a, b)$ взаимно-однозначно отображает $\{b \mid b \leftrightarrow a\}$ в $D(a)$, то суммирование по всем $h \in D(a)$ (см., например, (1.1), (2.8) и (2.9)) можно заменить на

суммирование по всем b , смежным с a ; а именно, если $a \in J$ и для любого $h \in D(a)$ определено число $\beta(a, h; t)$ (здесь t рассматривается как параметр), то

$$\sum_{h \in D(a)} \beta(a, h; t) = \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \beta(a, h(a, b); t). \quad (3.1)$$

Этим переходом в суммировании, как в одну, так и в другую сторону, мы будем постоянно пользоваться.

Ниже для $a \leftrightarrow b$ определим $\varphi_{a,b}^\circ(y) = \varphi(a + y \cdot h(a, b))$ и $\psi_{a,b}^\circ(y) = \psi(a + y \cdot h(a, b))$, где в обоих случаях $0 \leq y \leq |b - a|$, и рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} z_{yy}(y, t) = z_{tt}(y, t), & 0 < y < |b - a|, \quad t > 0, \\ z(0, t) = \mu_a(t), \quad z(|b - a|, t) = \mu_b(t), & t \geq 0, \\ z(y, 0) = \varphi_{a,b}^\circ(y), \quad z_t(y, 0) = \psi_{a,b}^\circ(y), & 0 \leq y \leq |b - a|, \end{cases} \quad (3.2)$$

в которой вещественные функции μ_a и μ_b заданы. Классическое решение задачи (3.2) обозначим $v(\cdot, \cdot; a, b)$.

Замечание 3.1. Так как уже $\varphi|_{\bar{\gamma}} \in C^2(\bar{\gamma})$ и $\psi|_{\bar{\gamma}} \in C^1(\bar{\gamma})$ для любого ребра γ , то для существования $v(\cdot, \cdot; a, b)$ необходимо и достаточно выполнения ещё следующих условий согласования: $\mu_a \in C^2[0; +\infty)$, $\mu_b \in C^2[0; +\infty)$, $\mu_a(0) = \varphi(a)$, $\mu_b(0) = \varphi(b)$, $\mu'_a(0) = \psi(a)$, $\mu'_b(0) = \psi(b)$, $\mu''_a(0) = (\varphi_{a,b}^\circ)''(0)$, $\mu''_b(0) = (\varphi_{b,a}^\circ)''(0)$. При этом в силу (2.5)

$$(\varphi_{a,b}^\circ)''(0) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad b \leftrightarrow a, \quad \eta \in D(a). \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$, и пусть

(А) набор $\mu = (\mu_a)_{a \in J}$ вещественных функций, определённых на $[0; +\infty)$, таков, что для любой пары смежных вершин a и b существует $v(\cdot, \cdot; a, b)$, причём для любой $a \in J$

$$\sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) v_y(0, t; a, b) = k(a) \mu_a(t) + \kappa(a) \mu'_a(t) + m(a) \mu''_a(t), \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

Тогда функция u , определяемая равенствами

$$u(x, t) = v(|x - a|, t; a, b), \quad a \leftrightarrow b, \quad x \in [a; b], \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

является решением задачи (2.1), (1.1), (2.2). Верно и обратное: если $\partial\Gamma = \emptyset$, а функция u является решением задачи (2.1), (1.1), (2.2), то для набора $\mu = (u(a, \cdot))_{a \in J}$ выполнено свойство (А), причём если $a \leftrightarrow b$, то $v(y, t; a, b) = u(a + y \cdot h(a, b), t)$ при всех $y \in [0; |b - a|]$ и $t \geq 0$.

Доказательство. Доказательство осуществляется непосредственной проверкой. $\square$

Следствие 3.1. В случае $\partial\Gamma = \emptyset$ единственность решения задачи (2.1), (1.1), (2.2) равносильна единственности набора μ , удовлетворяющего условию (А) леммы 3.1.

Переформулируем теперь условие (А) леммы 3.1, исключая из (3.4) $v_y(0, t; a, b)$ за счёт возможности выразить $v(\cdot, \cdot; a, b)$ через φ , ψ , μ_a и μ_b .

Зафиксируем пока смежные вершины a и b и договоримся при такой фиксации использовать ℓ вместо $|b - a|$, а ξ — как общее обозначение для функций μ_a и μ_b . Обозначим через $\varphi_{a,b}$ нечётную и 2ℓ -периодическую функцию, определённую на $\mathbb{R} \setminus (\ell\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел) и совпадающую с $\varphi_{a,b}^\circ$ на $(0; \ell)$. Производная $\varphi'_{a,b}$ доопределяема по непрерывности в точках $\ell\mathbb{Z}$; это доопределение обозначим через $\overline{\varphi'_{a,b}}$. Так же, как по сужению $\varphi_{a,b}^\circ|_{(a;b)}$ мы определили только что $\varphi_{a,b}$, определим функцию $\psi_{a,b}$ по сужению $\psi_{a,b}^\circ|_{(a;b)}$. Всюду далее функции $\varphi_{a,b}$ и $\psi_{a,b}$ считаются доопределёнными в точках из $\ell\mathbb{Z}$ следующим образом: в точках из $\ell\mathbb{N}$ — по непрерывности справа, а в точках из $\ell(\{0\} \cup (-\mathbb{N}))$ — по непрерывности слева. Такое доопределение согласовано с формулой оператора $\mathcal{G}_\ell$, описывающего распространение правого граничного режима для волнового уравнения на отрезке:

$$(\mathcal{G}_\ell \xi)(y) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{\sigma_1(y, \ell)} \xi(y - (2p + 1)\ell) & \text{при } y \geq 0, \\ -(\mathcal{G}_\ell \xi)(-y) & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $\sigma_1(y, \ell)$ есть целая часть числа $(y - \ell)/(2\ell)$.

Решение задачи (3.2) представимо в виде:

$$v(y, t; a, b) = f_{a,b}(y+t) + f_{a,b}(y-t) + \frac{1}{2} \int_{y-t}^{y+t} \psi_{a,b}(s) ds, \quad 0 \leq y \leq \ell, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

где $f_{a,b} = \frac{1}{2} \varphi_{a,b} + \mathcal{F}_\ell \mu_a + \mathcal{G}_\ell \mu_b$, а $(\mathcal{F}_\ell \xi)(y) = (\mathcal{G}_\ell \xi)(\ell - y)$, $y \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$v_y(0, t; a, b) = \overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_\ell \mu'_b)(t) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t - \ell) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t + \ell), \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

(здесь $\mathcal{G}_\ell \xi'$ обозначает не производную функции $\mathcal{G}_\ell \xi$, а образ производной ξ' при действии на неё оператора $\mathcal{G}_\ell$). Для этого сначала заметим, что слагаемые, суммой которых определяется $f_{a,b}$, дифференцируемы в точках, не лежащих в $\ell\mathbb{Z}$, и поэтому правую часть (3.7) можно дифференцировать почленно в точках множества $\Pi \setminus \chi$, где $\Pi = (0; \ell) \times (0; +\infty)$, $\chi = \{(y, t) \mid (y+t) \in \ell\mathbb{Z} \vee (y-t) \in \ell\mathbb{Z}\}$. Далее, если точка $(y; t)$ лежит в какой-либо из компонент связности Ω множества $\Pi \setminus \chi$, то те или иные верхние пределы суммирования $\sigma_1(t+y, \ell)$, $\sigma_1(\pm(t-y), \ell)$, $\sigma_1(t+(\ell-y), \ell)$ и $\sigma_1(\pm(t-(\ell-y)), \ell)$, возникающие в (3.7) по применению формулы (3.6), зависят только от Ω , но не зависят от выбора $(y; t) \in \Omega$; значит, при дифференцировании внутри Ω функций $(\mathcal{G}_\ell \xi)(y \pm t)$ и $(\mathcal{F}_\ell \xi)(y \pm t)$ производные от сумм, определяющих эти функции согласно формуле (3.6), можно вносить под знак этих сумм — ибо количество слагаемых в этих суммах фиксировано для всех $(y; t) \in \Omega$. Таким образом, дифференцирование (3.7) по y даёт

$$v_y(y, t; a, b) = \frac{1}{2} \overline{\varphi'_{a,b}}(y+t) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(y+t-\ell) + (\mathcal{G}_\ell \mu'_b)(y+t) + \frac{1}{2} \overline{\varphi'_{a,b}}(t-y) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t-y+\ell) + (\mathcal{G}_\ell \mu'_b)(t-y) + \frac{1}{2} \psi_{a,b}(y+t) + \frac{1}{2} \psi_{a,b}(t-y), \quad (y; t) \in \Pi \setminus \chi. \quad (3.9)$$

Непосредственно проверяется, что предельный переход в правой части (3.9) при $(y, t) \rightarrow (y_0, t_0) \in (\Pi \cap \chi) \cup \partial\Pi$, где $\partial\Pi$ — граница Π , даёт такое же выражение, как и в правой части (3.9), только при $y = y_0$ и $t = t_0$, т. е. в (3.9) вместо примечания $(y; t) \in \Pi \setminus \chi$ можно написать $(y; t) \in \overline{\Pi}$. Взяв теперь $y = 0$ в (3.9), получим (3.8).

В силу (3.6) $(\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t + \ell) = \mu'_a(t) + (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t - \ell)$ для любого $t > 0$. С учётом этого подстановка (3.8) в левую часть (3.4) даёт

$$\sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \left\{ \overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \mu'_b)(t) - 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \mu'_a)(t - |b-a|) - \mu'_a(t) \right\} = \\ = m(a) \mu''_a(t) + \varkappa(a) \mu'_a(t) + k(a) \mu_a(t), \quad t > 0, \quad a \in J,$$

т. е. $\mu|_{(0; +\infty)}$ есть решение следующей системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами:

$$m(a) \nu''_a(t) + \left(\varkappa(a) + \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \right) \nu'_a(t) + k(a) \nu_a(t) = \\ = \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \left\{ 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \nu'_b)(t) - 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \nu'_a)(t - |b-a|) + \overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) \right\}, \quad t > 0, \quad a \in J; \quad (3.10)$$

$\nu = (\nu_a)_{a \in J}$ в (3.10) — искомое решение. Принимая во внимание, что μ определён на $[0; +\infty)$, а также то, что в дальнейшем для системы (3.10) мы будем рассматривать начальную задачу в точке $t = 0$, договоримся всегда считать, что решение ν этой системы определено на $[0; +\infty)$.

Итак, с учётом замечания 3.1, нами доказана следующая лемма.

Лемма 3.2. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$. Тогда условие (A) леммы 3.1 эквивалентно тому, что

- 1) $\mu \in C^2[0; +\infty)$,
- 2) μ является решением системы уравнений (3.10),
- 3) для любой $a \in J$ выполнены равенства

$$\mu_a(0) = \varphi(a), \quad \mu'_a(0) = \psi(a), \quad \mu''_a(0) = (\varphi_{a,b}^\circ)''(0) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a) - \text{при всех } b \leftrightarrow a \text{ и } \eta \in D(a). \quad (3.11)$$

Следующая лемма показывает, что список равенств в (3.11) может быть уменьшен до естественного списка начальных условий для системы уравнений (3.10).

Лемма 3.3. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$ и

$$|m(a)| + \left| \varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right| > 0, \quad a \in J. \quad (3.12)$$

Тогда условие (A) леммы 3.1 эквивалентно тому, что μ принадлежит $C^2[0; +\infty)$ и является решением начальной задачи

$$\nu_a(0) = \varphi(a), \quad a \in J, \quad (3.13)$$

$$m(a) \neq 0 \Rightarrow \nu'_a(0) = \psi(a), \quad a \in J. \quad (3.14)$$

для системы уравнений (3.10).

Всюду далее для каждого $a \in J$ левую часть в равенстве (3.10) будем обозначать через $(L_a\nu)(t)$, а правую — через $(M_a\nu)(t)$.

Доказательство леммы 3.3. В силу леммы 3.2 достаточно доказать, что если в условиях леммы 3.3 μ есть решение задачи (3.10), (3.13), (3.14), то для любой $a \in J$ помимо первого равенства в (3.11) выполнены как второе (в том числе при $m(a) = 0$), так и остальные.

Для любых смежных вершин a и b при достаточно малых $t > 0$ имеем $\sigma_1(t, |b-a|) = -1$ и $\sigma_1(|b-a|-t, |b-a|) = -1$, и тогда из (3.6) следует, что $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_b)(t) = 0$ и $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_a)(t-|b-a|) = 0$ — при таких t . Поэтому из (3.10) вытекает:

$$(L_a\nu)(t) = \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) (\varphi'_{a,b}(t) + \psi_{a,b}(t)), \quad t > 0 \text{ и достаточно мало, } a \in J. \quad (3.15)$$

Беря $\nu = \mu$ в (3.15) и переходя к пределу при $t \rightarrow 0+$, получим с учётом (3.1) равенства

$$(L_a\mu)(0+) = \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) (\varphi_h^+(a) + \psi(a)), \quad a \in J, \quad (3.16)$$

$$(L_a\mu)'(0+) = \sum_{h \in D(a)} \{ \alpha'(a, h; 0) [\varphi_h^+(a) + \psi(a)] + \alpha(a, h; 0) [\varphi_{hh}^{++}(a) + \psi_h^+(a)] \}, \quad a \in J. \quad (3.17)$$

Допустим пока, что $m(a) \neq 0$ для некоторой $a \in J$. Тогда второе равенство в (3.11) выполнено, ибо μ удовлетворяет условию (3.14). С учётом этого (3.16) принимает вид:

$$m(a)\mu''_a(0) + \left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) \psi(a) + k(a)\varphi(a) = \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) (\varphi_h^+(a) + \psi(a)). \quad (3.18)$$

В силу (2.8) равенство (3.18) эквивалентно тому, что

$$m(a)(\mu''_a(0) - \varphi_{\eta\eta}^{++}(a)) = 0, \quad \eta \in D(a),$$

откуда ввиду $m(a) \neq 0$ следуют и остальные равенства из (3.11). Итак, при $m(a) \neq 0$ все равенства из (3.11) выполняются.

Пусть теперь $m(a) = 0$ для какой-то $a \in J$. Тогда (3.16) принимает вид:

$$\left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) \mu'_a(0) + k(a)\varphi(a) = \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) (\varphi_h^+(a) + \psi(a)). \quad (3.19)$$

С учётом (2.8) равенство (3.19) эквивалентно тому, что

$$\left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) (\mu'_a(0) - \psi(a)) = 0,$$

откуда в силу (3.12) следует второе равенство из (3.11). С учётом него и $m(a) = 0$, равенство (3.17) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in D(a)} \alpha'(a, h; 0) \psi(a) + \left(\kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) \mu_a''(0) + k(a) \psi(a) = \\ & = \sum_{h \in D(a)} \{ \alpha'(a, h; 0) [\varphi_h^+(a) + \psi(a)] + \alpha(a, h; 0) [\varphi_{hh}^{++}(a) + \psi_h^+(a)] \}. \end{aligned}$$

Это равенство в силу (2.9) и (2.5) эквивалентно равенствам

$$\left(\kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) [\mu_a''(0) - \varphi_{\eta\eta}^{++}(a)] = 0, \quad \eta \in D(a),$$

из которых ввиду (3.12) следуют остальные равенства из (3.11).

Выполнение равенств (3.11) окончательно доказано, а вместе с этим доказана и лемма 3.3. $\square$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (2.1), (1.1), (2.2) В СЛУЧАЕ $\partial\Gamma = \emptyset$

С помощью представления (3.7) при $\partial\Gamma = \emptyset$ леммы 3.1 и 3.3 сводят решение задачи (2.1), (1.1), (2.2) к решению задачи (3.10), (3.13), (3.14). Поэтому естественно выяснить то, как разрешима последняя.

Следующая лемма — о том, что в лемме 3.3 изначальные требования к гладкости решения задачи (3.10), (3.13), (3.14) можно понизить.

Лемма 4.1. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$ и

$$|m(a)| + \left| \kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; t) \right| > 0, \quad a \in J, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Тогда решение задачи (3.10), (3.13), (3.14) существует, единственно и дважды непрерывно дифференцируемо на $[0; +\infty)$.

Доказательство. Доказательство проведём методом шагов. Для этого рассмотрим множество

$$S = \left(\bigcup_{a \in J} \left(\bigcup_{b \mapsto a} |b - a| \mathbb{N} \right) \right) \cup \{0\},$$

которое представимо в виде: $S = \{s_0; s_1; s_2; \dots\}$, где $s_0 = 0$ и $s_i < s_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Отметим:

$$s_i - s_{i-1} \leq \rho = \min \{ |b - a| \mid a \in J, b \mapsto a \}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

На каждом $[0; s_i]$, $i \in \mathbb{N}$, определим набор вещественных функций $\mu^i = (\mu_a^i)_{a \in J}$ согласно правилу:

1) μ^1 есть решение задачи

$$(L_a \nu)(t) = (M_a \nu)(t), \quad t \in [0; s_1], \quad a \in J, \quad (4.3)$$

$$\nu_a(0) = \varphi(a), \quad a \in J, \quad (4.4)$$

$$m(a) \neq 0 \Rightarrow \nu'_a(0) = \psi(a), \quad a \in J; \quad (4.5)$$

2) если $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то μ^i определён на $[0; s_i]$, $\mu^i|_{[0; s_{i-1})} = \mu^{i-1}$, а $\mu^i|_{[s_{i-1}; s_i]}$ есть решение задачи

$$(L_a \nu)(t) = (M_a \mu^i)(t), \quad t \in [s_{i-1}; s_i], \quad a \in J, \quad (4.6)$$

$$\nu_a(s_{i-1}) = \mu_a^{i-1}(s_{i-1}-), \quad a \in J, \quad (4.7)$$

$$m(a) \neq 0 \Rightarrow \nu'_a(s_{i-1}) = (\mu_a^{i-1})'(s_{i-1}-), \quad a \in J. \quad (4.8)$$

Отметим сразу, что все аргументы функций μ_b^i и μ_a^i , входящих в правые части (4.6), не превосходят $t - \rho$, а значит, в силу (4.2) все эти аргументы лежат в $[0; s_{i-1}]$. Это означает, что правые части в (4.6) корректно определены, если существует функция μ^{i-1} — так как по определению $\mu^i|_{[0; s_{i-1})} = \mu^{i-1}$.

Если μ — решение задачи (3.10), (3.13), (3.14), то μ с необходимостью удовлетворяет равенствам $\mu(t) = \mu^i(t)$, $t \in [s_{i-1}; s_i]$, $i \in \mathbb{N}$; поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любого $i \in \mathbb{N}$ набор μ^i существует, единствен и принадлежит $C^2[0; s_i]$, причём существуют конечные пределы $(\mu^i)^{(q)}(s_i-)$, $q = \overline{0, 2}$. Это мы докажем индукцией по i .

В силу своего определения $s_1 = \rho$, поэтому из $t \in (0; s_1)$ следует, что $\sigma_1(t, |b - a|) = -1$ и $\sigma_1(|b - a| - t, |b - a|) = -1$ для любых смежных вершин a и b , и потому при $t \in (0; s_1)$ в силу (3.6) выполнены равенства $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_b)(t) = 0$ и $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_a)(t - |b - a|) = 0$ при любых $a \in J$ и $b \leftrightarrow a$ — какими бы ни были ν_b и ν_a . Но тогда $\mu^1|_{(0; s_1)}$ есть решение следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений либо второго порядка (если $m(a) \neq 0$), либо первого (если $m(a) = 0$):

$$\begin{aligned} m(a)\nu''_a(t) + \left(\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; t) + \kappa(a) \right) \nu'_a(t) + k(a)\nu_a(t) = \\ = \sum_{b | b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \left(\overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) \right), \quad t \in (0; s_1), \quad a \in J, \end{aligned} \quad (4.9)$$

причём с непрерывно дифференцируемыми на $(0; s_1)$ коэффициентами и правыми частями, производные которых являются непрерывно доопределяемыми в точках 0 и s_1 . Значит, μ^1 существует, единственно, принадлежит $C^2[0; s_1]$ (если $m(a) = 0$, то надо дополнительно учесть (4.1)) и имеет конечные пределы $(\mu^1)^{(q)}(s_1-)$, $q = \overline{0, 2}$. База индукции установлена.

Укажем ещё одно свойство μ^1 , которое нам понадобится в дальнейшем:

$$(\mu^1)'(0) = \psi(a) \text{ и } (\mu^1)''(0) = (\varphi_{a,b}^\circ)''(0) \text{ — для всех } a \in J \text{ и } b \leftrightarrow a. \quad (4.10)$$

Детали его обоснования мы здесь не приводим, так как оно выводится из того, что μ^1 есть решение (4.9), *точно так же*, как при доказательстве леммы 3.3 мы вывели выполнение второго и последующих равенств в (3.11) из того, что μ есть решение (3.15).

Предположим теперь, что для некоторого $j \in \mathbb{N}$ набор μ^j существует, единствен и принадлежит $C^2[0; s_j]$, причём существуют конечные пределы $(\mu^j)^{(q)}(s_j-)$, $q = \overline{0, 2}$. Тогда для установления аналогичных свойств набора μ^{j+1} достаточно доказать, что, во-первых, $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1}]}$ существует, единственно и принадлежит $C^2[s_j; s_{j+1}]$; во-вторых, существуют конечные $(\mu^{j+1})^{(q)}(s_{j+1}-)$, $q = \overline{0, 2}$; и в-третьих,

$$(\mu^{j+1})'(s_j+) = (\mu^j)'(s_j-) \text{ и } (\mu^{j+1})''(s_j+) = (\mu^j)''(s_j-). \quad (4.11)$$

В силу замечания, сделанного сразу после формулировки задачи (4.6)–(4.8), эта задача при $i = j + 1$ есть задача Коши для системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (второго или первого порядка) с непрерывно дифференцируемыми на $[s_j; s_{j+1}]$ коэффициентами и правыми частями $M_a\mu^j$. Значит, $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1}]}$ существует, единственно и принадлежит $C^2[s_j; s_{j+1}]$ (опять же, если $m(a) = 0$, то надо дополнительно учесть (4.1)). Более того, при $i = j + 1$ производные коэффициентов и правых частей в (4.6) непрерывно доопределяемы в точке s_{j+1} слева, поэтому $(\mu^{j+1})^{(q)}(s_{j+1}-)$, $q = \overline{0, 2}$, и $(\mu^{j+1})^{(q)}(s_{j+1}+)$, $q = \overline{0, 2}$, существуют и конечны. Остаётся доказать (4.11).

Из существования левых частей равенств из (4.11), а также того, что μ^{j+1} есть решение (4.6) при $i = j + 1$, вытекает существование и равенство пределов $(L_a\mu^{j+1})(s_j+)$ и $(M_a\mu^{j+1})(s_j+)$ для всех $a \in J$. Кроме того, в силу предположения индукции $(L_a\mu^j)(s_j-) = (M_a\mu^j)(s_j-)$ для всех $a \in J$. Поэтому для любой $a \in J$

$$(L_a\mu^{j+1})(s_j+) - (L_a\mu^j)(s_j-) = (M_a\mu^{j+1})(s_j+) - (M_a\mu^j)(s_j-). \quad (4.12)$$

Зафиксируем далее $a \in J$ и рассмотрим множества $B_1(a) = \{b | b \leftrightarrow a \wedge s_j \in |b - a|(2\mathbb{N} - 1)\}$ и $B_2(a) = \{b | b \leftrightarrow a \wedge s_j \in |b - a|(2\mathbb{N})\}$. Пусть $\sigma_2(t, \ell)$ обозначает целую часть числа $t/(2\ell)$. Тогда

правую часть (4.12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B_1(a)} \alpha(a, h(a, b); s_j) \left\{ 2(\mu_b^j)'(s_j - [2\sigma_1(s_j, |b-a|) + 1] \cdot |b-a|) + \psi_{a,b}(s_j) - \psi_{a,b}(s_j-) \right\} + \\ & + \sum_{b \in B_2(a)} \alpha(a, h(a, b); s_j) \left\{ -2(\mu_a^j)'(s_j - [2\sigma_2(s_j, |b-a|) + 1] \cdot |b-a|) + \psi_{a,b}(s_j) - \psi_{a,b}(s_j-) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) равно 0. Действительно, во-первых, аргументы там у $(\mu_b^j)'$ и $(\mu_a^j)'$ равны 0, что вытекает из определения $\sigma_1(t, \ell)$ и $\sigma_2(t, \ell)$; и во-вторых, в силу определения $\psi_{a,b}$, если $b \in B_1(a)$, то $\psi_{a,b}(s_j) = -\psi(b)$ и $\psi_{a,b}(s_j-) = \psi(b)$, а если $b \in B_2(a)$, то $\psi_{a,b}(s_j) = \psi(a)$ и $\psi_{a,b}(s_j-) = -\psi(a)$. В силу чего и получается, если учесть ещё и первое равенство из (4.10), что выражение (4.13) равно 0.

Итак, правая часть в (4.12) равна 0. Но тогда, расписывая подробнее левую часть (4.12), получим:

$$\begin{aligned} & m(a) \left[(\mu_a^{j+1})''(s_j+) - (\mu_a^j)''(s_j-) \right] + \\ & + \left(\kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; s_j) \right) \left[(\mu_a^{j+1})'(s_j+) - (\mu_a^j)'(s_j-) \right] = 0, \quad a \in J. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если $m(a) \neq 0$, то выполнено первое равенство из (4.11), поскольку $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1})}$ удовлетворяет условию (4.8) при $i = j+1$. Но тогда из (4.14) следует и второе равенство, выписанное в (4.11). Остаётся рассмотреть случай $m(a) = 0$. В этом случае из (4.14) в силу (4.1) сразу следует первое равенство из (4.11), и остаётся доказать выполнение второго из равенств (4.11) при $m(a) = 0$.

Подставляя $\mu^j|_{[s_{j-1}; s_j]}$ и $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1})}$ в (4.6) соответственно при $i = j$ и при $i = j+1$, получим равенства $(L_a \mu^j)(t) = (M_a \mu^j)(t)$, $s_{j-1} < t < s_j$, и $(L_a \mu^{j+1})(t) = (M_a \mu^{j+1})(t)$, $s_j < t < s_{j+1}$, левые и правые части которых допускают почленное дифференцирование — независимо от того, равно $m(a)$ нулю или нет. Выполняя после этого дифференцирование предельный переход при $t \rightarrow s_j-$ в первом из этих равенств и при $t \rightarrow s_j+$ во втором, придём к равенству

$$(L_a \mu^{j+1})'(s_j+) - (L_a \mu^j)'(s_j-) = (M_a \mu^{j+1})'(s_j+) - (M_a \mu^j)'(s_j-). \quad (4.15)$$

В силу (3.6) левая часть равенства (4.15) при $m(a) = 0$ приобретает вид (учитываем также равенство $\mu^{j+1}(s_j+) = \mu^j(s_j-)$ и первое равенство в (4.11)):

$$\left(\kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; s_j) \right) \left[(\mu_a^{j+1})''(s_j+) - (\mu_a^j)''(s_j-) \right], \quad (4.16)$$

а правая —

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B_1(a)} \left\{ \alpha'(a, h(a, b); s_j) \left[2(\mu_b^j)'(0) + \psi_{a,b}(s_j+) - \psi_{a,b}(s_j-) \right] + \right. \\ & + \alpha(a, h(a, b); s_j) \left[2(\mu_b^j)''(0) + \varphi_{a,b}''(s_j+) + \psi_{a,b}'(s_j+) - \varphi_{a,b}''(s_j-) - \psi_{a,b}'(s_j-) \right] \left. \right\} + \\ & + \sum_{b \in B_2(a)} \left\{ \alpha'(a, h(a, b); s_j) \left[-2(\mu_a^j)'(0) + \psi_{a,b}(s_j+) - \psi_{a,b}(s_j-) \right] + \right. \\ & + \alpha(a, h(a, b); s_j) \left[-2(\mu_a^j)''(0) + \varphi_{a,b}''(s_j+) + \psi_{a,b}'(s_j+) - \varphi_{a,b}''(s_j-) - \psi_{a,b}'(s_j-) \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Последнее выражение равно 0. Действительно, первая и третья квадратные скобки в нём равны 0 — это доказывается *точь-в-точь* такими же выкладками, что равенство нулю выражения (4.13). Вторая и четвёртая квадратные скобки равны соответственно $2(\mu_b^1)''(0) - 2(\varphi_{a,b}^\circ)''(|b-a|)$ и $-2(\mu_a^1)''(0) + 2(\varphi_{a,b}^\circ)''(0)$. Но оба последних выражения — нулевые, в силу второго равенства из (4.10) и того, что $(\varphi_{a,b}^\circ)''(|b-a|) = (\varphi_{b,a}^\circ)''(0)$. Равенство нулю правой части (4.15) влечёт равенство нулю выражения (4.16), что в свою очередь влечёт с учётом (4.1) второе из равенств (4.11). Заявленные свойства наборов μ^i , $i \in \mathbb{N}$, окончательно доказаны, а вместе с ними доказана и лемма 4.1. $\square$

Теорема 4.1. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$ и выполнено (4.1). Тогда решение задачи (2.1), (1.1), (2.2) существует, единственно и определяется равенствами (3.5), в которых $v(\cdot, \cdot; a, b)$ определяется формулой (3.7), а $(\mu_a)_{a \in J}$ есть решение начальной задачи (3.10), (3.13), (3.14).

Доказательство. Теорема 4.1 есть следствие леммы 3.1, следствия 3.1 и лемм 3.3 и 4.1. $\square$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) В СЛУЧАЕ $\partial\Gamma \neq \emptyset$

Пусть $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Поскольку величины углов между рёбрами Γ при описании и при решении задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) не играют роли, то можно считать, что, во-первых, к каждой граничной вершине Γ примыкает ровно одно ребро, и во-вторых, существует линейное подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n - 1$ такое, что $\partial\Gamma \subset \mathcal{L}$ и $J \subset \delta x_0 + \mathcal{L}$, где $x_0 \perp \mathcal{L}$, $|x_0| = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $\mathcal{S}$ — отображение симметрии в $\mathbb{R}^n$ относительно $\mathcal{L}$, и рассмотрим сначала геометрический граф $\Gamma_1 = \mathcal{S}(\Gamma)$ с множеством внутренних вершин $J_1 = \mathcal{S}(J)$ и с $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma$, а затем геометрический граф $\Gamma_{\times 2} = \bar{\Gamma} \cup \Gamma_1$ без граничных вершин и с множеством внутренних вершин $J_{\times 2} = J \cup J_1 \cup \partial\Gamma$. Множество допустимых относительно $\Gamma_{\times 2}$ единичных векторов в вершине $a \in J_{\times 2}$ будем обозначать $D_{\times 2}(a)$. Заметим, что в силу построения $a \in J \Rightarrow [D_{\times 2}(a) = D(a) \wedge D_{\times 2}(\mathcal{S}(a)) = \mathcal{S}(D(a))]$ и $a \in \partial\Gamma \Rightarrow D_{\times 2}(a) = \{h_a; \mathcal{S}(h_a)\}$, где h_a — единственный вектор из $D(a)$; при этом $\mathcal{S}(h_a) \neq h_a$.

Рассмотрим задачу, получающуюся из задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) «нечётным продолжением» на $\Gamma_{\times 2}$:

$$\omega_{xx}(x, t) = \omega_{tt}(x, t), \quad x \in R(\Gamma_{\times 2}), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$\sum_{h \in D_{\times 2}(a)} \alpha_{\times 2}(a, h; t) \omega_h^+(a, t) = k_{\times 2}(a) \omega(a, t) + \varkappa_{\times 2}(a) \omega_t(a, t) + m_{\times 2}(a) \omega_{tt}(a, t), \quad a \in J_{\times 2}, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$\omega(x, 0) = \varphi_{\times 2}(x) \quad \text{и} \quad \omega_t(x, 0) = \psi_{\times 2}(x), \quad x \in \Gamma_{\times 2}, \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{\times 2}(x) &= \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in \bar{\Gamma} \\ -\theta(\mathcal{S}^{-1}(x)), & \text{если } x \in \Gamma_1 \end{cases} \quad \text{для } \theta \in \{\varphi, \psi\}, \\ \alpha_{\times 2}(a, h; t) &= \begin{cases} \alpha(a, h; t), & \text{если } a \in J \text{ и } h \in D(a), \\ \alpha(\mathcal{S}^{-1}(a), \mathcal{S}^{-1}(h); t), & \text{если } a \in J_1 \text{ и } h \in D_{\times 2}(a), \\ 1, & \text{если } a \in \partial\Gamma \text{ и } h \in D_{\times 2}(a), \end{cases} \\ \zeta_{\times 2}(a) &= \begin{cases} \zeta(a), & \text{если } a \in J \\ \zeta(\mathcal{S}^{-1}(a)), & \text{если } a \in J_1 \\ 0, & \text{если } a \in \partial\Gamma \end{cases} \quad \text{для } \zeta \in \{k, \varkappa, m\}. \end{aligned}$$

С учётом (2.6) и (2.7), если выполнено (4.1), то к задаче (5.1)–(5.3) применимы все результаты разделов 3 и 4. Обозначая через ω решение задачи (5.1)–(5.3), получим, что сужение $\omega|_{\bar{\Gamma} \times [0; +\infty)}$ будет решением задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) тогда и только тогда, когда

$$\omega(a, t) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad t > 0. \quad (5.4)$$

Заметим: функция z , определяемая равенством $z(x, t) = \omega(\mathcal{S}(x), t)$ при $x \in \Gamma_{\times 2}$ и $t \geq 0$, является решением задачи (5.1)–(5.3) с той лишь разницей, что вместо $\varphi_{\times 2}$ и $\psi_{\times 2}$ надо в ней взять $-\varphi_{\times 2}$ и $-\psi_{\times 2}$ соответственно. Значит, $\omega(\mathcal{S}(x), t) = -\omega(x, t)$ для всех $x \in \Gamma_{\times 2}$ и $t \geq 0$. Отсюда и следует (5.4), поскольку $\mathcal{S}(a) = a$ для любой $a \in \partial\Gamma$.

Обратно, если u — решение задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3), то $u_{\times 2}(\cdot, t)$ есть решение задачи (5.1)–(5.3), что, в частности, влечёт единственность u как решения задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3).

Итак, установлен следующий факт.

Теорема 5.1. Если $\partial\Gamma \neq \emptyset$ и выполнено условие (4.1), то сужение на $\bar{\Gamma} \times [0; +\infty)$ решения задачи (5.1)–(5.3) является единственным решением задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3). При этом если $x \in \Gamma$, то $\omega(\mathcal{S}(x), t) = -u(x, t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глотов Н. В., Прядиев В. Л. Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа «жидкого» трения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2006. — № 2. — С. 185–193.
2. Копытин А. В., Прядиев В. Л. Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми рёбрами // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2001. — № 1. — С. 104–107.
3. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
4. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети // Докл. РАН. — 2003. — 388, № 1. — С. 16–18.
5. Прядиев В. Л. Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети // Spectral and Evolution problems. — 2005. — 15. — С. 132–139.
6. Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Соврем. мат. и её прилож. — 2006. — 38. — С. 82–94.
7. Cattaneo C., Fontana L. D’Alembert formula on finite one-dimensional networks // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 284, № 2. — С. 403–424.

В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: pryad@mail.ru

UDC 517.958; 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298

EDN: NGZDSK

The boundary regimes method in solving of the initial-boundary value problem for the wave equation on a geometrical graph

V. L. Pryadiev

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. An approach to describing the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation on a finite and bounded geometrical graph Γ is implemented. The linear transmission conditions have a more general form than that considered in previous works. The approach is based on interpreting the behavior of the solution at the vertices of Γ as boundary regimes with respect to adjacent edges. The set of these boundary regimes turns out to be a solution to the initial value problem for a system of delays differential equations on $[0; +\infty)$ with the number of delaying arguments infinitely increasing with infinitely increasing of the argument.

Keywords: wave equation on geometrical graph, transmission condition, propagation of boundary regime, delays differential equations system, existence and uniqueness of solution, solution formula.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant No. 075-02-2025-1530.



For citation: V. L. Pryadiev, “The boundary regimes method in solving of the initial-boundary value problem for the wave equation on a geometrical graph,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 287–298. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298>

REFERENCES

1. N. V. Glotov, V. L. Pryadiev, “Opisaniye resheniy volnovogo uravneniya na konechnom i ogranichenom geometricheskom grafe pri usloviyakh transmissii tipa «zhidkogo» treniya” [Description of solutions of the wave equation on a finite and bounded geometric graph under «fluid» friction transmission conditions], *Vestn. Voronezh. gos. un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2006, No. 2, 185–193 (in Russian).
2. A. V. Kopytin, V. L. Pryadiev, “Ob analoge formuly D’Alemberta i spektre laplasiana na grafe s soizmerimymi rebrami” [On the analogue of D’Alembert’s formula and the spectrum of the Laplacian on a graph with commensurable edges], *Vestn. Voronezh. gos. un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2001, No. 1, 104–107 (in Russian).
3. Yu. V. Pokorniy, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov *Differentsialnyye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometrical Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
4. Yu. V. Pokorniy, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, “Volnovoye uravneniye na prostranstvennoy seti” [The wave equation on a spatial network], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2003, **388**, No. 1, 16–18 (in Russian).
5. V. L. Pryadiev, “Odin podkhod k opisaniyu v konechnoy forme resheniy volnovogo uravneniya na prostranstvennoy seti” [An approach to finite form describing of solutions to the wave equation on a spatial network], *Spectral and Evolution Problems*, 2005, **15**, 132–139 (in Russian).
6. V. L. Pryadiev, “Opisaniye resheniya nachalno-kraevoy zadachi dlya volnovogo uravneniya na odnomernoy prostranstvennoy seti cherez funktsiyu Grina sootvetstvuyushchey kraevoy zadachi dlya obyknovennogo differentsialnogo uravneniya” [Description of solutions to the initial-boundary value problem for a wave equation on a one-dimensional spatial network in terms of the Green function of the corresponding boundary-value problem for an ordinary differential equation], *Sovrem. mat. i yeye prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2006, **38**, 82–94 (in Russian).
7. C. Cattaneo, L. Fontana, “D’Alembert formula on finite one-dimensional networks,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **284**, No. 2, 403–424.

V. L. Pryadiev
 Voronezh State University, Voronezh, Russia
 E-mail: pryad@mail.ru

УДК 517, 519.6, 519.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340

EDN: NMWGIQ

КОНТИНУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РЕЛЕ

М. Е. СЕМЕНОВ, С. В. БОРЗУНОВ, О. И. КАНИЩЕВА, А. И. ПРОШУНИН,
П. А. МЕЛЕШЕНКО

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Преобразователь континуальной системы реле (еще одно название этой модели — преобразователь Прейзаха) — достаточно популярная модель, используемая для формализации широкого круга гистерезисных соотношений. В настоящей статье приведен обзор работ, посвященных исследованию систем из различных предметных областей (физики, экономики, биологии), где континуальная система реле играет ключевую роль в описании гистерезисных зависимостей. Первый раздел работы посвящен описанию входно-выходных соответствий классического преобразователя континуальной системы реле, устанавливаются его основные свойства, описываются методы построения выхода, использующие формализм функции размагничивания, приводится обобщение классического преобразователя континуальной системы реле на случай векторных входно-выходных соответствий. Классифицированные по различным естественно-научным областям приложения модели Прейзаха приведены во втором разделе. Здесь описаны различные обобщения модели применительно к системам, содержащим ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы. Основное внимание уделялось экспериментальным работам, где модель континуальной системы реле использовалась для аналитического описания наблюдаемых в экспериментах зависимостей. Отдельное внимание в обзоре уделено техническим приложениям модели — накопителям энергии, системам, использующим пьезоэффект, моделям систем с долговременной памятью. В обзоре приведены результаты применения преобразователя Прейзаха в биологии и медицине, а также экономике. В третьем разделе обзора описываются свойства преобразователя континуальной системы реле в части реакции на стохастические внешние воздействия и приводится обобщение модели преобразователя на случай стохастичности пороговых чисел его элементарных составляющих. Кроме того, в обзоре содержатся свежие результаты в области динамики систем с преобразователем континуальной системы реле — приводится метод идентификации динамических режимов, основанный на модификации алгоритма Бенеттина вычисления ляпуновских показателей в системах с негладкими многозначными характеристиками.

Ключевые слова: гистерезис, неидеальное реле, континуальная система реле, преобразователь КСР, стохастический вход, темп продаж, ценовая функция, поведение покупателей.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: М. Е. Семенов, С. В. Борзунов, О. И. Канищева, А. И. Прошунин, П. А. Мелешенко. Континуальные системы реле // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 299–340. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340>

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейные модели математической физики являются предметом исследований уже многие годы, и во многих случаях, особенно для задач малой размерности, их свойства известны исчерпывающим образом. Хотя линейные модели в ряде случаев детально описывают анализируемые процессы, в ряде важнейших задач их предсказательная способность оказывается недостаточной. Зачастую в моделях физики, химии, экономики, медицины, биологии и др. встречаются задачи, в которых присутствуют нелинейные слагаемые, связанные либо с внутренней структурой, либо с характером взаимодействий исследуемых систем с окружающей средой. Кроме того, при постановке и формализации процессов и явлений естественно-научных областей необходимо учитывать принципиальную недетерминированность системных параметров, а также стохастичность внешних воздействий. Характеристики отдельных звеньев не всегда однозначны. Именно такая ситуация имеет место в моделях систем с гистерезисными нелинейностями.

Как известно, гистерезис — это явление, проявляющееся в самых различных областях физики, химии, экономики, биологии. О гистерезисной зависимости принято говорить в ситуации, когда состояние системы в текущий момент времени определяется не только внешними условиями в этот момент времени, но и во все предшествующие моменты. Как правило, носители гистерезисных свойств являются частью систем более высокого уровня. Поэтому существенная нелинейность (неоднозначность характеристик) гистерезисных блоков находит отражение в динамике системы в целом. Математические модели динамических систем с гистерезисными компонентами допускают описание в рамках техники операторно-дифференциальных уравнений, где гистерезисным звеньям соответствуют операторы, зависящие от своего начального состояния как от параметра и определенные на широком функциональном пространстве (например, на пространстве непрерывных функций или функций ограниченной вариации). Возможность такой трактовки гистерезисных нелинейностей основана на развитом М. А. Красносельским и его учениками [3] операторном подходе к моделированию гистерезисных преобразователей в рамках теории систем. Гистерезисным явлениям и моделям, их описывающим, посвящена обширная литература. Достаточно подробное и ясное описание этих моделей, а также приложений, приведено в [36, 137, 198]. На сегодняшний момент методы анализа систем с гистерезисными нелинейностями весьма ограничены. Это связано с целым рядом особенностей: негладкостью операторов, являющихся математическими моделями гистерезисных звеньев; фазовые пространства таких систем, как правило, включают в себя пространства состояний гистерезисных преобразователей и могут иметь достаточно сложную (нелинейную) структуру. Именно такая ситуация имеет место при использовании континуальных моделей гистерезиса (под *континуальными* понимаются модели гистерезиса, являющиеся континуальными пределами моделей, состоящих из конечного числа параллельно соединенных гистеронов). К таким моделям относятся преобразователь Ишлинского (континуальный предел системы, состоящей из семейства упоров) и континуальная система реле (КСР) [3, 5, 39, 40, 50, 103, 129, 156, 180, 182–184]. В то же время, существует альтернативный подход, связанный с использованием феноменологических моделей — модели Боука–Вена, Айвана, Дьюема и др. [98, 107, 126]. Указанные модели формализуются посредством низкоразмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и представляют собой очень удобный инструмент для исследования динамики систем с гистерезисом. Указанные выше феноменологические модели являются многопараметрическими, настройка (выбор параметров) к настоящему времени детально описан в работах [41, 96, 97]. Что касается модели континуальной системы реле, то один из первых результатов, позволяющих идентифицировать параметры этой модели (меру), содержится в [92].

Принципиальное отличие конструктивных моделей гистерезиса от феноменологических заключается в их «физичности», что позволяет естественным образом имплементировать их в модели реальных физических процессов. Указанные модели исследовались во многих работах, среди которых отметим ставшими классическими труды [17, 64, 151, 162].

Идеи, связанные с описанием ферромагнитного гистерезиса посредством систем неидеальных реле, восходят к работе [200]. В 1935 году Прейзах предложил ясную геометрическую интерпретацию континуальной системы неидеальных реле, являющуюся основой модели ферромагнитного

гистерезиса [162]. (Перевод этой основополагающей работы на английский язык опубликован в [163].)

Хотя первоначально модель преобразователя КСР была сформулирована для ферромагнитных материалов [162], именно Эверетт [17, 64, 65] осознал ее применимость к широкому спектру явлений из различных научных областей. К настоящему времени область применимости модели КСР столь же широка, как и естественно-научные области, где встречаются гистерезисные явления.

Настоящий обзор структурирован следующим образом: в первом разделе приводится описание неидеального реле, систем неидеальных реле, соединенных параллельно, и преобразователя КСР — континуальной системе неидеальных реле, соединенных параллельно. Также в первом разделе сформулированы основные свойства преобразователя КСР (непрерывность, монотонность по входам и начальным состояниям, почти управляемость и др.) Кроме того, описывается процедура, позволяющая идентифицировать выход в помощью функции Эверетта [36]. В заключительной части приводятся недавно полученные экспериментальные данные, свидетельствующие о физической реализуемости частиц Преизаха (*Preisach particles*).

Второй раздел посвящен обзору работ, где преобразователь КСР применялся для моделирования гистерезисных явлений в технических системах, прежде всего, системах, содержащих носители ферромагнитных и сегнетоэлектрических свойств. В отдельный подраздел выделены работы, посвященные динамике преобразователей-накопителей энергии, приводов и сенсоров (*energy harvesters, actuators, sensors*), моделированию многоразрядных запоминающих устройств, сетевых структур с гистерезисными элементами. Последний подраздел посвящен обзору работ, рассматривающих динамику жидкости в пористых средах с учетом гистерезисных эффектов, моделируемых преобразователем КСР. В третьем разделе рассматриваются задачи оптимального управления, объекты в которых описываются системой дифференциальных операторных уравнений с преобразователем КСР. Предпоследний подраздел посвящен влиянию стохастических внешних воздействий и недетерминированным системам. Наконец, последний подраздел содержит сведения о применении преобразователя КСР в науках о живых системах и в общественных науках.

В заключении подводятся итоги роли преобразователя КСР в современных научных и научно-технических исследованиях.

2. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ КСР И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

2.1. Неидеальное реле. В классическом подходе к описанию гистерезисных нелинейностей, развитом М. А. Красносельским и А. В. Покровским [3], гистерезисные операторы трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: «вход—состояние» и «состояние—выход».

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами α и β , где $x_0 \in \{0, 1\}$ — начальное состояние преобразователя, t_0 — начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Входом системы является непрерывная при $t \geq t_0$ функция $u(t)$, выходом — ступенчатая функция $x(t)$, определяемая операторным соотношением:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t). \quad (2.1)$$

При этом начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять условию:

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } u(0) \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } u(0) \geq \beta. \end{cases} \quad (2.2)$$

В случае выполнения неравенств $\alpha \leq u(0) \leq \beta$ величина x_0 может принимать любое значение из множества $\mathbb{B}$. Значения выхода $x(t)$ при непрерывном входе $u(t)$ для $t \in (t_0, \infty)$ при каждом $t = \tau$ определяются согласно правилу:

$$R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(\tau) = \begin{cases} x_0, & \text{если } \forall t \in [t_0, \tau]: [\alpha < u(t) < \beta], \\ 1, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau]: [u(t') \geq \beta] \wedge \{\forall t \in [t', \tau]: [u(t) > \alpha]\}, \\ 0, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau]: [u(t') \leq \alpha] \wedge \{\forall t \in [t', \tau]: [u(t) < \beta]\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Будем говорить, что *реле включено*, если выход равен единице. В противном случае оно находится в выключенном состоянии, или *реле отключено*. Значения β и α часто называют *порогом включения* и *порогом выключения* (отпускания) соответственно.

Таким образом, соответствие «вход—выход» неидеального реле описываются разрывным оператором (2.3). Схематично взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ представлена на рис. 1.

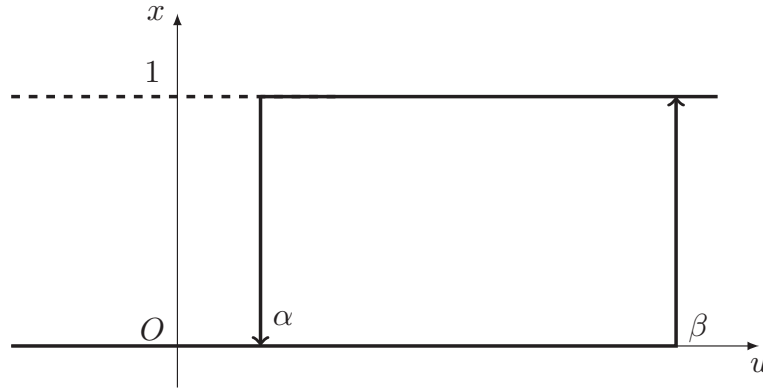


Рис. 1. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$.

FIG. 1. The relationship between the input and output of the converter $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$.

Детальное описание преобразователя неидеального реле, а также его свойств приведено в [3]. Из недавних работ отметим содержательные результаты [54, 55, 88, 89, 99], моделирующие процесс формирования нелинейных структур и, в том числе, колец Лизеганга (*Liesegang rings*) в системах реакция—диффузия с релейными нелинейностями. Динамике систем с релейными нелинейностями в части исследования существования, единственности и устойчивости периодических решений посвящены работы [108, 201]. В монографии [3] показано, что оператор неидеального реле допускает непрерывную аппроксимацию дифференциальным уравнением с неоднозначной характеристикой. При этом аналогом переключений в неидеальном реле являются «быстрые» движения на фазовой плоскости. Такой подход оказался весьма удобным применительно к описанию реальных физических систем с релейным гистерезисом, поскольку позволил формально описывать динамические процессы только в рамках дифференциальных уравнений. Дополнительно отметим работы [51, 118], где гистерезис интерпретировался в терминах систем с «быстрым» и «медленным» движением.

Ниже приведем свойства преобразователя неидеального реле, которые потребуются для введения более сложных конструкций в дальнейших разделах настоящего обзора.

Справедливо полугрупповое тождество:

$$R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t) = R[\alpha, \beta, R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t_1), t_1]u(t), \quad (2.4)$$

где $t_0 \leq t_1 \leq t$, наглядный смысл которого заключается в возможности подачи входного сигнала $u(t)$ при $t > t_0$ на преобразователь, находящийся в момент $t = t_0$ в состоянии u_0, x_0 .

Значения выхода неидеального реле при произвольном непрерывном входе $u(t)$ определяются *принципом отсутствия лишних переключений* (*exclusion of superfluous switching rule*): выход $x(t)$ принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$, если либо $x(t_1) = 0$ и $u(t) < \alpha$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $x(t_1) = 1$ и $u(t) > \beta$ при $t \in [t_1, t_2]$. Правило отсутствия лишних переключений является прямым следствием определения (2.3).

Состояние преобразователя в каждый фиксированный момент времени $t = \tau$ полностью определяется значениями $u_\tau = u(\tau)$, $x_\tau = x(\tau)$ входа и выхода, такой преобразователь называют *детерминированным*. Следовательно, неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определенным на всех непрерывных входах.

Преобразователь *управляем*, если для любых двух возможных состояний $\{u_0, x_0\}$, $\{u_1, x_1\}$, можно указать такой допустимый при состоянии $\{u_0, x_0\}$ вход $u(t)$ ($t_0 < t < t_1$), что выполняются

равенства $u(t_0) = u_0$, $u(t_1) = u_1$, $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t_1) = x_1$. Неидеальное реле, как несложно видеть, управляемо.

Справедливо *свойство монотонности по входам*: если два возможных состояния неидеального реле $u(t_0), x_0$ и $v(t_0), y_0$ таковы, что

$$\begin{aligned} ((x_0 \leq y_0) \wedge \{\forall t \in (t_0, \infty) : [u(t) \leq v(t)]\}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall t \in (t_0, \infty) : \{R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t) \leq R[\alpha, \beta, x_0, t_0]v(t)\}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу определения и изложенных выше свойств $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ можно трактовать как оператор, действующий из пространства $C = C(t_0, t_1)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $u(t)$ в пространство $L_q(0, 1)$ измеримых функций, таких, что q -я степень функций интегрируема (здесь $1 \leq q \leq \infty$).

Замечание. Заметим, что выбор элементов двухэлементного множества $\mathbb{B}$ может быть произведен и другим способом, например, как $\{-1, 1\}$. За исключением абсолютных значений выхода реле, определение (2.3) и свойства неидеального реле не изменятся. Легко видеть, что биективное отображение $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, заданное согласно правилу $f(x) = (1 + x)/2$, делает выбор конкретных значений элементов $\mathbb{B}$ полностью эквивалентным.

Поведение различных систем, математические модели которых включают в свой состав неидеальное реле, изучалось в работах [16, 44, 83, 127, 161, 181].

2.2. Системы реле. Рассмотрим набор из N неидеальных реле, занумерованных индексом j , где $1 \leq j \leq N$. Система реле $\mathcal{R}_N$, соединенных параллельно, схематично представлена на рис. 2. Выход определяется естественным образом как взвешенная сумма выходов, получаемых от каждого из индивидуальных реле:

$$\mathcal{R}_N \left[\{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(N)}\}, t_0 \right] u(t) = \sum_{j=1}^N \mu_j R[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0] u(t), \quad (2.6)$$

где $\{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(N)}\}$ — множество начальных состояний конечной системы реле.

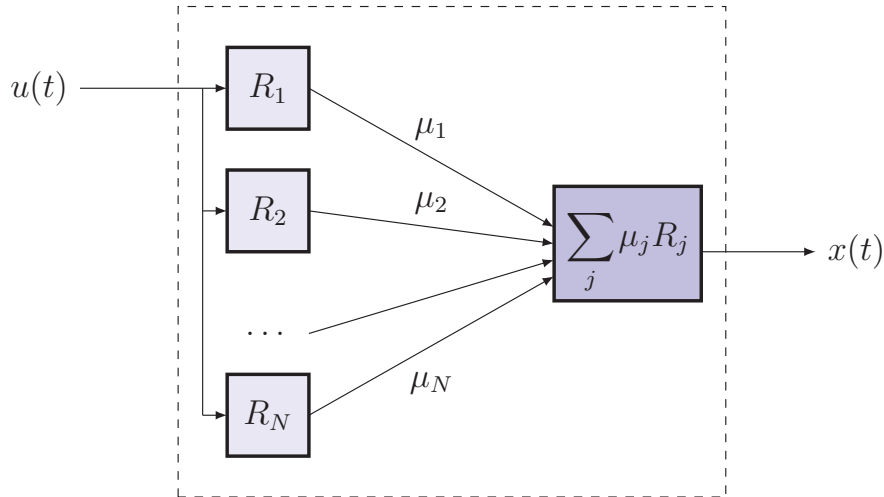


РИС. 2. Параллельное соединение N экземпляров неидеальных реле $R_j[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0]$, взятых с весами $\mu_j > 0$, где $j = 1, \dots, N$.

FIG. 2. Parallel connection of N instances of nonideal relays $R_j[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0]$ taken with weights $\mu_j > 0$, where $j = 1, \dots, N$.

Справедливо свойство монотонности конечной системы неидеальных реле относительно функции входа $u(t)$, что является непосредственным следствием линейности конструкции (2.6) и монотонности по входу одного гистерона. Система не является управляемой, как легко видеть в частном случае двух неидеальных реле. В самом деле, параллельное соединение двух реле

$R_1[\alpha_1, \beta_1, x_0^{(1)}, t_0]$ и $R_2[\alpha_2, \beta_2, x_0^{(2)}, t_0]$, где $\beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + \varepsilon$ (при условии $0 < \varepsilon < |\beta - \alpha|$), $x^{(0)} = 1$, $x^{(1)} = 0$, характеризуется следующим поведением: легко видеть, что для любых допустимых входов $u(t)$ справедлива импликация

$$(R_1[\alpha_1, \beta_1, x_0^{(1)}, t_0]u(t) = 1) \Rightarrow (R_2[\alpha_2, \beta_2, x_0^{(2)}, t_0] = 1), \quad (2.7)$$

т. е. событие «первое реле выключено, а второе — включено» является невозможным.

2.3. Определение преобразователя КСР. Преобразователь КСР является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединенных параллельно. Впервые идея, восходящая к указанной модели, была изложена в [200]. К настоящему времени эта модель детально описана во многих монографиях, из которых отметим [3, 36, 137, 149]. Пространство состояний преобразователя КСР состоит из пар $\{u, z(\alpha, \beta)\}$, где u — произвольное число, а $z(\alpha, \beta)$ — характеристическая функция подмножества полуплоскости $\alpha < \beta$.

Пространство состояний этого преобразователя иллюстрирует рис. 3. Ломаная линия $L(t)$ разбивает полуплоскость $\{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\} = S^{(0)} \cup L(t) \cup S^{(1)}$ на два подмножества: $S^{(1)}$ состоит из гистеронов находящихся в выключенном состоянии, а $S^{(0)}$ — из гистеронов, находящихся во включенном состоянии. Кривая $L(t)$ имеет лестничный вид (*staircase*), координаты α_k и β_k ($k = 1, 2, \dots$) ее точек негладкости совпадают с локальными минимумами и максимумами в предыдущие моменты времени соответственно.

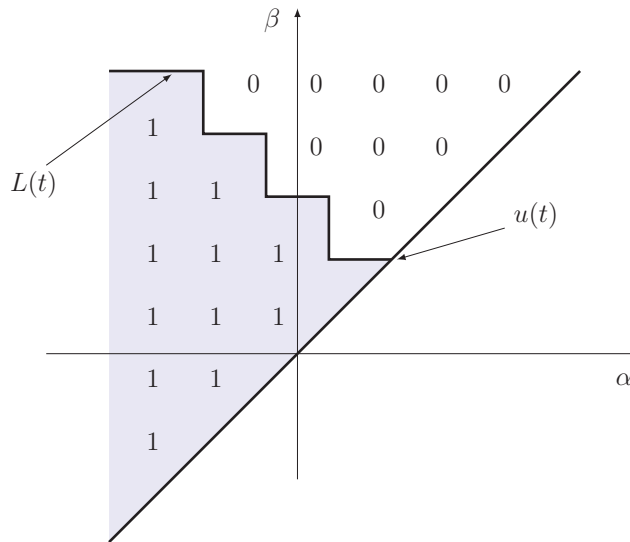


Рис. 3. Элемент пространства состояний набора неидеальных реле. Заливкой цветом выделены гистероны, находящиеся во включенном состоянии.

FIG. 3. Element of the state space of a set of nonideal relays. The hysteresons in the switched-on state are highlighted in color.

Соотношение «вход — переменное состояние» преобразователя КСР задается оператором Γ :

$$z(\alpha, \beta, t) = \Gamma[z_0(\gamma)]u(t) = \mu(\alpha, \beta)R[z_0(\alpha, \beta), \alpha(\gamma), \beta(\gamma)]u(t), \quad (2.8)$$

где $\gamma \in \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\}$, $\mu(\alpha, \beta)$ — весовая функция, отражающая плотность распределения элементарных гистеронов. Заметим, что $\mu(\alpha, \beta)$ часто называют *функцией Прейзаха*.

Допустимым входом называется любая непрерывная функция $u(t)$, начальное значение $u(0)$ которой согласовано с начальным состоянием оператора КСР, как показано на рис. 3. В [3] было показано, что многие гистерезисные преобразователи допускают естественное обобщение в части расширения области определения на разрывные функции, функции ограниченной вариации (*BV functions*). Однако в технических и иных приложениях, как правило, достаточно корректно определить гистерезисные преобразователи на пространстве непрерывных функций. В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые входы непрерывны.

Выходом преобразователя КСР является мера M множества тех точек (α, β) указанной полуплоскости, для которых состояние равно единице:

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta = M(\{(\alpha, \beta) : R[z_0(\alpha, \beta), \alpha(\gamma), \beta(\gamma)]u(t) = 1\}). \quad (2.9)$$

На рис. 4 проиллюстрирован выход преобразователя КСР и состояние в конечный момент времени T для кусочно-линейной функции $u(t)$, $t \in [0, T]$.

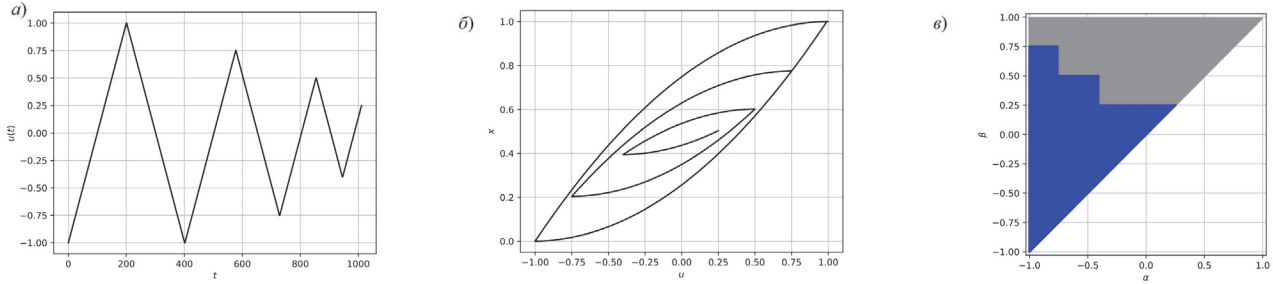


РИС. 4. а) Кусочно-линейная функция входа $u(t)$; б) петля гистерезиса в координатах (u, x) ; в) состояние преобразователя КСР в момент времени $T = 1000$. Количество элементарных гистеронов равно 20100.

FIG. 4. а) Piecewise linear input function $u(t)$; б) hysteresis loop in coordinates (u, x) ; в) state of the CSR converter at time $T = 1000$. The number of elementary hysterons is 20100.

Исходя из геометрической интерпретации, в ряде задач удобно представить выход в виде:

$$x(t) = \iint_{S(+)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.10)$$

Заметим, что функция $\mu(\alpha, \beta)$ в большинстве практических задач неизвестна. Для ее аппроксимации предложено использовать функции Гаусса [26]

$$\mu(\alpha, \beta) = A \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta - \alpha - 2h}{2h} \sigma \right)^2 + \left(\frac{\beta + \alpha}{2h} \sigma \right)^2 \right] \right\}, \quad A, h, \sigma = \text{const}, \quad (2.11)$$

функции Лоренца [13]

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{B}{[1 + (s(\beta - g)/g)^2][1 + (s(\alpha + g)/g)^2]}, \quad B, g, s = \text{const}, \quad (2.12)$$

модель Айвана—Дженкинса (*Iwan—Jenkins model*) [186]

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{k_J}{2} \left\{ \delta(\beta - \alpha) - \frac{k_J}{2} \frac{1}{f_{y,\max} - f_{y,\min}} \left[H\left(\beta - \alpha - 2\frac{f_{y,\min}}{k_J}\right) - H\left(\beta - \alpha - 2\frac{f_{y,\max}}{k_J}\right) \right] \right\}, \quad (2.13)$$

где k_J — линейная жесткость (*linear stiffness*) элемента Дженкинса, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, $H(\cdot)$ — функция Хевисайда (*Heaviside*), $f_{y,\min}$ и $f_{y,\max}$ — минимальное и максимальное значение функции выхода соответственно. Заметим, что известны также и другие способы аппроксимации плотности распределения элементарных гистеронов [52, 191]. Также отметим фундаментальную работу [92], в которой приведен элегантный алгоритм последовательной локализации плотности гистеронов на полуплоскости $\{(\alpha, \beta) : \alpha < \beta\}$.

2.4. Вычисление выходов и свойства гистерезисного преобразователя КСР. Для вычисления выхода при конкретном заданном входе удобно использовать аппарат функций размагничивания (*demagnetization function*). Функция размагничивания гистерезисного преобразователя КСР определяется следующим образом [3]:

$$\Phi(\xi, \eta) = \begin{cases} \mu(\{(\alpha, \beta): \xi \leq \alpha < \beta \leq \eta\}), & \text{если } \xi < \eta, \\ 0, & \text{если } \xi = \eta, \\ -\mu(\{(\alpha, \beta): \eta \leq \alpha < \beta \leq \xi\}), & \text{если } \xi > \eta. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из определения функции $\Phi(\xi, \eta)$ следует, что она обладает свойством монотонности по каждой из своих переменных:

$$\forall \xi_1, \xi_2, \eta ((\xi_1 \leq \xi_2) \Rightarrow (\Phi(\xi_1, \eta) \geq \Phi(\xi_2, \eta))), \quad (2.15)$$

$$\forall \xi, \eta_1, \eta_2 ((\eta_1 \leq \eta_2) \Rightarrow (\Phi(\xi, \eta_1) \leq \Phi(\xi, \eta_2))). \quad (2.16)$$

Кроме того, $\Phi(\xi, \eta)$ при $\xi \leq \eta$ полунепрерывна по ξ слева и по η справа. Важность введенного определения (2.14) проявляется в возможности экспериментального вычисления этой функции и, следовательно, вычисления (в ряде задач) неизвестной меры μ . В самом деле, при кусочно-линейном входе вида

$$u_0(t) = \begin{cases} \xi + (\eta - \xi)(t - t_0), & \text{если } t_0 \leq t \leq \tau, \\ \eta + (\xi - \eta)[t - (t_0 + \tau)], & \text{если } \tau \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.17)$$

где t_0, τ, T — некоторые положительные константы (причем $t_0 < \tau < T < \infty$), и произвольном начальном состоянии $\{u_0, z_0(\alpha, \beta)\}$ выполняется соотношение:

$$R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u_0(\tau) - R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u_0(T) = \Phi(\xi, \eta). \quad (2.18)$$

Представим произвольную непрерывную функцию входа $u(t)$ как предел последовательности кусочно-монотонных функций. Тогда справедливо равенство:

$$R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u(\tau_3) - R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u(\tau_2) = -\Phi(u(\tau_2), u(\tau_3)), \quad (2.19)$$

где $t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \infty$, и значения входа $u(t)$ на $[\tau_1, \tau_2]$ образуют промежуток $[u(\tau_1), u(\tau_2)]$, значения входа на $[\tau_2, \tau_3]$ — промежуток $[u(\tau_2), u(\tau_3)]$, и $u(\tau_3) \in [\tau_1, \tau_2]$.

Перечислим основные свойства преобразователя КСР [3, 137, 197]:

- 1) независимость от скорости изменения входа (*rate-independence*);
- 2) непрерывность;
- 3) монотонность по входам и начальным состояниям;
- 4) виброкорректность;
- 5) детерминированность;
- 6) почти управляемость;
- 7) свойство «заметания» (*wiping-out property*);
- 8) конгруэнтность (*congruency*).

Независимость от скорости изменения входа: для любого входа траектория в координатах $(u(t), x(t))$ инвариантна относительно произвольного гомеоморфизма по времени (другими словами, траектория не зависит от скорости изменения $u(t)$).

Преобразователь континуальной системы реле, трактуемый как оператор, действующий из пространства непрерывных функций в себя, является непрерывным для широкого класса мер на плоскости. Для этого достаточно, чтобы мера была абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры. Отметим, что преобразователь конечной системы реле, соединенных параллельно, континуальным аналогом которого является преобразователь КСР, указанным свойством не обладает. Свойства операторов, соответствующих наборам конечной системы реле, действующим из пространства непрерывных функций в пространство интегрируемых в q -й степени функций (где $q > 1$), рассмотрены в [3].

Монотонность оператора индивидуального реле распространяется и на континуальную систему:

$$[\forall t \geq t_0: u(t) \leq v(t)] \& [z_1(\alpha, \beta) \leq z_2(\alpha, \beta)] \Rightarrow (\forall t \geq t_0: R[t_0, z_0(\alpha, \beta)](t) \leq R[t_0, z_0(\alpha, \beta)]v(t)). \quad (2.20)$$

Несмотря на то, что неидеальное реле является разрывным преобразователем, преобразователи КСР обладают свойством виброкорректности: преобразователь $R[t_0, z_0(\alpha, \beta)]$ равномерно виброкорректен, если и только если мера каждой кривой $\alpha + \beta = \psi(\beta - \alpha)$ ($\alpha < \beta$), где ψ удовлетворяет условию Липшица $\psi \in \{\varphi: |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq |u - v|\}$, равна нулю [3].

Свойство «заметания» гласит, что достижение функцией $u(t)$ локального максимума стирает вершины $L(t)$, чьи β -координаты меньше этого максимума, и достижение функцией $u(t)$ локального минимума стирает вершины, чьи α -координаты находятся выше этого минимума. Это свойство отражает факт, что модель КСР не накапливает информацию о прошлых экстремальных значениях входных данных. Другими словами, только последовательность чередующихся мажорирующих входных экстремумов сохраняется в модели. Все остальные экстремумы $u(t)$ стираются и не оказывают влияния на состояние преобразователя.

Конгруэнтность преобразователя КСР означает, что при условии симметрии меры Прейзаха $\mu(\alpha, \beta) \equiv \mu(\alpha + \beta)$ все малые петли гистерезиса, соответствующие изменениям входа $u(t)$ между одними и теми же двумя последовательными экстремальными значениями, являются конгруэнтными. Петли гистерезиса в этом случае инвариантны относительно линейных сдвигов (*linear translation*).

Строгие доказательства свойств заметания и конгруэнтности см. в работе [32].

Свойства преобразователя КСР обобщает теорема о характеристике (*characterization theorem*) [197]:

Теорема 2.1 (теорема о характеристике). *Выполнение свойств заметания и конгруэнтности для некоторого функционального оператора является необходимым и достаточным условием для представления этого оператора в виде преобразователя КСР для кусочно-монотонных входов.*

2.5. Векторная модель и sweeping-процессы. Обобщение гистерезисных операторов на случай векторных пространств привлекает внимание исследователей достаточно долгое время и восходит к классической работе [188]. Современный подход к построению векторного аналога преобразователя КСР основан на том, что формируется континуальный набор классических (скалярных) преобразователей КСР, расположенных по всем направлениям $\varphi \in [0, 2\pi)$ в некоторой заданной плоскости [8, 138]. Суперпозиция таких скалярных операторов и образует векторный преобразователь, выход которого $\mathbf{x}(t)$ по определению равен:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi) \mathbf{a}_\varphi \Gamma_\varphi(\mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{u}(t)) d\varphi, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{a}_\varphi$ — единичный вектор в направлении, характеризуемом углом φ , Γ — скалярный оператор КСР, функция $\zeta(\varphi)$ определяет анизотропные свойства среды, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. С использованием (2.9) формулу (2.21) обычно представляют в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi) \mathbf{a}_\varphi \left(\iint_{\alpha < \beta} \mu(\alpha, \beta) R[\alpha, \beta, x_0, t_0] (\mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{u}(t)) d\alpha d\beta \right) d\varphi. \quad (2.22)$$

Известен ряд обобщений (2.22) на случай трехмерного пространства выходов [135, 137]. Содержательные приложения векторных моделей гистерезиса к образованию пространственных структур и динамики популяций содержатся в [87, 93, 94].

Также отметим близкое к гистерезису понятие, связанное с входно-выходными соответствиями в рамках так называемых *sweeping-процессов*. Простейшая модель, относящаяся к этому классу, описывает связь между движением выпуклой рамки на плоскости и координатами точки, обуславливающей указанное движение. Математическая модель sweeping-процесса сводится к дифференциальному включению $\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$, где правая часть есть многозначное отображение. А решением указанного включения называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая этому включению при почти всех значениях t . Первые работы в этом направлении относятся к началу 70-х годов прошлого века [146–148]. Из недавних работ выделим [111], посвященную исследованию

управляемой системы с обратной связью в форме sweeping-процесса; [109], где введено понятие и доказана устойчивость положения равновесия автономного sweeping-процесса; [110], где доказана разрешимость дифференциальных включений, возмущенных в классе функций ограниченной вариации.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы. Вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля, относятся к классу ферромагнитных материалов. Магнитная индукция $\mathbf{B}$ в таких веществах зависит от напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ нелинейным образом. Гистерезис в магнитных средах проявляется в виде зависимости вектора намагниченности и вектора магнитной индукции в веществе не только от напряженности приложенного внешнего поля, но и от предыстории его изменения и состояния образца. Магнитный гистерезис проявляется в ферромагнитных материалах (к которым относятся железо, никель, кобальт; гадолиний и некоторые другие редкоземельные элементы; также сплавы на их основе). Заметим, что ферромагнитные свойства материала зависят от температуры.

Магнитные свойства ферромагнетиков определяются спиновыми магнитными моментами электронов. В указанных кристаллических материалах формируются условия, при которых магнитные моменты электронов располагаются параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного намагничивания, иначе называемые магнитными доменами, или доменами Вейсса (*Weiss domains*). Внутри каждого домена вектор намагниченности, равный магнитному моменту единицы объема, является постоянным по величине и направлению. Между доменами имеются относительно тонкие доменные стенки толщиной в несколько атомов, в которых направление намагничивания плавно меняется от направления одного домена к направлению в другом. При изменении внешнего магнитного поля стенки смещаются, изменяя относительные размеры и форму доменов.

В отсутствие внешнего поля в пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом, причем направления таких моментов для разных доменов различны, т. е. обычных условиях направления магнитных моментов хаотически распределены в пространстве, и образец в целом представляется макроскопически ненамагниченным. В слабых полях происходит смещение границ доменов, в результате чего происходит увеличение тех из них, магнитные моменты которых составляют с вектором $\mathbf{H}$ относительно малый угол. Заметим, что такое смещение в слабых полях носит обратимый характер. С увеличением H домены с меньшими углами практически полностью поглощают все остальные. Однако при дальнейшем росте H будет наблюдаться еще один эффект, заключающийся в повороте магнитных моментов доменов сонаправленно внешнему полю. Моменты электронов в пределах домена в этом случае поворачиваются единомысленно, и перемагничивание приобретает необратимый характер, возникает эффект гистерезиса.

Даже при монотонном и непрерывном изменении внешних условий наблюдается скачкообразное изменение намагниченности ферромагнитного вещества, приводящее к изменению доменной структуры материала. Это явление называется эффектом Баркгаузена и обусловлено наличием различного рода неоднородностей материала, в частности, дислокации, инородные включения, остаточные механические напряжения и т. д. Указанные неоднородности препятствуют перестройке магнитной структуры, но при достижении некоторого порогового значения H доменная стенка продвигается скачкообразным образом. Из-за подобных препятствий кривая намагничивания ферромагнетика имеет ступенчатый характер.

Таким образом, физической основой гистерезиса в ферромагнитных материалах является действие двух эффектов:

- 1) вращения вектора намагниченности;
- 2) изменения размера и/или количества магнитных доменов.

Помимо модели Прейзаха, для описания нелинейных зависимостей в ферромагнитных материалах также широко используются модели Джилса—Атертона (*Jiles—Atherton*) и Стонера—Вольфарта (*Stoner—Wohlfarth*).

Модель магнитного гистерезиса Джилля—Атертона была введена в 1984 г. для изотропных материалов и впоследствии была обобщена на анизотропные [104, 168]. Намагниченность M образца в этой модели вычисляется по следующему алгоритму:

- 1) по величине намагниченности M с учетом коэффициента междоменной связи α рассчитывается эффективное магнитное поле $H_{\text{eff}} = H + \alpha M$;
- 2) на основе H_{eff} рассчитывается негистерезисная составляющая M_{an} ;
- 3) наконец, намагниченность M вычисляется с помощью численного решения некоторого обыкновенного дифференциального уравнения с учетом знака производной напряженности магнитного поля H :

$$\frac{dM(H)}{dH} = \frac{M_{\text{an}}(H) - M(H)}{k - \alpha[M_{\text{an}}(H) - M(H)]}. \quad (3.1)$$

Доказано, что за счет специального выбора меры преобразователя КСР можно добиться совпадения входно-выходных соответствий модели Джилля—Атертона и преобразователя КСР [155]. Заметим, что в ряде работ было проведено сравнение моделей КСР и Джилля—Атертона [10, 60], а в недавней работе [130] построена новая гибридная модель гистерезиса на их основе с использованием нейронных сетей с обучением по алгоритму обратного распространения ошибок (*backpropagation neural networks*).

В модели Стонера—Вольфарта намагниченность $\mathbf{M}$ не изменяется внутри ферромагнетика, но этот вектор вращается при изменении магнитного поля $\mathbf{H}$ [188]. Магнитное поле изменяется только вдоль одной оси; его скалярная проекция h является положительной в одном направлении и отрицательной в противоположном. Предполагается, что ферромагнетик состоит из одноосных магнитных частиц. В условиях изменяющегося внешнего магнитного поля намагниченность ограничена плоскостью, содержащей направление магнитного поля и легкую ось (для большинства магнитно-анизотропных материалов существует два противоположных направления наибольшего намагничивания материала, и линия, параллельная этим направлениям, называется легкой осью.) Модель Стонера—Вольфарта описывает процесс вращения домена с использованием эллипсоидальных частиц с одноосной анизотропией, моделирующих доменные области. Магнитный момент таких частиц определяется анизотропией, а его положение равновесия определено условиями минимума энергии. Но для проведения расчетов требуется функция распределения частиц в ферромагнитном материале, которая, как правило, неизвестна [192]. Среди других особенностей этой модели, ограничивающих ее использование в физических приложениях, отметим формирование в ее рамках только симметричных внутренних петель гистерезиса (*minor loops*).

Классическая модель Прейзаха широко применяется для моделирования нелинейных явлений в ферромагнетиках [42, 75, 135, 174]. В серии работ Майергольца [136, 141–143] предложены некоторые ее обобщения. Так, например, в [141] предложено обобщение модели, в которой в уравнение (2.9) добавляется слагаемое

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} \mu(u(t), \alpha, \beta) \Gamma[z_0(\gamma)] u(t) d\alpha d\beta + \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\beta) \hat{\lambda}_{\beta} u(t) d\beta, \quad (3.2)$$

где оператор $\hat{\lambda}_{\beta}$ определен на пространстве допустимых входов согласно правилу:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{\beta} u(t) = -1, & \text{если } u(t) < \beta, \\ \hat{\lambda}_{\beta} u(t) = 1, & \text{если } u(t) > \beta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Весовая функция $\nu(\beta)$ отражает распределение плотности операторов $\hat{\lambda}_{\beta}$ по оси β . (Заметим, что в настоящей работе величины α и β поменяны местами относительно обозначений в работах Майергольца.)

Обратим внимание на два важных отличия (3.2) от классической модели. Во-первых, весовая функция $\mu(u(t), \alpha, \beta)$ зависит от входа $u(t)$. Во-вторых, введение в определение выхода интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \nu(\beta) \hat{\lambda}_{\beta} u(t) d\beta$ отражает влияние полностью обратимой компоненты гистерезисной нелинейности. В итоге, выход $x(t)$ описывается частично обратимой зависимостью, что позволяет моделировать, например, петли гистерезиса, образуемые доменами Стонера—Вольфарта [188].

В классической модели Прейзаха малые петли гистерезиса являются конгруэнтными. Для того, чтобы обойти это ограничение, в работе [136] предложено следующее определение выхода динамической модели КСР:

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} \mu \left(u(t), \alpha, \beta, \frac{dx(t)}{dt} \right) \Gamma[z_0(\gamma)] u(t) d\alpha d\beta + \frac{1}{2} \left(f_{u(t)}^- + f_{u(t)}^+ \right), \quad (3.4)$$

где $f_{u(t)}^-$ и $f_{u(t)}^+$ являются выходными значениями на нисходящей и восходящей ветвях основного контура гистерезиса соответственно. Как видим из (3.4), в уравнение введена зависимость весовой функции от скорости изменения выхода.

Теория, первоначально разработанная для ферромагнитных систем, может быть адаптирована к сегнетоэлектрическим материалам, на которых сконцентрировано внимание исследователей в области актуаторов и преобразователей-накопителей энергии.

Спонтанная поляризация сегнетоэлектрического материала и, как следствие, нелинейная зависимость электрического смещения (*displacement*) от внешнего электрического поля демонстрируют вид классической петли гистерезиса во многих классах кристаллических материалов. Зависимость физических величин от предыстории используется как материальная основа для реализации энергонезависимой RAM-памяти для электронных вычислительных систем и RFID-карт (*radio-frequency identification*) [20, 45].

Модель КСР применялась для описания такого рода зависимостей во многих работах, среди которых можно отметить, например, [42, 45]. В работе [171] проведено моделирование сегнетоэлектрических суженных петель (*pinched*, или *constricted*). Исходя из модельной функции распределения дипольного момента в материале, получено аналитическое выражение для результирующей сегнетоэлектрической петли, и соответствующая форма гистерезиса отражает ее явное сужение. Применяемый подход позволяет идентифицировать распределения дефектов, исходя из характеристики цикла.

Существенное отличие от ферромагнитных эффектов заключается в том, что, как правило, существует максимальное значение внешнего поля, при котором материал может эксплуатироваться без повреждения (пробоя). Таким образом, приложенное поле пьезокерамического материала не может достичь положения насыщения. Часто предполагается, что максимально допустимое входное значение образует ограничивающий треугольник для модели КСР в пьезокерамической системе привода. Но в приложениях системное входное значение часто не достигает этого фиксированного максимального значения, и иногда начальное входное значение может быть просто нулевым.

Экспериментальные данные показывают, что классическая модель КСР с достаточной точностью моделирует пьезокерамический преобразователь (*piezoceramic actuator*), когда он подвергается воздействию низкочастотного электрического напряжения. Точность модели ухудшается, если диапазон частот напряжения становится шире, а также в случае относительно больших механических нагрузок [95].

Кроме того, отметим, что модель Прейзаха естественным образом используется при разработке математических моделей ферромагнетизма в рамках вариационного принципа [145]. В указанной книге приводится строгое обоснование гистерезисной модели, описывающей входно-выходные соотношения на основе КСР.

3.2. Идентификация меры и технические системы. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект и, соответственно, функционирующие на их основе технические системы находят самое широкое применение в промышленности. Приведем краткий список таких устройств: кварцевые резонаторы (*crystal oscillator*), используемые как эталон частоты, пьезотрансформаторы для изменения напряжения высокой частоты, датчики микрофонов и гидрофонов, пьезокерамические излучатели звука и ультразвука, системы точного позиционирования [128, 170]. В последние годы этот список расширился за счет значительного прогресса в разработке преобразователей-накопителей энергии (*energy harvesters*) (см. например, работы [23, 73, 131], в которых подчеркивается роль нелинейных и гистерезисных эффектов в функционировании и эффективности преобразования таких устройств).

Как известно, процесс запасаания энергии заключается в перераспределении кинетической энергии колеблющегося массивного тела в электрическую форму энергии [91]. Принципиальное значение в этом эффекте имеет нелинейность характеристик механической и/или электрической подсистем. В работах [53, 72, 169] подчеркивается значимость наличия нелинейных звеньев в преобразователях энергии. Неизбежно наблюдаемые в промышленных условиях систематические изменения механических параметров, возникающие в силу механического износа, старения материалов, приводят к ухудшению передаточных характеристик. Отметим также немаловажное влияние внешних шумов, корректно оценить которое возможно только вероятностными и статистическими методами, для чего приходится вводить вероятностные характеристики для отдельных составных частей системы [47]. Моделирование нелинейных гистерезисных эффектов применительно к задачам накопления энергии было осуществлено в работах [123, 132, 179].

Несмотря на указанные выше «положительные» применения физических гистерезисных нелинейностей в технических устройствах, в управлении интеллектуальными приводами (*smart actuators*) влияние этих явлений стараются минимизировать. Для компенсации гистерезиса желательно, чтобы функция входа, сгенерированная искусственно с помощью операции инверсии, обладала свойствами регулярности. В частности, в работе [102] показано существование слабого $*$ -непрерывного обращения оператора КСР, рассматриваемого на множестве непрерывных по Гёльдеру (*Hölder*) функций. Также в этой работе предложены алгоритмы обращения оператора КСР, исследованы их свойства сходимости и непрерывности по Липшицу (*Lipschitz*). Совместный учет гистерезисных нелинейностей и явления ползучести (*creep dynamics*) приведен в [125].

Компенсация гистерезисных эффектов в динамике искусственных мышц рассмотрена в [113], где продемонстрирована важность описания так называемого «уединенного цикла» (*lonely stroke*). В этой работе проведено математическое моделирование зависимостей «*voltage—strain*» и «*load—strain*» и представлена экспериментальная процедура для определения параметров гистерезиса. Предложен итерационный алгоритм для компенсации гистерезиса путем численного инвертирования оператора КСР. Другие примеры применения этого оператора в задаче совершенствования искусственных мышц можно найти в работах [29, 193].

Близкой научно-технической проблемой является идентификация параметров различных гистерезисных моделей. Как уже отмечалось выше, достаточно общий подход к идентификации меры преобразователя КСР был впервые изложен в [92]. Авторы предложили последовательность входов, позволяющую наблюдать отклик локальной части системы гистеронов, что, в свою очередь, позволило определить плотность их распределения. Различные методы вычисления характеристик преобразователя КСР используются в работах [120, 199]. Например, в статье [189] предложен выбор плотности меры в виде

$$\mu(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_1) \varphi_i(-x_2), \quad (3.5)$$

где вспомогательные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, равны

$$\varphi_i(x) = \frac{a_i}{2} \left[1 + \operatorname{ch} \left(\frac{x - b_i}{c_i} \right) \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) a_i — амплитуда, b_i — среднее значение, c_i — дисперсия, $\operatorname{ch}(z)$ — гиперболический косинус. Выбор (3.5) позволяет вычислить выход преобразователя КСР в аналитической форме. Верификацию предложенного метода авторы выполнили с помощью моделирования переходных электрических цепей, основу которых составляет тороидальная катушка с ферромагнитным сердечником. Методы идентификации параметров в условиях малого объема данных предложены в статьях [101, 173]. Интересная работа [172] посвящена идентификации и компенсации гистерезисных эффектов в задаче управления луча в ускорителе заряженных частиц. Для описания отклика луча на магнитные поля системы фокусировки применяется байесова статистическая модель и методы машинного обучения.

До недавнего времени казалось, что модель КСР, несмотря на свой ясный физический смысл, носит, тем не менее, лишь умозрительный характер и является довольно абстрактной сущностью.

Однако недавняя работа [194] демонстрирует, что элементарные части модели могут быть наблюдаемы. Как указывают авторы, модель Прейзаха была краеугольным камнем в области ферромагнетизма и сегнетоэлектричества с момента ее создания. Она описывает реальный, неидеальный ферроидный материал как сумму распределения идеальных «гистеронов». Однако физическую сущность модели в сегнетоэлектрических материалах до последнего времени было трудно установить. В этой работе авторы экспериментально определяют распределение Прейзаха (распределение гистеронов) для двух сегнетоэлектрических систем и показывают, как его ширина напрямую связана с морфологией материалов. Авторы связывают распределение Прейзаха с измеренной микроскопической кинетикой переключения гистеронов, которая лежит в основе макроскопической дисперсионной кинетики переключения поляризации, обычно наблюдаемой на практике для сегнетоэлектриков. Представленные результаты еще раз демонстрируют глубокую физическую сущность модели КСР и подтверждают, что эта модель является мощным инструментом для объяснения переключения поляризации во всех временных масштабах в различных типах сегнетоэлектриков.

Полученные в [194] результаты могут быть использованы для дальнейшего развития сегнетоэлектрических технологий в области обычных и многобитовых устройств хранения данных. Как известно, совместное хранение нескольких битов на элемент памяти является позволяющим значительно увеличить плотности записи в запоминающих устройствах. Кроме того, таким образом можно смягчить проблему ограниченного минимального размера элемента органической сегнетоэлектрической памяти с произвольным доступом (*ferroelectric random access memory*, FeRAM).

Среди недавних работ, посвященных исследованию модели КСР применительно к объектам со структурой сети и путей на них (*complex pathways*), отметим [105, 106]. В интересной работе [106] рассматривается граф, описывающий переходы между дискретными входно-выходными состояниями гистерезисной модели Прейзаха. Такой граф обладает самоподобной (блочной-иерархической) несимметричной матрицей смежности. Авторы вычисляют в явном аналитическом виде собственные значения, матрицы смежности, их распределение (кратность) и соответствующие им собственные векторы. В частности, спектр матрицы смежности получен в явной аналитической форме благодаря тому, что ее характеристический многочлен представляет собой произведение полиномов Чебышева. Помимо этого, распределение собственных значений матрицы смежности (плотность состояний) также может быть вычислено в явной аналитической форме и, что является весьма неожиданным, в масштабе, похожем на так называемую «дьявольскую лестницу». Эти результаты могут быть использованы для определения параметров модели Прейзаха, в частности, для определения меры $\mu(\alpha, \beta)$. Кроме того, помимо значительного академического интереса, полученные результаты могут оказаться плодотворными при изучении сложных сетей, структура которых обладает свойством самоподобия — фракталов и мультифракталов.

Моделирование современных источников энергии включает учет динамики выходного напряжения, тока, холостого напряжения (*open circuit voltage*), состояния заряда (*state of charge*, отношение оставшейся емкости к эталонной емкости) и других параметров. Аккумуляторная ячейка достигает разных значений холостого напряжения в одном и том же состоянии заряда и при той же температуре в зависимости от предыдущей истории заряда. В работах [18, 19] различные модели гистерезиса, в т. ч. модель Прейзаха, использовались для описания свойств литий-ионных источников аккумуляторов. Несколько более общий подход предложен в [24, 195].

3.3. Сплошные среды и процессы в пористых средах. Помимо описания электрических и магнитных эффектов, преобразователь КСР оказался очень удобным инструментом для математического моделирования процессов переноса жидкости в пористых средах [31, 57, 71, 124, 176]. Как правило, зависимость насыщения среды жидкостью от давления в ней (*pressure-saturation relation*) носит нелинейный гистерезисный характер. Динамика содержания почвенной влаги в слое грунта в предположении, что единственными компонентами водного потока являются инфильтрация и дренаж, описывается дифференциальным уравнением первого порядка с гистерезисным членом [66]. Задача о диффузии воды с возможностью замораживания и плавления в вязкоупругопластичном пористом твердом теле детально решена в недавней работе [71]. Изменение гидравлической проводимости почв (*soil-saturated hydraulic conductivity*), рассматриваемых

как пример пористых сред, изучено в работах [7,90,116]. За счет полива таких почв водой невысокого качества, т. е. с повышенным содержанием солей и щелочей, происходит деградация почвенного слоя и существенное снижение его сельскохозяйственного значения. Тем не менее, процессы деградации, как правило, сопряжены с процессами частичного самовосстановления почвенных пород, что проявляется в виде гистерезисных зависимостей в моделях гидравлической проводимости. При моделировании и оптимизации процессов нефтедобычи приходится сталкиваться с необходимостью учета гистерезисных явлений, проявляющихся в неоднозначной (гистерезисной) связи между геологическими параметрами, характеризующими изменение состояния верхней части земной коры. В этой связи отметим работы [6,62]. Прецизионный учет гистерезисных эффектов на модельном уровне позволяет разработать и усовершенствовать технологии (*water alternating gas*, *huff-n-puff* и др.), позволяющие существенно повысить экономические показатели процесса нефтедобычи.

Применение модели КСР и соответствующий выбор весовой функции позволяет учитывать характеристики конкретных почв, например, содержание глины и других минералогических включений. Для идентификации весовой функции авторы [116] предлагают использовать стандартный метод на основе измерения обратных кривых первого порядка (FORC). Заметим, что в этой статье приведено также исключительно подробное и ясное описание программной реализации классической модели КСР.

В самое последнее время интерес к описанию существенно нелинейных процессов проявляется и в сейсмологии, где особую роль играет взаимодействие «грунт—конструкция» (*soil-structure interaction*). Так называют процессы, при которых массивная конструкция (например, промышленная установка, здание, масштабная инженерная конструкция) участвует в общем движении совместно с грунтом, на котором она располагается. В зависимости от параметров, определяющих такие процессы, сейсмические колебания могут либо усиливаться, либо, напротив, уменьшаться и минимизировать возможные повреждения конструкции. Так, в работах [37,38] преобразователь КСР используется для моделирования взаимодействия грунта и фундамента в приближении малых и умеренных деформаций грунта. С помощью метода гармонического баланса определяется реакция равновесного состояния (*steady-state*) системы на внешнее гармоническое воздействие. Также показано, что по сравнению с численным методом конечных элементов, традиционно используемым для решения подобных задач сейсмологии, модель КСР позволяет получить аналитические зависимости (для выбранной функции $\mu(\alpha, \beta)$) и оценивать значимость параметров задачи.

3.4. Оптимальное управление. Большое число исследований посвящено задаче оптимального управления динамическими системами, имеющими в своем составе гистерезисные блоки. Так, в работах [14,15] решена задача оптимального управления для системы с двумя переменными состояниями, у одного из них эволюция регулируется управляемым обыкновенным дифференциальным уравнением, а другое содержит гистерезисный оператор (люфт, оператор Прандтля—Ишлинского и оператор КСР). С помощью метода динамического программирования выводится соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби первого порядка и доказывается, что целевая функция является единственным ограниченным равномерно непрерывным решением задачи Коши.

В ряде работ гистерезисные слагаемые присутствуют как в уравнениях состояния, так и в управлении [21,22]. Здесь задача оптимального управления сводится к системе с дискретным временем, и далее применяется метод динамического программирования. Устанавливается аналог принципа Беллмана оптимальности траектории для системы, включающей в свой состав звено, моделируемое преобразователем КСР.

Конкретные задачи математической физики, в частности, задача диффузии, рассмотрены в [33,70]. Предложен конструктивный метод, основанный на двухпараметрической «штрафной» функции. Малый параметр определяет отклонение решения за конечное время от ожидаемого значения, второй параметр используется для аппроксимации основных вариационных неравенств. Решение проблемы управляемости может быть получено путем перехода к пределу в дважды вырожденной системе управления, при этом наблюдается сходимости по пространственным координатам в сильном смысле, причем она является равномерной по времени. Диффузия в биологических системах обсуждается в [43], в этой статье анализируемая система содержит три

уравнения диффузии, описывающих эволюцию трех биологических видов: жертвы, хищника и пищи для добычи (или растительности). Уравнение для плотности пищи включает оператор гистерезиса в виде обобщенного упора. Изучена задача минимизации интегрального функционала затрат по отношению к решениям вышеупомянутой системы. Получены некоторые результаты релаксационного типа для задачи минимизации и установлено существование почти оптимального решения. Задача управления реакционной диффузией [150] моделируется системой с двумя видами управления, а именно распределенными функциями управления или элементами управления, которые действуют на части границы области. Уравнение состояния задается системой реакция—диффузия с дополнительным свойством, заключающимся в том, что в скорость реакции включен скалярный оператор упора. Особенностью вывода сопряженной системы является нелокальность во времени производной Адамара оператора управления по состоянию.

В задачах, модели которых сводятся к уравнениям с распределенными параметрами, проблема идентификации оптимального (квазиоптимального) управления является весьма нетривиальной [33]. Один из возможных способов ее решения связан с трансляцией управляющего воздействия посредством динамически меняющихся граничных условий. Именно к такому классу относится задача, связанная с поддержанием (установлением) желаемой температуры в теплопроводящих средах. Гистерезисное слагаемое в задачах указанного типа может проявляться на границе области [81, 114] или являться составной частью рассматриваемой системы. Разработке модели управления, проблеме существования периодических решений посвящен цикл работ [80, 82, 85], а также [68, 74, 164]. Исследованию задачи Стефана с гистерезисными особенностями посвящена работа [46]. Проблема регуляризации параболических уравнений, в том числе и с гистерезисом, рассматривалась в работах [9, 63, 196].

Еще один интересный способ учета гистерезисных нелинейностей в задачах управления предложен в [34]. Здесь гистерезисное слагаемое вводится в вариационное неравенство эволюции с замкнутым выпуклым ограничением m -мерного вещественного арифметического пространства. В этом случае существуют оптимальные решения, а также необходимые условия оптимальности первого порядка. В частности, при определенных предположениях о регулярности детально описано поведение решений сопряженной системы. Подчеркивается, что существенную трудность в получении условий оптимальности вносит недифференцируемость рассматриваемых нелинейных операторов.

В работе [178] рассматривается задача оптимального производства, хранения и сбыта продукции в условиях гистерезисного характера функции спроса, а именно, для функции спроса, определенной с помощью преобразователя КСР с инвертированными индивидуальными реле. Целевой функционал $I(T)$ равен с точностью до знака общему доходу за конечное время T :

$$I(T) = \int_0^T [-c(t)P(t) + U(t) + kZ(t)] dt, \quad (3.7)$$

где $c(t)$ — цена единицы товара на монотоварном рынке, $P(t)$ — темп продаж (т. е. количество проданного за единицу времени товара), $U(t)$ — темп производства (т. е. количество товара, поступающего на склад в единицу времени), $Z(t)$ — количество товара на складе у производителя, k — коэффициент, характеризующий затраты на хранение единицы товара; зависимость темпа продаж от $Z(t)$ является гистерезисной. Такая модель по своей природе позволяет учитывать «историю» потребительских отношений на конечном временном интервале.

В технических задачах большой интерес представляет управление элементами механических систем, в частности, механической трансмиссией [133]. В ряде случаев задача сводится к устранению эффекта гистерезиса в высокоточной механической передаче. Для описания гистерезисного поведения гармонического привода применяется модифицированная модель Боука—Вена. С помощью преобразования координат и линеаризации обратной связи получена математическая модель последовательной системы механического привода. Эталонная траектория отслеживается контроллером, основанным на линейном квадратичном регуляторе. Относительная погрешность в отслеживании установившихся колебаний стремится к нулю. При использовании оптимального управления выходной сигнал гармонического привода может следовать более сложной траектории.

3.5. Стохастические внешние воздействия и недетерминированные системы. Известно, что базовые характеристики гистерезисных блоков большинства динамических систем, как правило, известны лишь с ограниченной точностью и, более того, подвержены нерегулярным изменениям вследствие процессов «старения», «износа», а также особенностей внешнего окружения, что наиболее типично для механических составляющих. Это влечет необходимость обобщения известных гистерезисных моделей на случай стохастических возмущений параметров анализируемой системы.

Приведем несколько примеров систем с гистерезисом, в которых носитель указанных свойств, обладая доменной структурой, демонстрировал «не совсем» детерминированное поведение: первый из них касается экспериментального исследования отклика намагниченности ферромагнетиков различного химического состава на внешнее магнитное поле, изменяющееся по гармоническому закону [58]. В этой работе показано, что гистерезисная петля на каждом этапе перемагничивания испытывала неконтролируемые вариации (при этом условия эксперимента обеспечивали почти идеальное постоянство внешних условий — температуры, давления и т. д.). Аналогичные результаты, в том числе и для сегнетоэлектриков, поляризуемых периодически меняющимся электрическим полем, представлены в работах [153, 202]. Это означает, что существующие модели (как феноменологические, так и конструктивные) можно рассматривать лишь как «первое приближение» в задачах идентификации параметров систем с ферромагнитным и сегнетоэлектрическим гистерезисом. Следующий пример основан на гистерезисной модели безработицы [48]. В этой работе моделируется занятость населения, работающего на предприятиях-производителях монопродукции в зависимости от ценовой конъюнктуры. На основе статистических данных предлагается гистерезисная модель безработицы — преобразователь КСР, при этом элементарный носитель гистерезисных свойств (неидеальное реле) отождествляется с отдельным предприятием. Входом для соответствующего преобразователя является цена, выходом — состояние, соответствующее вовлеченности (невовлеченности) в производственный процесс. Отметим, что посредством указанной модели естественным образом может быть описано поведение производителей сланцевой нефти — действительно, ее цена на мировых рынках является определяющим наличие или отсутствие производства фактором (хотя и не единственным).

Модели систем с гистерезисом в условиях стохастических воздействий рассматривались в работах [59, 139, 140, 165, 185, 187], посвященных изучению отклика гистерезисного преобразователя на случайный или зашумленный сигнал. Тем не менее, внутренние параметры гистерезисной подсистемы в этих работах считались детерминированными. В работах [1, 30] рассматривалось обобщение одной из простейших гистерезисных моделей — обобщенного люфта: его определяющие кривые полагались подверженными случайным возмущениям, выход такого преобразователя трактовался как случайный процесс. В указанных работах была доказана корректность соответствующего определения, изучены основные свойства стохастического преобразователя.

В работе [139] исследуется отклик нелинейной системы на стохастическое внешнее воздействие. Введена модель последствия (*after-effect*) случайных тепловых возмущений, приводящих к постепенной потере памяти в гистерезисных системах. В предположении, что каждый домен имеет температуру фазового перехода $T_c \pm \delta T_c$, где знаки плюс и минус соответствуют нагреву и охлаждению соответственно, пространственные распределения T_c и δT_c служат параметрами модели.

Рассматривался детерминированный вход, который в начальный момент времени $t = 0$ принимает некоторое постоянное значение u . В детерминированной ситуации выход $x(t)$ оставался бы также постоянным для всех $t > 0$. Далее, на постоянный вход u накладываются тепловые возмущения или шум, описываемые случайным процессом X_t . Выход представляет собой случайный процесс

$$x_t = \int \int_{\alpha > \beta} \Gamma[z_0(\gamma)](u + X_t) d\alpha d\beta. \quad (3.8)$$

Параметры шума можно определить следующим образом. Время переключения для элементарных гистеронов связано с параметрами тепловых возмущений, которые не наблюдаются непосредственно. Статистические характеристики времени переключения гистерезисной системы наблюдаются экспериментально. Следовательно, может быть решена задача идентификации параметров шума.

Общие выражения для спектральной плотности выходного сигнала модели КСР с некоррелированным входным сигналом выведены в [78], причем для частного случая равномерной плотности Прейзаха автокорреляционная функция $\{C(t)\}$ убывает по степенному закону $\sim t^{-3}$, соответствующему логарифмической низкочастотной расходимости второй производной спектра. Также получено более простое выражение для симметричных моделей КСР, которое подробно обсуждается в [79]; показано, что долговременные «хвосты» $1/f$ являются общими чертами этого класса моделей [77].

В дальнейшем исследования моделей, основанных на процессах Орнштейна—Уленбека, были распространены на негауссовы входные процессы, с акцентом на долгосрочное корреляционное затухание отклика системы [175]. Численное моделирование показывает, что аналитические выражения, полученные для автокорреляционных функций и спектральных плотностей мощности модели Прейзаха с некоррелированными входными данными, асимптотически эквивалентны экспоненциально убывающим корреляциям внешнего воздействия. Как следствие, механизмы, вызывающие шум $1/f$ в системах с гистерезисными звеньями в виде преобразователя КСР с некоррелированными входными данными, остаются в силе и при наличии быстро затухающих входных корреляций. Кроме того, автокорреляционные функции и спектральные плотности мощности монотонно уменьшаются независимо от выбора входного сигнала и меры Прейзаха.

В [154] предполагается, что система состоит из большого числа абстрактных гистеронов, в которых изменение внешнего управляющего параметра (магнитного поля) может привести к переходам между двумя состояниями s_1 и s_2 . Состояние гистерона частицы характеризуется значением $+1$ или -1 случайной величины (направлением намагничивания). Переходы между ними регулируются двумя вспомогательными случайными величинами, отвечающим инверсии $s_2 \rightarrow s_1$ и $s_1 \rightarrow s_2$. Метод позволяет вычислить распределение вероятностей и, следовательно, математическое ожидание числа частиц в состоянии s_1 и s_2 как для возрастающих, так и для убывающих значений параметров, т. е. могут быть определены кривые гистерезиса переходов. Получается, что критические точки управляющего параметра являются точками Маркова, которые определяют стохастическую эволюцию процесса. Было показано, что ветви петли гистерезиса сходятся к фиксированным предельным кривым, когда количество циклов управляющего параметра между двумя последовательными точками разворота достаточно велико. Было доказано, что процесс намагничивания становится стационарным с увеличением числа циклов намагничивания.

Достаточно общий и математически абстрактный подход, основанный на методе функционального интегрирования в колмогоровских пространствах, предложен в [27]. Этот подход имеет широкую область возможного применения, поскольку мера μ генерируется марковским стохастическим процессом.

Во многих прикладных задачах, связанных с моделированием гистерезисных эффектов, где априори предполагается доменная структура носителей гистерезисных свойств (многократное перемагничивание ферромагнитных составляющих электромагнитных систем, поляризация сегнетоэлектрика в зависимости от напряженности электрического поля, зависимость занятости от цены на монотоварных рынках и др.), приходится сталкиваться с необходимостью учитывать неопределенности в реакциях отдельных доменов на внешнее воздействие.

Естественное обобщение КСР, учитывающее стохастические флуктуации элементарных носителей гистерезиса, приведено в [2]. В указанной работе априори предполагалось, что пороговые числа каждого неидеального реле имеют заданную функцию распределения (при этом носители левого и правого пороговых чисел не пересекаются). Приводится определение и устанавливаются основные свойства стохастического преобразователя неидеального реле и систем неидеальных реле (конечных и континуальных), соединенных параллельно: управляемость, монотонность по входам и начальным состояниям, и некоторые другие.

Перечисленные свойства преобразователя открывают возможности использования его для моделирования гистерезисных связей в системах, где не предполагается детерминированность параметров гистерезисных преобразователей

Неидеальное реле со стохастическими параметрами определяется следующим образом: $R[p_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0]$. Здесь $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ — случайные величины с известным законом распределения. При этом величины $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ непрерывны (см. рис. 5, а)).

Следуя классическому определению, *допустимыми* для стохастического реле являются непрерывные при $t \geq t_0$ входы $u(t)$, а пространство возможных состояний состоит из пар $\Omega = \Omega(\{-1, 1\}, 0 \leq p(t) \leq 1, u \in \mathbb{R})$.

Переменным состоянием преобразователя является пара $\{u(t), p(t)\}$, а выходом является случайный процесс $R[p_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0]u(t)$, принимающий значение $+1$ с вероятностью $p(t)$ и значение -1 с вероятностью $(1 - p(t))$, т. е.

$$P\{R[p_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0]u(t_0) = 1\} = p_0. \quad (3.9)$$

Вторая компонента определяется соотношением $p(t) \equiv p[p_0, u(\tau)|_{t_0 \leq \tau \leq t}](t)$ во всякий момент времени. На монотонных входах вероятность того, что реле находится во включенном состоянии $p[p_0, u(\tau)|_{t_0 \leq \tau \leq t}](t)$ при $t \geq t_0$, равна

$$p[p_0, u(\tau)|_{t_0 \leq \tau \leq t}](t) = \begin{cases} \max \left[p_0, \int_{-\infty}^{u(t)} \varphi_{\beta}(u) du \right], & \text{если } u(t) \text{ возрастает,} \\ \min \left[p_0, \int_{-\infty}^{u(t)} \varphi_{\alpha}(u) du \right], & \text{если } u(t) \text{ убывает.} \end{cases} \quad (3.10)$$

На кусочно-монотонных входах оператор стохастического реле R определяется с помощью полугруппового тождества: предположим, что имеет место разбиение области определения входа на участки монотонности:

$$[t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \cup [t_n, t]. \quad (3.11)$$

На каждом из них оператор определен соотношением (3.10). Состояние в моменты времени, соответствующие изменению монотонности, играют роль начальных состояний для следующих временных промежутков.

Рассмотрены основные свойства дискретной и непрерывной систем реле, параметры которых трактуются как случайные величины, при этом выход системы реле представляется как случайный процесс. Исследована корректность определения, в частности, установлена независимость выхода (случайного процесса) от способа дискретизации в рамках предельного перехода от конечной к непрерывной системе неидеальных реле, а также установлена управляемость и монотонность (в рамках соответствующего определения) стохастического аналога преобразователя КСР [2].

Преобразователь, соответствующий конечной системе неидеальных реле, определяется схемой, представленной на рис. 5. Однако выход определяется как случайный процесс, равный взвешенной сумме случайных процессов, определяемых входно-выходными соответствиями стохастических реле:

$$\xi_N[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)] = \sum_{j=1}^N \mu_j R[p_0, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0]u(t). \quad (3.12)$$

Предельный переход, когда число стохастических реле стремится к бесконечности, а весовые коэффициенты стремятся к нулю пропорционально элементам площади на плоскости параметров (α_j, β_j) , приводит к определению стохастического аналога преобразователя КСР:

$$\xi_N[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)] = \sum_{j=1}^N R[p_0, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0]u(t) \Delta \alpha_j \Delta \beta_j. \quad (3.13)$$

Стохастическим оператором КСР назовем преобразователь, сопоставляющий всякому непрерывному входу двухпараметрический случайный процесс, являющийся пределом сумм (3.13) при стремлении диагонали

$$d(\gamma_j) = \max_{1 \leq j \leq N} \sqrt{(\Delta \alpha_j)^2 + (\Delta \beta_j)^2} \quad (3.14)$$

прямоугольника γ_j к нулю.

Переменное состояние стохастического преобразователя КСР есть упорядоченная пара $\{u(t), p[p_0, \alpha, \beta, u(t)]\}$, вторая компонента которой есть вероятность того, что инфинитезимальное реле с пороговыми числами α и β находится во включенном состоянии.

В работе [2] сформулированы и доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Случайный процесс, определенный равенством (3.15), инвариантен в смысле сходимости порядка p ($p > 1$) по отношению к последовательности разбиения множества $\mathcal{D}_\delta = \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta - \delta\}$.*

Теорема 3.2. *Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса $\Xi[p(t), \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0, u(t)]$ определяются соотношениями*

$$M\{\Xi[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)]\} = \iint_{\alpha < \beta - \delta} p[p_0, \alpha, \beta, x_0, t_0, u(t)] d\alpha d\beta, \quad (3.16)$$

$$D\{\Xi[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)]\} = \iint_{\alpha < \beta - \delta} p[p_0, \alpha, \beta, x_0, t_0, u(t)] \{1 - p[p_0, \alpha, \beta, x_0, t_0, u(t)]\} d\alpha d\beta. \quad (3.17)$$

Теорема 3.3. *Пусть на промежутке $[t_0, T]$ имеет место равномерная сходимость последовательности кусочно-монотонных функций $\{u_n(t)\}$, где $n = 1, 2, \dots$, к функции $u_*(t)$:*

$$\forall t \in [t_0, T] \quad [u_n(t) \Rightarrow u_*(t)]. \quad (3.18)$$

Тогда выход представляет собой случайный процесс, сходящийся по распределению к случайному процессу

$$x_*(t) = \Xi[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u_*(t)]. \quad (3.19)$$

Эти теоремы открывают возможности к имплементации стохастического преобразователя КСР в модели динамических систем с носителями гистерезисных свойств с флуктуирующими параметрами.

3.6. Динамика систем с оператором КСР. Динамические свойства систем с конструктивными гистерезисными нелинейностями радикально отличается от динамики традиционных систем с функциональными нелинейностями. Это обусловливается расширением фазового пространства систем за счет пространства состояний гистерезисного преобразователя. В частности, пространство состояний преобразователя КСР состоит из характеристических функций полуплоскости $\alpha < \beta$, а соотношение «вход–состояние» этого преобразователя является частью динамических систем с гистерезисными нелинейностями. Особенности динамики систем с преобразователем КСР нашли отражение в работах [16, 25, 35, 144, 160, 167]. В первых двух из них рассматривается достаточно простая система, описывающая вынужденные колебания ферромагнитного шарика с малым вязким трением в магнитном поле:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A \sin(\Omega t) + E\Gamma[x(t)], \quad (3.20)$$

где γ — логарифмический декремент затухания, ω — собственная частота осциллятора, Ω — частота внешнего гармонического воздействия, E — величина, пропорциональная градиенту внешнего магнитного поля, $\Gamma[x(t)]$ — выход преобразователя КСР.

Основной результат этой статьи связан с возникновением хаотических колебаний в определенном интервале значений градиента внешнего магнитного поля. Иными словами, возникновение хаоса в указанной системе обусловливается исключительно проявлением внутренней структуры гистерезисного слагаемого, формализуемого преобразователем КСР.

Отметим, что проблема идентификации динамических режимов (с точки зрения разделения на регулярную и хаотическую динамику) является достаточно сложной: основные методы базируются на вычислении ляпуновских показателей. Арсенал таковых методов достаточно широк: алгоритмы Бенеттина, Кантца, Вольфа, Розенштейна и др. Однако все указанные алгоритмы требуют гладкости правых частей уравнений. В ситуации, когда динамика носителей гистерезисных свойств формализуется феноменологической моделью с негладкими правыми частями, удовлетворительные (но не всегда точные) результаты вычислений ляпуновских показателей могут быть получены путем аппроксимации негладких нелинейностей гладкими функциями.

Характеристические показатели Ляпунова определяются как собственные значения матрицы инфинитезимального возмущения траектории в фазовом пространстве. Их обычно рассматривают как меру чувствительности системы по отношению к малым изменениям начальных условий. Старший показатель часто используется для разграничения хаотического и детерминированных режимов [190].

В работе [177] предложен метод вычисления ляпуновских показателей в системах с различными видами моделей гистерезисных нелинейностей. Приведем краткое описание указанного метода применительно к системам с преобразователем КСР.

Пусть динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

В общем случае преобразователь КСР не имеет даже слабой производной Гато. Однако существуют такие входы и отвечающие им направления (в функциональном пространстве), для которых аналог производной Гато имеет место. Ниже описываются соответствующие конструкции.

Определение. *Односторонними производными по параметру входа в момент времени $t \geq t_0$ преобразователя КСР назовем функции, определяемые правилами:*

$$D_{u(t)}^+ P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{P[z(\alpha, \beta, t), u(t), t] \delta u(\tau) \big|_{\tau=1} - P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t)}{\mu}, \quad (3.22)$$

$$D_{u(t)}^- P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t) = \lim_{\mu \rightarrow -0} \frac{P[z(\alpha, \beta, t), u(t), t] \delta u(\tau) \big|_{\tau=1} - P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t)}{\mu}, \quad (3.23)$$

где $\delta u(\tau) = u(\tau) + \mu \varphi(\tau)$ — вариация входа $u(\tau)$. Здесь $\varphi(\tau)$ — произвольная непрерывная монотонно возрастающая функция, определенная на $0 \leq \tau \leq 1$ и принимающая на границах значения $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$.

В простейшей ситуации, когда носитель меры преобразователя КСР сосредоточен в треугольнике $\{(\alpha, \beta): \alpha \in [-L, L], \beta \in [\alpha, L]\}$, введенные выше производные по параметру допускают аналитическое представление.

Выберем некоторое начальное условие $\mathbf{x}_0$, которое подвергается возмущению $\delta \mathbf{x}_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим разбиение промежутка времени $[t_0, T] = \bigcup_{j=1}^m [t_{j-1}, t_j]$. Для некоторого фиксированного $j \in [1, m]$ через малый промежуток времени $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ система перейдет из состояния $\mathbf{x}^{(j-1)} = \mathbf{x}(t_{j-1})$ в состояние $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}(t_j)$, причем $\delta \mathbf{x}_i^{(j)} = \delta \mathbf{x}_i(j)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Алгоритм вычисления спектра показателей Ляпунова заключается в последовательности следующих шагов.

Во-первых, вычисляется очередное значение $\mathbf{x}^{(j)}$. Далее находим матрицу Якоби $\Phi_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$, с использованием которой вычисляются новые возмущения $\mathbf{y}_i^{(j)} = \Phi_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)}) \delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(j-1)}$. При этом для линеаризации гистерезисного слагаемого используются уравнения (3.22)–(3.23) с учетом информации о поведении входа на каждом из интервалов.

Для сохранения точности вычислений в связи со значительно отличающимися по порядку величины смещениями от невозмущенной траектории в различных пространственных направлениях применяется процедура ортогонализации Грама–Шмидта:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_1^{(j)} &= \mathbf{y}_1^{(j)}, \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)} &= \mathbf{x}_1^{(j)} / |\mathbf{x}_1^{(j)}|, \\ &\dots, \\ \delta \mathbf{x}_i^{(j)} &= \mathbf{y}_i^{(j)} - (\mathbf{y}_i^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)}) \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)} - \dots - (\mathbf{y}_i^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}) \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}, \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(j)} &= \delta \mathbf{x}_i^{(j)} / |\delta \mathbf{x}_i^{(j)}|. \end{aligned}$$

Выполнение вышеописанных шагов для последовательности точек разбиения $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_J$, где $j = 1, 2, \dots, J$, приводит к оценке спектра Ляпунова

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^J \ln |\delta \mathbf{x}_i^{(j)}|. \quad (3.24)$$

Для применения рассмотренного алгоритма к системам с гистерезисными нелинейностями предлагается следующая модификация. Для определенности положим, что правая часть $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3.21) содержит гистерезисное слагаемое в первой компоненте набора, $F_1(\mathbf{x})$. В вычислительном цикле на каждой итерации вводится дополнительная проверка условия $\dot{x}_1 = 0$. Заметим, при численной реализации алгоритма указанное условие означает, что произведение

$$((x_1)_k - (x_1)_{k-1}) ((x_1)_{k+1} - (x_1)_k)$$

становится отрицательным — функция $x_1(t)$ достигает локального экстремума. Здесь индекс k соответствует дискретизированным значениям первой компоненты на сеточном множестве в фазовом пространстве системы. При справедливости условий $\dot{x}_1 = 0$ и $\ddot{x}_1 \neq 0$ в некоторой точке $\mathbf{x}_k$ следует закончить вычисление смещений $\delta \hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ и осуществить переход к очередной итерации вычислительного цикла, приняв $\mathbf{x}_k$ за начальную точку фазовой траектории (см. рис. 6). На рис. 6 приведена иллюстрация к реализации модификации алгоритма Бенеттина для вычисления показателей Ляпунова: в точке $\mathbf{x}^*$, геометрически совпадающей с точкой траектории, в которой первая компонента претерпевает изменение монотонности, накопление сумм приостанавливается и, следуя предложенной модификации, возобновляется на новом участке монотонности.

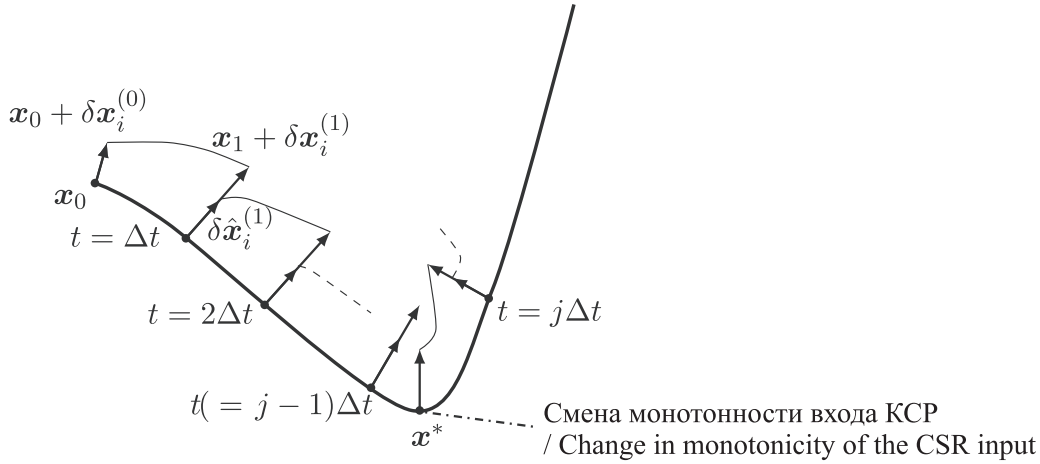


Рис. 6. Схема вычисления показателей Ляпунова с помощью численного решения уравнений динамики. Здесь $\mathbf{x}_0$ — некоторая исходная точка фазового пространства, $\mathbf{x}_k$ — точка, в которой выполняется условие $\dot{x}_1 = 0$. Траектории системы, начальные значения которой подвергнуты возмущениям, изображены тонкими линиями.

FIG. 6. Scheme of calculating Lyapunov exponents using numerical solution of the equations of dynamics. Here $\mathbf{x}_0$ is some initial point of the phase space, $\mathbf{x}_k$ is the point at which the condition $\dot{x}_1 = 0$ is satisfied. The trajectories of the system, the initial values of which are subjected to perturbations, are depicted by thin lines.

Отметим также работы [144, 152, 160], в которых рассматривались системы с преобразователем КСР, находящимся под знаком производной. В силу недифференцируемости (в общем случае) этого преобразователя под решениями указанных систем понималась абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая системе почти всюду. Центральный вопрос этих работ был связан с устойчивостью периодических решений в условиях периодичности правых частей. Приведены условия, формализуемые в виде неравенств и ограничений на правую часть, гарантирующие

существование устойчивого периодического решения. Эти результаты оказались полезны в задаче моделирования увлажнения (т. е. динамике влагосодержания пористой среды) [160].

Динамика потоков воды через ненасыщенные почвы (*water flow through unsaturated soil*) в гидродинамике с достаточной степенью точности описывается дифференциальными уравнениями, содержащими гистерезисные нелинейности под знаком производной по времени:

$$\frac{d}{dt}(ax(t) + \Gamma[x(t)]) = f(x(t), t), \quad (3.25)$$

где $a > 0$ — const, $\Gamma[x(t)]$ — оператор КСР, $f(x(t), t)$ — неоднородное слагаемое, характеризующее источники инфильтрационных и дренажных потоков (*infiltration and drainage flows*). В этом уравнении $\Gamma[x(t)]$ характеризует гистерезисную зависимость между капиллярно-сорбционным потенциалом (*matric potential*) и содержанием воды в почве (*water content*). Показано, что оператор $\Gamma[\cdot]$ дифференцируем по исходным данным для общего класса решений, предложен алгоритм вычисления его производной, проведен анализ устойчивости периодических решений [152]. Заметим, что вопросы существования решения и свойства решений дифференциальных уравнений с оператором КСР под знаком производной по времени детально исследованы в работах [117, 119].

3.7. Биология, медицина и общественные науки. Широкое применение моделей с гистерезисом в биологических науках и в медицине обусловлено принципиальной сложностью и многогранностью исследуемых объектов в науках о живых системах [56, 61, 69, 157, 159]. Так, в работе [159] адаптивное поведение биологических сообществ исследуется в рамках классической модели Лотки—Вольтерры с введенной гистерезисной нелинейностью в виде преобразователя КСР. Отмечается, что учет зависимости параметров от истории состояния переменных открывает перспективы для построения более детальных моделей адаптации в моделях конкуренции. При этом авторы указывают на сложности, связанные с идентификацией параметров гистерезисных блоков. Динамика популяций на примере бактерий, обладающих двумя фенотипами, рассмотрена в [69]. В качестве нелинейного слагаемого в уравнениях населенности среды выбраны неидеальные реле. Обзор [122] дает представление о применении моделей гистерезиса не только в биологических, но и в макроэкономических, гидрологических и некоторых других задачах (см. также [67, 121, 134]).

В ряде работ известная эпидемиологическая модель SIR, в которой популяция разделяется на группы восприимчивых, инфицированных или выздоровевших представителей (*susceptible, infectious, recovered*, введено в [112]) усовершенствована с учетом предположения о влиянии истории эпидемиологического процесса на его динамику [76, 115, 158, 166]. В недавней работе [115] предполагается, что уровень вакцинации меняется в ответ на динамику эпидемии. Авторы смоделировали адаптивную реакцию индивидуума с помощью двухпорогового переключателя (неидеального реле). Как следствие, поведение эпидемиологического процесса восприимчивой популяции в ответ на воздействие со стороны возбудителя моделируется в рамках модели Прейзаха. Показано, что произвольная траектория динамической системы сходится либо к эндемическому равновесию, либо к периодической орбите. Тем не менее, при дополнительных естественных предположениях периодический аттрактор не реализуется в реальных системах, и обеспечивается сходимостью каждой траектории к конечному состоянию равновесия. Роль моделей поведения популяции, зависящих от текущего состояния эпидемии на основе модели Прейзаха, подчеркивается в работе [166]. В этой работе показано, что более широкий разброс порогов различных групп населения приводит к значительному увеличению пика инфекции во время эпидемии.

В ряду исследований моделей биологических процессов с гистерезисными нелинейностями особый интерес представляют недавние работы [61, 100]. В этих работах предлагается рассматривать дыхательный орган (легкие) как вязко-упругую деформируемую пористую среду, в которой соотношение давление/объем носит гистерезисный характер и может быть описано посредством модели КСР. Процесс дыхания с термодинамической точки зрения представляет собой изотермический периодический процесс с газообменом между внутренней и внешней частями тела. При этом такая модельная система основана на принципах сохранения массы и импульса. В предположении о малости деформаций получаемая система имеет структуру, аналогичную модели

ненасыщенных деформируемых пористых сред. Основной результат работы состоит в доказательстве существования периодических решений для любой возбуждающей силы с заданным периодом.

Проблеме динамики популяции в условиях неоднозначной (гистерезисной) связи между параметрами системы посвящены работы [84, 86, 87]. Также отметим интересные работы [11, 12], где устанавливаются свойства решений параболических уравнений с оператором неидеального реле в правой части. Полученные там результаты применимы к задачам моделирования химических, биологических процессов.

Отметим также, что, так или иначе, интерес к гистерезисным нелинейностям в рамках моделей биологических систем связан с наличием у таких нелинейностей свойств эрмитности, что, несомненно, имеет место практически в любых биопроцессах.

Применение гистерезисных эффектов (в том числе и преобразователя КСР) в общественных науках, в частности, в экономике, дало исследователям более обоснованные методы описания микро- и макроэкономических процессов. Несомненное лидерство в этой области принадлежит профессору Роду Кроссу. Отдельно отметим две работы [48, 50]. В первой из них рассматриваются макроэкономические процессы. Как указывают авторы, такие процессы часто концептуализируются как «потoki», и здесь может быть проведена аналогия с физическими потоками. Однако большинству экономических процессов присуща необратимость, что, в свою очередь, игнорируется в рамках таких аналогий. Авторами предлагается более адекватная аналогия, рассматривающая экономические потоки как потоки через пористую среду. Эта новая концептуальная основа включает в себя важные функции, такие как необратимость и гетеростазис, за счет того, что для описания процессов в пористых системах используются модели гистерезиса. В рамках представленной концепции авторами выведена простая модель, которую можно использовать для получения качественных результатов. Во второй работе показано, что гипотеза естественного уровня безработицы, согласно которой равновесная безработица определяется только структурными переменными, неверна. Как демонстрирует автор, такая гипотеза неправдоподобна и несовместима с наблюдаемыми фактами. Вместо этого, автор предлагает рассматривать различные гистерезисные модели, в частности, модель КСР с ее выборочным свойством «стирания» памяти. В рамках таких предположений анализируются данные о влиянии гистерезиса на процесс выпуска продукции, а также на безработицу. Кроме этого, обсуждаются эффекты такого подхода для макроэкономической политики.

Еще одной работой, тесно связанной с экономикой, но вводящей фундаментальные аспекты нового класса гистерезисных операторов, является [49]. В этой работе изучается новый тип гистерезисной нелинейности, возникающий в нестационарных системах — нестационарная модель КСР. В стандартную модель КСР внесены поправки, позволяющие использовать пороговые значения, зависящие от состояния или времени. В статье представлена простая нестационарная модель КСР, основанная на одной экономической модели инвестиций, рассмотрены основные свойства этой модели, включая конечные приближения. Схожие конструкции использовались также в работе [4].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведен обзор работ, связанных с формализацией гистерезисных зависимостей посредством модели КСР. Приводятся определения и основные свойства преобразователя КСР, рассмотрены его основные обобщения, даются многочисленные примеры использования этого оператора в математическом моделировании процессов в естественно-научных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А. Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами // Мат. модел. — 2019. — 31, № 7. — С. 109–126. — DOI: 10.1134/S0234087919070074.
2. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Стохастическая модель гистерезисного преобразователя с доменной структурой // Мат. модел. — 2021. — 33, № 9. — С. 60–86. — DOI: 10.20948/mm-2021-09-05
3. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.

4. Красносельский А. М., Покровский А. В. Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением // Автомат. и телемех. — 2006. — 2. — С. 57–69.
5. Медведский А. Л., Мелешенко П. А., Нестеров В. А., Решетова О. О., Семенов М. Е., Соловьев А. М. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2020. — 4. — С. 58–82.
6. Abdullah N., Hasan N. The implementation of water alternating (WAG) injection to obtain optimum recovery in Cornea Field, Australia // J. Petrol. Explor. Product. Techn. — 2021. — 11. — С. 1475–1485. — DOI: 10.1007/s13202-021-01103-7.
7. Adeyemo T., Kramer I., Levy G. J., Mau Y. Salinity and sodicity can cause hysteresis in soil hydraulic conductivity // Geoderma. — 2022. — 413. — 115765.
8. Adly A. A., Mayergoyz I. D. Accurate modeling of vector hysteresis using a superposition of Preisach-type models // IEEE Trans. Magnet. — 1997. — 33. — С. 4155–4157.
9. Alt H. W. On the thermostat problem // Control Cybernet. — 1985. — 14. — С. 171–193.
10. Andreev M., Suvorov A., Ruban N., Ufa R., Gusev A., Askarov A., Kievets A. S. Development and research of mathematical model of current transformer reproducing magnetic hysteresis based on Preisach theory // IET Gener. Transm. & Distrib. — 2020. — 14. — С. 2720–2730.
11. Apushkinskaya D. E., Uraltseva N. N. Free boundaries in problems with hysteresis // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2015. — 373, № 2050. — 20140271. — DOI: 10.1098/rsta.2014.0271.
12. Apushkinskaya D. E., Uraltseva N. N. On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem // Interfaces and Free Bound. — 2015. — 17, № 1. — С. 93–115. — DOI: 10.4171/ifb/335.
13. Azzerboni B., Cardelli E., Della Torre E., Finocchio G. Reversible magnetization and Lorentzian function approximation // J. Appl. Phys. — 2003. — 93. — С. 6635–6637.
14. Bagagiolo F. Dynamic programming for some optimal control problems with hysteresis // Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2002. — 9. — С. 149–174.
15. Bagagiolo F. Viscosity solutions for an optimal control problem with Preisach hysteresis nonlinearities // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. — 2004. — 10. — С. 271–294.
16. Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D., Zhezherun A. Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis // J. Dynam. Differ. Equ. — 2012. — 24. — С. 713–759.
17. Barker J. A., Schreiber D. E., Huth B. G., Everett D. H. Magnetic hysteresis and minor loops: Models and experiments // Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Sci. — 1983. — 386. — С. 251–261.
18. Baronti F., Femia N., Saletti R., Visone C., Zamboni W. Hysteresis modeling in Li-ion batteries // IEEE Trans. Magnet. — 2014. — 50, № 11. — С. 1–4.
19. Baronti F., Femia N., Saletti R., Visone C., Zamboni W. Preisach modelling of lithium-iron-phosphate battery hysteresis // J. Energy Storage. — 2015. — 4. — С. 51–61. — DOI: 10.1016/j.est.2015.09.004.
20. Bartic A. T., Wouters D. J., Maes H. E., Rickes J. T., Waser R. M. Preisach model for the simulation of ferroelectric capacitors // J. Appl. Phys. — 2001. — 89, № 6. — С. 3420–3425.
21. Belbas S., Mayergoyz I. Dynamic programming for systems with hysteresis // Phys. B. — 2001. — 306. — С. 200–205.
22. Belbas S. A., Mayergoyz I. D. Optimal control of dynamical systems with Preisach hysteresis // Int. J. Non-Linear Mech. — 2002. — 37. — С. 1351–1361.
23. Belhaq M., Bichri A., Der Hogapian J., Mahfoud J. Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam // Int. J. Non-Linear Mech. — 2011. — 46. — С. 828–833.
24. Bermúdez A., Dupré L., Gómez D., Venegas P. Electromagnetic computations with Preisach hysteresis model // Finite Elem. Anal. Design. — 2017. — 126. — С. 65–74.
25. Bermúdez A., Gúmez D., Venegas P. Mathematical analysis and numerical solution of models with dynamic Preisach hysteresis // J. Comput. Appl. Math. — 2020. — 367. — С. 112452.
26. Bertotti G. Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers. — New York: Academic Press, 1998.
27. Bertotti G., Mayergoyz I. D., Basso V., Magni A. Functional integration approach to hysteresis // Phys. Rev. E. — 1999. — 60, № 2. — С. 1428–1440.
28. Bodale I., Stancu A. Reversible and irreversible processes in drying and wetting of soil // Materials. — 2020. — 13, № 1. — С. 135.
29. Bombara D., Fowzer S., Zhang J. Compliant, large-strain, and self-sensing twisted string actuators // Soft Robotics. — 2022. — 9. — С. 72–88.
30. Borzunov S. V., Semenov M. E., Sel'vesyuk N. I., Meleshenko P. A. Generalized play-operator under stochastic perturbations: an analytic approach // J. Vibr. Engrg. Techn. — 2021. — 9. — С. 355–365. — DOI: 10.1007/s42417-020-00234-1

31. Botkin N. D., Brokate M., El Behi-Gornostaeva E. G. One-phase flow in porous media with hysteresis// Phys. B. Cond. Matt. — 2016. — 486. — C. 183–186.
32. Brokate M. On a characterization of the Preisach model for hysteresis// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1990. — 83. — C. 153–163.
33. Brokate M., Friedman A. Optimal design for heat conduction problems with hysteresis// SIAM J. Control Optim. — 1989. — 27, № 4. — C. 697–717. — DOI: 10.1137/032703.
34. Brokate M., Krejčí P. Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2013. — 18, № 2. — C. 331–348.
35. Brokate M., Pokrovskii A., Rachinskii D., Rasskazov O. Differential equations with hysteresis via a canonical example// Б сб.: «The Science of Hysteresis. Vol. I. Mathematical Modeling and Applications». — Amsterdam: Academic Press, 2006. — C. 125–291. — DOI: 10.1016/B978-012480874-4/50005-1.
36. Brokate M., Sprekels J. Hysteresis and phase transition. — New York: Springer, 1996.
37. Cacciola P., Calì I., Fiorini N., Occhipinti G., Spina D., Tombari A. Seismic response of nonlinear soil-structure interaction systems through the Preisach formalism: the Messina Bell Tower case study// Bull. Earthquake Engrg. — 2022. — 20. — C. 3485–3514.
38. Cacciola P., Tombari A. Steady state harmonic response of nonlinear soil-structure interaction problems through the Preisach formalism// Soil Dynam. Earthquake Engrg. — 2021. — 144. — C. 106669.
39. Carboni B., Lacarbonara W. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations// Nonlinear Dynam. — 2016. — 83. — C. 23–39.
40. Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems// J. Intel. Mater. Syst. Struct. — 2018. — 29, № 13. — C. 2795–2810.
41. Charalampakis A. E. The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited// Archive Appl. Mech. — 2015. — 85. — C. 1209–1223.
42. Chatterjee S., Kumar S., Gaidhane A., Dabhi C. K., Chauhan Y. S., Amrouch H. Ferroelectric FDSOI FET modeling for memory and logic applications// Solid-State Electron. — 2023. — 200. — C. 108554.
43. Chen B., Timoshin S. Optimal control of a population dynamics model with hysteresis// Acta Math. Sci. — 2022. — 42B(1). — C. 283–298.
44. Chladná Z., Kopfová J., Rachinskii D., Rouf S. C. Global dynamics of SIR model with switched transmission rate// J. Math. Biol. — 2020. — 80. — C. 1209–1233.
45. Chojecki P., Walters G., Forrester Z., Nishida T. Preisach modeling of imprint on hafnium zirconium oxide ferroelectric capacitors// J. Appl. Phys. — 2021. — 130. — C. 094102.
46. Colli P., Grasselli M., Sprekels J. Automatic control via thermostats of a hyperbolic Stefan problem with memory// Appl. Math. Optim. — 1999. — 39. — C. 229–255. — DOI: 10.1007/s002459900105.
47. Cottone F., Vocca H., Gammaitoni L. Nonlinear energy harvesting// Phys. Rev. Lett. — 2009. — 102. — C. 080601.
48. Cross R. Unemployment: natural rate epicycles or hysteresis?// Eur. J. Econom. Econom. Polic. Intervent. — 2014. — 11, № 2. — C. 136–148.
49. Cross R., Krasnosel'skii A. M., Pokrovskii A. V. A time-dependent Preisach model// Phys. B. Cond. Matt. — 2001. — 306, № 1. — C. 206–210.
50. Cross R., McNamara H., Pokrovskii A., Rachinskii D. A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows// Phys. B. Cond. Matt. — 2008. — 403, № 2-3. — C. 231–236.
51. Curran M., Gurevich P., Tikhomirov S. Recent advances in reaction-diffusion equations with non-ideal relays// Б сб.: «Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. Understanding Complex Systems». — Springer, 2016. — DOI: 10.1007/978-3-319-28028-8_11.
52. Dafri M., Ladjimi A., Mendaci S., Babouri A. Phenomenological model of the temperature dependence of hysteresis based on the Preisach model// J. Superconduct. Nov. Magnet. — 2021. — 34. — C. 1453–1458.
53. Daqaq M. F., Masana R., Erturk A., Dane Q. D. On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion// Appl. Mech. Rev. — 2013. — 66. — C. 040801.
54. Darbenas Z., Van der Hout R., Oliver M. Long-time asymptotics of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2022. — 39, № 6. — C. 1413–1458. — DOI: 10.4171/aihpc/34.
55. Darbenas Z., Van der Hout R., Oliver M. Conditional uniqueness of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit// J. Differ. Equ. — 2023. — 347. — C. 212–245. — DOI: 10.1016/j.jde.2022.11.038.
56. Das S. G., Krug J., Mungan M. Driven disordered systems approach to biological evolution in changing environments// Phys. Rev. X. — 2022. — 12. — C. 031040.
57. Detmann B., Krejčí P. A multicomponent flow model in deformable porous media// Math. Methods Appl. Sci. — 2019. — 42. — C. 1894–1906.

58. *Dho J., Leung C. W., Blamire M. G.* Universal time relaxation behavior of the exchange bias in ferromagnetic/antiferromagnetic bilayers// J. Appl. Phys. — 2006. — 99. — C. 033910.
59. *Di Matteo A.* Response of nonlinear oscillators with fractional derivative elements under evolutionary stochastic excitations: A Path Integral approach based on Laplace's method of integration// Probab. Engrg. Mech. — 2023. — 71. — C. 103402.
60. *Dupre L. R., Van Keer R., Melkebeek J. A. A.* Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model// J. Appl. Phys. — 1999. — 85. — C. 4376–4378.
61. *Eleuteri M., Ipocoana E., Kopfová J., Krejčí P.* Periodic solutions of a hysteresis model for breathing// ESAIM Math. Model. Numer. Anal. — 2020. — 54, № 1. — C. 255–271.
62. *Enab K., Emami-Meybodi H.* Effects of diffusion, adsorption, and hysteresis on huff-n-puff performance in ultratight reservoirs with different fluid types and injection gases// Energies. — 2021. — 14. — C. 7379. — DOI: 10.3390/en14217379.
63. *Evans L. C., Portilheiro M.* Irreversibility and hysteresis for a forward-backward diffusion equation// Math. Models Methods Appl. Sci. — 2004. — 14. — 1599–1620. — DOI: 10.1142/S0218202504003763.
64. *Everett D. H.* A general approach to hysteresis. Part 3. — A formal treatment of the independent domain model of hysteresis// Trans. Faraday Soc. — 1954. — 50. — C. 1077–1096.
65. *Everett D. H., Whitton W. I.* A general approach to hysteresis// Trans. Faraday Soc. — 1952. — 48. — C. 749–757.
66. *Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O'Kane J. P.* Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator// Phys. B. — 2008. — 403. — C. 440–442.
67. *Franzitta V., Viola A., Trapanese M.* Description of hysteresis in Lithium battery by classical Preisach model// Adv. Mater. Res. — 2012. — 622–623. — C. 1099–1103.
68. *Friedman A., Jiang L. S.* Periodic solutions for a thermostat control problem// Commun. Part. Differ. Equ. — 1988. — 13, № 5. — C. 515–550. — DOI: 10.1080/03605308808820551.
69. *Friedman G., Gurevich P., McCarthy S., Rachinskii D.* Switching behaviour of two-phenotype bacteria in varying environment// J. Phys. Conf. Ser. — 2015. — 585. — C. 012012.
70. *Gavioli C., Krejčí P.* Control and controllability of PDEs with hysteresis// Appl. Math. Optim. — 2021. — 84. — C. 829–847.
71. *Gavioli C., Krejčí P.* Phase transitions in porous media// NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2022. — 29. — C. 1–55.
72. *Ghouli Z., Belhaq M.* Energy harvesting in a delay-induced parametric van der Pol–Duffing oscillator// Eur. Phys. J. Spec. Top. — 2021. — 230. — C. 3591–3598.
73. *Ghouli Z., Litak G.* Effect of high-frequency excitation on a bistable energy harvesting system// J. Vibr. Engrg. Techn. — 2023. — 11. — C. 99–106.
74. *Glashoff K., Sprekels J.* An application of Glicksberg's theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats// SIAM J. Math. Anal. — 1981. — 12, № 3. — C. 477–486. — DOI: 10.1137/0512041.
75. *Grech C., Buzio M., Pentella M., Sammut N.* Dynamic ferromagnetic hysteresis modelling using a Preisach-recurrent neural network model// Materials. — 2020. — 13. — C. 2561.
76. *Guan R., Kopfová J., Rachinskii D.* Global stability of SIR model with heterogeneous transmission rate modeled by the Preisach operator// ArXiv. — 2022. — 2201.05722.
77. *Günter R.* Hysteresis-induced long-time tails// Phys. Rev. Lett. — 2008. — 100. — C. 240602.
78. *Günter R.* Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. I. General results// Phys. Rev. E. — 2008. — 77. — C. 061133.
79. *Günter R.* Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. II. Universality classes for symmetric elementary loops// Phys. Rev. E. — 2008. — 77. — C. 061134.
80. *Gurevich P.* Periodic solutions of parabolic problems with hysteresis on the boundary// Discrete Cont. Dynam. Syst. A. — 2011. — 29, № 3. — C. 1041–1083. — DOI: 10.3934/dcds.2011.29.1041.
81. *Gurevich P., Jäger W.* Parabolic problems with the Preisach hysteresis operator in boundary conditions// J. Differ. Equ. — 2009. — 47, № 11. — C. 2966–3010. — DOI: 10.1016/j.jde.2009.07.033.
82. *Gurevich P., Jäger W., Skubachevskii A.* On periodicity of solutions for thermocontrol problems with hysteresis-type switches// SIAM J. Math. Anal. — 2009. — 41, № 2. — C. 733–752. — DOI: 10.1137/080718905.
83. *Gurevich P., Rachinskii D.* Asymptotics of sign-changing patterns in hysteretic systems with diffusive thresholds// Asymptot. Anal. — 2016. — 96. — C. 1–22.
84. *Gurevich P., Shamin R., Tikhomirov S.* Reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis// SIAM J. Math. Anal. — 2013. — 45, № 3. — C. 1328–1355. — DOI: 10.1137/120879889.

85. Gurevich P., Tikhomirov S. Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis// J. Dynam. Differ. Equ. — 2011. — 23. — С. 923–960. — DOI: 10.1007/s10884-011-9227-0.
86. Gurevich P., Tikhomirov S. Uniqueness of transverse solutions for reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis// Nonlinear Anal. — 2012. — 75. — С. 6610–6619. — DOI: 10.1016/j.na.2012.08.003.
87. Gurevich P., Tikhomirov S. Systems of reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis// Math. Bohem. — 2014. — 139. — С. 239–257. — DOI: 10.21136/MB.2014.143852.
88. Gurevich P., Tikhomirov S. Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis// Multiscale Model. Simul. — 2017. — 15, № 3. — С. 1176–1197. — DOI: 10.1137/16M106039X.
89. Gurevich P., Tikhomirov S. Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2018. — 35, № 4. — С. 1041–1077. — DOI: 10.1016/j.anihpc.2017.09.006.
90. Hanyga A., Sereďyńska M. A dynamic model of capillary hysteresis in immiscible fluid displacement// Transp. Porous Media. — 2005. — 59, № 3. — С. 249–265. — DOI: 10.1007/s11242-004-2555-3.
91. Harb A. Energy harvesting: State-of-the-art// Renewable Energy. — 2011. — 36, № 10. — С. 2641–2654.
92. Hoffmann K.-H., Sprekels J., Visintin A. Identification of hysteresis loops// J. Comput. Phys. — 1988. — 78, № 1. — С. 215–230.
93. Hoppensteadt F. C., Jäger W. Pattern formation by bacteria// Lect. Notes Biomath. — 1980. — 38. — С. 68–81. — DOI: 10.1007/978-3-642-61850-5_7.
94. Hoppensteadt F. C., Jäger W., Pöppe C. A hysteresis model for bacterial growth patterns// Lect. Notes Biomath. — 1984. — 55. — С. 123–134. — DOI: 10.1007/978-3-642-45589-6_11.
95. Hu H., Ben Mrad R. On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators// Mechatronics. — 2003. — 13. — С. 85–94.
96. Ikhoulane F. A survey of the hysteretic Duhem model// Arch. Comput. Methods Engrg. — 2018. — 25. — С. 965–1002.
97. Ikhoulane F., Mañosa V., Pujol G. Minor loops of the Dahl and LuGre models// Appl. Math. Model. — 2020. — 77. — С. 1679–1690.
98. Ikhoulane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model// Nonlinear Dynam. — 2005. — 42. — С. 63–78.
99. Il'in A. M., Markov B. A. Nonlinear diffusion equation and Liesegang rings// Dokl. Math. — 2011. — 440. — С. 164–167. — DOI: 10.1134/S1064562411060093.
100. Ipocoana E., Krejčí P. A model for assisted periodic breathing with degenerate permeability// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2024. — 75. — С. 103980.
101. Iyer R. V., Shirley M. E. Hysteresis parameter identification with limited experimental data// IEEE Trans. Magnet. — 2004. — 40. — С. 3227–3239.
102. Iyer R. V., Tan X., Krishnaprasad P. S. Approximate inversion of the Preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators// IEEE Trans. Autom. Control. — 2005. — 50. — С. 798–810.
103. Janaideh M. A., Naldi R., Marconi L., Krejčí P. A hybrid model for the play hysteresis operator// Phys. B. Cond. Matt. — 2013. — 430. — С. 95–98.
104. Jiles D. C., Atherton D. L. Theory of ferromagnetic hysteresis// J. Appl. Phys. — 1984. — 55. — С. 2115–2120.
105. Jules T., Reid A., Daniels K. E., Mungan M., Lechenault F. Delicate memory structure of origami switches// Phys. Rev. Res. — 2022. — 4. — С. 013128.
106. Kalmár-Nagy T., Amann A., Kim D., Rachinskii D. The Devil is in the details: Spectrum and eigenvalue distribution of the discrete Preisach memory model// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2019. — 77. — С. 1–17.
107. Kalmár-Nagy T., Shekhawat A. Nonlinear dynamics of oscillators with bilinear hysteresis and sinusoidal excitation// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2009. — 238. — С. 1768–1786.
108. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Dynamics of relay systems with hysteresis and harmonic perturbation// Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 2. — С. 48–60. — DOI: 10.32523/2077-9879-2024-15-2-48-60.
109. Kamenskii M., Makarenkov O. On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations// Set-Valued Var. Anal. — 2016. — 24. — С. 551–563. — DOI: 10.1007/s11228-015-0348-1.
110. Kamenskii M., Makarenkov O., Wadippuli L. N. A continuation principle for periodic BV-continuous state-dependent sweeping processes// SIAM J. Math. Anal. — 2020. — 52, № 6. — С. 5598–5626. — DOI: 10.1137/19M1248613.

111. *Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Petrosyan G. G.* On Almost Periodic Trajectories of Control Systems with Feedback in the Form of Sweeping Processes// *Math. Notes.* — 2023. — 114. — С. 85–91. — DOI: 10.1134/S0001434623070088.
112. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics// *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.* — 1927. — 115. — С. 700–721.
113. *Konda R., Zhang J.* Hysteresis with lonely stroke in artificial muscles: Characterization, modeling, and inverse compensation// *Mech. Syst. Signal Proces.* — 2022. — 164. — С. 108240.
114. *Kopfová J., Kopf T.* Differential equations, hysteresis, and time delay// *Z. Angew. Math. Phys.* — 2002. — 53, № 4. — С. 676–691. — DOI: 10.1007/s00033-002-8176-1.
115. *Kopfová J., Nábělková P., Rachinskii D., Rouf S. C.* Dynamics of SIR model with vaccination and heterogeneous behavioral response of individuals modeled by the Preisach operator// *J. Math. Biol.* — 2021. — 83. — С. 1–34.
116. *Kramer I., Bayer Y., Adeyemo T., Mau Y.* Hysteresis in soil hydraulic conductivity as driven by salinity and sodicity — a modeling framework// *Hydrol. Earth Syst. Sci.* — 2021. — 25. — С. 1993–2008.
117. *Krejčí P.* Resonance in Preisach systems// *Appl. Math.* — 2000. — 45. — С. 439–468.
118. *Krejčí P.* Hysteresis in singularly perturbed problems// В сб.: «Singular Perturbations and Hysteresis». — SIAM, 2005. — С. 73–100. — DOI: 10.1137/1.9780898717860.ch3.
119. *Krejčí P.* A higher order energy bound in a singular Preisach circuit// *Phys. B. Cond. Matt.* — 2008. — 403. — С. 297–300.
120. *Krejčí P.* Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality// *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.* — 2013. — 6. — С. 101–119.
121. *Krejčí P., Monteiro G. A.* Inverse parameter-dependent Preisach operator in thermo-piezoelectricity modeling// *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* — 2019. — 24, № 7. — С. 3051–3066.
122. *Krejčí P., O’Kane J. P., Pokrovskii A., Rachinskii D.* Properties of solutions to a class of differential models incorporating Preisach hysteresis operator// *Phys. D. Nonlinear Phenom.* — 2012. — 241, № 22. — С. 2010–2028. doi 10.1016/j.physd.2011.05.005
123. *Krejčí P., Petrov A.* A contact problem for a piezoelectric actuator on an elasto-plastic obstacle// *Fixed Point Theory Algorithms Sci. Engrg.* — 2022. — 2022. — С. 1–12.
124. *Krejčí P., Rocca E., Sprekels J.* Unsaturated deformable porous media flow with thermal phase transition// *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2017. — 27. — С. 2675–2710.
125. *Kuhnen K., Krejci P.* Compensation of complex hysteresis and creep effects in piezoelectrically actuated systems — A new Preisach modeling approach// *IEEE Trans. Autom. Control.* — 2009. — 54. — С. 537–550.
126. *Lacarbonara W., Vestroni F.* Nonclassical responses of oscillators with hysteresis/ *Nonlinear Dynam.* — 2003. — 32. — С. 235–258.
127. *Lelkes J., Kalmár-Nagy T.* Analysis of a mass-spring-relay system with periodic forcing// *Nonlinear Dynam.* — 2021. — 106. — С. 21–44.
128. *Li J., Huang H., Morita T.* Stepping piezoelectric actuators with large working stroke for nano-positioning systems: A review// *Sensors Actuators A. Phys.* — 2019. — 292. — С. 39–51.
129. *Li Y., Zhou S., Litak G.* Robust design optimization of a nonlinear monostable energy harvester with uncertainties// *Meccanica.* — 2020. — 55. — С. 1753–1762.
130. *Li Y., Zhu J., Li Y., Zhu L.* A hybrid Jiles–Atherton and Preisach model of dynamic magnetic hysteresis based on backpropagation neural networks// *J. Magnetism Magnet. Mater.* — 2022. — 544. — С. 168655.
131. *Litak G., Margielewicz J., Gaska D., Rysak A., Trigona C.* On theoretical and numerical aspects of bifurcations and hysteresis effects in kinetic energy harvesters// *Sensors.* — 2022. — 22. — С. 381.
132. *Liu V. T., Wing H. Y.* Classical Preisach model based on polynomial approximation and applied to micro-piezoelectric actuators// *Symmetry.* — 2022. — 14. — С. 1008.
133. *Lu Q., Gang T., Hao G., Chen L.* Compound optimal control of harmonic drive considering hysteresis characteristic// *Mech. Sci.* — 2019. — 10. — С. 383–391.
134. *Lygas K., Wolszczak P., Litak G., Stączek P.* Complex response of an oscillating vertical cantilever with clearance// *Meccanica.* — 2019. — 54. — С. 1689–1702.
135. *Mayergoyz I. D.* Mathematical models of hysteresis// *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — 56, № 15. — С. 1518–1521.
136. *Mayergoyz I. D.* Dynamic Preisach models of hysteresis// *IEEE Trans. Magnet.* — 1998. — 24. — С. 2925–2927.
137. *Mayergoyz I.* Mathematical models of hysteresis and their applications. — Elsevier, 2003.
138. *Mayergoyz I. D., Adly A. A., Huang M. W., Krafft C.* Experimental testing of vector Preisach models for superconducting hysteresis// *IEEE Trans. Magnet.* — 2000. — 36. — С. 3505–3507.
139. *Mayergoyz I., Dimian M.* Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes// *J. Appl. Phys.* — 2003. — 93, № 10. — С. 6826–6828.

140. *Mayergoyz I. D., Dimian M.* Stochastic aspects of hysteresis// J. Phys. Conf. Ser. — 2005. — 22. — C. 139–147.
141. *Mayergoyz I. D., Friedman G.* Generalized Preisach model of hysteresis// IEEE Trans. Magnet. — 1988. — 24. — C. 212–217.
142. *Mayergoyz I. D., Friedman G., Salling C.* Comparison of the classical and generalized Preisach hysteresis models with experiments// IEEE Trans. Magnet. — 1989. — 25. — C. 3925–3927.
143. *Mayergoyz I. D., Korman C. E.* Preisach based storage devices and global optimizers// Math. Model. Nat. Phenom. — 2020. — 15. — C. 20.
144. *McCarthy S., Rachinskii D.* Dynamics of systems with Preisach memory near equilibria// Math. Bohem. — 2014. — 139, № 1. — C. 39–73. — URL: <http://dml.cz/dmlcz/143636>.
145. *Mielke A.* Evolution of rate-independent systems// B c6.: «Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Vol. II», Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2005. — C. 461–559. — DOI: 10.1016/S1874-5717(06)80009-5.
146. *Moreau J. J.* Raŕle par un convexe variable (première partie)// Trav. Sémin. Anal. Conv. — 1971. — 1, № 15. — C. 1–43.
147. *Moreau J. J.* Raŕle par un convexe variable (deuxième partie)// Trav. Sémin. Anal. Conv. — 1972. — 2, № 3. — C. 1–36.
148. *Moreau J. J.* Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert spaces// J. Differ. Equ. — 1977. — 26, № 3. — C. 347–374. — DOI: 10.1016/0022-0396(77)90085-7.
149. *Mortell M. P., O'Malley R. E., Pokrovskii A., Sobolev V.* Singular perturbations and hysteresis. — Philadelphia: SIAM, 2005.
150. *Münch C.* Optimal control of reaction-diffusion systems with hysteresis// ESAIM: Control Optim. Calc. Var. — 2018. — 24, № 4. — C. 1453–1488.
151. *Néel L.* Théorie des lois d'aimantation de Lord Rayleigh: I. Les déplacements d'une paroi isolée// Cahiers de Physique. — 1942. — 12. — C. 1–20.
152. *O'Ceallaigh S., Pimenov A., Pokrovskii A., Rachinskii D., Zhezherun A.* Algorithm for linear stability analysis in systems with Preisach hysteresis// Phys. B. Cond. Matt. — 2008. — 403. — C. 305–307.
153. *Ortiz-Lopez J., Luty F.* Optical studies of thermal cycling and hysteresis effects in elastic order-disorder phase transformations. I. Pure alkali-metal cyanide crystals// Phys. Rev. B. — 1988. — 37, № 10. — C. 5452–5460.
154. *Pál L.* Stochastic model of hysteresis// Phys. Rev. E. — 2000. — 61, № 4. — C. 3490–3500.
155. *Pasquale M., Basso V., Bertotti G., Jiles D. C., Bi Y.* Domain-wall motion in random potential and hysteresis modeling// J. Appl. Phys. — 1998. — 83. — C. 6497–6499.
156. *Pei J. S., Carboni B., Lacarbonara W.* Mem-models as building blocks for simulation and identification of hysteretic systems// Nonlinear Dynam. — 2020. — 100, № 2. — C. 973–998. — DOI: 10.1007/s11071-020-05542-5.
157. *Pimenov A., Kelly T. C., Korobeinikov A., O'Callaghan M. J., Pokrovskii A.* Systems with hysteresis in mathematical biology via a canonical example// B c6.: «Mathematical Modeling, Clustering Algorithms and Applications». — Nova Sci. Publ., 2012. — C. 34.
158. *Pimenov A., Kelly T. C., Korobeinikov A., O'Callaghan M. J., Pokrovskii A. V., Rachinskii D.* Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study// Math. Model. Nat. Phenom. — 2012. — 7. — C. 204–226.
159. *Pimenov A., Kelly T. C., Korobeinikov A., O'Callaghan M. J., Rachinskii D.* Memory and adaptive behavior in population dynamics: anti-predator behavior as a case study// J. Math. Biol. — 2017. — 74, № 6. — C. 1533–1559.
160. *Pimenov A., Rachinskii D.* Linear stability analysis of systems with Preisach memory// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2009. — 11, № 4. — C. 997–1018. — DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.997
161. *Pokrovskii A., Sobolev V.* A naive view of time relaxation and hysteresis// B c6.: *Singular Perturbations and Hysteresis*. — SIAM, 2005. — C. 1–59.
162. *Preisach F.* Über die magnetische Nachwirkung// Z. Phys. — 1935. — 94. — C. 277–302.
163. *Preisach F.* On the magnetic aftereffect// IEEE Trans. Magnet. — 2017. — 53. — C. 0700111.
164. *Prüss J.* Periodic solutions of the thermostat problem// B c6.: «Differential Equations in Banach Spaces», Proc. Conf., Bologna, July 2–5, 1985. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — C. 216–226.
165. *Rachinskii D.* Realization of arbitrary hysteresis by a low-dimensional gradient flow// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2016. — 21, № 1. — C. 227–243.
166. *Rachinskii D., Rouf S.* Dynamics of SIR model with heterogeneous response to intervention policy// Theor. Popul. Biol. — 2022. — 146. — C. 71–85.

167. *Radons G., Zienert A.* Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field// Eur. Phys. J. Spec. Topics. — 2013. — 222. — C. 1675–1684.
168. *Ramesh A., Jiles D. C., Roderick J. M.* A model of anisotropic anhysteretic magnetization// IEEE Trans. Magnet. — 1996. — 32. — C. 4234–4236.
169. *Renno J. M., Dagaq M. F., Inman D. J.* On the optimal energy harvesting from a vibration source// J. Sound Vibr. — 2009. — 320, № 1-2. — C. 386–405.
170. *Restorff J. B., Savage H. T., Clark A. E., Wun-Fogle M.* Preisach modeling of hysteresis in Terfenol// J. Appl. Phys. — 1990. — 67. — C. 5016–5018.
171. *Robert G., Damjanovic D., Setter N.* Preisach modeling of ferroelectric pinched loops// Appl. Phys. Lett. — 2000. — 77, № 26. — C. 4413–4415.
172. *Roussel R., Edelen A., Ratner D., Dubey K., Gonzalez-Aguilera J. P., Kim Y. K., Kuklev N.* Differentiable Preisach modeling for characterization and optimization of particle accelerator systems with hysteresis// Phys. Rev. Lett. — 2022. — 128. — C. 204801.
173. *Ruderman M., Bertram T.* Identification of soft magnetic B-H characteristics using discrete dynamic Preisach model and single measured hysteresis loop// IEEE Trans. Magnet. — 2012. — 48. — C. 1281–1284.
174. *Scalerandi M., Nobili M., Griffa M., Gliozzi A. S., Bosia F.* Preisach–Mayergoyz approach to fatigue-induced irreversibility// Phys. Rev. B. — 2006. — 73. — C. 092103.
175. *Schubert S., Radons G.* Preisach models of hysteresis driven by Markovian input processes// Phys. Rev. E. — 2017. — 96. — C. 022117.
176. *Schweizer B.* Hysteresis in porous media: Modelling and analysis// Interfaces Free Bound. — 2017. — 19. — C. 417–447.
177. *Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A.* A new way to compute the Lyapunov characteristic exponents for non-smooth and discontinues dynamical systems// Nonlinear Dynam. — 2022. — 109. — C. 1805–1821. — DOI: 10.1007/s11071-022-07492-6.
178. *Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A., Lapin A. V.* A model of optimal production planning based on the hysteretic demand curve// Mathematics. — 2022. — 10, № 18. — C. 3262. — DOI: 10.3390/math10183262
179. *Semenov M. E., Meleshenko P. A., Borzunov S. V., Reshetova O. O., Barsukov A. I.* A simple model of the energy harvester within a linear and hysteresis approach// Micromachines. — 2023. — 14. — C. 310. — DOI: 10.3390/mi14020310
180. *Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A.* Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach// Eur. Phys. J. Spec. Topics. — 2021. — 230. — C. 3565–3571. — DOI: 10.1140/epjs/s11734-021-00237-3.
181. *Semenov M. E., Reshetova O. O., Tolkachev A. V., Solovyov A. M., Meleshenko P. A.* Oscillations under hysteretic conditions: From simple oscillator to discrete sine–Gordon model// B c6.: «Topics in Nonlinear Mechanics and Physics»ю — Singapore: Springer, 2019. — C. 229–254. — DOI: 10.1007/978-981-13-9463-8_12.
182. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A.* Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case// J. Vibr. Control. — 2021. — 27, № 1-2. — C. 43–56. — DOI: 10.1177/1077546320923436
183. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Balthazar J. M.* Nonlinear damping: from viscous to hysteretic dampers// B c6.: «Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics: Selected Papers from CSNDD 2016». — Cham: Springer, 2017. — C. 259–275. — DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6_15.
184. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Reshetova O. O.* Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems// Math. Model. Nat. Phenom. — 2020. — 15. — C. 43. — DOI: 10.1051/mmnp/2019053
185. *Spanos P. D., Cacciola P., Redhorse J.* Random vibration of SMA systems via Preisach formalism// Nonlinear Dynam. — 2004. — 36. — C. 405–419.
186. *Spanos P. D., Matteo A., Di Pirrotta A.* Steady-state dynamic response of various hysteretic systems endowed with fractional derivative elements// Nonlinear Dynam. — 2019. — 98. — C. 3113–3124.
187. *Spanos P. D., Muscolino G.* Stochastic averaging of Preisach hysteretic systems// J. Engrg. Mech. — 2004. — 130. — C. 1257–1267.
188. *Stoner E. C., Wohlfarth E. P.* A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1948. — 240. — C. 599–642.
189. *Szabó Z., Füzi J.* Implementation and identification of Preisach type hysteresis models with Everett function in closed form// J. Magnetism Magnet. Mater. — 2016. — 406. — C. 251–258.
190. *Tabor M.* Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction. — London: Wiley-Interscience, 1989.
191. *Takács J.* The Everett integral and its analytical approximation// B c6.: «Advanced Magnetic Materials». — INTECH, 2012. — C. 203–230.

192. *Tannous C., Gieraltowski J.* A Stoner–Wohlfarth model redux: static properties// *Phys. B. Cond. Matt.* — 2008. — 403. — С. 3563–3570.
193. *Tsabadze T., Zhang J.* Design, characterization, modeling, and comparison of helically wrapped super-coiled polymer artificial muscles// *Sensors Actuators A. Phys.* — 2021. — 331. — С. 113018.
194. *Urbanavičiūtė I., Cornelissen T. D., Meng X., Sijbesma R. P., Kemerink M.* Physical reality of the Preisach model for organic ferroelectrics// *Nature Commun.* — 2018. — 9, № 1. — С. 1–11.
195. *Venegas P., Gómez D., Arrinda M., Oyarbide M., Macicior H., Bermúdez A.* Kalman filter and classical Preisach hysteresis model applied to the state of charge battery estimation// *Comput. Math. Appl.* — 2022. — 118. — С. 74–84.
196. *Visintin A.* Evolution problems with hysteresis in the source term// *SIAM J. Math. Anal.* — 1986. — 17. — С. 1113–1138. — DOI: 10.1137/0517079.
197. *Visintin A.* Differential models of hysteresis. — Springer, 1994.
198. *Visintin A.* Ten issues about hysteresis// *Acta Appl. Math.* — 2014. — 132. — С. 635–647. — DOI: 10.1007/s10440-014-9936-6.
199. *Visone C., Serpico C., Mayergoyz I. D., Huang M. W., Adly A. A.* Neural-Preisach-type models and their application to the identification of magnetic hysteresis from noisy data// *Phys. B. Cond. Matt.* — 2000. — 275. — С. 223–227.
200. *Weiss P., de Freudenreich J.* Étude de l'aimantation initiale en fonction de la température// *Arch. Sci. Phys. Natur.* — 1916. — 42. — С. 449–470.
201. *Yevstafyeva V. V.* Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay// *Math. Notes.* — 2023. — 114, № 1. — С. 212–222. — DOI: 10.1134/S0001434623070222.
202. *Zhang K., Zhao T., Fujiwara H.* Training effect of exchange biased iron–oxide/ferromagnet systems// *J. Appl. Phys.* — 2001. — 89. — С. 6910–6912.

М. Е. Семенов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: mk1150@mail.ru

С. В. Борзунов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: sborzunov@gmail.com

О. И. Канищева

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: oleka_olesya@mail.ru

А. И. Прошунин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: alexfrauch@gmail.com

П. А. Мелешенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: melechp@yandex.ru

UDC 517, 519.6, 519.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340

EDN: NMWGIQ

Continual systems of relays

M. E. Semenov, S. V. Borzunov, O. I. Kanischeva, A. I. Proshunin,
and P. A. Meleshenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The converter of continual systems of relays (also known as the Preisach converter) is a well-known model applicable to describe the hysteresis relationships of a wide range. This article provides a review of works devoted to the study of systems from various subject areas (physics, economics, biology), where the continual system of relays plays a key role in the formalization of hysteresis dependencies. The first section of the work is devoted to a description of the input-output correspondences of the classical converter of continual systems of relays, its main properties are established, methods for constructing the output using the formalism of the demagnetization function are described, and a generalization of the classical converter of continual system of relays to the case of vector input-output correspondences is given. Applications of the Preisach model, classified according to various natural science fields, are given in the second section. Various generalizations of the model as applied to systems containing ferromagnetic and ferroelectric materials are described there. The main attention was paid to experimental works, where the model of continual system of relays was used to analytically describe the dependencies observed in experiments. Special attention in the review is paid to technical applications of the model such as energy storage devices, systems using the piezoelectric effect, models of systems with long-term memory. The review also presents the results of using the converter of continual systems of relays in biology and medicine, as well as in economics. The third part of the review describes the properties of the converter of continual system of relays in terms of its response to stochastic external influences and provides a generalization of the converter model to the case of stochasticity of the threshold numbers of its elementary components. In addition, the review contains fresh results in the field of dynamics of systems with a converter of continual system of relays: a method for identifying dynamic modes is given, based on a modification of Benettin's algorithm for calculating Lyapunov exponents in systems with nonsmooth multivalued characteristics.

Keywords: hysteresis, non-ideal relay, continual systems of relays, converter of CSR, stochastic input, sales rate, price function, consumer behaviour.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: M. E. Semenov, S. V. Borzunov, O. I. Kanischeva, A. I. Proshunin, P. A. Meleshenko, "Continual systems of relays," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 299–340. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340>

REFERENCES

1. S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, and P. A. Meleshenko, "Gisterezisnye preobrazovateli so sluchajnymi parametrami" [Hysteretic Converters with Stochastic Parameters], *Mat. Model. [Math. Model.]*, 2019, **31**, No. 7, 109–126, DOI: 10.1134/S0234087919070074 (in Russian).
2. S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, P. A. Meleshenko, and A. M. Solov'ev, "Stokhasticheskaya model' gisterezisnogo preobrazovatelya s domennoj strukturoj" [Stochastic model of the hysteresis converter with a domain structure], *Mat. Model. [Math. Model.]*, 2021, **33**, No. 9, 60–86, DOI: 10.20948/mm-2021-09-05 (in Russian).



3. M. A. Krasnosel'skij and A. V. Pokrovskij, *Sistemy s Gistereziom* [Systems with Hysteresis], Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).
4. A. M. Krasnosel'skij and A. V. Pokrovskij, "Dissipativnost' nerezonansnogo mayatnika s ferromagnitnym treniem" [Dissipativity of a non-resonant pendulum with ferromagnetic friction], *Avtomat. i Telemekh.* [Autom. Telemekh.], 2006, **2**, 57–69 (in Russian).
5. A. L. Medvedskij, P. A. Meleshenko, V. A. Nesterov, O. O. Reshetova, M. E. Semenov, and A. M. Solov'ev, "Neustojchivye kolebatel'nye sistemy s gisterezisom: zadachi stabilizacii i upravleniya" [Unstable oscillatory systems with hysteresis: problems of stabilization and control], *Izv. RAN. Teor. i Sist. Upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Theory Control Syst.], 2020, **4**, 58–82.
6. N. Abdullah and N. Hasan, "The implementation of Water Alternating (WAG) injection to obtain optimum recovery in Cornea Field, Australia," *J. Petrol. Explor. Product. Techn.*, 2021, **11**, 1475–1485, DOI: 10.1007/s13202-021-01103-7.
7. T. Adeyemo, I. Kramer, G. J. Levy, and Y. Mau, "Salinity and sodicity can cause hysteresis in soil hydraulic conductivity," *Geoderma*, 2022, **413**, 115765.
8. A. A. Adly and I. D. Mayergoyz, "Accurate modeling of vector hysteresis using a superposition of Preisach-type models," *IEEE Trans. Magnet.*, 1997, **33**, 4155–4157.
9. H. W. Alt, "On the thermostat problem," *Control Cybernet.*, 1985, **14**, 171–193.
10. M. Andreev, A. Suvorov, N. Ruban, R. Ufa, A. Gusev, A. Askarov, and A. S. Kievets, "Development and research of mathematical model of current transformer reproducing magnetic hysteresis based on Preisach theory," *IET Gener. Transm. & Distrib.*, 2020, **14**, 2720–2730.
11. D. E. Apushkinskaya and N. N. Uraltseva, "Free boundaries in problems with hysteresis," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2015, **373**, No. 2050, 20140271, DOI: 10.1098/rsta.2014.0271.
12. D. E. Apushkinskaya and N. N. Uraltseva, "On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem," *Interfaces Free Bound.*, 2015, **17**, No. 1, 93–115, DOI: 10.4171/ifb/335.
13. B. Azzerboni, E. Cardelli, E. Della Torre, and G. Finocchio, "Reversible magnetization and Lorentzian function approximation," *J. Appl. Phys.*, 2003, **93**, 6635–6637.
14. F. Bagagiolo, "Dynamic programming for some optimal control problems with hysteresis," *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2002, **9**, 149–174.
15. F. Bagagiolo, "Viscosity solutions for an optimal control problem with Preisach hysteresis nonlinearities," *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 2004, **10**, 271–294.
16. Z. Balanov, W. Krawcewicz, D. Rachinskii, and A. Zhezherun, "Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis," *J. Dynam. Differ. Equ.*, 2012, **24**, 713–759.
17. J. A. Barker, D. E. Schreiber, B. G. Huth, and D. H. Everett, "Magnetic hysteresis and minor loops: Models and experiments," *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Sci.*, 1983, **386**, 251–261.
18. F. Baronti, N. Femia, R. Saletti, C. Visone, and W. Zamboni, "Hysteresis modeling in Li-ion batteries," *IEEE Trans. Magnet.*, 2014, **50**, No. 11, 1–4.
19. F. Baronti, N. Femia, R. Saletti, C. Visone, and W. Zamboni, "Preisach modelling of lithium-iron-phosphate battery hysteresis," *J. Energy Storage*, 2015, **4**, 51–61. DOI: 10.1016/j.est.2015.09.004.
20. A. T. Bartic, D. J. Wouters, H. E. Maes, J. T. Rickes, and R. M. Waser, "Preisach model for the simulation of ferroelectric capacitors," *J. Appl. Phys.*, 2001, **89**, No. 6, 3420–3425.
21. S. Belbas and I. Mayergoyz, "Dynamic programming for systems with hysteresis," *Phys. B*, 2001, **306**, 200–205.
22. S. A. Belbas and I. D. Mayergoyz, "Optimal control of dynamical systems with Preisach hysteresis," *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2002, **37**, 1351–1361.
23. M. Belhaq, A. Bichri, J. Der Hogapian, and J. Mahfoud, "Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam," *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, **46**, 828–833.
24. A. Bermúdez, L. Dupré, D. Gómez, and P. Venegas, "Electromagnetic computations with Preisach hysteresis model," *Finite Elem. Anal. Design*, 2017, **126**, 65–74.
25. A. Bermúdez, D. Gómez, and P. Venegas, "Mathematical analysis and numerical solution of models with dynamic Preisach hysteresis," *J. Comput. Appl. Math.*, 2020, **367**, 112452.
26. G. Bertotti, *Hysteresis in Magnetism: for Physicists, Materials Scientists, and Engineers*, Academic Press, New York, 1998.
27. G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, V. Basso, and A. Magni, "Functional integration approach to hysteresis," *Phys. Rev. E*, 1999, **60**, No. 2, 1428–1440.
28. I. Bodale and A. Stancu, "Reversible and irreversible processes in drying and wetting of soil," *Materials*, 2020, **13**, No. 1, 135.
29. D. Bombara, S. Fowzer, and J. Zhang, "Compliant, large-strain, and self-sensing twisted string actuators," *Soft Robotics*, 2022, **9**, 72–88.

30. S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, and P. A. Meleshenko, "Generalized play-operator under stochastic perturbations: an analytic approach," *J. Vibr. Engrg. Techn.*, 2021, **9**, 355–365, DOI: 10.1007/s42417-020-00234-1.
31. N. D. Botkin, M. Brokate, and E. G. El Behi-Gornostaeva, "One-phase flow in porous media with hysteresis," *Phys. B. Cond. Matt.*, 2016, **486**, 183–186.
32. M. Brokate, "On a characterization of the Preisach model for hysteresis," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1990, **83**, 153–163.
33. M. Brokate and A. Friedman, "Optimal design for heat conduction problems with hysteresis," *SIAM J. Control Optim.*, 1989, **27**, No. 4, 697–717, DOI: 10.1137/032703.
34. M. Brokate and P. Krejčí, "Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2013, **18**, No. 2, 331–348.
35. M. Brokate, A. Pokrovskii, D. Rachinskii, and O. Rasskazov, "Differential equations with hysteresis via a canonical example," In: *The Science of Hysteresis. Vol. I. Mathematical Modeling and Applications*, Academic Press, Amsterdam, 2006, pp. 125–291, DOI: 10.1016/B978-012480874-4/50005-1.
36. M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transition*, Springer, New York, 1996.
37. P. Cacciola, I. Calì, N. Fiorini, G. Occhipinti, D. Spina, and A. Tombari, "Seismic response of nonlinear soil-structure interaction systems through the Preisach formalism: the Messina Bell Tower case study," *Bull. Earthquake Engrg.*, 2022, **20**, 3485–3514.
38. P. Cacciola and A. Tombari, "Steady state harmonic response of nonlinear soil-structure interaction problems through the Preisach formalism," *Soil Dynam. Earthquake Engrg.*, 2021, **144**, 106669.
39. B. Carboni and W. Lacarbonara, "Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations," *Nonlinear Dynam.*, 2016, **83**, 23–39.
40. B. Carboni, W. Lacarbonara, P. Brewick, and S. Masri, "Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems," *J. Intel. Mater. Syst. Struct.*, 2018, **29**, No. 13, 2795–2810.
41. A. E. Charalampakis, "The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited," *Archive Appl. Mech.*, 2015, **85**, 1209–1223.
42. S. Chatterjee, S. Kumar, A. Gaidhane, C. K. Dabhi, Y. S. Chauhan, and H. Amrouch, "Ferroelectric FDSOI FET modeling for memory and logic applications," *Solid-State Electron.*, 2023, **200**, 108554.
43. B. Chen and S. Timoshin, "Optimal control of a population dynamics model with hysteresis," *Acta Math. Sci.*, 2022, **42B(1)**, 283–298.
44. Z. Chladná, J. Kopfová, D. Rachinskii, and S. C. Rouf, "Global dynamics of SIR model with switched transmission rate," *J. Math. Biol.*, 2020, **80**, 1209–1233.
45. P. Chojecki, G. Walters, Z. Forrester, and T. Nishida, "Preisach modeling of imprint on hafnium zirconium oxide ferroelectric capacitors," *J. Appl. Phys.*, 2021, **130**, 094102.
46. P. Colli, M. Grasselli, and J. Sprekels, "Automatic control via thermostats of a hyperbolic Stefan problem with memory," *Appl. Math. Optim.*, 1999, **39**, 229–255, DOI: 10.1007/s002459900105.
47. F. Cottone, H. Vocca, and L. Gammaitoni, "Nonlinear energy harvesting," *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **102**, 080601.
48. R. Cross, "Unemployment: natural rate epicycles or hysteresis?," *Eur. J. Econom. Econom. Polic. Intervent.*, 2014, **11**, No. 2, 136–148.
49. R. Cross, A. M. Krasnosel'skii, and A. V. Pokrovskii, "A time-dependent Preisach model," *Phys. B. Cond. Matt.*, 2001, **306**, No. 1, 206–210.
50. R. Cross, H. McNamara, A. Pokrovskii, and D. Rachinskii, "A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows," *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, No. 2–3, 231–236.
51. M. Curran, P. Gurevich, and S. Tikhomirov, "Recent advances in reaction-diffusion equations with non-ideal relays," In: *Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. Understanding Complex Systems*, Springer, 2016, DOI: 10.1007/978-3-319-28028-8_11.
52. M. Dafri, A. Ladjimi, S. Mendaci, and A. Babouri, "Phenomenological model of the temperature dependence of hysteresis based on the Preisach model," *J. Superconduct. Nov. Magnet.*, 2021, **34**, 1453–1458.
53. M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, and Q. D. Dane, "On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion," *Appl. Mech. Rev.*, 2013, **66**, 040801.
54. Z. Darbenas, R. Van der Hout, and M. Oliver, "Long-time asymptotics of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2022, **39**, No. 6, 1413–1458, DOI: 10.4171/aihpc/34.
55. Z. Darbenas, R. Van der Hout, and M. Oliver, "Conditional uniqueness of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit," *J. Differ. Equ.*, 2023, **347**, 212–245, DOI: 10.1016/j.jde.2022.11.038.

56. S. G. Das, J. Krug, and M. Mungan, “Driven disordered systems approach to biological evolution in changing environments,” *Phys. Rev. X*, 2022, **12**, 031040.
57. B. Detmann and P. Krejčí, “A multicomponent flow model in deformable porous media,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, **42**, 1894–1906.
58. J. Dho, C. W. Leung, and M. G. Blamire, “Universal time relaxation behavior of the exchange bias in ferromagnetic/antiferromagnetic bilayers,” *J. Appl. Phys.*, 2006, **99**, 033910.
59. A. Di Matteo, “Response of nonlinear oscillators with fractional derivative elements under evolutionary stochastic excitations: A Path Integral approach based on Laplace’s method of integration,” *Probab. Engrg. Mech.*, 2023, **71**, 103402.
60. L. R. Dupre, R. Van Keer, and J. A. A. Melkebeek, “Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model,” *J. Appl. Phys.*, 1999, **85**, 4376–4378.
61. M. Eleuteri, E. Ipocoana, J. Kopfová, and P. Krejčí, “Periodic solutions of a hysteresis model for breathing,” *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 2020, **54**, No. 1, 255–271.
62. K. Enab and H. Emami-Meybodi, “Effects of diffusion, adsorption, and hysteresis on huff-n-puff performance in ultratight reservoirs with different fluid types and injection gases,” *Energies*, 2021, **14**, 7379, DOI: 10.3390/en14217379.
63. L. C. Evans and M. Portilheiro, “Irreversibility and hysteresis for a forward-backward diffusion equation,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2004, **14**, 1599–1620, DOI: 10.1142/S0218202504003763.
64. D. H. Everett, “A general approach to hysteresis. Part 3. — A formal treatment of the independent domain model of hysteresis,” *Trans. Faraday Soc.*, 1954, **50**, 1077–1096.
65. D. H. Everett and W. I. Whitton, “A general approach to hysteresis,” *Trans. Faraday Soc.*, 1952, **48**, 749–757.
66. D. Flynn, A. Zhezherun, A. Pokrovskii, and J. P. O’Kane, “Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator,” *Phys. B*, 2008, **403**, 440–442.
67. V. Franzitta, A. Viola, and M. Trapanese, “Description of hysteresis in Lithium battery by classical Preisach model,” *Adv. Mater. Res.*, 2013, **622**, 1099–1103.
68. A. Friedman and L. S. Jiang, “Periodic solutions for a thermostat control problem,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1988, **13**, No. 5, 515–550, DOI: 10.1080/03605308808820551.
69. G. Friedman, P. Gurevich, S. McCarthy, and D. Rachinskii, “Switching behaviour of two-phenotype bacteria in varying environment,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2015, **585**, 012012.
70. C. Gavioli and P. Krejčí, “Control and Controllability of PDEs with Hysteresis,” *Appl. Math. Optim.*, 2021, **84**, 829–847.
71. C. Gavioli and P. Krejčí, “Phase transitions in porous media,” *NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2022, **29**, 1–55.
72. Z. Ghouli and M. Belhaq, “Energy harvesting in a delay-induced parametric van der Pol–Duffing oscillator,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2021, **230**, 3591–3598.
73. Z. Ghouli and G. Litak, “Effect of high-frequency excitation on a bistable energy harvesting system,” *J. Vibr. Engrg. Techn.*, 2023, **11**, 99–106.
74. K. Glaschoff and J. Sprekels, “An application of Glicksberg’s theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1981, **12**, No. 3, 477–486, DOI: 10.1137/0512041.
75. C. Grech, M. Buzio, M. Pentella, and N. Sammut, “Dynamic ferromagnetic hysteresis modelling using a Preisach-recurrent neural network model,” *Materials*, 2020, **13**, 2561.
76. R. Guan, J. Kopfová, and D. Rachinskii, “Global stability of SIR model with heterogeneous transmission rate modeled by the Preisach operator,” *ArXiv*, 2022, 2201.05722.
77. R. Günter, “Hysteresis-induced long-time tails,” *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 240602.
78. R. Günter, “Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. I. General results,” *Phys. Rev. E*, 2008, **77**, 061133.
79. R. Günter, “Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. II. Universality classes for symmetric elementary loops,” *Phys. Rev. E*, 2008, **77**, 061134.
80. P. Gurevich, “Periodic solutions of parabolic problems with hysteresis on the boundary,” *Discrete Cont. Dynam. Syst. A*, 2011, **29**, No. 3, 1041–1083, DOI: 10.3934/dcds.2011.29.1041.
81. P. Gurevich and W. Jäger, “Parabolic problems with the Preisach hysteresis operator in boundary conditions,” *J. Differ. Equ.*, 2009, **47**, No. 11, 2966–3010, DOI: 10.1016/j.jde.2009.07.033.
82. P. Gurevich, W. Jäger, and A. Skubachevskii, “On periodicity of solutions for thermocontrol problems with hysteresis-type switches,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2009, **41**, No. 2, 733–752, DOI: 10.1137/080718905.
83. P. Gurevich and D. Rachinskii, “Asymptotics of sign-changing patterns in hysteretic systems with diffusive thresholds,” *Asymptot. Anal.*, 2016, **96**, 1–22.

84. P. Gurevich, R. Shamin, and S. Tikhomirov, “Reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2013, **45**, No. 3, 1328–1355, DOI: 10.1137/120879889.
85. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis,” *J. Dynam. Differ. Equ.*, 2011, **23**, 923–960, DOI: 10.1007/s10884-011-9227-0.
86. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Uniqueness of transverse solutions for reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis,” *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, 6610–6619, DOI: 10.1016/j.na.2012.08.003.
87. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Systems of reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis,” *Math. Bohem.*, 2014, **139**, 239–257, DOI: 10.21136/MB.2014.143852.
88. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis,” *Multiscale Model. Simul.*, 2017, **15**, No. 3, 1176–1197, DOI: 10.1137/16M106039X.
89. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2018, **35**, No. 4, 1041–1077, DOI: 10.1016/j.anihpc.2017.09.006.
90. A. Hanyga and M. Seredyńska, “A dynamic model of capillary hysteresis in immiscible fluid displacement,” *Transp. Porous Media*, 2005, **59**, No. 3, 249–265, DOI: 10.1007/s11242-004-2555-3.
91. A. Harb, “Energy harvesting: State-of-the-art,” *Renewable Energy*, 2011, **36**, No. 10, 2641–2654.
92. K.-H. Hoffmann, J. Sprekels, and A. Visintin, “Identification of hysteresis loops,” *J. Comput. Phys.*, 1988, **78**, No. 1, 215–230.
93. F. C. Hoppensteadt and W. Jäger, “Pattern formation by bacteria,” *Lect. Notes Biomath.*, 1980, **38**, 68–81, DOI: 10.1007/978-3-642-61850-5_7.
94. F. C. Hoppensteadt, W. Jäger, and C. Pöppe, “A hysteresis model for bacterial growth patterns,” *Lect. Notes Biomath.*, 1984, **55**, 123–134, DOI: 10.1007/978-3-642-45589-6_11.
95. H. Hu and R. Ben Mrad, “On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators,” *Mechatronics*, 2003, **13**, 85–94.
96. F. Ikhouane, “A survey of the hysteretic Duhem model,” *Arch. Comput. Methods Engrg.*, 2018, **25**, 965–1002.
97. F. Ikhouane, V. Mañosa, and G. Pujol, “Minor loops of the Dahl and LuGre models,” *Appl. Math. Model.*, 2020, **77**, 1679–1690.
98. F. Ikhouane and J. Rodellar, “On the hysteretic Bouc–Wen model,” *Nonlinear Dynam.*, 2005, **42**, 63–78.
99. A. M. Il’in and B. A. Markov, “Nonlinear diffusion equation and Liesegang rings,” *Dokl. Math.*, 2011, **440**, 164–167, DOI: 10.1134/S1064562411060093.
100. E. Ipocoana and P. Krejčí, “A model for assisted periodic breathing with degenerate permeability,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2024, **75**, 103980.
101. R. V. Iyer and M. E. Shirley, “Hysteresis parameter identification with limited experimental data,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2004, **40**, 3227–3239.
102. R. V. Iyer, X. Tan, and P. S. Krishnaprasad, “Approximate inversion of the Preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 2005, **50**, 798–810.
103. M. A. Janaideh, R. Naldi, L. Marconi, and P. Krejčí, “A hybrid model for the play hysteresis operator,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2013, **430**, 95–98.
104. D. C. Jiles and D. L. Atherton, “Theory of ferromagnetic hysteresis,” *J. Appl. Phys.*, 1984, **55**, 2115–2120.
105. T. Jules, A. Reid, K. E. Daniels, M. Mungan, and F. Lechenault, “Delicate memory structure of origami switches,” *Phys. Rev. Res.*, 2022, **4**, 013128.
106. T. Kalmár-Nagy, A. Amann, D. Kim, and D. Rachinskii, “The Devil is in the details: Spectrum and eigenvalue distribution of the discrete Preisach memory model,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, **77**, 1–17.
107. T. Kalmár-Nagy and A. Shekhawat, “Nonlinear dynamics of oscillators with bilinear hysteresis and sinusoidal excitation,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2009, **238**, 1768–1786.
108. A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, and V. V. Yevstafyeva, “Dynamics of relay systems with hysteresis and harmonic perturbation,” *Eurasian Math. J.*, 2024, **15**, No. 2, 48–60, DOI: 10.32523/2077-9879-2024-15-2-48-60.
109. M. Kamenskii and O. Makarenkov, “On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations,” *Set-Valued Var. Anal.*, 2016, **24**, 551–563, DOI: 10.1007/s11228-015-0348-1.
110. M. Kamenskii, O. Makarenkov, and L. N. Wadippuli, “A continuation principle for periodic BV-continuous state-dependent sweeping processes,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2020, **52**, No. 6, 5598–5626, DOI: 10.1137/19M1248613.
111. M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, and G. G. Petrosyan, “On almost periodic trajectories of control systems with feedback in the form of sweeping processes,” *Math. Notes*, 2023, **114**, 85–91, DOI: 10.1134/S0001434623070088.

112. W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1927, **115**, 700–721.
113. R. Konda and J. Zhang, “Hysteresis with lonely stroke in artificial muscles: Characterization, modeling, and inverse compensation,” *Mech. Syst. Signal Proces.*, 2022, **164**, 108240.
114. J. Kopfová and T. Kopf, “Differential equations, hysteresis, and time delay,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2002, **53**, No. 4, 676–691, DOI: 10.1007/s00033-002-8176-1.
115. J. Kopfová, P. Nábělková, D. Rachinskii, and S. C. Rouf, “Dynamics of SIR model with vaccination and heterogeneous behavioral response of individuals modeled by the Preisach operator,” *J. Math. Biol.*, 2021, **83**, 1–34.
116. I. Kramer, Y. Bayer, T. Adeyemo, and Y. Mau, “Hysteresis in soil hydraulic conductivity as driven by salinity and sodicity — a modeling framework,” *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 2021, **25**, 1993–2008.
117. P. Krejčí, “Resonance in Preisach systems,” *Appl. Math.*, 2000, **45**, 439–468.
118. P. Krejčí, “Hysteresis in singularly perturbed problems,” In: *Singular Perturbations and Hysteresis*, SIAM, 2005, 73–100, DOI: 10.1137/1.9780898717860.ch3.
119. P. Krejčí, “A higher order energy bound in a singular Preisach circuit,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, 297–300.
120. P. Krejčí, “Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2013, **6**, 101–119.
121. P. Krejčí and G. A. Monteiro, “Inverse parameter-dependent Preisach operator in thermo-piezoelectricity modeling,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2019, **24**, No. 7, 3051–3066.
122. P. Krejčí, J. P. O’Kane, A. Pokrovskii, and D. Rachinskii, “Properties of solutions to a class of differential models incorporating Preisach hysteresis operator,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2012, **241**, No. 22, 2010–2028, DOI: 10.1016/j.physd.2011.05.005.
123. P. Krejčí and A. Petrov, “A contact problem for a piezoelectric actuator on an elasto-plastic obstacle,” *Fixed Point Theory Algorithms Sci. Engrg.*, 2022, **2022**, 1–12.
124. P. Krejčí, E. Rocca, and J. Sprekels, “Unsaturated deformable porous media flow with thermal phase transition,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2017, **27**, 2675–2710.
125. K. Kuhnen and P. Krejci, “Compensation of complex hysteresis and creep effects in piezoelectrically actuated systems — A new Preisach modeling approach,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 2009, **54**, 537–550.
126. W. Lacarbonara and F. Vestroni, “Nonclassical responses of oscillators with hysteresis,” *Nonlinear Dynam.*, 2003, **32**, 235–258.
127. J. Lelkes and T. Kalmár-Nagy, “Analysis of a mass-spring-relay system with periodic forcing,” *Nonlinear Dynam.*, 2021, **106**, 21–44.
128. J. Li, H. Huang, and T. Morita, “Stepping piezoelectric actuators with large working stroke for nano-positioning systems: A review,” *Sensors Actuators A. Phys.*, 2019, **292**, 39–51.
129. Y. Li, S. Zhou, and G. Litak, “Robust design optimization of a nonlinear monostable energy harvester with uncertainties,” *Meccanica*, 2020, **55**, 1753–1762.
130. Y. Li, J. Zhu, Y. Li, and L. Zhu, “A hybrid Jiles–Atherton and Preisach model of dynamic magnetic hysteresis based on backpropagation neural networks,” *J. Magnetism Magnet. Mater.*, 2022, **544**, 168655.
131. G. Litak, J. Margielewicz, D. Gaška, A. Rysak, and C. Trígona, “On theoretical and numerical aspects of bifurcations and hysteresis effects in kinetic energy harvesters,” *Sensors*, 2022, **22**, 381.
132. V. T. Liu and H. Y. Wing, “Classical Preisach model based on polynomial approximation and applied to micro-piezoelectric actuators,” *Symmetry*, 2022, **14**, 1008.
133. Q. Lu, T. Gang, G. Hao, and L. Chen, “Compound optimal control of harmonic drive considering hysteresis characteristic,” *Mech. Sci.*, 2019, **10**, 383–391.
134. K. Lygas, P. Wolszczak, G. Litak, and P. Stączek, “Complex response of an oscillating vertical cantilever with clearance,” *Meccanica*, 2019, **54**, 1689–1702.
135. I. D. Mayergoyz, “Mathematical models of hysteresis,” *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**, No. 15, 1518–1521.
136. I. D. Mayergoyz, “Dynamic Preisach models of hysteresis,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1998, **24**, 2925–2927.
137. I. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications*, Elsevier, 2003.
138. I. D. Mayergoyz, A. A. Adly, M. W. Huang, and C. Krafft, “Experimental testing of vector Preisach models for superconducting hysteresis,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2000, **36**, 3505–3507.
139. I. Mayergoyz and M. Dimian, “Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes,” *J. Appl. Phys.*, 2003, **93**, No. 10, 6826–6828.
140. I. D. Mayergoyz and M. Dimian, “Stochastic aspects of hysteresis,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2005, **22**, 139–147.
141. I. D. Mayergoyz and G. Friedman, “Generalized Preisach model of hysteresis,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1988, **24**, 212–217.

142. I. D. Mayergoyz, G. Friedman, and C. Salling, “Comparison of the classical and generalized Preisach hysteresis models with experiments,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1989, **25**, 3925–3927.
143. I. D. Mayergoyz and C. E. Korman, “Preisach based storage devices and global optimizers,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2020, **15**, 20.
144. S. McCarthy and D. Rachinskii, “Dynamics of systems with Preisach memory near equilibria,” *Math. Bohem.*, 2014, **139**, No. 1, 39–73, URL: <https://dml.cz/dmlcz/143636>.
145. A. Mielke, “Evolution of rate-independent systems,” In: *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Vol. II*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005, 461–559, DOI: 10.1016/S1874-5717(06)80009-5.
146. J. J. Moreau, “Rafle par un convexe variable (première partie),” *Trav. Sémin. Anal. Conv.*, 1971, **1**, No. 15, 1–43.
147. J. J. Moreau, “Rafle par un convexe variable (deuxième partie),” *Trav. Sémin. Anal. Conv.*, 1972, **2**, No. 3, 1–36.
148. J. J. Moreau, “Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert spaces,” *J. Differ. Equ.*, 1977, **26**, No. 3, 347–374, DOI: 10.1016/0022-0396(77)90085-7.
149. M. P. Mortell, R. E. O’Malley, A. Pokrovskii, and V. Sobolev, *Singular Perturbations and Hysteresis*, SIAM, Philadelphia, 2005.
150. C. Münch, “Optimal control of reaction-diffusion systems with hysteresis,” *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 2018, **24**, No. 4, 1453–1488.
151. L. Néel, “Théorie des lois d’aimantation de Lord Rayleigh: I. Les déplacements d’une paroi isolée,” *Cahiers de Physique*, 1942, **12**, 1–20.
152. S. O’Ceallaigh, A. Pimenov, A. Pokrovskii, D. Rachinskii, A. Zhezherun, “Algorithm for linear stability analysis in systems with Preisach hysteresis,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, 305–307.
153. J. Ortiz-Lopez and F. Luty, “Optical studies of thermal cycling and hysteresis effects in elastic order-disorder phase transformations. I. Pure alkali-metal cyanide crystals,” *Phys. Rev. B*, 1988, **37**, No. 10, 5452–5460.
154. L. Pál, “Stochastic model of hysteresis,” *Phys. Rev. E*, 2000, **61**, No. 4, 3490–3500.
155. M. Pasquale, V. Basso, G. Bertotti, D. C. Jiles, and Y. Bi, “Domain-wall motion in random potential and hysteresis modeling,” *J. Appl. Phys.*, 1998, **83**, 6497–6499.
156. J. S. Pei, B. Carboni, and W. Lacarbonara, “Mem-models as building blocks for simulation and identification of hysteretic systems,” *Nonlinear Dynam.*, 2020, **100**, No. 2, 973–998, DOI: 10.1007/s11071-020-05542-5.
157. A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. O’Callaghan, and A. Pokrovskii, “Systems with hysteresis in mathematical biology via a canonical example,” In: *Mathematical Modeling, Clustering Algorithms and Applications* Nova Science Publishers, 2012, 34.
158. A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. O’Callaghan, A. V. Pokrovskii, and D. Rachinskii, “Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2012, **7**, 204–226.
159. A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. O’Callaghan, and D. Rachinskii, “Memory and adaptive behavior in population dynamics: anti-predator behavior as a case study,” *J. Math. Biol.*, 2017, **74**, No. 6, 1533–1559.
160. A. Pimenov and D. Rachinskii, “Linear stability analysis of systems with Preisach memory,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2009, **11**, No. 4, 997–1018, DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.997.
161. A. Pokrovskii and V. Sobolev, “A naive view of time relaxation and hysteresis,” In: *Singular Perturbations and Hysteresis*, SIAM, 2005, 1–59.
162. F. Preisach, “Über die magnetische Nachwirkung,” *Z. Phys.*, 1935, **94**, 277–302.
163. F. Preisach, “On the magnetic aftereffect,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2017, **53**, 0700111.
164. J. Prüss, “Periodic solutions of the thermostat problem,” In: *Differential Equations in Banach Spaces*, Proc. Conf., Bologna, July 2–5, 1985, Springer, Berlin–Heidelberg, 2006, 216–226.
165. D. Rachinskii, “Realization of arbitrary hysteresis by a low-dimensional gradient flow,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2016, **21**, No. 1, 227–243.
166. D. Rachinskii and S. Rouf, “Dynamics of SIR model with heterogeneous response to intervention policy,” *Theor. Popul. Biol.*, 2022, **146**, 71–85.
167. G. Radons and A. Zienert, “Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2013, **222**, 1675–1684.
168. A. Ramesh, D. C. Jiles, and J. M. Roderick, “A model of anisotropic anhysteretic magnetization,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1996, **32**, 4234–4236.

169. J. M. Renno, M. F. Daqaq, and D. J. Inman, “On the optimal energy harvesting from a vibration source,” *J. Sound Vibr.*, 2009, **320**, No. 1-2, 386–405.
170. J. B. Restorff, H. T. Savage, A. E. Clark, and M. Wun-Fogle, “Preisach modeling of hysteresis in Terfenol,” *J. Appl. Phys.*, 1990, **67**, 5016–5018.
171. G. Robert, D. Damjanovic, and N. Setter, “Preisach modeling of ferroelectric pinched loops,” *Appl. Phys. Lett.*, 2000, **77**, No. 26, 4413–4415.
172. R. Roussel, A. Edelen, D. Ratner, K. Dubey, J. P. Gonzalez-Aguilera, Y. K. Kim, and N. Kuklev, “Differentiable Preisach modeling for characterization and optimization of particle accelerator systems with hysteresis,” *Phys. Rev. Lett.*, 2022, **128**, 204801.
173. M. Ruderman and T. Bertram, “Identification of soft magnetic B-H characteristics using discrete dynamic Preisach model and single measured hysteresis loop,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2012, **48**, 1281–1284.
174. M. Scalerandi, M. Nobili, M. Griffa, A. S. Gliozzi, and F. Bosia, *Preisach–Mayergoyz approach to fatigue-induced irreversibility*, *Phys. Rev. B*, 2006, **73**, 092103.
175. S. Schubert and G. Radons, “Preisach models of hysteresis driven by Markovian input processes,” *Phys. Rev. E*, 2017, **96**, 022117.
176. B. Schweizer, “Hysteresis in porous media: Modelling and analysis,” *Interfaces Free Bound.*, 2017, **19**, 417–447.
177. M. E. Semenov, S. V. Borzunov, and P. A. Meleshenko, “A new way to compute the Lyapunov characteristic exponents for non-smooth and discontinues dynamical systems,” *Nonlinear Dynam.*, 2022, **109**, 1805–1821, DOI: 10.1007/s11071-022-07492-6.
178. M. E. Semenov, S. V. Borzunov, P. A. Meleshenko, and A. V. Lapin, “A model of optimal production planning based on the hysteretic demand curve,” *Mathematics*, 2022, **10**, No. 18, 3262, DOI: 10.3390/math10183262.
179. M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, S. V. Borzunov, O. O. Reshetova, and A. I. Barsukov, “A simple model of the energy harvester within a linear and hysteresis approach,” *Micromachines*, 2023, **14**, 310, DOI: 10.3390/mi14020310.
180. M. E. Semenov, O. O. Reshetova, S. V. Borzunov, and P. A. Meleshenko, “Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2021, **230**, 3565–3571, DOI: 10.1140/epjs/s11734-021-00237-3.
181. M. E. Semenov, O. O. Reshetova, A. V. Tolkachev, A. M. Solovyov, and P. A. Meleshenko, “Oscillations under hysteretic conditions: From simple oscillator to discrete sine–Gordon model,” In: *Topics in Nonlinear Mechanics and Physics*, Springer, Singapore, 2019, 229–254, DOI: 10.1007/978-981-13-9463-8_12.
182. M. E. Semenov, A. M. Solovyov, and P. A. Meleshenko, “Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case,” *J. Vibr. Control*, 2021, **27**, No. 1-2, 43–56, DOI: 10.1177/1077546320923436.
183. M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A. Meleshenko, and J. M. Balthazar, “Nonlinear damping: from viscous to hysteretic dampers,” In: *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics: Selected Papers from CSNDD 2016*, Springer, Cham, 2017, 259–275. DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6_15.
184. M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A. Meleshenko, and O. O. Reshetova, “Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2020, **15**, 43, DOI: 10.1051/mmnp/2019053.
185. P. D. Spanos, P. Cacciola, and J. Redhorse, “Random vibration of SMA systems via Preisach formalism,” *Nonlinear Dynam.*, 2004, **36**, 405–419.
186. P. D. Spanos, A. Matteo, and A. Di Pirrotta, “Steady-state dynamic response of various hysteretic systems endowed with fractional derivative elements,” *Nonlinear Dynam.*, 2019, **98**, 3113–3124.
187. P. D. Spanos and G. Muscolino, “Stochastic averaging of Preisach hysteretic systems,” *J. Engrg. Mech.*, 2004, **130**, 1257–1267.
188. E. C. Stoner and E. P. Wohlfarth, “A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1948, **240**, 599–642.
189. Z. Szabó and J. Füzi, “Implementation and identification of Preisach type hysteresis models with Everett function in closed form,” *J. Magnetism Magnet. Mater.*, 2016, **406**, 251–258.
190. M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*, Wiley-Interscience, London, 1989.
191. J. Takács, “The Everett integral and its analytical approximation,” In: *Advanced Magnetic Materials*, INTECH, 2012, 203–230.
192. C. Tannous and J. Gieraltowski, “A Stoner–Wohlfarth model redux: static properties,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, 3563–3570.
193. T. Tsabedze and J. Zhang, “Design, characterization, modeling, and comparison of helically wrapped super-coiled polymer artificial muscles,” *Sensors Actuators A. Phys.*, 2021, **331**, 113018.

194. I. Urbanavičiūtė, T. D. Cornelissen, X. Meng, R. P. Sijbesma, and M. Kemerink, “Physical reality of the Preisach model for organic ferroelectrics,” *Nature Commun.*, 2018, **9**, No. 1, 1–11.
195. P. Venegas, D. Gómez, M. Arrinda, M. Oyarbide, H. Macicior, and A. Bermúdez, “Kalman filter and classical Preisach hysteresis model applied to the state of charge battery estimation,” *Comput. Math. Appl.*, 2022, **118**, 74–84.
196. A. Visintin, “Evolution problems with hysteresis in the source term,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, **17**, 1113–1138, DOI: 10.1137/0517079.
197. A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Springer, 1994.
198. A. Visintin, “Ten issues about hysteresis,” *Acta Appl. Math.*, 2014, **132**, 635–647, DOI: 10.1007/s10440-014-9936-6.
199. C. Visone, C. Serpico, I. D. Mayergoyz, M. W. Huang, and A. A. Adly, “Neural-Preisach-type models and their application to the identification of magnetic hysteresis from noisy data,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2000, **275**, 223–227.
200. P. Weiss and J. de Freudenreich, “Étude de l’aimantation initiale en fonction de la température,” *Arch. Sci. Phys. Natur.*, 1916, **42**, 449–470.
201. V. V. Yevstafyeva, “Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay,” *Math. Notes*, 2023, **114**, No. 1, 212–222, DOI: 10.1134/S0001434623070222.
202. K. Zhang, T. Zhao, and H. Fujiwara, “Training effect of exchange biased iron–oxide/ferromagnet systems,” *J. Appl. Phys.*, 2001, **89**, 6910–6912.

M. E. Semenov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: mkl1150@mail.ru

S. V. Borzunov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: sborzunov@gmail.com

O. I. Kanischeva

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: oleka_olesya@mail.ru

A. I. Proshunin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: alexfrauch@gmail.com

P. A. Meleshenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: melechp@yandex.ru

УДК 519.25, 520.88

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-341-352

EDN: NPAGPU

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ИНТЕРВАЛА ОХВАТА СТАНДАРТНОГО ДВУСТОРОННЕГО СТЕПЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

А. В. СТЕПАНОВ

*Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева,
Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. Рассмотрен вопрос об оценивании интервалов охвата (как односторонних, так и двусторонних) стандартного двустороннего степенного распределения (STSP-распределения) по выборочным данным. Проверка качества полученных оценок проводилась с использованием метода Монте-Карло. Изучены свойства оценок максимального правдоподобия параметров исходного распределения, оценено влияние их смещения на качество оценивания интервалов охвата. Также приведены примеры, демонстрирующие, что полученные оценки могут быть использованы для непрерывных распределений, допускающих аппроксимацию семейством STSP-распределений.

Ключевые слова: стандартное двустороннее степенное распределение, STSP-распределение, интервал охвата, метод Монте-Карло, оценка максимального правдоподобия.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. В. Степанов. Об оценивании интервала охвата стандартного двустороннего степенного распределения по выборочным данным // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 341–352. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-341-352>

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценивание интервалов охвата непрерывно распределенных случайных величин является важной прикладной задачей при статистической обработке данных (под *интервалом охвата* для уровня вероятности P_0 будем понимать такой интервал, который содержит значение случайной величины с данной вероятностью). В частности, при обработке результатов измерений предполагается, что интервал охвата будет содержать заданную долю значений, которые могут быть обоснованно приписаны измеряемой величине [10–12]. При этом в нормативных документах и методиках зачастую делается предположение о нормальности закона распределения данных, теория использования которого хорошо проработана, что приводит к приписыванию симметричного интервала охвата вида $[x - Ku, x + Ku]$ измеренному значению x , где $u = u(x)$ — оценка его суммарной неопределенности, а K — соответствующий нормальному закону коэффициент охвата (для $P_0 = 0,95$ значение $K \approx 1,96$ обычно округляют до двух). На практике, тем не менее, иногда возникают ситуации, когда данный симметричный интервал используется некритично, без должного обоснования, по тем или иным причинам (отсутствие адекватных альтернативных

моделей или относительная сложность вычисления интервалов охвата для них; малый объем экспериментальных данных, не позволяющий делать уверенные выводы о законе распределения и т. д.). Очевидно, данный интервал не всегда является подходящим: например, если исходное распределение существенно асимметрично, или измерения проводятся вблизи естественной границы множества возможных значений измеряемой величины (например, содержание высокочистого вещества в смеси) [4, 5], и указанный интервал охвата выходит за эту границу, переставая обеспечивать заданный уровень вероятности P_0 .

В данной работе вопрос об оценивании интервалов охвата по выборочным данным рассматривается для семейства распределений, которое, с одной стороны, допускает достаточно простое их выражение (а также несложную процедуру оценивания параметров), а с другой стороны, является достаточно широким для того, чтобы в случае необходимости быть использованным для аппроксимации других распределений. А именно, рассмотрим *стандартное двустороннее степенное распределение* (*standard two-sided power distribution*, STSP) [7, 8], плотность которого определена на отрезке $[0, 1]$ и имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} p \left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}, & 0 < x \leq \theta, \\ p \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{p-1}, & \theta < x < 1; \end{cases} \quad (1.1)$$

здесь $p > 0$, $0 \leq \theta \leq 1$ — параметры распределения (случай $p = 1$ отвечает равномерному распределению, $p = 2$ — треугольному). Далее распределения вида (1.1) будем также обозначать $STSP(\theta, p)$. Важным преимуществом данного распределения является простота проводимых математических выкладок¹ и, как следствие, простота выражений для интервалов охвата. Генерация случайных значений для данного распределения также может быть легко реализована, что делает его удобным для статистического моделирования методом Монте-Карло.

В силу специфики решаемой задачи наложим далее дополнительное ограничение на параметр p рассматриваемого семейства: будем считать $p \geq 1$, так как при $p < 1$ соответствующие распределения двухмодальны (имеют U-образную форму), и вопрос о том, что в таком случае считать интервалом охвата, становится дискуссионным. Также, не умаляя общности, для определенности предположим, что $\theta \geq 0,5$.

2. ИНТЕРВАЛЫ ОХВАТА

Выражения для функции распределения и обратной к ней в случае (1.1) имеют крайне простой вид [8]:

$$F(x) = \begin{cases} \theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^p, & 0 \leq y \leq \theta, \\ 1 - (1 - \theta) \left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{p-1}, & \theta < y \leq 1; \end{cases}$$

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[p]{\theta^{p-1}y}, & 0 \leq y \leq \theta, \\ 1 - \sqrt[p]{(1-\theta)^{p-1}(1-y)}, & \theta < y \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Получим выражения для интервалов охвата STSP-распределения. Напомним, что *интервалом охвата* для заданного уровня вероятности P_0 называют такой интервал (в данном случае, отрезок, так как распределение имеет ограниченный носитель) $[c_1, c_2] \subset [0, 1]$, что $F(x_2) - F(x_1) = P_0$. Здесь и далее будет рассматриваться значение $P_0 = 0,95$ (95%), при этом, очевидно, проведенные построения допускают обобщение на случай других общеупотребительных значений P_0 (0,9; 0,99).

В качестве одностороннего интервала охвата рассмотрим правосторонний интервал $I = [c_1, 1]$ (напомним, считаем $\theta > 0,5$), где $c_1 = F^{-1}(1 - P_0)$.

¹при достаточно широком разнообразии: в работе [8] проведено сравнение STSP-распределения с бета-распределением с использованием диаграммы моментов.

ТАБ. 1. Пример: кратчайшие двусторонние интервалы охвата, двусторонние интервалы охвата

ТАБ. 1. Example: shortest two-sided coverage intervals, two-sided coverage intervals

θ	0,75			0,90		
p	1,5	3	5	1,5	3	5
I_s	[0,102, 0,966]	[0,276, 0,908]	[0,412, 0,863]	[0,122, 0,986]	[0,332, 0,963]	[0,494, 0,945]
I	[0,078, 0,946]	[0,241, 0,884]	[0,380, 0,842]	[0,083, 0,960]	[0,273, 0,937]	[0,440, 0,924]
$\delta L \cdot 100\%$	99,5%	98,3%	97,5%	98,5%	95,1%	93,0%

Для двустороннего интервала, в простейшем случае, предположим, что слева и справа отбрасываются подынтервалы одинакового веса, равного $\frac{1}{2}(1 - P_0)$:

$$F(c_1) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2}(1 - P_0), \quad c_1 = F^{-1}\left(\frac{1 - P_0}{2}\right), \quad c_2 = F^{-1}\left(\frac{1 + P_0}{2}\right). \quad (2.2)$$

Далее, при отсутствии уточнений, под двусторонним интервалом охвата будем подразумевать интервал охвата именно такого вида. Таким образом, используя формулу (2.1), можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Для распределения вида (1.1) односторонний (правосторонний) интервал охвата задается формулой

$$I = [\sqrt[p]{\theta^{p-1}(1 - P_0)}, 1], \quad (2.3)$$

а двусторонний имеет вид

$$I = [c_1, c_2], \quad c_1 = \sqrt[p]{\frac{1}{2}\theta^{p-1}(1 - P_0)}, \quad c_2 = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{2}(1 - \theta)^{p-1}(1 - P_0)}. \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. В случае, когда $\theta = 0,5$, STSP-распределение является симметричным относительно точки 0,5, и дополнительно можем вычислить коэффициент охвата для заданного уровня вероятности:

$$K_{P_0} = \frac{c_2 - c_1}{2\sigma} = \left(1 - \sqrt[p]{1 - P_0}\right) \sqrt{\frac{1}{2}(p+1)(p+2)},$$

здесь $\sigma = \sqrt{2(p+1)(p+2)}$ — среднеквадратическое отклонение (далее будем использовать аббревиатуру СКО).

Замечание 2.2. Заметим также, что определение двустороннего интервала охвата, в общем случае, неоднозначно; таковым можно считать любой отрезок $[c_1, c_2]$, для которого выполнены условия:

$$c_1 > 0, \quad c_2 < 1, \quad F(c_2) - F(c_1) = P_0.$$

В то же время, можно выбрать из множества таких отрезков кратчайший ($c_2 - c_1 \rightarrow \min$). Выражая c_2 через c_1 , получим следующие формулы для границ $c_{1,2}$:

$$c_1 = \arg \min_c \left\{ 1 - c - \sqrt[p]{(1 - \theta)^{p-1} \left(1 - P_0 - \theta \left(\frac{c}{\theta} \right)^p \right)} \right\}, \quad c_2 = 1 - \sqrt[p]{(1 - \theta)^{p-1} \left(1 - P_0 - \theta \left(\frac{c_1}{\theta} \right)^p \right)}.$$

В таб. 1 приведено сравнение двусторонних интервалов охвата I с кратчайшими двусторонними I_s , для некоторых значений параметров θ, p ; последняя строчка содержит отношение длин $\delta L = |I_s|/|I|$, выраженное в процентах. Для рассмотренных примеров, как можно заметить, данная величина не слишком заметно отличается от единицы, поэтому далее для упрощения выкладок везде будем рассматривать интервал охвата, отвечающий условиям (2.2) (хотя, безусловно, существуют задачи, где требуется нахождение именно кратчайшего интервала охвата).

3. ОЦЕНИВАНИЕ ИНТЕРВАЛОВ ОХВАТА ПО ВЫБОРОЧНЫМ ДАННЫМ

При оценивании интервалов охвата по выборочным данным можно выделить две подзадачи. Первая, более простая, — оценить интервал охвата, считая, что закон распределения выборки представляет собой $STSP(\theta, p)$ с неизвестными (подлежащими оценке) значениями параметров θ, p . Тогда, получив их оценки $\hat{\theta}, \hat{p}$, можно вычислить соответствующие оценки $\hat{c}_{1,2}$ границ интервала охвата по формулам, приведенным выше.

В более сложном случае вид закона распределения исходных экспериментальных данных считаем неизвестным. Предполагается только, что их распределение непрерывно, то есть описывается плотностью $f_0(x)$ (соответствующую функцию распределения обозначим $F_0(x)$), и что область определения f_0 совпадает с отрезком $[0, 1]$ (или, обобщая, что величина $F(1) - F(0)$ настолько близка к единице, что вероятность получения значений, выходящих за границы данного отрезка, исчезающе мала, с точки зрения конкретного приложения). Также предполагается, что неизвестное распределение может быть с приемлемой точностью (например, в терминах близости функций распределения или расстояния полной вариации) аппроксимировано распределением из семейства (1.1), что дает основания предполагать, что оценка интервала охвата $[\hat{c}_1, \hat{c}_2]$, полученная для аппроксимирующего распределения, также обеспечит приемлемую величину $\hat{P} = F_0(\hat{c}_2) - F_0(\hat{c}_1)$ вероятности охвата для исходного (аппроксимируемого) распределения. С практической точки зрения, как правило, приемлемым можно считать значение $\hat{P}$, которое не отличается от заданного уровня P_0 значимо (более, чем на единицы процентов) в меньшую сторону. Отличие $\hat{P}$ в большую сторону, как правило, не является критичным, например, в задаче оценивания неопределенности измерения требуется оценка сверху, то есть вариант, когда полученный доверительный интервал фактически содержит, например, 98% значений случайной (измеряемой) величины при заявленном уровне вероятности 95%, предпочтительнее, чем когда он содержит 92% ее значений.

Повторно заметим, что выбор $STSP$ -распределения в качестве аппроксимирующего здесь может быть обусловлен именно простотой вычисления границ интервала охвата, которые допускают явное аналитическое выражение, в том числе, для асимметричного $STSP$ -распределения, в отличие, например, от случая бета-распределения. Вопрос об использовании семейства симметричных TSP -распределений для аппроксимации непрерывных распределений рассматривался в работе [2].

Далее с помощью метода Монте-Карло будет исследован вопрос о применимости метода аппроксимации интервала охвата для различных классов модельных распределений (как самого $STSP$, так и некоторых других). При переходе к выборочным данным как для задачи оценивания, так и для задачи аппроксимации интервалов охвата становится очевидной зависимость точности полученных оценок от длины выборки. Кроме того, существенное влияние оказывает смещение оценок $\hat{\theta}, \hat{p}$, (будет рассмотрено ниже). В случае задачи аппроксимации интервала охвата неизвестного распределения первостепенную важность, очевидно, будет иметь сама возможность аппроксимации исходного распределения $STSP$ -семейством с приемлемой точностью. Очевидно, существуют случаи, когда это невозможно, тогда следует перейти к подбору аппроксимирующего семейства, отличного от (1.1), более подходящего для решения конкретной практической задачи.

Рассмотрим иллюстративный пример (пока оперируя функциями распределения, а не выборками). Допустим, исходное распределение — нормальное, с математическим ожиданием, равным $\theta = 0,5$, и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0,1$: $f_0 \sim N(0,5, 0,1)$. Заметим, что, с вычислительной точки зрения, данное распределение практически неотлично от усеченного нормального распределения, имеющего отрезок $[0, 1]$ областью определения, поэтому можем считать, что $f_0 \sim N_{[0,1]}(0,5, 0,1)$. В этом случае распределение $STSP(0,5, 5,18)$ дает приемлемую, с точки зрения близости функций распределения, аппроксимацию f_0 (соответствующие функции распределения изображены на рис. 1), и оценка интервала охвата имеет вид: $[\hat{c}_1, \hat{c}_2] = [0,280, 0,720]$.

Проверка показывает, что для исходного нормального распределения $N(0,5, 0,1)$ $\hat{P} \approx 0,972$, что является приемлемым значением. Аналогично, для $f_0 \sim N(0,5, 0,15)$ получим $\hat{p} = 3,20$, $[\hat{c}_1, \hat{c}_2] = [0,196, 0,804]$, $\hat{P} \approx 0,957$. Таким образом, семейство $STSP$ является подходящим выбором для оценивания интервала охвата нормального распределения (усеченного нормального распределения), и можно ожидать, что, при рассмотрении выборки достаточной длины оценки интервалов охвата, полученные по выборочным данным, будут удовлетворительными.

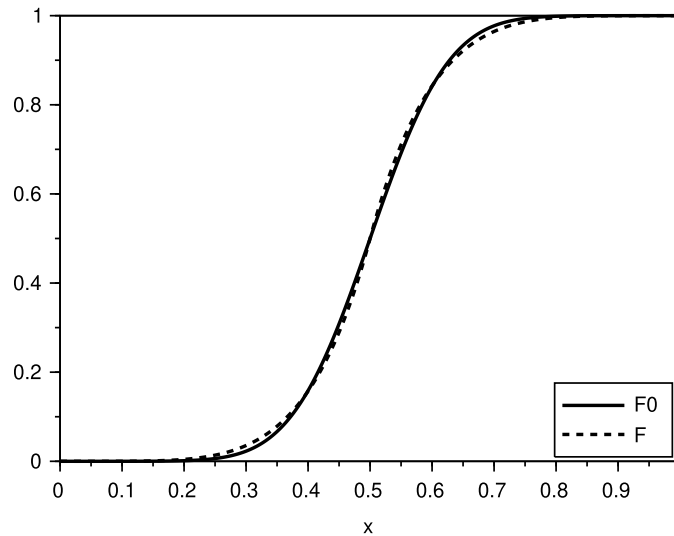


Рис. 1. Функции распределения F_0, F ($f_0 \sim N(0,5,0,1)$, $f \sim STSP(0,5,5,18)$).

FIG. 1. Distribution functions F_0, F ($f_0 \sim N(0,5,0,1)$, $f \sim STSP(0,5,5,18)$).

Заметим также, что в данной статье не рассматривался вопрос о проверке критериев согласия при подборе аппроксимирующего распределения, тем не менее, при решении практических задач следует обратить на него внимание, убедившись, что выбор аппроксимирующего распределения не противоречит исходным экспериментальным данным слишком явно.

3.1. Оценивание параметров STSP-распределения. Моделирование. Наиболее естественным представляется оценивание параметров STSP распределения с использованием оценок максимального правдоподобия. Допустим, что имеется выборка из распределения (1.1) длины n : $\{x_i\}_{i=1}^n$. Обозначим $\{x_{(i)}\}_{i=1}^n$ соответствующий вариационный ряд. Тогда оценки максимального правдоподобия, согласно [7, 8], имеют вид:

$$\hat{\theta} = x_{(i_0)}, \quad \hat{p} = -\frac{n}{\log M(i_0)}, \quad i_0 = \arg \max_i M(i), \quad M(i) = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{x_{(j)}}{x_{(i)}} \prod_{j=i+1}^n \frac{1-x_{(j)}}{1-x_{(i)}}.$$

Моделирование методом Монте-Карло показывает, что оценки $\hat{\theta}$, $\hat{p}$ являются смещенными (здесь и далее число итераций, использованных для получения оценок, составляло $2 \cdot 10^6$). Математическое ожидание оценки $\hat{\theta}$ смещено влево (в сторону нуля) тем сильнее, чем ближе исходный параметр θ к единице; математическое ожидание оценки $\hat{p}$ смещено в сторону больших значений (вверх). Полученные в ходе моделирования распределения оценок асимметричны (распределение θ при этом имеет многомодальный вид). В качестве примера ниже приведена таб. 2, содержащая смещения (в том числе, в относительном виде) и СКО оценок параметров для $\theta = 0,75$ и $n = 20, 50$.

Заметим, что относительное смещение $\delta \hat{p}$ заметно выше, чем $\delta \hat{\theta}$, и самые заметные смещения наблюдаются вблизи $p = 1$. СКО $\sigma(\hat{\theta})$ убывает с ростом параметра p модельного распределения, а отношение СКО $\sigma(\hat{p})$ к $\mathbb{E} \hat{p}$ меняется незначительно. Смещения оценок ожидаемо уменьшаются с ростом длины выборки n .

Заметим также, что при $p = 1$ модельным случаем является равномерное распределение ($f(x) \equiv 1, x \in [0, 1]$), поэтому исходный параметр θ для него может принимать любое допустимое значение, и рассматривать смещение оценки $\hat{\theta}$ здесь не имеет смысла).

ТАБ. 2. Пример: свойства оценок $\hat{\theta}$, $\hat{p}$, $\theta = 0,75$ ТАБ. 2. Example: properties of estimates $\hat{\theta}$, $\hat{p}$, $\theta = 0,75$

n	p	$\mathbb{E}\hat{\theta}$	$\delta\hat{\theta}$	$\sigma(\hat{\theta})$	$\mathbb{E}\hat{p}$	$\delta\hat{p}$	$\sigma(\hat{p})$
20	1,0	0,500		0,420	1,315	31,50%	0,275
	1,5	0,695	-7,40%	0,239	1,737	15,80%	0,393
	2,0	0,735	-2,00%	0,131	2,246	12,30%	0,527
	2,5	0,742	-1,00%	0,086	2,775	11,00%	0,658
	3,0	0,745	-0,70%	0,063	3,311	10,40%	0,789
	4,0	0,747	-0,40%	0,041	4,390	9,70%	1,047
	5,0	0,748	-0,30%	0,031	5,472	9,40%	1,308
50	1,0	0,500		0,428	1,167	16,70%	0,141
	1,5	0,731	-2,60%	0,161	1,589	5,90%	0,223
	2,0	0,745	-0,70%	0,078	2,090	4,50%	0,300
	2,5	0,747	-0,40%	0,050	2,601	4,00%	0,376
	3,0	0,748	-0,30%	0,037	3,114	3,80%	0,451
	3,5	0,748	-0,20%	0,029	3,629	3,70%	0,526
	5,0	0,749	-0,10%	0,018	5,175	3,50%	0,751

ТАБ. 3. $\delta\hat{\theta}$, $\delta\hat{p}$, %

n	20						50					
θ	0,75		0,90		0,95		0,75		0,90		0,95	
p	$\delta\hat{\theta}$	$\delta\hat{p}$	$\delta\hat{\theta}$	$\delta\hat{p}$	$\delta\hat{\theta}$	$\delta\hat{p}$	$\delta\hat{\theta}$	$\delta\hat{p}$	$\delta\hat{\theta}$	$\delta\hat{p}$	$\delta\hat{\theta}$	$\delta\hat{p}$
1,0		31,5		31,5		31,5		16,7		16,7		16,7
1,5	-7,4	15,8	-10,0	15,3	-10,6	14,9	-2,6	5,9	-3,9	5,9	-4,4	5,8
2,0	-2,0	12,3	-3,2	12,6	-3,7	12,5	-0,7	4,5	-1,1	4,6	-1,3	4,7
2,5	-1,0	11,0	-1,6	11,4	-2,0	11,6	-0,4	4,0	-0,6	4,2	-0,7	4,3
3,0	-0,7	10,4	-1,0	10,8	-1,3	11,1	-0,3	3,8	-0,4	3,9	-0,4	4,0
3,5	-0,5	10,0	-0,7	10,4	-0,9	10,8	-0,2	3,7	-0,3	3,8	-0,3	3,9
4,0	-0,4	9,7	-0,6	10,1	-0,7	10,5	-0,2	3,6	-0,2	3,7	-0,2	3,8
4,5	-0,3	9,5	-0,5	9,9	-0,6	10,3	-0,1	3,5	-0,2	3,6	-0,2	3,7
5,0	-0,3	9,4	-0,4	9,8	-0,5	10,2	-0,1	3,5	-0,2	3,6	-0,2	3,7

Таблица 3 содержит более детальный список относительных смещений оценок (в процентах). При оценивании параметров, в случае необходимости, ее можно использовать как источник поправок. Заметим, что величина $\delta\hat{p}$ относительно слабо зависит от значения параметра θ исходного модельного распределения.

Таким образом, следует отметить, что при оценивании параметров распределения (1.1), при не слишком больших (порядка нескольких десятков) длинах выборки, интервал значений $p = 1 \dots 1,5$, особенно левый его конец (близкие к равномерному «пологие» распределения), является «проблемным». При увеличении длины выборки острота проблемы спадает, однако на практике не всегда доступны длинные массивы экспериментальных данных.

В качестве альтернативы методу максимального правдоподобия для оценивания параметров (1.1) рассматривался метод моментов, оценки параметров при этом получали путем решения

системы уравнений

$$\begin{cases} \hat{p} = \frac{1 - \hat{\theta} - M_1}{M_1 - \hat{\theta}}, \\ \frac{\hat{\theta}^2 \hat{p}}{\hat{p} + 2} + 2 \frac{(1 - \hat{\theta})(1 + \hat{\theta} \hat{p})}{(\hat{p} + 1)(\hat{p} + 2)} = M_2, \end{cases}$$

где $M_{1,2}$ — начальные выборочные моменты (опустим вывод данных формул, он относительно громоздок, но тривиален). Тем не менее, моделирование показало, что данный метод дает сопоставимое смещение для оценок параметров, не имея явных преимуществ (эффективность полученных оценок при этом может быть несколько ниже).

3.2. Оценивание интервалов охвата. Моделирование. Перейдем теперь к оцениванию интервала охвата и проверке качества оценок $c_{1,2}$. Предлагается получать оценки $\hat{c}_{1,2}$, используя формулы (2.3), (2.4), подставляя в них оценки (максимального правдоподобия или метода моментов) параметров $\hat{\theta}, \hat{p}$. Для проверки качества оценок снова воспользуемся методом Монте-Карло. Получив для каждого модельного распределения (отвечающего паре параметров θ, p), свои оценки $\hat{\theta}, \hat{p} \Rightarrow [\hat{c}_1, \hat{c}_2] \Rightarrow \hat{P}$, тем самым, получим экспериментальное распределение величины $\hat{P}$. Полученные для этого распределения математическое ожидание $E\hat{P}$ и десятый, двадцать пятый и пятидесятый процентиля $P_{10}(\hat{P}), P_{25}(\hat{P}), P_{50}(\hat{P})$ можно рассматривать в совокупности для принятия решения о качестве оценивания интервала охвата.

Ниже будут использованы как нескорректированные оценки параметра p , так и оценки, подвергшиеся простейшей коррекции. А именно, как уже было замечено ранее, $\delta \hat{p}$ слабо зависит от θ , поэтому предложим простейшую коррекцию полученной оценки $\hat{p}$, путем введения корректирующего множителя C_p : $\hat{p} \rightarrow C_p \hat{p}$ (оценку $\hat{\theta}$ при этом не предлагается корректировать), считая:

$$C_p = 0,87, \text{ если } p \leq 2; \text{ иначе } 0,91; \text{ для } n = 20;$$

$$C_p = 0,90, \text{ если } 1 \leq p \leq 1,5; 0,94, \text{ если } 1,5 < p \leq 2; \text{ иначе } 0,96; \text{ для } n = 50$$

(значения $p \gg 5$ при этом не рассматривались). Результаты оценивания статистик распределения $\hat{P}$ приведены в таб. 4 (в качестве примера снова выбрали $\theta = 0,75$); рассмотрены односторонний (О) и двусторонний (Д) типы интервалов охвата. Во втором столбце отмечено, проводилась ли коррекция оценки $\hat{p}$.

Следует отметить, что даже такая тривиальная (грубая) коррекция $\hat{p}$ дает возможность получить гораздо более качественные (в терминах $\hat{P}$) оценки интервалов охвата, особенно это заметно для относительно коротких выборок ($n = 20$). Результаты для $n = 50$ и без коррекции выглядят приемлемо (хотя и хуже, чем с ней); более того, как показывают эксперименты, при n порядка сотни и выше коррекция избыточна (за исключением, возможно, значений p , близких к 1). Для небольших же выборок рекомендуется ее проводить. Стоит еще раз подчеркнуть, что более тонкая коррекция оценок $\hat{\theta}, \hat{p}$ (таб. 3) даст еще более заметное улучшение результатов (особенно вблизи $p = 1$).

Заметим, что относительно невысокий уровень значения $P_{10}(\hat{P})$ при $n = 20$ обусловлен не только смещением оценок параметров, но и достаточно большим их разбросом, вследствие небольшой длины выборки.

Во избежание загромождения текста излишними подробностями, здесь опущена информация о распределениях границ $\hat{c}_{1,2}$; следует отметить только, что при отсутствии коррекции они смещены внутрь, к центру интервала охвата, что и приводит (в среднем) к некоторой его недооценке.

3.3. Аппроксимация интервала охвата. Таблица 5 содержит статистики распределения вероятностей $\hat{P}$, полученные в ходе моделирования при аппроксимации непрерывных модельных распределений f_0 , не принадлежащих семейству (1.1): равномерных распределений, определенных на подмножествах отрезка $[0, 1]$, усеченных нормальных распределений (в силу их малого СКО, их «усеченностью» можно, вообще говоря, пренебречь), бета-распределений. Рассматривался двусторонний интервал охвата. Оценки $\hat{c}_{1,2}$, по аналогии с предыдущим пунктом, получались по формулам (2.3), (2.4), как если бы исходное (аппроксимируемое) распределение (и выборочные

ТАБ. 4. Пример: статистики распределения $\hat{P}$ ($\theta = 0,75$)ТАБ. 4. Example: Distribution $\hat{P}$ statistics ($\theta = 0,75$)

тип/ type	коррекция $\hat{p}$ / $\hat{p}$ correction	p	n							
			20				50			
			$\mathbb{E}\hat{P}$	$P_{10}(\hat{P})$	$P_{25}(\hat{P})$	$P_{50}(\hat{P})$	$\mathbb{E}\hat{P}$	$P_{10}(\hat{P})$	$P_{25}(\hat{P})$	$P_{50}(\hat{P})$
О	-	1,0	0,923	0,867	0,902	0,933	0,937	0,906	0,924	0,941
		1,5	0,930	0,877	0,909	0,938	0,942	0,913	0,930	0,945
		2,0	0,933	0,881	0,913	0,940	0,943	0,915	0,931	0,946
		2,5	0,934	0,882	0,914	0,942	0,944	0,915	0,932	0,947
		3,0	0,934	0,883	0,915	0,942	0,944	0,915	0,932	0,947
		4,0	0,935	0,884	0,916	0,943	0,944	0,916	0,932	0,947
		5,0	0,935	0,885	0,916	0,943	0,944	0,916	0,932	0,947
	+	1,0	0,935	0,895	0,924	0,944	0,944	0,923	0,937	0,948
		1,5	0,947	0,898	0,933	0,956	0,950	0,924	0,939	0,954
		2,0	0,947	0,901	0,930	0,953	0,950	0,922	0,938	0,952
		2,5	0,947	0,903	0,931	0,954	0,950	0,923	0,938	0,952
		3,0	0,948	0,903	0,931	0,955	0,950	0,923	0,938	0,953
		4,0	0,948	0,904	0,932	0,956	0,950	0,923	0,939	0,953
		5,0	0,948	0,905	0,932	0,956	0,950	0,923	0,939	0,953
Д	-	1,0	0,907	0,851	0,888	0,918	0,929	0,902	0,920	0,935
		1,5	0,924	0,866	0,903	0,934	0,941	0,909	0,928	0,944
		2,0	0,927	0,869	0,905	0,936	0,942	0,910	0,929	0,945
		2,5	0,928	0,870	0,907	0,938	0,942	0,911	0,929	0,946
		3,0	0,929	0,871	0,907	0,938	0,942	0,911	0,929	0,946
		4,0	0,929	0,871	0,908	0,939	0,942	0,911	0,929	0,946
		5,0	0,929	0,872	0,908	0,939	0,942	0,912	0,929	0,946
	+	1,0	0,928	0,886	0,916	0,939	0,942	0,922	0,936	0,947
		1,5	0,944	0,890	0,929	0,955	0,950	0,922	0,938	0,953
		2,0	0,944	0,893	0,925	0,952	0,949	0,919	0,936	0,952
		2,5	0,944	0,894	0,926	0,952	0,948	0,919	0,936	0,952
		3,0	0,944	0,895	0,926	0,953	0,948	0,919	0,936	0,952
		4,0	0,944	0,895	0,927	0,953	0,948	0,920	0,936	0,952
		5,0	0,944	0,895	0,927	0,953	0,949	0,920	0,937	0,952

данные) принадлежало семейству STSP, в то время как величина $\hat{P}$ вычислялась с использованием истинного модельного распределения f_0 . Полученные результаты демонстрируют приемлемое качество аппроксимации (в случае бета-распределения следует отдать предпочтение более длинным выборкам). Таким образом, в некоторых случаях аппроксимация семейством STSP с последующей оценкой интервала охвата может быть оправдана для практических приложений.

3.4. Уточнение оценок путем подбора наилучшего приближения. В качестве еще одного способа уточнения оценок можно предложить метод подбора наилучшего закона распределения, описанного в работе [3]. Напомним, что выбор осуществляется путем поиска пары параметров θ, p из некоторого конечного множества S таких пар, доставляющей минимум функционалу

$$d^2 = \sum_{i=1}^n \left(F_{\theta,p}^{-1} \left(\frac{i-1/2}{n} \right) - x_{(i)} \right)^2.$$

Подгонку предлагается осуществлять путем последовательных

ТАБ. 5. Пример: статистики распределения $\hat{P}$ ТАБ. 5. Example: Distribution $\hat{P}$ statistics

f_0	n	$\mathbb{E}\hat{P}$	$P_{10}(\hat{P})$	$P_{25}(\hat{P})$	$P_{50}(\hat{P})$
$U([0,5, 1])$	20	0,942	0,871	0,934	0,961
	50	0,964	0,924	0,963	0,974
$U([0,7, 1])$	20	0,944	0,895	0,930	0,957
	50	0,968	0,948	0,963	0,974
$N_{[0,1]}(0,5, 0,15)$	20	0,952	0,908	0,937	0,960
	50	0,956	0,930	0,945	0,959
$N_{[0,1]}(0,5, 0,10)$	20	0,961	0,921	0,949	0,970
	50	0,965	0,942	0,956	0,968
$N_{[0,1]}(0,6, 0,10)$	20	0,953	0,908	0,938	0,961
	50	0,957	0,932	0,947	0,960
$Beta(1,5, 1,1)$	20	0,934	0,884	0,918	0,945
	50	0,945	0,914	0,934	0,950
$Beta(5,2)$	20	0,934	0,869	0,908	0,943
	50	0,945	0,904	0,926	0,948
$Beta(20,2)$	20	0,938	0,877	0,917	0,950
	50	0,966	0,939	0,958	0,973

итераций. А именно, получив на первом шаге оценки $\hat{\theta}$, $\hat{p}$ (методом максимального правдоподобия или методом моментов) и опираясь на сведения об ожидаемых средних смещениях данных оценок (таб. 3 или ее аналоги), исследователь формирует сетку S . Например, ожидая $\delta\hat{p} \approx 10\%$, для параметра p он может рассмотреть массив значений $p = 0,90\hat{p}, 0,91\hat{p}, \dots, \hat{p}$. Аналогично строится массив значений θ (хотя здесь обычно ожидается заметно меньшее смещение). Рассмотрев в качестве S декартово произведение указанных массивов и минимизируя значение d^2 , получим новую пару $\hat{\theta}, \hat{p}$. После этого делается еще один-два шага для уточнения оценки, с последовательным измельчением сетки. Указанный подход позволяет существенно снизить смещение и разброс оценок $\hat{\theta}, \hat{p}$ (в проводившихся экспериментах величина $\delta\hat{p}$ уменьшалась в разы, а СКО $\sigma(\hat{p})$ — на 10 и более процентов) и улучшить статистические показатели вероятности $\hat{P}$. Реализация данного метода является относительно несложной (хотя, конечно, все же несколько сложнее, чем использование предварительно вычисленных поправок).

Заметим, что метод подбора распределения также может быть независимо использован для оценивания параметров STSP-распределения [1].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные построения позволяют утверждать, что предложенные процедуры оценивания и аппроксимации интервалов охвата по выборочным данным дают достаточно хорошие результаты, сохраняя при этом вычислительную простоту. Полученные результаты могут быть рекомендованы для специалистов, занимающихся обработкой экспериментальных данных и представлением результатов измерений.

Относительно невысокое качество оценок для равномерного распределения (и близких к нему) вполне ожидаемо и интуитивно понятно: странно было бы ожидать эффективного оценивания моды распределения θ (и интервала охвата) по относительно коротким выборкам там, где эта мода практически незаметна, а значения распределены почти равномерно; в таком случае проще считать распределение равномерным, и пользоваться соответствующим тривиальным выражением для интервала охвата. С другой стороны, при рассмотрении выборок небольшого размера следует помнить, что оценки параметров используемого STSP-распределения являются смещенными, и

для улучшения оценок, производных от них, желательно проводить некоторую коррекцию. При оценивании интервалов охвата произвольных непрерывных распределений, в рамках конкретных практических задач, также стоит изучить вопрос их аппроксимируемости STSP-распределением.

Очевидно, задача допускает различные обобщения. Например, выбор в качестве области определения отрезка $[0, 1]$ достаточно условен (отталкиваясь от условий конкретной задачи, можно использовать TSP-распределение, заданное на ином интервале [9]). В некоторых задачах точные границы рассматриваемого диапазона могут быть неизвестны, то есть их тоже придется оценивать, что усложнит рассматриваемую задачу. Можно также использовать иные семейства распределений в качестве отправной точки, при условии, что они достаточно широки, например, обобщенное TSP-распределение [6] или бета-распределение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов А. В., Чуновкина А. Г. Об одном методе подбора закона распределения из семейства TSP и его свойствах // В сб.: «Материалы международной Воронежской зимней математической школы». — Воронеж: ВГУ, 2024. — С. 244–246.
2. Степанов А. В., Чуновкина А. Г. Об аппроксимации законов распределений семейством TSP при решении метрологических задач // В сб.: «Материалы международной Воронежской зимней математической школы». — Воронеж: ВГУ, 2025. — С. 317–318.
3. Тырсин А. Н. Метод подбора наилучшего закона распределения непрерывной случайной величины на основе обратного отображения // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2017. — 9, № 1. — С. 31–38.
4. Эллисон С. Л. Р., Вильямс А. (ред.) Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК CG 4. — Екатеринбург: УНИИМ, 2018. — URL: https://www.eurachem.org/images/stories/Guides/pdf/QUAM2012_P1_RU.pdf.
5. Cowen S., Ellison S. Reporting measurement uncertainty and coverage intervals near natural limits // Analyst. — 2006. — 131, № 6. — С. 710–717.
6. Herrerias-Velasco J., Herrerias-Pleguezuelo R., Van Dorp J. R. The generalized two-sided power distribution // J. Appl. Stat. — 2009. — 36. — С. 573–587.
7. Kotz S., Van Dorp J. R. The standard two-sided power distribution and its properties // Am. Stat. — 2002. — 56, № 2. — С. 90–99.
8. Kotz S., Van Dorp J. R. Beyond beta: other continuous families of distributions with bounded support and applications. — World Sci. Publ., 2004.
9. Stepanov A., Chunovkina A. On choosing two-sided power distribution for measurement data // В сб.: «Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XIII». — World Sci. Publ., 2025. — С. 268–277.
10. Stoudt S., Pintar A., Possolo A. Coverage intervals // J. Res. Natl. Inst. Standards Technol. — 2021. — 126. — DOI: 10.6028/jres.126.004.
11. Evaluation of measurement data—Guide to the expression of uncertainty in measurement // Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). — 2008. — Режим доступа: https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf (дата обращения: 27.06.2025).
12. Evaluation of measurement data—Supplement 1 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement»—Propagation of distributions using a Monte Carlo method // Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). — 2008. — Режим доступа: https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_101_2008_E.pdf/325dcaad-c15a-407c-1105-8b7f322d651c (дата обращения: 27.06.2025).

А. В. Степанов

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: stepanov17@yandex.ru

UDC 519.25, 520.88

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-341-352

EDN: NPAGPU

On estimating the coverage interval of a standard two-sided power distribution from sample data

A. V. Stepanov

D. I. Mendeleev Institute for Metrology, St. Petersburg, Russia

Abstract. We consider the problem of estimating coverage intervals (both one-sided and two-sided) of the standard two-sided power distribution (STSP-distribution) based on sample data. We check the quality of the obtained estimates using the Monte Carlo method. We study the properties of the maximum likelihood estimates of the parameters of the original distribution and estimate the influence of their bias on the quality of estimating coverage intervals. We also give examples demonstrating that the obtained estimates can be used for continuous distributions that can be approximated by a family of STSP-distributions.

Keywords: standard two-sided power distribution, STSP-distribution, coverage interval, Monte Carlo method, maximum likelihood estimate.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. V. Stepanov, “On estimating the coverage interval of a standard two-sided power distribution from sample data,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 341–352. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-341-352>

REFERENCES

1. A. V. Stepanov and A. G. Chunovkina, “Ob odnom metode podbora zakona raspredeleniya iz semeystva TSP i ego svoystvakh” [On one method of selecting a distribution law from the TSP family and its properties], In: *Materialy mezhdunarodnoy Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly* [Proceedings of the International Voronezh Winter Mathematical School], VGU, Voronezh, 2024, pp. 244–246 (in Russian).
2. A. V. Stepanov and A. G. Chunovkina, “Ob approksimatsii zakonov raspredeleniy semeystvom TSP pri reshenii metrologicheskikh zadach” [On the approximation of distribution laws by the TSP family in solving metrological problems], In: *Materialy mezhdunarodnoy Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly* [Proceedings of the International Voronezh Winter Mathematical School], VGU, Voronezh, 2025, pp. 317–318 (in Russian).
3. A. N. Tyrsin, “Metod podbora nailuchshego zakona raspredeleniya nepreryvnoy sluchaynoy velichiny na osnove obratnogo otobrazheniya” [Method for selecting the best distribution law for a continuous random variable based on inverse mapping], *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Mekh. Fiz.* [Bull. South Ural State Univ. Ser. Math. Mech. Phys.], 2017, **9**, No. 1, 31–38 (in Russian).
4. S. L. R. Ellison and A. Williams (eds.), *Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement. EURACHEM / CITAC Guide CG 4*, EURACHEM/CITAC Working Group, 2018, URL: https://www.eurachem.org/images/stories/Guides/pdf/QUAM2012_P1_RU.pdf.
5. S. Cowen and S. Ellison, “Reporting measurement uncertainty and coverage intervals near natural limits,” *Analyst*, 2006, **131**, No. 6, 710–717.
6. J. Herreras-Velasco, R. Herreras-Pleguezuelo, and J. R. Van Dorp, “The generalized two-sided power distribution,” *J. Appl. Stat.*, 2009, **36**, 573–587.

7. S. Kotz and J. R. Van Dorp, “The standard two-sided power distribution and its properties,” *Am. Stat.*, 2002, **56**, No. 2, 90–99.
8. S. Kotz and J. R. Van Dorp, *Beyond beta: other continuous families of distributions with bounded support and applications*, World Sci. Publ., 2004.
9. A. Stepanov and A. Chunovkina, “On choosing two-sided power distribution for measurement data,” In: *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XIII*, World Sci. Publ., 2025, pp. 268–277.
10. S. Stoudt, A. Pintar, and A. Possolo, “Coverage intervals,” *J. Res. Natl. Inst. Standards Technol.*, 2021, **126**, DOI: 10.6028/jres.126.004.
11. “Evaluation of measurement data—Guide to the expression of uncertainty in measurement,” *Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)*, 2008. Available online: https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf, accessed on June 27, 2025.
12. “Evaluation of measurement data—Supplement 1 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement»—Propagation of distributions using a Monte Carlo method,” *Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)*, 2008. Available online: https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_101_2008_E.pdf/325dcaad-c15a-407c-1105-8b7f322d651c, accessed on June 27, 2025.

A. V. Stepanov

D. I. Mendeleev Institute for Metrology, St. Petersburg, Russia

E-mail: stepanov17@yandex.ru