

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА НА ВРЕМЕННОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ВРЕМЕНИ

А. П. ЛЕДНОВ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Аннотация. На временном графе-звезде рассматривается задача об оптимальном успокоении системы управления для обобщенного уравнения пантографа, представляющего собой уравнение нейтрального типа с запаздыванием, пропорциональным времени. Запаздывание в системе распространяется через внутреннюю вершину графа. Исследуется вариационная задача минимизации функционала энергии с учетом вероятностей сценариев, соответствующих различным ребрам. Установлено, что оптимальная траектория удовлетворяет условиям типа Кирхгофа во внутренней вершине. Доказана эквивалентность вариационной задачи некоторой краевой задаче для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка на графе и установлена однозначная разрешимость обеих задач.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа с запаздыванием, уравнение пантографа, граф-звезда, оптимальное успокоение системы, задача Красовского, вариационная задача, однозначная разрешимость.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 24-71-10003.

Для цитирования: А. П. Леднов. Об успокоении системы управления нейтрального типа на временном графе-звезде с запаздыванием, пропорциональным времени // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 642–654, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654).

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные операторы на графах, часто называемые квантовыми графами, активно изучаются с прошлого века в связи с моделированием различных процессов, протекающих в сложных системах, представимых в виде пространственных сетей [7, 10, 17, 20, 21]. Для таких моделей помимо условий непрерывности в вершинах характерны также условия Кирхгофа.

Для задания на графах функционально-дифференциальных операторов с запаздыванием, С. А. Бутериным в работе [11] была предложена концепция глобального запаздывания. Последнее означает, что запаздывание распространяется через внутренние вершины графа. Другими словами, решение уравнения на входящем ребре служит начальной функцией для уравнений на

исходящих ребрах. Глобальное запаздывание стало альтернативой локально нелокальному случаю, рассмотренному в [24], когда уравнение на каждом ребре имеет свой собственный параметр запаздывания и может быть решено отдельно от уравнений на остальных ребрах.

Использование концепции глобального запаздывания позволило перенести на графы класс задач об успокоении управляемых систем с последствием. Впервые задача этого типа была поставлена и исследована на интервале Н. Н. Красовским [6] для системы управления с постоянным запаздыванием, описываемой уравнением запаздывающего типа. Эта задача получила дальнейшее развитие в работах А. Л. Скубачевского [9, 23] и позже в работах других авторов (см. [1] и литературу там), где рассматриваемая система управления имеет нейтральный тип, т. е. содержит запаздывание и в главных членах. Это существенно усложняет задачу и, в частности, приводит к понятию обобщенного решения соответствующей краевой задачи для оптимальной траектории. С. А. Бутерин в работах [3, 12] распространил на графы задачу об успокоении систем управления с постоянным запаздыванием. В [12] рассмотрен случай уравнения первого порядка запаздывающего типа, а в [3] — общий случай нестационарной управляемой системы, уравнения которой относятся к нейтральному типу и имеют произвольный порядок.

Рассмотрение указанной задачи на графах, в свою очередь, привело к концепции временного графа, ребра которого, в отличие от пространственной сети, отождествляются с промежутками времени, а каждая внутренняя вершина понимается как точка разветвления процесса, дающая несколько различных сценариев дальнейшего его протекания. В [3–5, 12] показано, что на временных графах также могут возникать условия Кирхгофа. А именно, им будет удовлетворять траектория течения процесса, являющаяся оптимальной с учетом сразу всех сценариев. Кроме того, в [5, 12] была предложена стохастическая интерпретация системы управления на временном дереве. В частности, к системе на дереве приведет замена коэффициентов в уравнении на интервале дискретными случайными процессами с дискретным временем.

В работах [18, 19] на графы была перенесена задача об успокоении системы управления, описываемой так называемым уравнением пантографа [16]. В данном случае запаздывание не постоянно, а является пропорциональным времени сжатием. Рассматривалась система управления, задаваемая классическим уравнением пантографа

$$y'(t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad (1.1)$$

где $b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Уравнение вида (1.1) широко применяется в прикладных задачах. Так, например, это уравнение используется при моделировании динамики контактного провода электропоезда подвижного состава [22]. Для $q \in (0, 1)$ оно возникает в астрофизике при описании поглощения света межзвездной материей [2], а также в биологии при моделировании процесса роста клеток [13].

В данной работе мы переходим к рассмотрению системы управления для обобщенного уравнения пантографа

$$y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad (1.2)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Уравнение вида (1.2) изучалось в [14, 15] и ряде других работ. Были получены различные представления решения и показано, что разрешимость задачи (1.2) зависит от коэффициента a и от класса гладкости решений. В частности, при $a \neq -q^k$, $k \geq 0$, существует единственное решение в $C^\infty[0, +\infty)$; при этом в зависимости от значения a могут существовать и другие C^1 -решения, не принадлежащие $C^\infty[0, +\infty)$.

На интервале задача об успокоении системы управления для обобщенного уравнения пантографа была рассмотрена Л. Е. Россовским в работе [8], где исследовалась следующая система управления нейтрального типа:

$$y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = u(t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$, а $u(t)$ — управляющее воздействие, которое является вещественнозначной функцией; состояние системы в начальный момент времени задается условием (1.4).

Задача управления формулируется следующим образом: требуется найти $u(t)$, приводящее систему (1.3), (1.4) в равновесие $y(t) = 0$ при $t \geq T$ для некоторого $T > 0$.

Для этого достаточно найти $u(t) \in L_2(0, T)$, приводящее систему в состояние

$$y(t) = 0, \quad q^{-1}T \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

а затем сбросить управление, положив $u(t) \equiv 0$ при $t > T$. При этом из всех возможных управлений ищется управление, обладающее минимальной энергией $\|u\|_{L_2(0, T)}^2$.

В результате получается вариационная задача о минимизации квадратичного функционала

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^T (y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t))^2 dt \rightarrow \min \quad (1.6)$$

на множестве функций $y(t) \in W_2^1[0, T]$, удовлетворяющих краевым условиям (1.4), (1.5).

Исследование вариационной задачи (1.4)–(1.6) включает сведение ее к эквивалентной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения второго порядка с растяжением и сжатием аргумента.

В частности, установлено, что если функция $y(t) \in W_2^1[0, T]$, удовлетворяющая условиям (1.4), (1.5), минимизирует функционал (1.6), то она является решением краевой задачи для уравнения

$$\begin{aligned} & -((1 + a^2q)y'(t) + ay'(q^{-1}t) + aqy'(qt))' + (ab - cq^{-1})y'(q^{-1}t) + \\ & + (cq - abq^2)y'(qt) + (b^2 + c^2q)y(t) + bcy(q^{-1}t) + bcqy(qt) = 0, \quad 0 < t < q^{-1}T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

при краевых условиях (1.4) и (1.5). При этом, поскольку задача (1.4), (1.5), (1.7) может не иметь решения в $W_2^2[0, q^{-1}T]$, ее решение является обобщенным в смысле выполнения условия

$$(1 + a^2q)y'(t) + ay'(q^{-1}t) + aqy'(qt) \in W_2^1[0, q^{-1}T].$$

Обратное утверждение также верно: если $y(t) \in W_2^1[0, T]$ является обобщенным решением задачи (1.4), (1.5), (1.7), то y доставляет минимум функционалу (1.6).

Следующая теорема при предположении $|a| \neq q^{-\frac{1}{2}}$, обеспечивающем коэрцитивность функционала $\mathcal{J}(y)$, устанавливает существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (1.4), (1.5), (1.7) и, стало быть, однозначную разрешимость вариационной задачи (1.4)–(1.6).

Теорема 1.1 (см. [8]). Пусть $|a| \neq q^{-\frac{1}{2}}$. Тогда задача (1.4), (1.5), (1.7), имеет единственное обобщенное решение $y \in W_2^1[0, T]$.

В следующем разделе дается постановка вариационной задачи на графе-звезде. Далее, в третьем разделе, следуя общей стратегии для интервала, устанавливается эквивалентность вариационной задачи некоторой краевой задаче для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка на графе. В заключительном разделе доказывается однозначная разрешимость обеих задач.

2. ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Рассмотрим изображенный на рис. 1 граф типа звезды Γ_m , состоящий из m ребер. Как обычно, под функцией y на графе Γ_m будем понимать кортеж $y = [y_1, \dots, y_m]$, в котором компонента y_j определена на ребре e_j , т. е. $y_j = y_j(t)$, $t \in [0, T_j]$.

Пусть до момента времени $t = T_1 > 0$, ассоциированного с единственной внутренней вершиной v_1 графа Γ_m , наша система управления с запаздыванием, пропорциональным времени, на Γ_m описывается уравнением

$$\ell_1 y(t) := y_1'(t) + a_1 y_1'(q^{-1}t) + b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t) = u_1(t), \quad 0 < t < T_1, \quad (2.1)$$

заданным на ребре e_1 графа Γ_m , с начальным условием

$$y_1(0) = y_0. \quad (2.2)$$

При $t = T_1$, т. е. в вершине v_1 , система разветвляется на $m - 1$ независимых параллельных процессов, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} \ell_j y(t) := y_j'(t) + a_j y_j'(q^{-1}(t - (q - 1)T_1)) + b_j y_j(t) + c_j y_j(q^{-1}(t - (q - 1)T_1)) = u_j(t), \\ t > 0, \quad j = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

но имеющих общую историю, определяемую уравнением (2.1) с начальным условием (2.2) и условиями

$$y_j(t) = y_1(t + T_1), \quad (q^{-1} - 1)T_1 < t < 0, \quad j = \overline{2, m}, \quad (2.4)$$

а также условиями непрерывности в вершине v_1 , которые в данном случае согласуются с (2.4) при $t \rightarrow -0$:

$$y_j(0) = y_1(T_1), \quad j = \overline{2, m}. \quad (2.5)$$

Как и в случае интервала, мы предполагаем, что $q > 1$, $y_0 \in \mathbb{R}$ и все $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$.

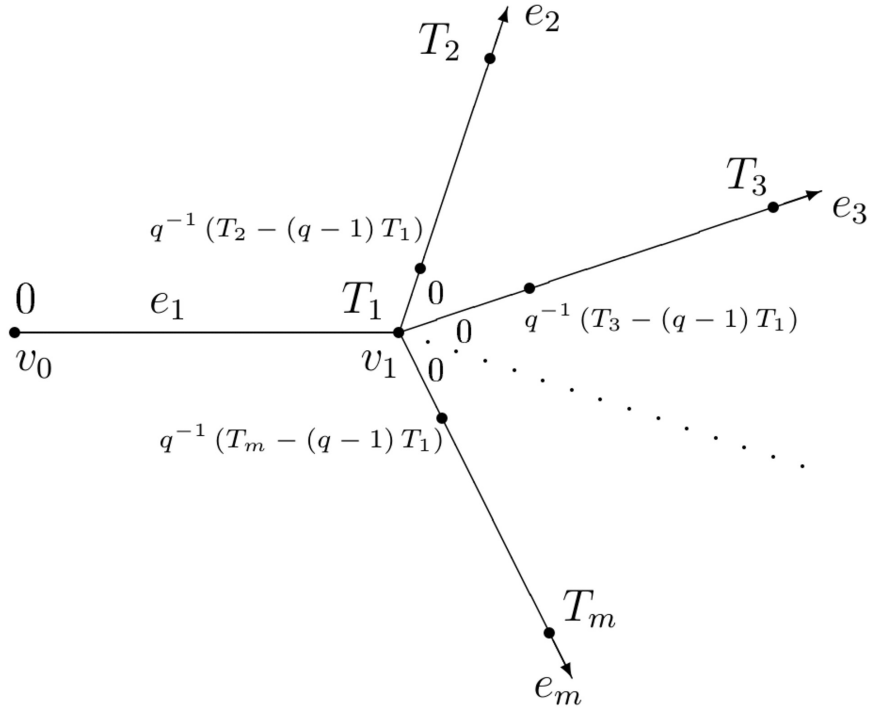


Рис. 1. Граф Γ_m

FIG. 1. Graph Γ_m

В (2.3) j -ое уравнение задано на ребре e_j графа Γ_m , представляющем собой, вообще говоря, бесконечный луч, выходящий из вершины v_1 . Условия (2.4) означают, что запаздывание распространяется через вершину v_1 .

Пример 2.1. Пусть $m = 2$, $a := a_1 = a_2$, $b := b_1 = b_2$, $c := c_1 = c_2$, и

$$y(t) := \begin{cases} y_1(t), & 0 \leq t \leq T_1, \\ y_2(t - T_1), & t > T_1, \end{cases} \quad u(t) := \begin{cases} u_1(t), & 0 < t < T_1, \\ u_2(t - T_1), & t > T_1. \end{cases}$$

Тогда система управления (2.1)–(2.5) принимает вид (1.3), (1.4).

Предположим для определенности, что $T_j > (q - 1)T_1$ при всех $j = \overline{2, m}$. Для успокоения системы (2.1)–(2.5) сразу при всех сценариях нужно привести ее в состояние

$$y_j(t) = 0, \quad q^{-1}(T_j - (q - 1)T_1) \leq t \leq T_j, \quad j = \overline{2, m}, \quad (2.6)$$

выбрав подходящие управления $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$. Тогда, положив $u_j(t) \equiv 0$ при $t > T_j$, $j = \overline{2, m}$, будем иметь $y_j(t) = 0$ при тех же t и j . Другими словами, система будет приведена в равновесие на каждом ребре, выходящем из вершины v_1 . Поскольку такие $u_j(t)$ не единственны, будем искать их, минимизируя усилия $\|u_j\|_{L_2(0, T_j)}^2$. Кроме того, аналогично тому, как это было сделано в [12] для случая постоянного запаздывания, мы можем регулировать степень участия каждого $\|u_j\|_{L_2(0, T_j)}^2$ в соответствующем функционале энергии, выбирая определенный положительный вес α_j .

Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$\mathcal{J}(y) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} (\ell_j y(t))^2 dt \rightarrow \min \quad (2.7)$$

при условиях (2.2), (2.4)–(2.6), где $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, фиксированы.

Для выбора весов α_j , $j = \overline{1, m}$, можно применить вероятностный подход в соответствии с интерпретацией системы управления на временном графе, предложенной в [12]. А именно, для этого нужно положить $\alpha_1 = 1$, а в качестве α_j , $j = \overline{2, m}$, взять вероятности сценариев, задаваемых соответствующими уравнениями в (2.3). Тогда $\alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$. Последнее тождество также обеспечивает соответствие случаю интервала, если уравнения в (2.3) не зависят от j , т. е. являются искусственными копиями единственного возможного сценария (см. [12, пример 2]).

Заметим, что условия (2.4) никаких ограничений на функцию $y = [y_1, \dots, y_m]$ не накладывают. Поэтому условимся, что взятие $\mathcal{J}(y)$, равно как и $\ell_j y$ при $j = \overline{2, m}$, от какой бы то ни было функции y на Γ_m автоматически подразумевает применение условий (2.4). Для краткости также введем обозначение $\ell y := [\ell_1 y, \dots, \ell_m y]$.

3. СВЕДЕНИЕ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $W_2^k(\Gamma_m) = \bigoplus_{j=1}^m W_2^k[0, T_j]$ со скалярным произведением

$$(y, z)_{W_2^k(\Gamma_m)} = \sum_{j=1}^m (y_j, z_j)_{W_2^k[0, T_j]},$$

где $y = [y_1, \dots, y_m]$, $z = [z_1, \dots, z_m]$, $(f, g)_{W_2^k[a, b]} = \sum_{\nu=0}^k (f^{(\nu)}, g^{(\nu)})_{L_2(a, b)}$ — скалярное произведение в $W_2^k[a, b]$, а $(\cdot, \cdot)_{L_2(a, b)}$ — скалярное произведение в $L_2(a, b)$.

Обозначим через $\mathcal{W}$ замкнутое подпространство $W_2^1(\Gamma_m)$, состоящее из всех наборов $[y_1, \dots, y_m]$, удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6) и $y_1(0) = 0$.

Также введем пространство $W_2^k(\tilde{\Gamma}_m) = W_2^k[0, T_1] \oplus \bigoplus_{j=2}^m W_2^k[0, q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)]$.

Лемма 3.1. Если $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ является решением вариационной задачи (2.2), (2.4)–(2.7), то

$$B(y, w) := \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} \ell_j y(t) \ell_j w(t) dt = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (3.1)$$

Обратно, если для некоторого $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ выполняется (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1), то y является решением задачи (2.2), (2.4)–(2.7).

Доказательство. Пусть $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ — решение задачи (2.2), (2.4)–(2.7). Тогда для произвольной фиксированной функции $w \in \mathcal{W}$ сумма $y + sw$ принадлежит $W_2^1(\Gamma_m)$ при любом $s \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям (2.2), (2.5), (2.6). Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{J}(y + sw) = \mathcal{J}(y) + 2sB(y, w) + s^2\mathcal{J}(w).$$

Так как $\mathcal{J}(y + sw) \geq \mathcal{J}(y)$ для всех $s \in \mathbb{R}$, то выполняется (3.1).

Обратно, пусть $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.5) и (2.6). Тогда (3.1) влечет

$$\mathcal{J}(y + w) = \mathcal{J}(y) + 2B(y, w) + \mathcal{J}(w) \geq \mathcal{J}(y) \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Таким образом, y доставляет минимум функционалу (2.7) при условиях (2.2), (2.5) и (2.6). $\square$

Преобразуем (3.1), сделав замену переменных в членах, содержащих $w_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1))$ и $w_1(q^{-1}t)$. В результате выражение для $B(y, w)$ примет вид

$$B(y, w) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} \ell_j y(t) (w'_j(t) + b_j w_j(t)) dt +$$

$$+ q \left(\alpha_1 \int_0^{q^{-1}T_1} \ell_1 y(qt) (a_1 w'_1(t) + c_1 w_1(t)) dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=2}^m \alpha_j \int_{(q^{-1}-1)T_1}^{q^{-1}(T_j-(q-1)T_1)} \ell_j y(qt + (q-1)T_1) (a_j w'_j(t) + c_j w_j(t)) dt \right).$$

Применяя (2.4) к $w = [w_1, \dots, w_m] \in \mathcal{W}$, можно представить

$$\int_{(q^{-1}-1)T_1}^{q^{-1}(T_j-(q-1)T_1)} \ell_j y(qt + (q-1)T_1) (a_j w'_j(t) + b_j w_j(t)) dt =$$

$$= \int_0^{q^{-1}(T_j-(q-1)T_1)} \ell_j y(qt + (q-1)T_1) (a_j w'_j(t) + c_j w_j(t)) dt +$$

$$+ \int_{q^{-1}T_1}^{T_1} \ell_j y(qt - T_1) (a_j w'_1(t) + c_j w_1(t)) dt, \quad j = \overline{2, m}.$$

Тогда перепишем (3.1) в эквивалентном виде

$$B(y, w) = \sum_{j=1}^m \left(\int_0^{T_j} (\alpha_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{1,j} y(t)) w'_j(t) dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T_j} (\alpha_j b_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{0,j} y(t)) w_j(t) dt \right) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}, \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{\ell}_{\nu,1} y(t) = \begin{cases} q\alpha_1 \theta_{\nu,1} \ell_1 y(qt), & 0 < t < q^{-1}T_1, \\ q \sum_{k=2}^m \alpha_k \theta_{\nu,k} \ell_k y(qt - T_1), & q^{-1}T_1 < t < T_1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\ell}_{\nu,j} y(t) = \begin{cases} q\alpha_j \theta_{\nu,j} \ell_j y(qt + (q-1)T_1), & 0 < t < l_j, \\ 0, & l_j < t < T_j, \end{cases} \quad j = \overline{2, m},$$

при $\nu \in \{0, 1\}$ и

$$\theta_{\nu,j} = \begin{cases} a_j, & \nu = 1, \\ c_j, & \nu = 0, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ краевую задачу для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathcal{L}_j y(t) := -(\hat{\ell}_j y(t))' + \alpha_j b_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{0,j} y(t) = 0, \quad 0 < t < l_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

при условиях (2.2), (2.4)–(2.6) и условии типа Кирхгофа

$$\hat{\ell}_1 y(T_1) = \sum_{j=2}^m \hat{\ell}_j y(0), \quad (3.5)$$

где $\tilde{\ell}_{\nu,j}$, $\nu \in \{0, 1\}$, определены в (3.3), а выражения $\widehat{\ell}_j y(t)$ имеют вид

$$\widehat{\ell}_j y(t) := \alpha_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{1,j} y(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

тогда как

$$l_1 := T_1, \quad l_j := q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), \quad j = \overline{2, m}. \quad (3.7)$$

Определение 3.1. Функцию $y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\Gamma_m)$ назовем *обобщенным решением* краевой задачи $\mathcal{B}$, если $\widehat{\ell}_j y(t) \in W_2^1[0, l_j]$, $j = \overline{1, m}$, а функции y_j , $j = \overline{1, m}$, удовлетворяют уравнениям (3.4) и условиям (2.2), (2.4)–(2.6), (3.5).

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.2. Если $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1), то y является обобщенным решением краевой задачи $\mathcal{B}$. Обратно, любое обобщенное решение краевой задачи $\mathcal{B}$ подчиняется условию (3.1).

Доказательство. Пусть $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ и удовлетворяет условиям (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1). Учитывая, что (3.1) эквивалентно (3.2) и применяя лемму 2 из [12] к (3.2) вместе с (3.7), получаем, что $\widehat{\ell}_j y(t) \in W_2^1[0, l_j]$, $j = \overline{1, m}$, и выполняется (3.5). Кроме того, интегрируя по частям в (3.2) и используя (2.5), (2.6), будем иметь

$$B(y, w) = w_1(T_1) \left(\widehat{\ell}_1 y(T_1) - \sum_{j=2}^m \widehat{\ell}_j y(0) \right) + \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \mathcal{L}_j y(t) w_j(t) dt = 0. \quad (3.8)$$

В силу (3.5), а также произвольности w_j , из (3.8) получаем (3.4).

Обратно, пусть y — обобщенное решение задачи $\mathcal{B}$. Тогда левое равенство в (3.8) дает (3.1). $\square$

Объединив леммы 3.1 и 3.2, получаем следующий результат.

Теорема 3.1. Функция $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ является решением вариационной задачи (2.2), (2.4)–(2.7) тогда и только тогда, когда y является обобщенным решением краевой задачи $\mathcal{B}$.

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

В данном разделе устанавливается однозначная разрешимость краевой задачи $\mathcal{B}$, а согласно теореме 3.1 — и вариационной задачи (2.2), (2.4)–(2.7).

Введем обозначения

$$\ell_1^0 y(t) = y_1'(t) + a_1 y_1'(q^{-1}t), \quad \ell_j^0 y(t) = y_j'(t) + a_j y_j'(q^{-1}(t - (q-1)T_1)), \quad j = \overline{2, m}, \quad (4.1)$$

$$\ell_1^1 y(t) = b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t), \quad \ell_j^1 y(t) = b_j y_j(t) + c_j y_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1)), \quad j = \overline{2, m}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{J}_\nu(y) = \sum_{j=1}^m \int_0^{T_j} |\ell_j^\nu y(t)|^2 dt, \quad \nu = 0, 1,$$

где автоматически предполагается (2.4).

Лемма 4.1. Существуют C_0 и C_1 такие, что

$$\mathcal{J}(w) \leq C_0 \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2, \quad \mathcal{J}_1(w) \leq C_1 \|w\|_{L_2(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.3)$$

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{W}$. Используя (4.1), (4.2) и неравенство

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_n)^2 \leq n(\gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2), \quad \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

для $n = 2$, получаем

$$\mathcal{J}_0(w) \leq 2 \sum_{j=1}^m \|w_j'\|_{L_2(0, T)}^2 + 2 \left(a_1^2 \int_0^{T_1} (w_1'(q^{-1}t))^2 dt + \sum_{j=2}^m a_j^2 \int_0^{T_j} (w_j'(q^{-1}(t - (q-1)T_1)))^2 dt \right),$$

$$\mathcal{J}_1(w) \leq 2 \sum_{j=1}^m b_j^2 \|w_j\|_{L_2(0,T)}^2 + 2 \left(c_1^2 \int_0^{T_1} w_1^2(q^{-1}t) dt + \sum_{j=2}^m c_j^2 \int_0^{T_j} w_j^2(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) dt \right).$$

Учитывая (2.4) применительно к w , для $\nu = 0, 1$ вычисляем

$$\int_0^{T_1} \left(w_1^{(\nu)}(q^{-1}t) \right)^2 dt = q \|w_1^{(\nu)}\|_{L_2(0,q^{-1}T_1)}^2,$$

$$\int_0^{T_j} \left(w_j^{(\nu)}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) \right)^2 dt = q \|w_1^{(\nu)}\|_{L_2(q^{-1}T_1, T_1)}^2 + q \|w_j^{(\nu)}\|_{L_2(0, q^{-1}(T_j - (q-1)T_1))}^2, \quad j = \overline{2, m}.$$

В частности, это дает вторую оценку в (4.3). Наконец, аналогично лемме 5 в [12] нетрудно показать, что $\|w'\|_{L_2(\Gamma_m)}$ порождает норму в $\mathcal{W}$, эквивалентную норме $\|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}$. Таким образом, используя оценку

$$\mathcal{J}(w) \leq 2\tilde{\alpha}_1 (\mathcal{J}_0(w) + \mathcal{J}_1(w)), \quad \tilde{\alpha}_1 = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

получаем первое неравенство в (4.3). $\square$

Лемма 4.2. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда существует $C_2 > 0$ такое, что

$$\mathcal{J}_0(w) \geq C_2 \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Предположим от противного, что найдутся $w_{(s)} = [w_{(s),1}, \dots, w_{(s),m}] \in \mathcal{W}$ при $s \in \mathbb{N}$, такие что $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$ и

$$\mathcal{J}_0(w_{(s)}) \leq \frac{1}{s}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Используя первое выражение в (4.1) и (4.6), для всех $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int_0^{T_1} \left(w'_{(s),1}(t) \right)^2 dt + 2a_1 \int_0^{T_1} w'_{(s),1}(t) w'_{(s),1}(q^{-1}t) dt + a_1^2 \int_0^{T_1} \left(w'_{(s),1}(q^{-1}t) \right)^2 dt \leq \frac{1}{s}. \quad (4.7)$$

Применим неравенство Коши—Буняковского к среднему интегралу:

$$a_1 \int_0^{T_1} w'_{(s),1}(t) w'_{(s),1}(q^{-1}t) dt \geq -|a_1| \sqrt{q} \|w'_{(s),1}\|_{L_2(0,T_1)}^2.$$

Подставляя эту оценку в (4.7), имеем

$$(1 - |a_1| \sqrt{q})^2 \|w'_{(s),1}\|_{L_2(0,T_1)}^2 \leq \frac{1}{s} + a_1^2 q \|w'_{(s),1}\|_{L_2(q^{-1}T_1, T_1)}^2. \quad (4.8)$$

С другой стороны, согласно (4.1), для всех $j \in \overline{2, m}$, таких что $a_j \neq 0$, почти всюду на $(0, T_j)$ справедливы оценки

$$|w'_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1))| \leq |a_j|^{-1} |\ell_j^0 w(t)| + |a_j|^{-1} |w'_j(t)|. \quad (4.9)$$

Используя (4.1), (4.4), (4.6) и (4.9), при всех $s \in \mathbb{N}$ и $j \in \overline{2, m}$ получаем оценки

$$\begin{cases} \|w'_{(s),j}\|_{L_2(0,T_j)}^2 \leq \frac{1}{s}, & \text{если } a_j = 0, \\ \|w'_{(s),j}\|_{L_2((q^{-1}-1)T_1, 0)}^2 \leq \frac{2}{qa_j^2 s} + \frac{2}{qa_j^2} \|w'_{(s),j}\|_{L_2(0, (q-1)T_1)}^2, & \text{если } a_j \neq 0, \\ \|w'_{(s),j}\|_{L_2(T_{j,k+1}, T_{j,k})}^2 \leq \frac{2}{qa_j^2 s} + \frac{2}{qa_j^2} \|w'_{(s),j}\|_{L_2(T_{j,k}, T_{j,k-1})}^2, \end{cases}$$

где $k \in \{n \in \mathbb{N} : T_j > (q^n - 1)T_1\}$ и $T_{j,k} := q^{-k}(T_j - (q^k - 1)T_1)$. Учитывая, что

$$\|w'_{(s),j}\|_{L_2(q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), T_j)} = 0, \quad j = \overline{2, m},$$

из полученных неравенств следует $\|w'_{(s),j}\|_{L_2(0,T_j)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ для $j = \overline{2, m}$. Более того, если $a_j \neq 0$, то для таких j дополнительно имеем $\|w'_{(s),j}\|_{L_2((q^{-1}-1)T_1,0)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Последнее, вместе с тождествами

$$\|w'_{(s),j}\|_{L_2((q^{-1}-1)T_1,0)}^2 = \|w'_{(s),1}\|_{L_2(q^{-1}T_1,T_1)}^2, \quad j = \overline{2, m},$$

и оценками (4.8), позволяет заключить, что $\|w'_{(s),1}\|_{L_2(0,T_1)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

В итоге имеем $\|w'_{(s)}\|_{L_2(\Gamma_m)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, где $w' = [w'_1, \dots, w'_m]$. Поскольку $\|w'\|_{L_2(\Gamma_m)}$ порождает норму в $\mathcal{W}$, эквивалентную норме $\|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}$, то и $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Последнее противоречит $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\mathcal{J}(w) \geq C_3 \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Доказательство. Снова предположим от противного, что найдутся $w_{(s)} \in \mathcal{W}$, $s \in \mathbb{N}$, такие, что $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$, но теперь

$$\mathcal{J}(w_{(s)}) \leq \frac{1}{s}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Из неравенства

$$\tilde{\alpha}_2 \mathcal{J}_0(w) \leq 2\mathcal{J}(w) + 2\tilde{\alpha}_1 \mathcal{J}_1(w), \quad \tilde{\alpha}_1 = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

совместно с оценками (4.3) и (4.5) получаем

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 C_2}{2} \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \leq \mathcal{J}(w) + \tilde{\alpha}_1 C_1 \|w\|_{L_2(\Gamma_m)}^2. \quad (4.11)$$

В силу компактности вложения $W_2^1(\Gamma_m)$ в $L_2(\Gamma_m)$ найдется подпоследовательность $\{w_{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, фундаментальная в $L_2(\Gamma_m)$. Тогда неравенство (4.11) дает

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 C_2}{2} \|w_{(s_k)} - w_{(s_l)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \leq \mathcal{J}(w_{(s_k)} - w_{(s_l)}) + \tilde{\alpha}_1 C_1 \|w_{(s_k)} - w_{(s_l)}\|_{L_2(\Gamma_m)}^2.$$

Кроме того, используя (4.4) при $n = 2$ и (4.10), имеем

$$\mathcal{J}(w_{(s_k)} - w_{(s_l)}) \leq \frac{2}{s_k} + \frac{2}{s_l}.$$

Таким образом, последовательность $\{w_{(s_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ является фундаментальной в $\mathcal{W}$ и сходится к некоторой функции $w_{(0)} \in \mathcal{W}$.

В силу леммы 4.1 сходимость $w_{(s_k)}$ к $w_{(0)}$ в $\mathcal{W}$ влечет сходимость $\ell w_{(s_k)}$ к $\ell w_{(0)}$ в $L_2(\Gamma_m)$. Следовательно, в силу (4.10) будем иметь

$$\|\ell w_{(0)}\|_{L_2(\Gamma_m)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\ell w_{(s_k)}\|_{L_2(\Gamma_m)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(w_{(s_k)}) = 0,$$

т. е. $w_{(0)} \in \mathcal{W}$ удовлетворяет уравнениям

$$w'_{(0),1}(t) + a_1 w'_{(0),1}(q^{-1}t) + b_1 w_{(0),1}(t) + c_1 w_{(0),1}(q^{-1}t) = 0,$$

$$w'_{(0),j}(t) + a_j w'_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) + b_j w_{(0),j}(t) + c_j w_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) = 0, \quad j = \overline{2, m}.$$

Если для некоторого $j \in \overline{1, m}$ выполняется $a_j = c_j = 0$, то уравнение для $w_{(0),j}$ сводится к обычному дифференциальному уравнению, решение которого, с учетом принадлежности $w_{(0)}$ классу $\mathcal{W}$, дает $w_{(0),j}(t) = 0$ при $0 < t < T_j$.

Рассмотрим $j \in \overline{1, m}$, при которых $a_j^2 + c_j^2 \neq 0$. Поскольку $w_{(0),j}(t) = 0$, $j = \overline{2, m}$, при $t \geq q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)$ соответствующие уравнения на интервале $(q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), T_j)$ принимают вид

$$a_j w'_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) + c_j w_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) = 0, \quad j = \overline{2, m},$$

или

$$a_j w'_{(0),j}(t) + c_j w_{(0),j}(t) = 0, \quad q^{-2}(T_j - (q^2 - 1)T_1) < t < q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), \quad j = \overline{2, m}.$$

Отсюда с учетом $w_{(0),j}(q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)) = 0$ следует, что $w_{(0),j}(t) = 0$, $j = \overline{2, m}$, при $t \geq q^{-2}(T_j - (q^2 - 1)T_1)$. Продолжая дальше влево аналогичным образом, получаем $w_{(0),j}(t) = 0$ при $(q^{-1} - 1) < t < T_j$, $j = \overline{2, m}$. Учитывая, что $w_{(0),j}(t) = w_{(0),1}(t + T_1)$ при $(q^{-1} - 1)T_1 < t < 0$, из чего следует $w_{(0),1}(t) = 0$ для $q^{-1}T_1 < t < T_1$, аналогичными рассуждениями можем получить $w_{(0),1}(t) = 0$ для $0 < t < T_1$.

В итоге имеем $w_{(0)}(t) = 0$, что противоречит $\|w_{(0)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$. $\square$

Следующая теорема является основным результатом данного раздела.

Теорема 4.1. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда краевая задача $\mathcal{B}$ имеет единственное обобщенное решение $y \in W_2^1(\Gamma_m)$. Кроме того, существует C такое, что

$$\|y\|_{W_2^1(\Gamma_m)} \leq C|y_0|. \quad (4.12)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_m] \in W_2^1(\Gamma_m)$ такую, что

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} y_0 \left(1 - \frac{qt}{T_1}\right), & 0 \leq t < q^{-1}T_1, \\ 0, & q^{-1}T_1 \leq t \leq T_1, \end{cases} \quad \Phi_j(t) \equiv 0, \quad j = 2, \dots, m.$$

В силу леммы 3.2, для того чтобы функция $y \in W_2^1(\Gamma_m)$, удовлетворяющая условиям (2.2), (2.5), (2.6), была решением краевой задачи $\mathcal{B}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.1). Другими словами, y является решением краевой задачи $\mathcal{B}$, если и только если $x := y - \Phi \in \mathcal{W}$ и

$$B(\Phi, w) + B(x, w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.13)$$

Так как $B(w, w) = \mathcal{J}(w)$, то в силу леммы 4.3 билинейная форма $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}} := B(\cdot, \cdot)$ является скалярным произведением в $\mathcal{W}$. Кроме того, справедлива оценка

$$|B(\Phi, w)| = \alpha_1 \left| \int_0^{T_1} \ell_1 \Phi(t) \ell_1 w(t) dt \right| \leq M|y_0| \|w\|_{\mathcal{W}}, \quad (4.14)$$

где $\|w\|_{\mathcal{W}} = \sqrt{(w, w)_{\mathcal{W}}}$. Таким образом, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $x \in \mathcal{W}$ такая, что выполняется (4.13). Следовательно, краевая задача $\mathcal{B}$ имеет единственное решение $y = \Phi + x$. Кроме того, согласно (4.13) и (4.14) имеем

$$\|x\|_{\mathcal{W}} \leq M|y_0|,$$

что позволяет получить оценку (4.12). $\square$

Замечание 4.1. Утверждение теоремы 4.1 может быть дополнено следующим результатом из [18]. А именно: в случае, когда система (2.1)–(2.5) имеет запаздывающий тип (т. е. $a_j = 0$ для всех $j = \overline{1, m}$), краевая задача $\mathcal{B}$ имеет единственное решение; при этом $y \in W_2^1(\Gamma_m) \cap W_2^2(\tilde{\Gamma}_m)$ и также справедлива априорная оценка (4.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Задача об успокоении системы управления с последствием с различным числом входов и выходов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 2. — С. 189–200. — DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200).
2. Амбарцумян В. А. К теории флуктуаций яркости в Млечном пути // Докл. АН СССР. — 1944. — 44. — С. 244–247.
3. Бутерин С. А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве // Мат. заметки. — 2024. — 115, № 6. — С. 825–848. — DOI: [10.4213/mzm14223](https://doi.org/10.4213/mzm14223).
4. Бутерин С. А. Интегро-дифференциальная система управления на временном графе // Материалы Межд. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры». — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2024. — С. 71–75.
5. Бутерин С. А. Об управляемой системе на бесконечном временном дереве // Мат. заметки. — 2025. — 117, № 3. — С. 462–467. — DOI: [10.4213/mzm14540](https://doi.org/10.4213/mzm14540).
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

7. Покорный В. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2005.
8. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
9. Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последствием// Докл. РАН. — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
10. Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to Quantum Graphs. — Providence: Am. Math. Soc., 2013.
11. Buterin S. Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems// Result. Math. — 2023. — 78. — 79. — DOI: [10.1007/s00025-023-01850-5](https://doi.org/10.1007/s00025-023-01850-5).
12. Buterin S. On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation// Math. Methods Appl. Sci. — 2025. — 48. — С. 4310–4331. — DOI: [10.1002/mma.10549](https://doi.org/10.1002/mma.10549).
13. Hall A., Wake G. A functional differential equation arising in modelling of cell growth// J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math. — 1989. — 30. — С. 424–435. — DOI: [10.1017/S0334270000006366](https://doi.org/10.1017/S0334270000006366).
14. Iserles A. On the generalized pantograph functional-differential equation// Eur. J. Appl. Math. — 1993. — 4. — С. 1–38. — DOI: [10.1017/S0956792500000966](https://doi.org/10.1017/S0956792500000966).
15. Iserles A., Liu Y. On neutral functional-differential equations with proportional delays// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — 207, № 1. — С. 73–95. — DOI: [10.1006/jmaa.1997.5262](https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5262).
16. Kato T., McLeod J. Functional-differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — 77, № 6. — С. 891–937. — DOI: [10.1090/S0002-9904-1971-12805-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12805-7).
17. Langese J., Leugering G., Schmidt J. Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. — Boston: Birkhäuser, 1994.
18. Lednov A. P. On damping a control system on a star graph with global time-proportional delay// ArXiv. — 2025. — 2503.02522.
19. Lednov A. P. On damping a delay control system with global contraction on a temporal tree// ArXiv. — 2025. — 2509.02608.
20. Montrol E. Quantum theory on a network// J. Math. Phys. — 1970. — 11, № 2. — С. 635–648. — DOI: [10.1063/1.1665178](https://doi.org/10.1063/1.1665178).
21. Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission// Math. Model. — 1987. — 9, № 6. — С. 437–449.
22. Ockendon J., Tayler A. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1971. — 322. — С. 447–468. — DOI: [10.1098/rspa.1971.0078](https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078).
23. Skubachevskii A. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
24. Wang F., Yang C.-F. Traces for Sturm–Liouville operators with constant delays on a star graph// Results Math. — 2021. — 76. — 220. — DOI: [10.1007/s00025-021-01529-9](https://doi.org/10.1007/s00025-021-01529-9).

А. П. Леднов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: lednovalexsandr@gmail.com, ORCID: [0009-0002-7088-8693](https://orcid.org/0009-0002-7088-8693)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654)
 EDN: MGDOHS

UDC 517.9
 Research article

On the damping of a neutral-type control system on a temporal star graph with time-proportional delay

A. P. Lednov

Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. On a temporal star graph, we consider the problem of optimally damping a control system for a generalized pantograph equation, which is a neutral-type equation with time-proportional delay. The delay in the system propagates through an internal vertex of the graph. We study the variational problem of minimizing the energy functional, taking into account the probabilities of scenarios corresponding to different edges. We establish that the optimal trajectory satisfies Kirchhoff-type conditions at the internal vertex. We prove the equivalence of the variational problem to a certain boundary-value problem for second-order functional differential equations on the graph, and establish the unique solvability of both problems.

Keywords: neutral-type equation with delay, pantograph equation, star graph, optimal system damping, Krasovskii problem, variational problem, unique solvability.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 24-71-10003.

For citation: A. P. Lednov, “On the damping of a neutral-type control system on a temporal star graph with time-proportional delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. 71, No. 4, 642–654, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654).

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Zadacha ob uspokoении sistemy upravleniya s posledeystviem s razlichnym chislom vkhodov i vykhodov” [Damping problem for control system with delay with different number of inputs and outputs], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 2, 189–200, DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200) (in Russian).
2. V. A. Ambartsumyan, “K teorii fluktuatsiy yarkosti v Mlechnom puti” [To the theory of brightness fluctuations in the Milky Way], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1944, **44**, 244–247 (in Russian).
3. S. A. Buterin, “Ob uspokoении sistemy upravleniya proizvol’nogo poryadka s global’nym posledeystviem na dereve” [On damping a control system of arbitrary order with global aftereffect on a tree], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2024, **115**, No. 6, 825–848, DOI: [10.4213/mzm14223](https://doi.org/10.4213/mzm14223) (in Russian).
4. S. A. Buterin, “Integro-differentsial’naya sistema upravleniya na vremennom grafe” [Integro-differential control system on a time graph], *Proc. Int. Conf. Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games*, IMM UrO RAN, Ekaterinburg, 2024, pp. 71–75 (in Russian).
5. S. A. Buterin, “Ob upravlyaemoy sisteme na beskonechnom vremennom dereve” [Control system on an infinite temporal tree], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2025, **117**, No. 3, 462–467, DOI: [10.4213/mzm14540](https://doi.org/10.4213/mzm14540) (in Russian).
6. N. N. Krasovskii, *Teoriya Upravleniya Dvizheniem* [Motion Control Theory], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).



7. V. V. Pokornyy, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differentsial'nye Uravneniya na Geometricheskikh Grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
8. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, "K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem" [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
10. G. Berkolaiko and P. Kuchment, *Introduction to Quantum Graphs*, Am. Math. Soc., Providence, 2013.
11. S. Buterin, "Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems," *Result. Math.*, 2023, **78**, 79, DOI: [10.1007/s00025-023-01850-5](https://doi.org/10.1007/s00025-023-01850-5).
12. S. Buterin, "On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2025, **48**, 4310–4331, DOI: [10.1002/mma.10549](https://doi.org/10.1002/mma.10549).
13. A. Hall and G. Wake, "A functional differential equation arising in modelling of cell growth," *J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math.*, 1989, **30**, 424–435, DOI: [10.1017/S0334270000006366](https://doi.org/10.1017/S0334270000006366).
14. A. Iserles, "On the generalized pantograph functional-differential equation," *Eur. J. Appl. Math.*, 1993, **4**, 1–38, DOI: [10.1017/S0956792500000966](https://doi.org/10.1017/S0956792500000966).
15. A. Iserles and Y. Liu, "On neutral functional-differential equations with proportional delays," *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **207**, No. 1, 73–95, DOI: [10.1006/jmaa.1997.5262](https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5262).
16. T. Kato and J. McLeod, "Functional-differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 6, 891–937, DOI: [10.1090/S0002-9904-1971-12805-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12805-7).
17. J. Langese, G. Leugering, and J. Schmidt, *Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*, Birkhäuser, Boston, 1994.
18. A. P. Lednov, "On damping a control system on a star graph with global time-proportional delay," *ArXiv*, 2025, 2503.02522.
19. A. P. Lednov, "On damping a delay control system with global contraction on a temporal tree," *ArXiv*, 2025, 2509.02608.
20. E. Montrol, "Quantum theory on a network," *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, No. 2, 635–648, DOI: [10.1063/1.1665178](https://doi.org/10.1063/1.1665178).
21. S. Nicaise, "Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission," *Math. Model.*, 1987, **9**, No. 6, 437–449.
22. J. Ockendon and A. Tayler, "The dynamics of a current collection system for an electric locomotive," *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1971, **322**, 447–468, DOI: [10.1098/rspa.1971.0078](https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078).
23. A. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.
24. F. Wang and C.-F. Yang, "Traces for Sturm–Liouville operators with constant delays on a star graph," *Results Math.*, 2021, **76**, 220, DOI: [10.1007/s00025-021-01529-9](https://doi.org/10.1007/s00025-021-01529-9).

A. P. Lednov

Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: lednovalexsandr@gmail.com, ORCID: [0009-0002-7088-8693](https://orcid.org/0009-0002-7088-8693)