

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ ДИРАКА

Т. В. Сальникова, Е. И. Кугушев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Для гамильтоновых систем на симплектических многообразиях со связями в модели обобщенной гамильтоновой динамики Дирака В. В. Козлов рассмотрел операцию симплектического проектирования гамильтонова векторного поля для случая обобщенных неинтегрируемых дифференциальных связей. В данной работе рассматривается метод регуляризации связей, позволяющий обойти вырождение операции симплектического проектирования в случае нечетного количества связей. Он основан на вложении исходной системы в расширенную систему большей размерности с увеличенным количеством связей.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона, дифференциальные связи, симплектическое проектирование.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Т. В. Сальникова, Е. И. Кугушев. О геометрических структурах Дирака // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 655–662, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662).

1. ВВЕДЕНИЕ

Основными геометрическими объектами лагранжевой и гамильтоновой механики являются расслоения касательных TQ и кокасательных T^*Q гладких конфигурационных многообразий Q . В динамике Дирака [6] связи механических систем описываются как *интегрируемые дифференциальные распределения* в этих пространствах. Вариационный подход к описанию динамики таких систем, в частности, позволяет рассматривать задачи с лагранжианами, вырожденными по скоростям, что важно в релятивистской механике. Динамика Дирака также описывается в рамках так называемой обобщенной геометрии [4, 7, 8]. Основным геометрическим объектом такого рассмотрения является двойное расслоение $TT^*Q \oplus T^*T^*Q$, иногда его называют обобщенным касательным расслоением или расслоением Понтрягина. Геометрические структуры, основанные на этом объекте, корректно описывают механические системы. Такие структуры, получившие название *структуры Дирака*, были введены Т. Курантом [5] с некоторой мотивацией из механики: систему можно рассматривать в терминах координат и скоростей или координат и импульсов, геометрическое описание тогда происходит на TQ или T^*Q , соответственно. Структуры Дирака вводятся для обеспечения связи этих двух способов описания.

В работе [2] динамика Дирака распространена на гамильтоновы системы на симплектических многообразиях, частным случаем которых являются кокасательные расслоения гладких многообразий с естественной симплектической структурой. Связи в динамических системах описываются в общем случае как *неинтегрируемые дифференциальные распределения* в этих пространствах.

Введена операция симплектической проекции гамильтонова векторного поля, позволяющая строить уравнения движения с учетом связей. В случае интегрируемости дифференциальных распределений, описывающих связи, получается гамильтонова динамика Дирака. Для формулировки уравнений, описывающих динамику таких систем, необходимо спроектировать гамильтоновы и лагранжевы векторные поля, описывающие динамику системы без связей, на эти распределения, описывающие связи. Для этого рассматриваются различные операторы проекции (см. [2]). В частности, предлагается метод симплектической проекции гамильтоновых потоков, позволяющий сохранить гамильтонову структуру. Этот метод неявно предложен в [6] для применения в теории относительности и квантовой механике, как способ описания решений задач с вырожденными лагранжианами, приводящий к системам уравнений в гамильтоновой форме с конечными связями. Такая техника также может быть использована и в задачах неголономной механики. В невырожденном случае, когда ограничение симплектической структуры на дифференциальное распределение является невырожденной симплектической структурой, в работе [2] доказана единственность такой проекции. В работе [3] дано описание симплектического проектирования в рамках обобщенной геометрии.

В настоящем исследовании рассматривается возможность реализации симплектической проекции в некоторых вырожденных случаях. Предлагается метод регуляризации связей, позволяющий обойти вырождение операции симплектического проектирования в случае нечетного количества связей. Он основан на вложении исходной системы в расширенную систему большей размерности с увеличенным количеством связей. В качестве важного приложения это позволяет изучать системы с *одной дифференциальной связью*.

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} с канонической формой ω_2 имеется гамильтоново векторное поле с функцией Гамильтона $H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, и определено дифференциальное распределение, задающееся в локальных канонических координатах $x = (p, q)$, $\xi = (\dot{p}, \dot{q})$ системой дифференциальных 1-форм

$$\alpha_i(x, \xi) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (x, \xi) \in TM^{2n}. \quad (2.1)$$

Это распределение рассматривается как связи, наложенные на движение гамильтоновой системы. Проектирование осуществляется с помощью симплектической геометрии касательных плоскостей, которая индуцируется симплектической структурой фазового пространства. Используя эту структуру, можно задающие связи дифференциальные формы преобразовать в векторные поля.

Определение 2.1. *Симплектическое проектирование* гамильтонова векторного поля — это сдвиг этого поля в касательном пространстве вдоль векторных полей, определяемых связями, таким образом, чтобы преобразованное векторное поле удовлетворяло связям, т. е. лежало на дифференциальном распределении.

В [2] доказано, что если ограничение симплектической формы ω^2 на дифференциальное распределение (2.1) является невырожденной 2-формой, то симплектическое проектирование однозначно определено. В случае нечетного количества дифференциальных связей такое ограничение всегда будет вырожденным.

Цель настоящей работы — показать возможность реализации симплектического проектирования в вырожденных случаях. Важным приложением является возможность исследования систем с одной дифференциальной связью — в этом случае симплектическое проектирование всегда невозможно. Для того, чтобы обойти такую ситуацию, мы введем систему с большим числом степеней свободы, решения которой будут включать в себя все решения исходной системы.

3. О РИМАНОВЫХ СТРУКТУРАХ НА КАСАТЕЛЬНЫХ И КОКАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Мы будем рассматривать симплектические многообразия, снабженные некоторой произвольной римановой метрикой. Примером такого объекта является кокасательное расслоение конфигурационного многообразия механической системы. Помимо естественной симплектической структуры на нем существует естественная риманова метрика — метрика Вейля. Опишем ее.

Пусть Q^n — конфигурационное многообразие механической системы с n степенями свободы. На нем существует естественная кинетическая метрика, в которой квадрат нормы касательного вектора равен соответствующей кинетической энергии системы. На касательном расслоении TQ^n вводим метрику Сасаки [1], являющуюся расширением кинетической метрики. Фазовым пространством соответствующей гамильтоновой системы является кокасательное расслоение $M^{2n} = T^*Q^n$, на котором задана естественная симплектическая структура. Эта структура позволяет установить следующее изоморфное соответствие f между ковекторами и касательными векторами. Если $\alpha \in T_x^*Q^n$ — ковектор в точке $x \in Q^n$, то ему соответствует касательный вектор $f(\alpha) = \xi \in T_xQ^n$ в точке $x \in Q^n$ такой, что для любого касательного вектора $\eta \in T_xQ^n$ значение на нем ковектора α определяется соотношением $\alpha(\eta) = \omega_2(\eta, \xi)$, т. е. $\alpha(\eta) = \omega_2(\eta, f(\alpha))$. Соответствие f можно рассматривать как диффеоморфизм $f : (x, \alpha) \rightarrow (x, f(\alpha))$ между T^*Q^n и TQ^n . Дифференциал этого отображения позволяет переносить векторы, касательные к T^*Q^n , на векторы, касательные к TQ^n , и является диффеоморфизмом $df : TT^*Q^n \rightarrow TTQ^n$. Этот диффеоморфизм естественным образом переносит риманову метрику Сасаки, определенную на TQ^n , в метрику G , определенную на $M^{2n} = T^*Q^n$, — метрику Вейля. Для пары векторов μ, ν , касательных к T^*Q^n , скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в метрике Вейля определяется следующим образом: $\langle \mu, \nu \rangle = (df(\mu), df(\nu))$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в метрике Сасаки на TQ^n .

В общем случае, пусть на многообразии M^{2n} с симплектической структурой, заданной канонической 2-формой ω_2 , задана также произвольная риманова метрика, и $\langle \xi, \eta \rangle$ обозначает скалярное произведение касательных векторов ξ, η .

Эти структуры порождают два естественных изоморфизма между линейными пространствами $\Omega^1(M^{2n})$ — C^∞ -гладких дифференциальных 1-форм на M^{2n} и $\mathbb{V}(M^{2n})$ — C^∞ -гладких векторных полей на M^{2n} :

$$g : \mathbb{V}(M^{2n}) \rightarrow \Omega^1(M^{2n}), \quad h : \Omega^1(M^{2n}) \rightarrow \mathbb{V}(M^{2n}). \quad (3.1)$$

Определим эти изоморфизмы. Пусть α — это 1-форма на M^{2n} , тогда $X = h(\alpha)$ — это векторное поле, такое, что $\alpha(\cdot) = \omega_2(\cdot, X)$. Пусть Y — векторное поле на M^{2n} , тогда $\beta = g(Y)$ — это 1-форма, такая, что $\beta(\cdot) = \langle \cdot, X \rangle$.

Композиция $f = g \circ h$ этих отображений является автоморфизмом линейного пространства $\Omega^1(M^{2n})$.

Рассмотрим на M^{2n} гамильтонову систему с функцией Гамильтона $H(r), r \in M^{2n}$. Считаем, что на систему наложена одна связь $\gamma = 0, \gamma \in \Omega^1(M^{2n})$.

4. РАСШИРЕННАЯ СИСТЕМА И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Построим расширенную систему. Объекты расширенной системы будем отмечать волной $\widetilde{(\cdot)}$. Фазовое пространство расширенной системы — это многообразие $\widetilde{M}^{2n+2} = M^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Точка s этого многообразия представляет собой тройку $s = (r, x, y), r \in M^{2n}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Введем естественную проекцию $\pi : \widetilde{M}^{2n+2} \rightarrow M^{2n}$ так, что $\pi(r, x, y) = r$.

При помощи дифференциала этого отображения касательные векторы переносятся слева направо, а пространство $\Omega^1(M^{2n})$ C^∞ -дифференциальных форм на M^{2n} переносится справа налево и естественным образом вкладывается в пространство $\Omega^1(\widetilde{M}^{2n+2})$ C^∞ -дифференциальных форм на $\widetilde{M}^{2n+2}$. Результат такого вложения будем также обозначать тильдой $\widetilde{(\cdot)}$.

Симплектическая форма на расширенном фазовом пространстве $\widetilde{\omega}_2 = \omega_2 + dy \wedge dx$. Функция Гамильтона расширенной системы

$$\widetilde{H}(s) = \widetilde{H}(r, x, y) = H(r) + H_1(x, y),$$

где $H_1(x, y)$ — произвольная функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для сокращения выкладок мы полагаем зависимость H_1 только от новых переменных, поскольку на условие невырожденности симплектического проектирования выбор функции H_1 не влияет.

На систему наложены две связи: $\widetilde{\alpha}_i = 0, \widetilde{\alpha}_i \in \Omega^1(\widetilde{M}^{2n+2}), i = 1, 2$:

$$\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\gamma} = 0,$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = \widetilde{g}(\widetilde{h}(\widetilde{\gamma})) + \mu dy + \nu dx = 0,$$

где $\mu(r, x, y), \nu(r, x, y)$ — произвольные функции на расширенном пространстве.

Пусть всюду $\mu \neq 0$.

Отметим следующую взаимную однозначность. Если $(r(t), x(t), y(t))$ — гладкая кривая на $\widetilde{M}^{2n+2}$, удовлетворяющая связям $\tilde{\alpha}_i = 0$, $i = 1, 2$, расширенной системы, то $r(t)$ — кривая, удовлетворяющая связи $\gamma = 0$ исходной системы. Обратно, если $r(t)$ — кривая, удовлетворяющая связи $\gamma = 0$ исходной системы, то для произвольной зависимости $x(t)$, найдется такая единственная зависимость $x(t)$, $y(t)$, что кривая $(r(t), x(t), y(t))$ удовлетворяет связям $\tilde{\alpha}_i = 0$, $i = 1, 2$, расширенной системы.

Можно использовать и более общее условие $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$, но оно требует более громоздких выкладок.

Пусть $\tilde{v}_H = \tilde{h}(d\tilde{H})$ — гамильтоново векторное поле расширенной системы. Тогда результат операции симплектического проектирования (векторное поле $\tilde{X}$, удовлетворяющее связям) определяется следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \tilde{v}_H + \lambda_1 \tilde{h}(\tilde{\alpha}_1) + \lambda_2 \tilde{h}(\tilde{\alpha}_2), \\ \tilde{\alpha}_1 &= 0, \\ \tilde{\alpha}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Теорема 4.1. *Если форма γ невырождена, то симплектическое проектирование в расширенной системе невырождено, то есть осуществимо.*

Доказательство. Условие невырожденности симплектического проектирования локально, поэтому достаточно доказать это утверждение в локальных координатах.

Пусть в некоторых локальных канонических координатах $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ матрицы симплектической формы и метрического тензора имеют вид $S(x) = \|s_{ij}\|$, $G(x) = \|g_{ij}\|$.

Будем рассматривать 1-формы на M и на $\widetilde{M}$ так же, как и ковекторные поля.

Опишем отображения g и h (3.1).

Пусть $Y = (Y_1(q, p), \dots, Y_{2n}(q, p))$ — векторное поле на M^{2n} . Тогда $g(Y) = \beta = GY$ — это ковекторное поле. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{2n})$ — ковекторное поле на M^{2n} . Тогда $h(\beta) = Y = S^{-1}\beta$ — это векторное поле.

Пусть H — функция Гамильтона исходной системы. Для расширенной системы к функции Гамильтона добавим новое слагаемое H_1 :

$$\tilde{H} = H + H_1.$$

Пусть на систему наложена одна связь $\alpha_1 = 0$, где α_1 — ковекторное поле. В расширенной системе добавим связь следующего вида:

$$\alpha_2 + \mu dp_{n+1} + \nu dq_{n+1} = 0,$$

где $\alpha_2 = g(h(\alpha_1)) = GS^{-1}\alpha_1$.

При симплектическом проектировании уравнения движения расширенной системы примут вид

$$\dot{x} = S^{-1}dH + \lambda_1 S^{-1}\alpha_1 + \lambda_2 S^{-1}\alpha_2. \quad (4.1)$$

В канонических координатах (q, p) эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} - \lambda_2 \mu, \\ \dot{p}_{n+1} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} + \lambda_2 \nu.\end{aligned} \quad (4.2)$$

Условия выполнения связей выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \dot{x}) &= 0, \\ (\alpha_2, \dot{x}) + \mu \dot{p}_{n+1} + \nu \dot{q}_{n+1} &= 0.\end{aligned}$$

Подставив в эти выражения (4.1) и $\alpha_2 = GS^{-1}\alpha_1$, находим

$$(\alpha_1, S^{-1}dH + \lambda_1 S^{-1}\alpha_1 + \lambda_2 S^{-1}GS^{-1}\alpha_1) = 0,$$

$$(GS^{-1}\alpha_1, S^{-1}dH + \lambda_1 S^{-1}\alpha_1 + \lambda_2 S^{-1}GS^{-1}\alpha_1) + \mu \left(-\frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} + \lambda_2 \nu \right) + \nu \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} - \lambda_2 \mu \right) = 0.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \lambda_1 S^{-1} \alpha_1 + \lambda_2 S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= -(\alpha_1, S^{-1} dH), \\(GS^{-1} \alpha_1, \lambda_1 S^{-1} \alpha_1 + \lambda_2 S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= (GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} dH) + \mu \frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} - \nu \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}}.\end{aligned}$$

Поскольку матрицы S и S^{-1} кососимметрические, то

$$\begin{aligned}(\alpha_1, S^{-1} \alpha_1) &= 0, \\(GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Таким образом,

$$\lambda_2 (\alpha_1, S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) = -(\alpha_1, S^{-1} dH),\tag{4.4}$$

$$\lambda_1 (GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} \alpha_1) = (GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} dH) + \mu \frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} - \nu \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}}.\tag{4.5}$$

Матрицы G и S^{-1} невырождены, и, по предположению, ковектор $\alpha_1 \neq 0$, поэтому

$$\begin{aligned}(\alpha_1, S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= -(S^{-1} \alpha_1, G S^{-1} \alpha_1) \neq 0, \\(GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} \alpha_1) &\neq 0.\end{aligned}$$

Тогда множители λ_1, λ_2 определяются однозначно.

Теорема доказана. $\square$

По всей видимости, рассмотренный случай одной связи можно распространить на случай k связей и получить следующее утверждение:

Теорема 4.2. *Систему с n степенями свободы и произвольным количеством k связей можно вложить в систему с числом степеней свободы $n + k$, с добавлением k новых связей, при условии независимости всей системы $2k$ связей, так, что в новой системе симплектическое проектирование будет невырожденным, то есть осуществимым.*

В качестве примера для изложенного метода возможности осуществления симплектического проектирования рассмотрим задачу о неголономной точке.

5. НЕГОЛОНОМНАЯ ТОЧКА

Пусть механическая система состоит из одной материальной точки массы m , с координатами x, y, z в некоторой абсолютной системе координат. Считается, что на точку действуют силы с потенциальной энергией $V(x, y, z)$. Введем канонические импульсы (p_x, p_y, p_z) и запишем функцию Гамильтона

$$H = \kappa(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z), \quad \kappa = (2m)^{-1}.$$

Пусть на движение точки наложена неголономная связь $\dot{x} - y\dot{z} = 0$, которая в дифференциальной форме имеет вид $\alpha_1 = dx - ydz = 0$.

Конфигурационное пространство $Q = \mathbb{R}^3$. Риманова (кинетическая) метрика на нем имеет постоянную матрицу $G_3 = \text{diag}\{\kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2\}$. Касательное расслоение $TQ = \mathbb{R}^6$. Метрика Сасаки на нем имеет постоянную матрицу $G = \text{diag}\{\kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2\}$. В этом случае квадрат нормы вектора, касательного к TQ , равен сумме кинетической энергии точки и ее энергии ускорений. Фазовое пространство гамильтоновой системы $T^*Q = \mathbb{R}^6$. Дуальная метрика Вейля на нем имеет ту же постоянную матрицу G . Вложим эту систему в расширенную систему, число степеней свободы которой на единицу больше, а фазовое пространство представляет собой $\mathbb{R}^8$. При этом считаем, что симплектическая форма в расширенной системе получается добавлением слагаемого $dp_w \wedge dw$ к симплектической форме исходной системы: $\tilde{\omega}_2 = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + dp_z \wedge dz + dp_w \wedge dw$. К исходной функции Гамильтона добавим слагаемое κp_w^2 , так что новая функция Гамильтона

$$\tilde{H} = \kappa(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_w^2) + V(x, y, z).$$

Форма исходной связи в расширенном пространстве

$$\alpha_1 = dx - ydz = 0$$

как ковектор имеет координаты

$$\alpha_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, -y, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(\alpha_1) &= G\alpha_1 = (0, 0, 0, 0, \kappa m^2, 0, -\kappa m^2 y, 0), \\ h(g(\alpha_1)) &= (\kappa m^2, 0, -\kappa m^2 y, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Форма добавленной связи

$$\alpha_2 = \kappa m^2 dp_x - \kappa m^2 y dp_z + dp_w = 0$$

как ковектор имеет координаты

$$\alpha_2 = (\kappa m^2, 0, -\kappa m^2 y, 1, 0, 0, 0, 0).$$

При симплектическом проектировании, в соответствии с (4.1), получаем уравнения с множителями:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -V_x + \lambda_1, & \dot{p}_y &= -V_y, & \dot{p}_z &= -V_z - y\lambda_1, \\ \dot{x} &= 2\kappa p_x - \kappa m^2 \lambda_2, & \dot{y} &= 2\kappa p_y, & \dot{z} &= 2\kappa p_z + \kappa m^2 y \lambda_2, \\ \dot{w} &= 2\kappa p_w, -\lambda_2 & \dot{p}_w &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $V_z = \frac{\partial V}{\partial z}$.

Для определения множителей λ_1, λ_2 используем соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \dot{x} - y\dot{z} = 0, \\ \alpha_2 &= \kappa m^2 \dot{p}_x - \kappa m^2 y \dot{p}_z + \dot{p}_w = 0. \end{aligned}$$

Подставив в эти равенства выражения скоростей канонических координат из (5.1), получим систему линейных уравнений относительно λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2\kappa p_x - \kappa m^2 \lambda_2) - y(2\kappa p_z + \kappa m^2 y \lambda_2) = 0, \\ \alpha_2 &= \kappa m^2 (-V_x + \lambda_1) - \kappa m^2 y (-V_z - y\lambda_1). \end{aligned}$$

Откуда

$$\lambda_2 = \frac{2p_x - 2yp_z}{m^2(1 + y^2)}, \quad \lambda_1 = \frac{V_x - yV_z}{(1 + y^2)}.$$

Замечание 5.1. Отметим, что в полученной системе уравнений отделяются уравнения для исходной системы. В результате мы имеем замкнутую систему уравнений в исходном фазовом пространстве, что является общим фактом для такого способа регуляризации симплектического проектирования.

Теорема 5.1. В системе уравнений движения расширенной системы (4.1) уравнения для исходных фазовых координат отделяются и представляют собой замкнутую систему уравнений в исходном фазовом пространстве, зависящую от параметров исходной системы тогда и только тогда, когда

$$\mu \frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} - \nu \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} \equiv 0.$$

Доказательство. В системе уравнений движения расширенной системы (4.1) исходные фазовые координаты задаются вектором x . В уравнениях для них (для $\dot{x}$) добавочные координаты (q_{n+1}, p_{n+1}) могут содержаться только в выражениях для множителей λ_1, λ_2 . Из (4.4)-(4.5) находим

$$\lambda_2 = -\frac{(\alpha_1, S^{-1}dH)}{(\alpha_1, S^{-1}GS^{-1}\alpha_1)}, \quad \lambda_1 = \frac{(GS^{-1}\alpha_1, S^{-1}dH)}{(GS^{-1}\alpha_1, S^{-1}\alpha_1)}.$$

Утверждение теоремы следует из того, что в этих выражениях участвуют функции только от исходных фазовых координат, и добавочные координаты отсутствуют. $\square$

Замечание 5.2. Отметим, что предлагаемая регуляризация корректна в том смысле, что вне зависимости от выбора регуляризации, если она проведена таким образом, что уравнения для исходных координат полностью отделились, то они всегда одни и те же.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко А. А., Ямпольский Л. Я. Риманова геометрия расслоений// Усп. мат. наук. — 1991. — 46, № 6. — С. 51–95.
2. Козлов В. В. К обобщенной гамильтоновой динамике Дирака// Усп. мат. наук. — 2024. — 29, № 4. — С. 95–130. — DOI: [10.4213/rm10183](https://doi.org/10.4213/rm10183).
3. Сальникова Т. В., Кугушев Е. И. Геометрические структуры для дифференциальных связей в лагранжевом и гамильтоновом формализме// Усп. мат. наук. — 2025. — 80, № 3. — С. 183–184. — DOI: [10.4213/rm10243](https://doi.org/10.4213/rm10243).
4. Cosserat O., Laurent-Gengoux C., Kotov A., Ryvkin L., Salnikov V. On Dirac structures admitting a variational approach// Math. Mech. Complex Syst. — 2023. — 11, № 1. — hal-03445074v2. — DOI: [10.2140/memocs.2023.11.1](https://doi.org/10.2140/memocs.2023.11.1).
5. Courant T. Dirac manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — 319. — С. 631–661. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1).
6. Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics// Canad. J. Math. — 1950. — 2, № 2. — С. 129–148. — DOI: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
7. Tulczyjew W. M. The Legendre transformation// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1977. — 27, № 1. — С. 101–114.
8. Yoshimura H., Marsden J. E. Dirac structures in Lagrangian mechanics. I. Implicit Lagrangian systems// J. Geom. Phys. — 2006. — 57, № 1. — С. 133–156. — DOI: [10.1016/j.geomphys.2006.02.009](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.02.009).

Т. В. Сальникова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 8362-5455, РИНЦ AuthorID: [1153857](https://elibrary.ru/1153857),
ResearcherID: [AAB-1148-2019](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), Scopus: [36890776900](https://orcid.org/36890776900), ORCID: [0000-0001-7039-6977](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977)

Е. И. Кугушев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: kugushevei@yandex.ru, РИНЦ AuthorID: [4491](https://elibrary.ru/4491), ResearcherID: [Q-5737-2018](https://orcid.org/Q-5737-2018), Scopus: [6603260594](https://orcid.org/6603260594), ORCID: [0000-0003-0066-4168](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662)

EDN: [MIQJVQ](https://elibrary.ru/MIQJVQ)

UDC 514.8

Research article

Dirac geometric structures

T. V. Salnikova and E. I. Kugushev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. For Hamiltonian systems on symplectic manifolds with constraints in the Dirac model of generalized Hamiltonian dynamics, V. V. Kozlov considered the operation of symplectic projection of a Hamiltonian vector field for the case of generalized nonintegrable differential constraints. This paper considers a constraint regularization method that circumvents the degeneracy of the symplectic projection operation in the case of an odd number of constraints. The method is based on embedding of the original system into an extended system of higher dimension with an increased number of constraints.

Keywords: Hamilton's equations, differential constraints, symplectic projection.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.



For citation: T. V. Salnikova, E. I. Kugushev, “Dirac geometric structures,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 655–662, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662).

REFERENCES

1. A. A. Borisenko and L. Ya. Yampol'skii, “Rimanova geometriya rassloeniy” [Riemannian geometry of fibre bundles], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 6, 51–95 (in Russian).
2. V. V. Kozlov, “K obobshchennoy gamiltonovoy dinamike Diraka” [On Dirac's generalized Hamiltonian dynamics], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2024, **29**, No. 4, 95–130, DOI: [10.4213/rm10183](https://doi.org/10.4213/rm10183) (in Russian).
3. T. V. Sal'nikova and E. I. Kugushev, “Geometricheskie struktury dlya differentsial'nykh svyazey v lagranzhevom i gamiltonovom formalizme” [Geometric structures for differential constraints in Lagrangian and Hamiltonian formalism], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2025, **80**, No. 3, 183–184, DOI: [10.4213/rm10243](https://doi.org/10.4213/rm10243) (in Russian).
4. O. Cosserat, C. Laurent-Gengoux, A. Kotov, L. Ryvkin, and V. Salnikov, “On Dirac structures admitting a variational approach,” *Math. Mech. Complex Syst.*, 2023, **11**, No. 1, hal-03445074v2, DOI: [10.2140/memocs.2023.11.1](https://doi.org/10.2140/memocs.2023.11.1).
5. T. Courant, “Dirac manifolds,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1990, **319**, 631–661, DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1).
6. P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics,” *Canad. J. Math.*, 1950, **2**, No. 2, 129–148, DOI: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
7. W. M. Tulczyjew, “The Legendre transformation,” *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1977, **27**, No. 1, 101–114.
8. H. Yoshimura and J. E. Marsden, “Dirac structures in Lagrangian mechanics. I. Implicit Lagrangian systems,” *J. Geom. Phys.*, 2006, **57**, No. 1, 133–156, DOI: [10.1016/j.geomphys.2006.02.009](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.02.009).

T. V. Salnikova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 8362-5455, eLIBRARY AuthorID: [1153857](https://elibrary.ru/1153857), ResearcherID: [AAB-1148-2019](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), Scopus: [36890776900](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), ORCID: [0000-0001-7039-6977](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977)

E. I. Kugushev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: kugushevei@yandex.ru, eLIBRARY AuthorID: [4491](https://elibrary.ru/4491), ResearcherID: [Q-5737-2018](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168), Scopus: [6603260594](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168), ORCID: [0000-0003-0066-4168](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168)