

ДИНАМИКА ТЕНЗОРА КОНФОРМАЦИИ В ВЯЗКОУПРУГИХ МОДЕЛЯХ ПОЛИМЕРОВ FENE

А. П. ЧУПАХИН^{1,2}, Е. С. СТЕЦЯК^{1,2,3}, Д. С. ЧУТКОВ²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

³Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе получены и проинтегрированы уравнения, описывающие эволюцию инвариантов тензора конформации для модели FENE вязкоупругого полимерного раствора. Найдены явные выражения инвариантов в зависимости от времени вдоль траекторий частиц жидкости. Указанные инварианты представлены в виде функций от функции Ламберта. Проведён анализ качественного поведения инвариантов в различных режимах деформирования.

Ключевые слова: уравнения полимеров FENE, производная Ли, инварианты тензора конформации, интегрирование уравнений.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. П. Чупахин, Е. С. Стецяк, Д. С. Чутков. Динамика тензора конформации в вязкоупругих моделях полимеров FENE // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 686–700, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700).

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие среды, встречающиеся в природе, особенно растворы полимеров, обладают сложной реологией, проявляя вязкоупругие свойства. Следовательно, при взаимодействии они проявляют свойства как жидкостей, так и твёрдых (упругих) тел. К числу важнейших сред с такими свойствами относятся кровь, а также пасты, гели и различные природные жидкости, такие как лава и лавинный материал. Математическое описание таких сред значительно сложнее ньютоновской гидродинамики. Математическая гидродинамика неньютоновских сред — интенсивно развивающееся научное направление в наши дни [13, 15, 19, 26].

Чтобы проиллюстрировать сложности изучения моделей вязкоупругих сред, кратко опишем основные возникающие особенности. В гидродинамике ньютоновские жидкости характеризуются линейной зависимостью между напряжениями $\boldsymbol{\tau}$ и скоростью деформации $\mathbf{E}$: $\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_s \mathbf{E}$, где $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ — тензор скорости деформации в жидкости, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ — скорость жидкости. Постоянный коэффициент η_s называется вязкостью.

Вязкоупругие жидкости реагируют на очень быструю сдвиговую нагрузку как упругое твёрдое тело, а на медленную — как вязкая жидкость. Реологическое поведение также зависит от скорости нагружения $\dot{\boldsymbol{\tau}}_p$. Характеристическое реологическое соотношение имеет вид

$$\lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}}_p + \boldsymbol{\tau}_p = 2\eta_p(\mathbf{E} + \lambda_2 \dot{\mathbf{E}}), \quad (1.1)$$

где величины λ_1 и λ_2 называются временами релаксации напряжений $\boldsymbol{\tau}_p$ и скоростей деформаций $\mathbf{E}$, а точка обозначает изменение величины во времени. К этому типу моделей относятся классические модели Фрёлиха—Сака и Максвелла [13, 15, 19, 26]. Дальнейшее развитие реологии сложных сред, основанное на статистической механике, привело к построению макроскопических уравнений, основанных на принципах статистической механики. В их основе лежит модель, описывающая движение малых частиц, размеры которых достаточно велики по сравнению с молекулярными, но достаточно малы, чтобы участвовать в тепловом движении, т. е. они совершают как макро-, так и микроброуновское движение.

Это модели движения суспензий и полимеров [7, 8, 15]. В растворах полимеров присутствуют протяжённые полимерные цепи с изменяющейся во времени геометрией, обладающие также вязкоупругими свойствами. Адекватное описание таких реологически сложных сред предполагает использование принципа материальной объективности, согласно которому математические модели должны быть инвариантны относительно ортогональных преобразований координат $\boldsymbol{\Omega}$ и сдвигов $\mathbf{a}$, являющихся функциями от времени [13, 28].

Это требование привело к необходимости замены частных производных в моделях реологически сложных сред на более сложный объект — производную Ли векторного поля $\mathbf{v}$ [22, 28, 30, 32]. В физике полимеров сегодня существует большое количество моделей, использующих производные Ли по различным векторным полям и различающихся моделями полимерных цепей и механизмами их взаимодействия с потоком несущей жидкости [22, 28]. Исследованию математических моделей вязкоупругих сред в целом и полимерных растворов посвящено множество работ. Не претендуя на полноту обзора, упомянем работы последних лет, посвящённые исследованию начально-краевых задач [33], поиску точных решений [6] и изучению качественных свойств решений, в частности, устойчивости [1, 4, 9].

Настоящая работа оригинальна по своему подходу. В ней исследуется свойство тензора конформации $\mathbf{C}$, характеризующего динамику и геометрию полимерной фазы в течении. Изучение тензора $\mathbf{C}$ потребовало использования алгебраических и геометрических методов тензорной алгебры [13] и аппарата производной Ли [32].

Взаимодействие гибких и растяжимых полимерных цепей с потоком несущей жидкости приводит к ряду экспериментально наблюдаемых явлений: снижению сопротивления, упругой турбулентности и изменению теплопередачи в конвективных процессах [14]. Тензор конформации $\mathbf{C}$ связывает элементы микро- и макроскопического моделирования. Кратко объясним его происхождение. Полимер в потоке жидкости определяется совокупностью полимерных цепей, состоящих из упругих связей (нитей), соединяющих шарики (молекулы). Геометрия цепи описывается вектором $\mathbf{r} = (r^i)$, соединяющим концы полимерной конфигурации. Микроскопическая модель динамики вектора $\mathbf{r}$ описывается уравнением Ланжевена

$$\mathbf{r}_t = -\frac{1}{2\lambda}f(\mathbf{r})\mathbf{r} + \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\frac{L^2}{\lambda}}\mathbf{W}(t), \quad (1.2)$$

где $\mathbf{u}$ — векторное поле скорости, λ — время релаксации полимера, L^2 — параметр, характеризующий флуктуации, а $\mathbf{W}(t)$ — независимый винеровский процесс (белый шум, характерный для броуновского движения). Функция $f(\mathbf{r})$ характеризует растяжимость полимера, причём максимальному значению этой величины соответствует $L^2 = |\mathbf{r}_{max}|^2$. После усреднения уравнения (1.1) методами статистической механики по всему ансамблю с использованием исчисления Ито выводится макроскопическое уравнение для тензора конформации $\mathbf{C} = \langle \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{W}(t)}$, имеющее вид

$$\mathbf{C}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{C} - (\nabla\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot (\nabla\mathbf{u}) + \mathcal{E}(c_1)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{\lambda\mathcal{Z}(c_1)}[\mathcal{F}(c_1)\mathbf{C} - \mathcal{G}(c_1)\mathbf{I}], \quad (1.3)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор 3×3 .

Тензор $\mathbf{C}$ в силу своего построения дважды контравариантен: $\mathbf{C} = (c^{ij})$ ($i, j < 1, 2, 3$), симметричен: $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$, дифференцируем и положительно определён.

Обсудим отдельные члены уравнения (1.3). Первые четыре члена представляют собой производную Ли $L_v\mathbf{C} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ вдоль траектории движения жидкой частицы тензора $\mathbf{C}$. Положительные безразмерные функции $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}$, зависящие от первого инварианта $c_1 = \text{tr}\mathbf{C} = \sum C^{ii}$ тензора конформации, определяются параметрами и структурой индивидуальной полимерной

модели. Величина c_1 в физике полимеров также интерпретируется как квадрат расстояния (вытянутости цепи) между концами (бусинами) полимерной цепи, усреднённый по всем состояниям (конформациям) и нормированный на равновесное состояние.

Модель (1.3) известна в современной литературе как *конечно растяжимая нелинейно упругая модель* (*finite extensible nonlinear elastic, FENE*) [17, 21]. Член $\mathcal{E}(c_1)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E})$ в формуле (1.3) характеризует сопротивление вращению полимерной молекулы в потоке. Функция $\mathcal{Z}(c_1)$ учитывает зависящее от конформации сопротивление изменению геометрии полимерной структуры. Наконец, функции $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ определяют конечную растяжимость полимерной молекулы и её упругие свойства. В работе [16] представлена таблица значений этих функций для восьми распространённых моделей вязкоупругих полимеров. В данной работе мы подробно рассмотрим две из них: FENE-CR [21] и FENE-CD [18].

Как уже отмечалось, влияние полимерных молекул и полимерных цепей на течение раствора определяется тензором напряжений $\boldsymbol{\tau}_p$, который связан с деформацией микроструктуры полимерной фазы. Деформация микроструктуры характеризуется тензором конформации $\mathbf{C}$, а их связь задаётся уравнением состояния

$$\boldsymbol{\tau}_p = \frac{\eta_p}{\lambda} [\mathcal{F}(c_1)\mathbf{C} - \mathcal{G}(c_1)\mathbf{I}]. \quad (1.4)$$

Тензор напряжений реологической модели раствора полимера в потоке вязкой жидкости представляется в виде суммы двух компонент: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p$, где $\boldsymbol{\tau}_s$ — тензор напряжений, соответствующий растворителю, а $\boldsymbol{\tau}_p$ — тензор напряжений полимера. Растворитель обычно предполагается ньютоновской жидкостью с постоянной вязкостью, $\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_s \mathbf{E}$. В формуле (1.4) постоянный коэффициент η_p характеризует вклад полимера в сдвиговую вязкость при нулевой скорости сдвига, λ — время релаксации, а функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ описаны выше.

В данной работе описывается динамика инвариантов тензора конформации $\mathbf{C}$ для моделей FENE-CR и FENE-CD, а также интегрируются уравнения динамики (1.3) тензора $\mathbf{C}$ для сдвиговых течений в квадратуре. Исследовано поведение инвариантов и показано существование двух режимов поведения. Представленная работа является расширенной и дополненной версией заметки [10].

2. Производная Ли

В связи с важной ролью производной Ли и её спецификой в механике сплошных сред, мы приводим описание конструкции этого понятия, следуя [20, 27]. Производная Ли возникает в реологических задачах в [28], её применение — в численном моделировании задач механики полимеров [12]. Приложения производных Ли различных векторных полей в механике твёрдого тела рассматриваются в [24].

Движение континуума описывается $\mathbb{C}^2$ -диффеоморфизмами $\boldsymbol{\varphi}_t$, зависящими от времени как от параметра: $\mathbf{X} \in D_0 \rightarrow \mathbf{x} \in D_t$, отображающими референтную область D_0 лагранжеских переменных $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)^T$ в область D_t эйлеровых переменных $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$, занимаемую континуумом в момент времени t . Линейное касательное отображение $\mathbf{F}$, индуцированное $\boldsymbol{\varphi}_t$, определяется как

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}}.$$

Скорость среды $\mathbf{u}$ в D_t получается путём дифференцирования этого соотношения по времени.

$$\left[\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right] = 0, \quad \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})) = \frac{d(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{d(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F},$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{F}^{-1}}{dt} = -\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Движение континуума можно также описать обратимым дифференцируемым отображением Φ в четырёхмерном пространстве-времени $\mathbf{W}$ следующим образом:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{Z}), \quad \text{где} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{\varphi}_t \end{pmatrix} \in \mathbf{W}.$$

Пространство $W_0 \ni z = (t, \mathbf{X})^T$ является соответствующим референтным пространством. В дифференцируемом многообразии пространства-времени $\mathbf{W}$ скорость среды задаётся 4-векторами $\mathbf{V} = (1, \mathbf{u})^T$, где $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)^T$.

В каждой точке $\mathbf{W}$ 4-вектор скорости $\mathbf{V}$ порождает локальную однопараметрическую группу преобразований Ли, определяемую отображением

$$(h, z) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{O} \rightarrow \Theta(h, z) \in \mathbf{W},$$

где $\Theta(h, z) = \begin{pmatrix} h+t \\ \varphi_{h+t}(\varphi_t^{-1}(x)) \end{pmatrix}$ и $\mathcal{O}$ — открытое множество в $\mathbf{W}$, а ϵ — положительное действительное число. Поле скорости $\mathbf{V}$ — инфинитезимальный оператор однопараметрической группы преобразований Ли с порождающим отображением Φ . Обозначим $\Theta_h(z) = \Theta(h, z)$ как отображение, действующее по формуле

$$\Theta_h(z) = \begin{pmatrix} h+t \\ \varphi_{h+t}(\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$$

Образ множества $\mathcal{O}$ при отображении Θ_h обозначается как $\mathcal{O}_h = \Theta_h(\mathcal{O})$. Рассмотрим тензорное поле $\mathbf{T}^{p,q}$, p раз контравариантное и q раз ковариантное, заданное на векторах касательного пространства к $\mathbf{W}$ и формах кокасательного пространства соответственно (на векторах и ковекторах). Это тензор в векторном пространстве $\mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W})$. Каждое тензорное поле $\mathbf{u}$, определённое на $\mathbf{W}$

$$z \in \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{T}(z) \in \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W})$$

связано с локально определённым тензорным полем $\mathbf{T}_h(z) = \Theta_h(\mathbf{T}(z))$. Обозначим $\mathbf{T}_h = \Theta_h(\mathbf{T})$.

Определение 2.1. Производная Ли тензорного поля $\mathbf{T}$ по векторному полю, определяемому оператором $\mathbf{v}$, задаётся как

$$L_v \mathbf{T} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Theta_h(\mathbf{T}(z)) - \mathbf{T}(z)}{h}. \quad (2.1)$$

В механике сплошных сред производную Ли удобно вычислять в четырёхмерном пространстве $\mathbf{W}_0$. Пусть Ψ обозначает отображение, обратное к Φ , т. е. $\Psi = \Phi^{-1}$. Пусть $\mathbf{T}_0(\mathbf{Z})$ — образ $\mathbf{T}(z)$ при отображении Ψ , что соответствует преобразованию Φ . Тогда формула (2.1), определяющая $L_v \mathbf{T}$, примет вид

$$L_v \mathbf{T}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Psi(\Theta_h(\mathbf{T}(z))) - \Psi(\mathbf{T}(z)))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \Phi \left(\frac{\mathbf{T}_0(t+h, \mathbf{X}) - \mathbf{T}_0(t, \mathbf{X})}{h} \right).$$

Тогда получаем $L_v \mathbf{T} = \Phi \left(\frac{d\mathbf{T}_0(t, \mathbf{X})}{dt} \right)$.

Следовательно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}(z) \in \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{v}_0 \in \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W}_0) \\ \downarrow L_v & & \downarrow \frac{d}{dt} \\ L_v \mathbf{T}(z) & \xleftarrow{\Phi} & \frac{d\mathbf{T}_0(t, \mathbf{X})}{dt} \end{array}$$

Важным свойством производной Ли, используемой в данной работе, является то, что она сохраняет тип тензора: $L_v : \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W}) \rightarrow \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W})$.

В механике сплошной среды важными объектами, связанными с производной Ли, являются тензоры, которые движутся вместе с потоком [3, 11].

Определение 2.2. Тензорное поле $\mathbf{T}$ в $\mathbf{W}$ движется вместе с потоком тогда и только тогда, когда его образ в пространстве отсчета $\mathbf{T}_0 \in \mathbf{W}_0$ не зависит от времени.

Классическое утверждение связывает такие тензоры с тензорами, постоянными относительно производной Ли.

Теорема 2.1 (см. [20]). Тензорное поле движется вместе с потоком (т. е. поле переносится потоком без деформации) тогда и только тогда, когда производная Ли этого тензорного поля равна нулю.

Приведём также формулу в координатах для действия в $\mathbb{R}^n(\mathbf{x})$ производной Ли $L_{\mathbf{v}}$ вдоль векторного поля $\mathbf{v} = \xi^k(x)\partial_k$ ($k = \overline{1, \dots, n}$) на тензорном поле $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, которое контравариантно p раз и ковариантно q раз [32]:

$$L_{\mathbf{v}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \xi^k \partial_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{k=1}^p T^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial \xi^{i_k}}{\partial x^{i_k}} - \sum_{k=1}^q T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_q} \frac{\partial \xi^{j_k}}{\partial x^{j_k}}, \quad (2.2)$$

где «крышка» над индексом обозначает фиктивный индекс, изменяющийся от 1 до n .

В теории непрерывных групп преобразований важную роль играет процедура выпрямления векторного поля $\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, порождающего производную Ли $L_{\mathbf{v}}$. Пусть τ — параметр вдоль траектории векторного поля $\mathbf{v}$, выбранный в качестве канонического параметра группы Ли непрерывных преобразований [5, 23, 29]. Такое преобразование, т. е. замена параметра, всегда может быть выполнено локально для области $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{O}$. Здесь интервал $(-\epsilon, \epsilon)$ содержит значение параметра, соответствующего тождественному преобразованию группы, т. е. начальные данные для соответствующего уравнения Ли, связывающего инфинитезимальный оператор $\mathbf{v}$ и порождающее отображение Φ , приведённые в разделе 2.

3. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА КОНФОРМАЦИИ

Вернемся теперь к реологическому уравнению (1.3) для тензора конформации $\mathbf{C}(t, \mathbf{x}) = (C^{ij}(t, \mathbf{x}))_{i,j=\overline{1, \dots, n}}$, где $C^{ij} = C^{ji}$. Заметим, что первые четыре члена в левой части этого уравнения представляют собой производную Ли $L_{\mathbf{v}}$ тензора $\mathbf{C}$ по векторному полю $\mathbf{v} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, где $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)^T$ — скорость жидкости, которая является функцией времени t и пространственных координат $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$. Согласно (2.2), имеем

$$L_{\mathbf{v}} C^{ij} = \partial_t C^{ij} + u^k \frac{\partial C^{ij}}{\partial x^k} - C^{kj} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - C^{ik} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Выведем выражения для инвариантов c_i ($i = 1, 2, 3$) тензора конформации $\mathbf{C}$ как функций параметра времени t вдоль траектории производного векторного поля Ли $\mathbf{v} = L_{\mathbf{v}}$.

Матрица, полученная из тензора $\mathbf{C}$ понижением одного индекса, $C_j^i = g_{ik} C^{kj}$, удовлетворяет уравнению Гамильтона—Кэли [2]. Поскольку в данном случае метрика предполагается равной единице, подробности перехода от дважды контравариантного тензора конформации к матрице при выводе следующих уравнений будут опущены. Имеем

$$\mathbf{C}^3 - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2 \mathbf{C} - c_3 \mathbf{I} = 0, \quad (3.1)$$

где $c_1 = \text{tr} \mathbf{C}$, $c_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2]$, $c_3 = \det \mathbf{C}$ обозначают инварианты тензора $\mathbf{C}$. В этом уравнении степени $\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3$ представляют собой соответствующие свертки тензоров $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^3 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^2$.

Уравнения (1.3) и (3.1) дают систему

$$\begin{cases} L_{\mathbf{v}} \mathbf{C} = -\frac{1}{\lambda \mathcal{Z}(c_1)} [\mathcal{F}(c_1) \mathbf{C} - \mathcal{G}(c_1) \mathbf{I}], \\ \mathbf{C}^3 - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2 \mathbf{C} - c_3 \mathbf{I} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Условия совместности системы (3.2) порождают уравнения для инвариантов c_i ($i = 1, 2, 3$) как функций параметра времени t вдоль траектории движения частиц жидкости. Выведем эти уравнения для некоторых реологических моделей полимеров на основе общих формул.

4. РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ FENE-CR И FENE-CD

Рассмотрим модели полимеров FENE-CR [21] и FENE-CD [18], которые соответствуют определённым наборам функций.

Для модели полимера FENE-CR [21] имеем

$$\mathcal{Z} = 1, \quad \mathcal{F}(c_1) = \mathcal{G}(c_1) = \frac{1}{1 - c_1/L^2}, \quad (4.1)$$

где $L^2 \gg 1$ — максимальная длина цепи, так что $c_1/L^2 < 1$. Обозначим

$$g(c_1) = \frac{-1}{\lambda} \mathcal{F}(c_1) = \frac{-1}{\lambda(1 - c_1/L^2)}. \quad (4.2)$$

Для модели полимера FENE-CD [18] имеем

$$\mathcal{Z} = 1 - \kappa + \kappa\sqrt{c_1/3}, \quad \mathcal{F}(c_1) = \mathcal{G}(c_1) = \frac{1}{1 - c_1/L^2}, \quad (4.3)$$

Соответствующая функция выглядит следующим образом:

$$g(c_1) = \frac{-\mathcal{F}(c_1)}{\lambda \mathcal{Z}(c_1)} = \frac{-1}{\lambda(1 - c_1/L^2)(1 - \kappa + \kappa\sqrt{c_1/3})}, \quad (4.4)$$

где, как и прежде, $c_1/L^2 < 1$, а κ — положительный параметр.

Переопределённая система уравнений (3.2) принимает единообразный вид для обеих моделей FENE:

$$\begin{cases} L_v \mathbf{C} = g(c_1)(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \\ \mathbf{C}^3 - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2 \mathbf{C} - c_3 \mathbf{I} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Применим производную Ли L_v к уравнению Гамильтона—Кэли, второму уравнению системы (4.5). Подставим значение производной Ли L_v из первого уравнения системы (4.5) в полученное дифференциальное уравнение. Фундаментальным аспектом этого алгоритма является то, что производная Ли $L_v \mathbf{C}$ является тензором того же типа, что и сам тензор $\mathbf{C}$. Это отличает производную Ли как от частных, так и от ковариантных производных, которые не сохраняют тип тензора при действии на него. Для краткости обозначим $\mathbf{C}' = L_v \mathbf{C}$. Применение производной Ли к уравнению Гамильтона—Кэли даёт дифференциальное уравнение:

$$3\mathbf{C}^2 \mathbf{C}' - c_1 \mathbf{C} \mathbf{C}' + c_2 \mathbf{C}' - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2' \mathbf{C} - c_3' \mathbf{I} = 0. \quad (4.6)$$

При выводе уравнения (4.6) учтено, что $\mathbf{C}'$ коммутирует со степенями $\mathbf{C}$, поскольку $\mathbf{C}'$ выражается полиномом от $\mathbf{C}$ (см. [2]). Мы предполагаем, что параметр группы, соответствующий производной Ли, каноничен, так что $L_v \mathbf{I} = 0$ (см. [5]).

Подставляя выражение $\mathbf{C}' = L_v \mathbf{C}$ из (4.5) в уравнение (4.6), получаем алгебраическое уравнение третьей степени для тензора $\mathbf{C}$:

$$3g\mathbf{C}^3 - (c_1' + 3g + 2gc_1)\mathbf{C}^2 + (c_2' + 2gc_1 + gc_2)\mathbf{C} - (c_3' + gc_2)\mathbf{I} = 0. \quad (4.7)$$

Предположим, что тензор $\mathbf{C}$ является тензором общего положения, т. е. единственным алгебраическим уравнением третьей степени для $\mathbf{C}$ является уравнение Гамильтона—Кэли. Полагая $g \neq 0$, получаем, что уравнение (4.7) совпадает с уравнением Гамильтона—Кэли для тензора $\mathbf{C}$ с точностью до мультипликативного множителя. Записывая условия пропорциональности соответствующих коэффициентов, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений для инвариантов:

$$\begin{cases} c_1' = g(c_1 - 3), \\ c_2' = 2g(c_2 - c_1), \\ c_3' = g(3c_3 - c_2), \end{cases} \quad (4.8)$$

где $g = g(c_1)$ имеет вид (4.2) или (4.4). Система (4.8) представляет собой условия совместности переопределённой системы (4.5). Действительно, из системы (4.8) все функции c_i ($i = 1, 2, 3$) однозначно определяются по заданным начальным условиям. Более того, для них будут получены явные формулы. Таким образом, определяются значения функций, при которых переопределённая система (4.5) совместна. Дифференциальные следствия более высокого порядка не порождают новых условий совместности, поскольку объединение систем (4.5) и (4.8) совместно.

Теорема 4.1. Система уравнений (4.8) представляет собой условия совместности переопределённой системы (4.5). Система (4.5), (4.8) находится в инволюции, то есть не порождает новых условий совместности.

После выбора канонического параметра, описанного в разделе 2, система (4.8) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $c_i = c_i(\tau, \mathbf{X})$ ($i = 1, 2, 3$) в референтном пространстве W_0 : $L_v = \partial_\tau$

Система (4.8) интегрируется в квадратурах. В первом уравнении системы (4.8) переменные разделяются, и решение имеет вид

$$\int \frac{(c_1 - L^2)}{c_1 - 3} dc_1 = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0),$$

где τ_0 — константа интегрирования. Предположим, что начальные условия при $\tau = \tau_0$ соответствуют значению $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, так что $c_1 - 3 \neq 0$ при $\tau > \tau_0$. Интеграл в левой части этого уравнения вычисляется в элементарных функциях. Для модели FENE-CR решение определяется по формуле

$$(3 - L^2) \ln |c_1 - 3| + c_1 = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0), \quad (4.9)$$

где c_1 определяется как неявная функция переменной τ . Функция $c_1 = c_1(\tau)$ называется *функцией Ламберта* [31].

Для модели FENE-CD решение дается более громоздкой формулой:

$$(1 - \varkappa) [c_1 + (3 - L^2) \ln |c_1 - 3|] + \frac{\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\frac{2c_1 \sqrt{c_1}}{3} + 2(3 - L^2) \sqrt{c_1} + (3 - L^2) \ln \left| \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{3}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{3}} \right| \right] = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0). \quad (4.10)$$

Поскольку переменная c_1 не может быть явно выражена как функция τ из уравнений (4.9) и (4.10), оставшиеся два уравнения системы (4.8) интегрируются путём нахождения инвариантов c_2 и c_3 как функций инварианта c_1 .

Разделив второе и третье уравнения системы (4.8) на первое, получим линейную систему относительно функций c_α ($\alpha = 2, 3$):

$$\begin{cases} \frac{dc_2}{dc_1} = \frac{2(c_2 - c_1)}{c_1 - 3}, \\ \frac{dc_3}{dc_1} = \frac{3c_3 - c_2}{c_1 - 3}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Система (4.11) интегрируема в элементарных функциях.

Теорема 4.2. *Инварианты тензора конформации $\mathbf{C}$ в модели FENE-CR (4.1), (4.2) как функции параметра τ вдоль траектории жидкой частицы определяются следующей системой неявных уравнений для $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(c_1)$, $c_3 = c_3(c_1)$:*

$$\begin{cases} (3 - L^2) \ln |c_1 - 3| + c_1 = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0), \\ c_2 = \alpha_1(c_1 - 3)^2 + 2c_1 - 3, \\ c_3 = \alpha_2(c_1 - 3)^3 + \alpha_1(c_1 - 3)^2 + c_1 - 2, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $\tau_0, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные константы относительно параметра τ . При этом инварианты, определяемые формулами (4.12), зависят от координат $\mathbf{X}$ референтного пространства W_0 как от параметров.

Инварианты тензора конформации $\mathbf{C}$ в модели FENE-CD (4.3), (4.4) как функции параметра τ вдоль траектории жидкой частицы определяются следующей системой неявных уравнений $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(c_1)$, $c_3 = c_3(c_1)$:

$$\begin{cases} (1 - \varkappa) [c_1 + (3 - L^2) \ln |c_1 - 3|] + \frac{\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\frac{2c_1 \sqrt{c_1}}{3} + 2(3 - L^2) \sqrt{c_1} + (3 - L^2) \ln \left| \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{3}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{3}} \right| \right] = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0), \\ c_2 = \alpha_1(c_1 - 3)^2 + 2c_1 - 3, \\ c_3 = \alpha_2(c_1 - 3)^3 + \alpha_1(c_1 - 3)^2 + c_1 - 2, \end{cases} \quad (4.13)$$

где $\tau_0, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные константы. При этом инварианты, определяемые формулами (4.13), зависят от координат $\mathbf{X}$ референтного пространства $\mathbf{W}_0$ как от параметров.

Формулы (4.12), (4.13) для инвариантов тензора конформации $\mathbf{C}$ дают важную информацию о поведении полимерных структур в растворе. Они характеризуют динамику этих структур вдоль траектории движения частиц жидкости. В физике полимеров инварианты c_i интерпретируются как геометрические параметры полимерной структуры: инвариант c_1 характеризует её растяжимость, c_2 — площадь, а c_3 — объём. Качественное поведение этих функций в клинически важной задаче эмболизации патологических сосудистых образований [2] характеризует эффективность герметизации и окклюзии дефектного сосудистого узла. Отметим, что формулы, выражающие инварианты $c_\alpha = c_\alpha(c_1)$, $\alpha = 2, 3$ для моделей (4.1), (4.3), совпадают. Модели различаются зависимостью $c_1 = c_1(\tau)$. В следующем разделе работы исследуется качественное поведение динамики инвариантов c_i ($i = 1, 2, 3$) для модели FENE-CR.

5. КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА КОНФОРМАЦИИ В МОДЕЛИ FENE-CR

Многозначная функция $c_1 = c_1(\tau)$ имеет три ветви (рис. 1), которые можно выразить через главную ветвь и ветвь -1 функции Ламберта $W: z = W(ze^z)$. Термины, характеризующие ветви функции, взяты из [31].

$$c_1(\tau) = \begin{cases} (3 - L^2) W_0 \left(-\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \\ (3 - L^2) W_0 \left(\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \\ (3 - L^2) W_{-1} \left(\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \quad L^2 > 3, \\ (3 - L^2) W_{-1} \left(-\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \quad L^2 < 3, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $l = \frac{L^2}{\lambda}$. Эти ветви обозначены римскими цифрами I, II, III на рис. 1.

При $L^2 < 3$ ветвь I является ветвью -1 функции Ламберта, её значения лежат в интервале $(0; L^2)$, она монотонно возрастает и имеет асимптоту при $t \rightarrow -\infty$ с наклоном $\arctg(l)$.

Ветвь II является главной ветвью функции Ламберта, её значения лежат в интервале $(L^2; 3)$, она монотонно убывает и $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} c_1(\tau) = 3$.

Ветвь III — главная ветвь функции Ламберта, соответствующая выражению под модулем с обратным знаком. Её значения лежат на луче $(3; +\infty)$, функция монотонно возрастает и имеет асимптоту при $t \rightarrow +\infty$ с наклоном, равным $\arctg(l)$.

При $L^2 > 3$ ветвь I является главной ветвью функции Ламберта, её значения лежат в интервале $(0; 3)$, она монотонно возрастает, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} c_1(\tau) = 3$, и имеет асимптоту при $t \rightarrow -\infty$ с углом наклона, равным $\arctg(l)$.

Ветвь II также является главной ветвью функции Ламберта и отличается от ветви I выбором знака в выражении под модулем. Её значения лежат в интервале $(3; L^2)$, она монотонно убывает и $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} c_1(\tau) = 3$.

Ветвь III является ветвью -1 функции Ламберта, и её значения лежат на луче $(L^2; +\infty)$, она монотонно возрастает и имеет асимптоту при $t \rightarrow +\infty$ с наклоном $\arctg(l)$.

Таким образом, функция Ламберта (5.1) имеет два определяющих параметра. Параметр L^2 определяет границу между главной ветвью и ветвью -1 W -функции Ламберта, а параметр l определяет тангенс угла наклона асимптот ветвей I и III. При L^2 , близких к 3, ветви приближаются к прямым $c_1 = 3$ и $c_1 = l(\tau - \tau_0)$. Функция (5.1) многозначна в соответствующей области.

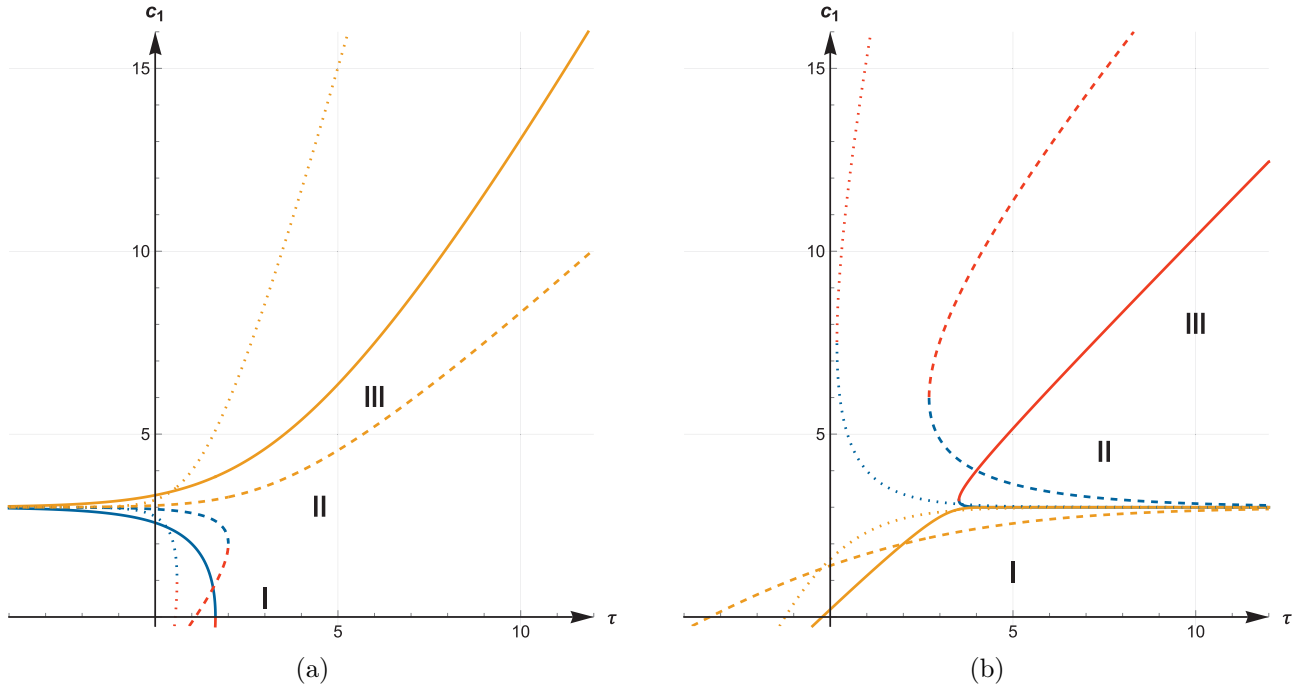


Рис. 1. График функции $c_1(\tau)$: (a) для $L^2 < 3$, (b) для $L^2 > 3$. Разные ветви обозначены разными цветами, кривые для разных параметров l и L^2 показаны разной штриховкой.

FIG. 1. Graph of the function $c_1(\tau)$: (a) for $L^2 < 3$, (b) for $L^2 > 3$. Different branches are marked with different colors, curves for different parameters l and L^2 are separated by different shading.

6. ДИНАМИКА ИНВАРИАНТОВ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^3(c_1, c_2, c_3)$

Динамическая система (4.8) в терминах переменных (c_i) принимает вид

$$\begin{cases} (c_1 - L^2) \frac{dc_1}{d\tau} = l(c_1 - 3), \\ (c_1 - L^2) \frac{dc_2}{d\tau} = 2l(c_2 - c_1), \\ (c_1 - L^2) \frac{dc_3}{d\tau} = l(3c_3 - c_2), \end{cases} \quad (6.1)$$

где явно выделены определяющие параметры L^2 и l .

Система (6.1) имеет две особые точки, лежащие на плоскостях $c_1 = 3$ и $c_1 = L^2$. Первая из них — регулярная особая точка. Плоскость $c_1 = L^2$ является особым многообразием для системы (6.1), поскольку производные всех инвариантов $\frac{dc_i}{d\tau} \rightarrow \infty$ при $c_1 \rightarrow L^2$.

Исследуем поведение решений $c_i = c_i(\tau)$ системы (6.1) вблизи этих особенностей.

Особая точка на плоскости $c_1 = 3$ имеет координаты $c_1 = 3, c_2 = 3, c_3 = 1$. Она является узлом, отталкивающим при $L^2 < 3$ и притягивающим при $L^2 > 3$.

Плоскость $c_1 = L^2$ является особым многообразием всей системы. Поведение траекторий динамической системы (6.1) на плоскости $c_1 = L^2$ удобно понять, перейдя к новым переменным: $(c_1, c_2, c_3) \rightarrow (y_1, y_2, y_3)$, по формулам

$$\begin{cases} y_1 = c_1 - 3, \\ y_2 = c_2 - 2c_1 + 3, \\ y_3 = c_3 - c_2 + c_1 - 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

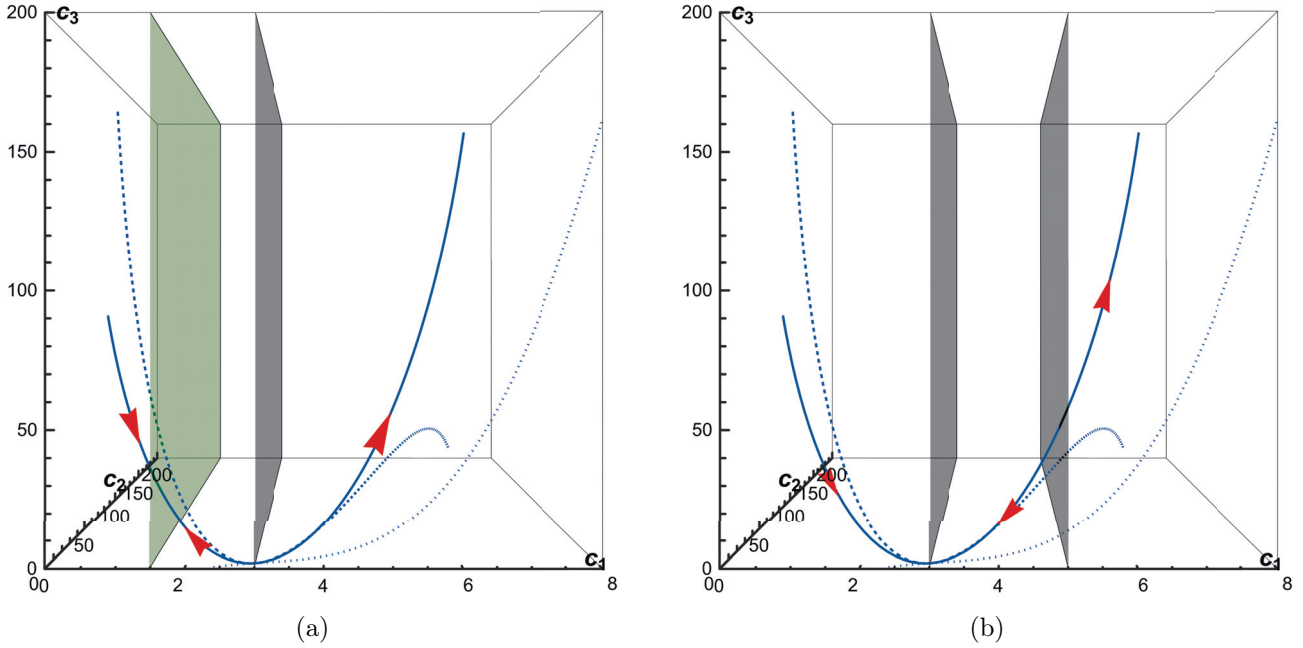


Рис. 2. Поведение траекторий динамической системы: (a) при $L^2 < 3$, (b) при $L^2 > 3$, плоскости $c_1 = 3$ и $c_1 = L^2$. Кривые для разных начальных данных показаны разной штриховкой.

FIG. 2. Behavior of the trajectories of the dynamic system: (a) for $L^2 < 3$, (b) for $L^2 > 3$, planes $c_1 = 3$ and $c_1 = L^2$. Curves for different initial data are separated by different shading.

Это соответствует переходу от тензора $\mathbf{C}$ к тензору $\mathbf{Y} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$. В этих переменных y_1 по-прежнему определяет W -функцию Ламберта, а формулы для c_2 и c_3 принимают особенно простой вид:

$$y_2 = \alpha_1(y_1)^2, \quad y_3 = \alpha_2(y_1)^3, \quad (6.3)$$

где α_1 и α_2 — функции переменных X . Следовательно, уравнение

$$y_2^3 = \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^2} y_3^2 \quad (6.4)$$

определяет полукубическую параболу Нейла, особенность типа «клюв», в плоскости $y_1 = \text{const}$, т. е. при фиксированном значении независимой переменной. Траектории приближаются к плоскости $c_1 = L^2$, «протыкая» её в точке, в которой они имеют бесконечные производные разных знаков по обе стороны от плоскости.

Поведение траекторий системы (6.1) при различных значениях параметра L^2 показано на рис. 2. Отметим, что уравнение (6.4) определяет интеграл динамической системы (6.1).

Функции $y_i = y_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) (6.1), (6.2) определяют кривую Σ в пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{y})$, кривизна k и кручение κ которой задаются формулами

$$k = 2\sqrt{\frac{9\alpha_2^2 y_1^2 + \alpha_1^2(1 + 9\alpha_2^2 y_1^4)}{(1 + 4\alpha_1^2 y_1^2 + 9\alpha_2^2 y_1^4)^3}}, \quad (6.5)$$

$$\kappa = \frac{3\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2 y_1^2 + 9\alpha_1^2 \alpha_2^2 y_1^4}. \quad (6.6)$$

Приведём расчёты, подтверждающие то, что точка $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$ является особой точкой типа «узел» для системы (6.1). Линеаризуем систему, обозначив правые части через F_i :

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{d\tau} = \frac{l(c_1 - 3)}{(c_1 - L^2)} = F_1, \\ \frac{dc_2}{d\tau} = \frac{2l(c_2 - c_1)}{(c_1 - L^2)} = F_2, \\ \frac{dc_3}{d\tau} = \frac{l(3c_3 - c_2)}{(c_1 - L^2)} = F_3. \end{cases} \quad (6.7)$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial c_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial c_1} &= \frac{l(3 - L^2)}{(c_1 - L^2)^2}, & \frac{\partial F_1}{\partial c_2} &= \frac{\partial F_1}{\partial c_3} = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial c_1} &= \frac{2l(L^2 - c_2)}{(c_1 - L^2)^2}, & \frac{\partial F_2}{\partial c_2} &= \frac{2l}{c_1 - L^2}, & \frac{\partial F_2}{\partial c_3} &= 0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial c_1} &= \frac{l(c_2 - 3c_3)}{(c_1 - L^2)^2}, & \frac{\partial F_3}{\partial c_2} &= \frac{-l}{c_1 - L^2}, & \frac{\partial F_3}{\partial c_3} &= \frac{3l}{c_1 - L^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда линеаризация имеет вид:

$$dF = l \begin{pmatrix} \frac{3 - L^2}{(c_1 - L^2)^2} & 0 & 0 \\ \frac{2(L^2 - c_2)}{(c_1 - L^2)^2} & \frac{2}{c_1 - L^2} & 0 \\ \frac{(c_2 - 3c_3)}{(c_1 - L^2)^2} & \frac{-1}{c_1 - L^2} & \frac{3}{c_1 - L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ dc_3 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

В особой точке $(3, 3, 1)$ собственные значения являются диагональными элементами матрицы (6.9):

$$dF|_{(3,3,1)} = l \begin{pmatrix} \frac{1}{3 - L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3 - L^2} & \frac{2}{3 - L^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3 - L^2} & \frac{3}{3 - L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ dc_3 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$\mu_1 = \frac{l}{3/L^2 - 1}, \quad \mu_2 = \frac{2l}{3/L^2 - 1}, \quad \mu_3 = \frac{3l}{3/L^2 - 1}. \quad (6.11)$$

Поскольку $l > 0$, то особая точка $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$ является притягивающим узлом при $L^2 > 3$ и отталкивающим узлом при $L^2 < 3$.

Проведённый в разделах 5 и 6 анализ показывает, что формулы (4.12), определяющие решение задачи динамики конформационных тензорных инвариантов, обуславливают их содержательное поведение, не противоречащее их физическому смыслу.

Физическая интерпретация полученных решений предполагается предметом отдельной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блохин А. М., Ткачёв Д. Л. Неустойчивость по Ляпунову стационарных течений полимерной жидкости в канале с перфорированными стенками // Мат. сб. — 2022. — 213, № 3. — С. 3–20. — DOI: [10.4213/sm9507](https://doi.org/10.4213/sm9507).
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1986.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 2010.
4. Ляпидевский В. Ю., Неверов В. В., Кармушин С. Р. Гиперболические модели нестационарных течений вязкоупругой среды // Прикл. мех. техн. физ. — 2024. — 65, № 5. — С. 117–129. — DOI: [10.15372/PMTF202415483](https://doi.org/10.15372/PMTF202415483).
5. Овсянников Л. В. Аналитические группы. — Новосибирск: НГУ, 1972.
6. Петрова А. Г., Пухначёв В. В., Фроловская О. А. Точные решения уравнений жидкости второго порядка // Тр. МИАН. — 2023. — 322. — С. 180–194. — DOI: [10.4213/tm4336](https://doi.org/10.4213/tm4336).

7. Покровский В. Н. Статистическая механика разбавленных суспензий. — М.: Наука, 1978.
8. Покровский В. Н. Динамика слабо связанных линейных макромолекул// Усп. физ. наук. — 1992. — 162, № 5. — С. 87–121. — DOI: [10.3367/UFNr.0162.199205b.0087](https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199205b.0087).
9. Семисалов Б. В. О точных решениях пуазейлевского типа для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале// Прикл. мех. техн. физ. — 2023. — 64, № 4. — С. 139–151. — DOI: [10.15372/PMTF202315255](https://doi.org/10.15372/PMTF202315255).
10. Чупахин А. П. Интегрирование уравнений для инвариантов тензора конформации в моделях полимеров FENE// Тез. конф. «Уравнения с частными производными и их приложения», Новосибирск, Инст. мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 13–15 октября 2025.
11. Arnold V. I., Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics. — New York: Springer, 1998.
12. Ashley B. S., Rryer T. Discretisation of an Oldroyd-B viscoelastic fluid flow using a Lie derivative formulation// Adv. Comp. Math. — 2025. — 51. — 1. — DOI: [10.1007/s10444-024-10211-x](https://doi.org/10.1007/s10444-024-10211-x).
13. Astarita G., Marrucci G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. — New York: McGraw-Hill, 1974.
14. Benzi R., Ching E. S. C. Polymers in fluid flows// Ann. Rev. Condens. Matter Phys. — 2018. — 9. — С. 163–181. — DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913).
15. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics. — New York: John Wiley & Sons, 1977.
16. Boyko E., Stone H. A. Perspective on the description of viscoelastic flows via continuum elastic dumbbell models// J. Eng. Math. — 2024. — 147. — 5. — DOI: [10.1007/s10665-024-10374-y](https://doi.org/10.1007/s10665-024-10374-y).
17. De Gennes P. G. Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients// J. Chem. Phys. — 1974. — 60. — С. 5030–5042. — DOI: [10.1063/1.1681018](https://doi.org/10.1063/1.1681018).
18. Fuller G. G., Leal L. G. The effects of conformation-dependent friction and internal viscosity on the dynamics of the nonlinear dumbbell model for a dilute polymer solution// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 1981. — 8, № 3-4. — С. 271–310. — DOI: [10.1016/0377-0257\(81\)80026-2](https://doi.org/10.1016/0377-0257(81)80026-2).
19. Godunov S. K., Romenskii E. Elements of continuum mechanics and conservation laws. — New York: Springer, 2003.
20. Gouin H. Remarks on the Lie derivative in fluid mechanics// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 2023. — 150. — 104347. — DOI: [10.1016/j.jnnonlinmec.2022.104347](https://doi.org/10.1016/j.jnnonlinmec.2022.104347).
21. Hinch E. J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows// Phys. Fluids. — 1997. — 20. — С. S22–S30. — DOI: [10.1063/1.861735](https://doi.org/10.1063/1.861735).
22. Hinch J., Harlen O. Oldroyd B, and not A?// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 2021. — 298. — 104668. — DOI: [10.1016/j.jnnfm.2021.104668](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2021.104668).
23. Khesin B., Wendt R. The geometry of infinite-dimensional groups. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2009.
24. Korobeinikov S. N. Family of continuous strain-consistent convective tensor rates and its application in Hooke-like isotropic hyperelasticity// J. Elasticity. — 2021. — 143, № 1. — С. 147–185. — DOI: [10.1007/s10659-020-09808-2](https://doi.org/10.1007/s10659-020-09808-2).
25. Kuianova I., Chupakhin A., Besov A., Gorbatykh A., Kislitsin D., Orlov K., Parshin D. Rheological properties of non-adhesive embolizing compounds — the key to fine-tuning embolization process-modeling in endovascular surgery// Polymers. — 2023. — 15, № 4. — 1060. — DOI: [10.3390/polym15041060](https://doi.org/10.3390/polym15041060).
26. Larson R. G. Constitutive equations for polymer melts and solutions. — Guilford: Butterworths, 1988.
27. Marsden J. F., Hughes T. J. R. Mathematical foundations of elasticity. — New York: Dover Publ., 1983.
28. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1950. — 200. — С. 523–541. — DOI: [10.1098/rspa.1950.0035](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035).
29. Singer I. M., Standberg J. A. The infinite groups of Lie and Cartan. Part I (The transitive groups)// J. Anal. Math. — 1965. — 15. — С. 1–114. — DOI: [10.1007/bf02787690](https://doi.org/10.1007/bf02787690).
30. Stone H. A., Shelley M. J., Rigo P. A note about convected time derivatives for flows of complex fluids// Soft Matter. — 2023. — 19, № 28. — С. 5353–5359. — DOI: [10.1039/d3sm00497j](https://doi.org/10.1039/d3sm00497j).
31. Wolfram Research, Inc. Mathematica. Version 13.1. — Champaign: Wolfram Research, Inc., 2022.
32. Yano K. The theory of Lie derivatives and its applications. — Amsterdam: North-Holland, 1957.
33. Zvyagin V. G., Zvyagin A. V., Orlov V. P., Turbin M. V. Weak solvability of the initial boundary value problem for the Voigt model with a smoothed Jaumann time derivative taking into account the memory of fluid motion// Lobachevskii J. Math. — 2025. — 46, № 3. — С. 1183–1206. — DOI: [10.1134/S1995080225605168](https://doi.org/10.1134/S1995080225605168).

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
 E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru, РИНЦ SPIN-код: 7023-4994, РИНЦ AuthorID: 6500, ResearcherID: AIA-3732-2022, Scopus: 55910100800, ORCID: 0000-0002-9492-5527

Е. С. Стецяк

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
 Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
 Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
 E-mail: stetsyak.e.s@hydro.nsc.ru

Д. С. Чутков

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
 E-mail: d.chutkov@g.nsu.ru

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700)
 EDN: [MKADHS](#)

UDC 514.8 + 532.5.01
Research article

Dynamics of the conformation tensor in viscoelastic FENE polymer models

A. P. Chupakhin^{1,2}, E. S. Stetsyak^{1,2,3}, and D. S. Chutkov²

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia*

³*Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia*

Abstract. In this work, the equations for the dynamics of the invariants of the conformational tensor for FENE polymer solution models are derived and integrated. Explicit formulas for the invariants as functions of the time parameter along the trajectory of fluid particles are obtained. The invariants are represented as functions of the Lambert function. A description of the qualitative behavior of the invariants under different regimes is given.

Keywords: FENE polymer equations, Lie derivative, invariants of the conformational tensor, integration of equations.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. P. Chupakhin, E. S. Stetsyak, D. S. Chutkov, “Dynamics of the conformation tensor in viscoelastic FENE polymer models,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. 71, No. 4, 686–700, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700).

REFERENCES

1. A. M. Blokhin and D. L. Tkachev, “Neustoychivost’ po Lyapunovu statsionarnykh techeniy polimernoy zhidkosti v kanale s perforirovannymi stenkami” [Lyapunov instability of steady flows of a polymer fluid in a channel with perforated walls], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2022, **213**, No. 3, 3–20, DOI: [10.4213/sm9507](https://doi.org/10.4213/sm9507) (in Russian).
2. F. R. Gantmakher, *Teoriya Matrits* [Matrix Theory], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya Fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics], Nauka, Moscow, 2010 (in Russian).

4. V. Yu. Lyapidevskiy, V. V. Neverov, and S. R. Karmushin, “Giperbolicheskie modeli nestatsionarnykh techeniy vyazkouprugoy sredy” [Hyperbolic models of unsteady flows of viscoelastic media], *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.* [Appl. Mech. Tech. Phys.], 2024, **65**, No. 5, 117–129, DOI: [10.15372/PMTF202415483](https://doi.org/10.15372/PMTF202415483) (in Russian).
5. L. V. Ovsyannikov, *Analiticheskie Gruppy* [Analytical Groups], NGU, Novosibirsk, 1972 (in Russian).
6. A. G. Petrova, V. V. Pukhnachev, and O. A. Frolovskaya, “Tochnye resheniya uravneniy zhidkosti vtorogo poryadka” [Exact solutions of second-order fluid equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2023, **322**, 180–194, DOI: [10.4213/tm4336](https://doi.org/10.4213/tm4336) (in Russian).
7. V. N. Pokrovskiy, *Statisticheskaya Mekhanika Razbavlennykh Suspenziy* [Statistical Mechanics of Dilute Suspensions], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
8. V. N. Pokrovskiy, “Dinamika slabo svyazannykh lineynykh makromolekul” [Dynamics of weakly bound linear macromolecules], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1992, **162**, No. 5, 87–121, DOI: [10.3367/UFNr.0162.199205b.0087](https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199205b.0087) (in Russian).
9. B. V. Semisalov, “O tochnykh resheniyakh puazeylevskogo tipa dlya techeniy vyazkouprugoy polimernoy zhidkosti v tsilindricheskom kanale” [On exact Poiseuille-type solutions for viscoelastic polymer fluid flows in a cylindrical channel], *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.* [Appl. Mech. Tech. Phys.], 2023, **64**, No. 4, 139–151, DOI: [10.15372/PMTF202315255](https://doi.org/10.15372/PMTF202315255) (in Russian).
10. A. P. Chupakhin, “Integrirovaniye uravneniy dlya invariantov tenzora konformatsii v modelyakh polimerov FENE” [Integration of equations for invariants of the conformation tensor in FENE polymer models], *Abstr. Conf. Partial Differential Equations and Their Applications*, Novosibirsk, Sobolev Inst. Math. SB RAS, Oct. 13–15, 2025.
11. V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*, Springer, New York, 1998.
12. B. S. Ashley and T. Rryer, “Discretisation of an Oldroyd-B viscoelastic fluid flow using a Lie derivative formulation,” *Adv. Comp. Math.*, 2025, **51**, 1, DOI: [10.1007/s10444-024-10211-x](https://doi.org/10.1007/s10444-024-10211-x).
13. G. Astarita and G. Marrucci, *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, McGraw–Hill, New York, 1974.
14. R. Benzi and E. S. C. Ching, “Polymers in fluid flows,” *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2018, **9**, 163–181, DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913).
15. R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1977.
16. E. Boyko and H. A. Stone, “Perspective on the description of viscoelastic flows via continuum elastic dumbbell models,” *J. Eng. Math.*, 2024, **147**, 5, DOI: [10.1007/s10665-024-10374-y](https://doi.org/10.1007/s10665-024-10374-y).
17. P. G. De Gennes, “Coil–stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients,” *J. Chem. Phys.*, 1974, **60**, 5030–5042, DOI: [10.1063/1.1681018](https://doi.org/10.1063/1.1681018).
18. G. G. Fuller and L. G. Leal, “The effects of conformation-dependent friction and internal viscosity on the dynamics of the nonlinear dumbbell model for a dilute polymer solution,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1981, **8**, No. 3-4, 271–310, DOI: [10.1016/0377-0257\(81\)80026-2](https://doi.org/10.1016/0377-0257(81)80026-2).
19. S. K. Godunov and E. Romenskii, *Elements of continuum mechanics and conservation laws*, Springer, New York, 2003.
20. H. Gouin, “Remarks on the Lie derivative in fluid mechanics,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2023, **150**, 104347, DOI: [10.1016/j.jnonlinmec.2022.104347](https://doi.org/10.1016/j.jnonlinmec.2022.104347).
21. E. J. Hinch, “Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows,” *Phys. Fluids*, 1997, **20**, S22–S30, DOI: [10.1063/1.861735](https://doi.org/10.1063/1.861735).
22. J. Hinch and O. Harlen, “Oldroyd B, and not A?,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2021, **298**, 104668, DOI: [10.1016/j.jnnfm.2021.104668](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2021.104668).
23. B. Khesin and R. Wendt, *The geometry of infinite-dimensional groups*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2009.
24. S. N. Korobeinikov, “Family of continuous strain-consistent convective tensor rates and its application in Hooke-like isotropic hyperelasticity,” *J. Elasticity*, 2021, **143**, No. 1, 147–185, DOI: [10.1007/s10659-020-09808-2](https://doi.org/10.1007/s10659-020-09808-2).
25. I. Kuianova, A. Chupakhin, A. Besov, A. Gorbatykh, D. Kislitsin, K. Orlov, and D. Parshin, “Rheological properties of non-adhesive embolizing compounds — the key to fine-tuning embolization process-modeling in endovascular surgery,” *Polymers*, 2023, **15**, No. 4, 1060, DOI: [10.3390/polym15041060](https://doi.org/10.3390/polym15041060).
26. R. G. Larson, *Constitutive equations for polymer melts and solutions*, Butterworths, Guilford, 1988.
27. J. F. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover Publ., New York, 1983.
28. J. G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1950, **200**, 523–541, DOI: [10.1098/rspa.1950.0035](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035).
29. I. M. Singer and J. A. Standberg, “The infinite groups of Lie and Cartan. Part I (The transitive groups),” *J. Anal. Math.*, 1965, **15**, 1–114, DOI: [10.1007/bf02787690](https://doi.org/10.1007/bf02787690).

30. H. A. Stone, M. J. Shelley, and P. Rigo, “A note about convected time derivatives for flows of complex fluids,” *Soft Matter*, 2023, **19**, No. 28, 5353–5359, DOI: [10.1039/d3sm00497j](https://doi.org/10.1039/d3sm00497j).
31. Wolfram Research, Inc., *Mathematica. Version 13.1*, Wolfram Research, Inc., Champaign, 2022.
32. K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland, Amsterdam, 1957.
33. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, V. P. Orlov, and M. V. Turbin, “Weak solvability of the initial boundary value problem for the Voigt model with a smoothed Jaumann time derivative taking into account the memory of fluid motion,” *Lobachevskii J. Math.*, 2025, **46**, No. 3, 1183–1206, DOI: [10.1134/S1995080225605168](https://doi.org/10.1134/S1995080225605168).

A. P. Chupakhin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7023-4994, eLIBRARY AuthorID: 6500, ResearcherID: [AIA-3732-2022](https://orcid.org/0000-0002-9492-5527), Scopus: [55910100800](https://orcid.org/0000-0002-9492-5527), ORCID: [0000-0002-9492-5527](https://orcid.org/0000-0002-9492-5527)

E. S. Stetsyak

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia

E-mail: stetsyak.e.s@hydro.nsc.ru

D. S. Chutkov

Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: d.chutkov@ng.su.ru