

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ АЛЬФА-МОДЕЛИ БИНГАМА

А. В. Звягин, Н. В. Толстой

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется разрешимость начально-краевой задачи для альфа-модели вязкопластичной жидкости типа Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным. На основе аппроксимационно-топологического подхода доказывается существование слабых решений изучаемой альфа-модели, а также устанавливается сходимость решений альфа-модели к решениям исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

Ключевые слова: альфа-модель Бингама, вязкопластичная жидкость, начально-краевая задача, аппроксимационно-топологический подход, существование слабых решений, сходимость решений.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00056.

Для цитирования: А. В. Звягин, Н. В. Толстой. Исследование разрешимости альфа-модели Бингама // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 604–625, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение однородной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [2]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где $v(t, x)$ — неизвестная вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p(t, x)$ — неизвестная функция давления, $f(t, x)$ — заданная плотность внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,n}^{i=1,n}$ — неизвестный девиатор тензора напряжений.

Для корректной постановки эту систему дополняют реологическим (определяющим) соотношением, которое указывает тип изучаемой жидкости. В данной работе рассматриваются вязкопластические жидкости. Главная особенность вязкопластических жидкостей проявляется в задержке начала течения до тех пор, пока действующие напряжения τ не превысят некоторую величину τ^* , называемую пределом текучести, или начальным напряжением сдвига. При $\tau > \tau^*$ структура жидкости разрушается, а при обратном снижении напряжения $\tau \leq \tau^*$ — восстанавливается. Этот процесс происходит достаточно быстро. Примером вязкопластических жидкостей служат концентрированные суспензии [25]. Наличие у вязкопластических жидкостей предела текучести дало им второе название, широко используемое в английской литературе, — *yield-stress liquids* [28].

Заметим, что в 1890 г. профессор Новороссийского университета Федор Никифорович Шведов первым обнаружил отклонение свойств растворов желатина от теории Ньютона и для объяснения полученных результатов ввел понятие пластичности [24]. За рубежом этот тип жидкостей ассоциируется с именем Бингама, предложившим в 1922 г. для описания течения красок понятие предела текучести [16]. Реологическое соотношение для таких моделей имеет следующий вид:

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})_{j=1,n}^{i=1,n}$ — тензор скорости деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $\mu > 0$ — коэффициент вязкости среды. Изучение таких математических моделей было начато достаточно давно (см., например, [10, 12, 19, 27]).

В данной работе для системы уравнений (1.1), (1.2) изучается альфа-модель. Альфа-модели представляют собой своего рода регуляризованные приближенные системы, которые зависят от некоторого положительного параметра α , причем регуляризация осуществляется путем некоторой фильтрации вектора скорости, который стоит в аргументе нелинейного члена (см. [8, 20]).

Интерес к изучению альфа-моделей в первую очередь связан с их применением к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости, а также с лучшими по сравнению с исходными моделями численными результатами. Отметим, что при изучении турбулентного потока жидкости одной из определяющих характеристик является большой диапазон пространственных и временных масштабов. Это характерное свойство является источником затруднений, как в теоретических исследованиях, так и в вычислениях на практике. Более того, во многих практических приложениях физически значимые характеристики потока часто сосредоточены на больших масштабах по пространству, как это видно, например, при численном гидродинамическом прогнозировании погоды. В связи с этим было приложено немало усилий для моделирования крупномасштабной динамики турбулентного течения путем фильтрации более мелких масштабов.

Как правило, такая фильтрация происходит за счет применения обратного оператора Гельмгольца к первому или второму аргументу билинейного оператора системы уравнений движения среды (или ко всему оператору). Параметр альфа имеет размерность квадрата длины и определяет масштаб, при котором высокочастотные (по пространству) моды будут отфильтровываться. Соответствующие регуляризованные системы принято называть *альфа-моделями*.

При этом в теоретических исследованиях идея использования такого рода аппроксимаций впервые возникла в работе Ж. Лере [21] (в данной работе Ж. Лере использовал общий вид ядра фильтрации) для доказательства существования слабого решения системы уравнений Навье—Стокса. Позднее на этой идее были построены различные альфа-модели для уравнений Эйлера [17, 18], Навье—Стокса [6, 15], Лере [3, 4], Джеффриса—Олдройда [23], дробного Фойгта [5, 7] и др. Данная работа продолжает изучение альфа-моделей и рассматривает разрешимость следующей начально-краевой задачи для альфа-модели движения жидкости Бингама:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad (1.3)$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (1.6)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (1.7)$$

В работе рассматривается задача (1.3)–(1.7) с периодическим условием по пространственной переменной, которую в дальнейшем будем называть периодической (по пространственной переменной) начально-краевой задачей для альфа-модели Бингама. Для формулировки основного

результата сначала введем необходимые функциональные пространства и дадим определение слабого решения изучаемой начально-краевой задачи (1.3)–(1.7).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

Введем необходимые обозначения. Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^n (0, l_i) \subset \mathbb{R}^n$. Через $(C_{per}^\infty)^n$ обозначим пространство периодических вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и с периодами $l_i = 1, \dots, n$. Введем множество

$$\Phi = \left\{ \phi \in (C_{per}^\infty)^n : \int_{\Omega} \phi \, dx = 0, \operatorname{div} \phi = 0 \right\}.$$

Через V^1 обозначим замыкание Φ по норме $W_2^1(\Omega)$, V^2 — замыкание Φ по норме $W_2^2(\Omega)$. Через V^0 обозначим замыкание Φ по норме $L_2(\Omega)$. Через V^{-1} обозначим сопряженное к V^1 пространство.

Обозначим через $D(A) = V^2$ и рассмотрим на $D(A)$ оператор $A : Av = -\pi \Delta v$, где π — проектор Лере, $\pi : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$, $v \in D(A)$. Оператор A — монотонный линейный самосопряженный оператор, и для каждого $\beta \in \mathbb{R}$ можно определить A^β с областью определения $D(A^\beta) \subset V^0$ (см. [11]). Обозначим $V^\beta = D(A^{\beta/2})$. Можно показать, что оператор A является изоморфизмом из $V^{\beta+2}$ в V^β . Подробное определение пространств, а также их свойства можно найти в [11].

Одним из основных функциональных пространств является пространство

$$W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0, T; V^{-1})}$.

Обозначим через $\Delta_\alpha : V^{\beta+2} \rightarrow V^\beta$, $\beta \geq 0$, оператор $\Delta_\alpha = (J + \alpha^2 A)$, где $J = \pi I$, I — тождественный оператор. В силу [11, лемма 4.4.4] оператор Δ_α обратим. Применим проектор Лере $\pi : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2 \Delta)u$ для $\beta = 3$ и выразим из последнего равенства u : $u = (J + \alpha^2 A)^{-1}v = \Delta_\alpha^{-1}v$. Так как $v(t) \in V^1$, получим, что $u(t) \in V^3$ при п.в. $t \in [0, T]$.

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 2.1. Пара функций $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$ называется *слабым решением* начально-краевой задачи (1.3)–(1.7) для альфа-модели Бингама, если для всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad (2.1)$$

а также реологическому соотношению (1.4) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Здесь символ «:» для двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ обозначает $A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы:

Теорема 2.1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начально-краевая задача (1.3)–(1.7) имеет хотя бы одно слабое решение $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Кроме того, если рассмотреть семейство альфа-моделей (1.3)–(1.7), зависящих от параметра α_m , то существует последовательность решений v_m этого семейства, которая при стремлении α_m к нулю сходится к слабому решению исходной начально-краевой задачи (см. определение (7.1)).

Для доказательства разрешимости рассматриваемой начально-краевой задачи (1.3)–(1.7) будет использоваться аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики (см. [9]). Для этого вводится семейство вспомогательных задач (раздел 3), зависящих от малого

параметра, доказываются априорные оценки решений (раздел 4) и на основе теории топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи (раздел 5). Далее, для доказательства разрешимости исследуемой альфа-модели на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход (раздел 6). В заключение показывается, что последовательность решений исследуемой альфа-модели сходится к решению исходной модели (раздел 7).

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

«Приблизим» реологическое соотношение модели Бингама (1.4) следующим неньютоновским соотношением:

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}}, \quad \delta > 0.$$

При такой аппроксимации реологического соотношения (1.4) мы можем исключить в постановке задачи неизвестную σ и рассматривать задачу только о нахождении скорости v . При этом также аппроксимируем интегральное равенство (2.1), добавив в него слагаемое

$$\delta \int_{\Omega} A^2 v A \varphi dx.$$

Таким образом, для доказательства разрешимости исходной начально-краевой задачи исследуется следующая аппроксимационная задача (для фиксированного $\delta > 0$):

Задача 3.1. Найти функцию $v \in W_2 = \{v : v \in L_2(0, T; V^4), v' \in L_2(0, T; V^{-2})\}$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in V^2$ и почти всех $t \in (0, T)$ соотношению

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, \mathcal{E}(v)\}} dx + \delta \int_{\Omega} A^2 v A \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned}$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Перепишем аппроксимационную задачу в операторном виде. Для этого введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} A : L_2(0, T; V^1) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle Av(t), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi dx; \\ A^3 : L_2(0, T; V^4) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle A^3 v(t), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} A^2 v A \varphi dx; \\ K : L_4(0, T; V^1) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle K(v(t)), \varphi \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx; \\ B_{\delta} : L_2(0, T; V^1) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle B_{\delta}(v)(t), \varphi \rangle &= \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx. \end{aligned}$$

Заметим, что аппроксимационную задачу 3.1 можно записать в виде операторного уравнения:

$$v' + \mu Av + B_{\delta}(v) - K(v) + \delta A^3 v = f, \quad (3.1)$$

решение которого должно удовлетворять начальному условию $v(0) = v_0$.

Рассмотрим свойства операторов из уравнения (3.1). Отметим, что для исследуемых операторов можно доказать и более сильные результаты, чем приведенные ниже, но мы приводим только те, которые будут в дальнейшем использоваться. Для удобства через C мы будем обозначать константы, конкретное значение которых для нас не важно. Если важен точный вид константы, то она будет выписываться в явном виде.

Лемма 3.1. Для оператора A имеют место следующие свойства:

1. Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ функция Av принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка

$$\|Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}. \quad (3.2)$$

2. Для любой функции $v \in W_2$ функция Av принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$, кроме того, оператор $A : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ вполне непрерывен.

Доказательство данной леммы см. в [11].

Лемма 3.2. Для оператора K имеют место следующие свойства:

1. Отображение $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$ непрерывно, и для него имеет место оценка

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C\|v\|_{L_4(\Omega)}^2. \quad (3.3)$$

2. Для любого $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$ функция $K(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$, и отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно.
3. Для любой функции $v \in W_2$ функция $K(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-2})$, отображение $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ является вполне непрерывным, и для него имеет место оценка

$$\|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C\|v\|_{L_2(0, T; V^1)}\|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}. \quad (3.4)$$

Доказательство.

1. Для любых $v \in L_4(\Omega)$, $\varphi \in V^1$, используя неравенство Гельдера, мы получим

$$\begin{aligned} |\langle K(v), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1}v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |((I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v)_i v_j|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |((I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v)_i|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |v_j|^4 dx \right)^{1/4} \|\varphi\|_{V^1} \leq C\|(I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v\|_{L_4(\Omega)}\|v\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} \leq \\ &\leq C\|v\|_{L_4(\Omega)}^2\|\varphi\|_{V^1}, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (3.3). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1, 14]):

$$\|(I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad p > 1. \quad (3.5)$$

Покажем непрерывность отображения $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m), \varphi \rangle - \langle K(v^0), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n ((\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|K(v^m) - K(v^0)\|_{V^{-1}} \leq \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Вновь используя неравенство (3.5), преобразуем правую часть последнего неравенства:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^0 + (\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^0 - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|\Delta_\alpha^{-1} v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|\Delta_\alpha^{-1} v^m - \Delta_\alpha^{-1} v^0\|_{L_4(\Omega)} \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) \leq \\
&\leq C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} + \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) = \\
&= C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|K(v^m) - K(v^0)\|_{V^{-1}} \leq C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}. \quad (3.6)$$

Полагая $v^m \rightarrow v^0$ в $L_4(\Omega)$, получаем непрерывность отображения $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$.

2. Пусть $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$. В силу оценки (3.3) при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-1}} \leq C \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2.$$

Возведем это неравенство в квадрат, проинтегрируем по t от 0 до T и оценим правую часть сверху:

$$\int_0^T \|K(v)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq C^2 \int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 dt = C^2 \|v\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 < \infty.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства конечна, то конечна и левая часть. Таким образом, для $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$ мы имеем, что $K(v) \in L_2(0, T; V^{-1})$. Переходим теперь к доказательству непрерывности отображения $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$.

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0, T; L_4(\Omega))$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$. Из неравенства (3.6) получим, что при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка

$$\|K(v^m)(t) - K(v^0)(t)\|_{V^{-1}} \leq C \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T . Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|K(v^m)(t) - K(v^0)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \\
&\leq C^2 \left(\int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})^4 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v^m(t) - v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})^4 dt \leq 8 \int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}^4) dt = \\
&= 8 \left(\|v^m\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 + \|v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 \right).
\end{aligned}$$

Имеем в итоге

$$\begin{aligned}
\|K(v^m) - K(v^0)\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 &\leq 2\sqrt{2}C^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 \left(\|v^m\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 + \|v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq 2\sqrt{2}C^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 \left(\|v^m\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 + \|v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned}$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это и значит, что отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно.

3. Для доказательства нам потребуется следующий результат (см. [13]):

Теорема 3.1. Пусть V, H, V^* — тройка гильбертовых пространств, таких что $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$. Здесь вложения непрерывны, H^* и V^* — сопряженные пространства, пространства H и H^* отождествлены по теореме Рисса. Если функция v принадлежит пространству

$L_2(0, T; V)$, а ее производная v' принадлежит $L_2(0, T; V^*)$, то функция v почти всюду равна некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H (то есть функции из $C([0, T], H)$).

В силу данной леммы каждая функция $v \in W_2$ принадлежит $C([0, T]; V^0)$. Поэтому каждая функция из W_2 принадлежит не только $L_2(0, T; V^2)$, но и $L_2(0, T; V^2) \cap L_\infty(0, T; V^0)$. Далее заметим, что имеет место вложение (см., например, [22]): $L_2(0, T; V^2) \cap L_\infty(0, T; V^0) \subset L_4(0, T; V^1)$. Таким образом, для пространства W_2 имеет место вложение:

$$W_2 \subset Y = \{v : v \in L_4(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}.$$

Опять воспользуемся следующим результатом из [13]:

Теорема 3.2. Пусть X_0, F, X_1 — тройка банаховых пространств, удовлетворяющих условию $X_0 \subset F \subset X_1$. Здесь вложения непрерывны, пространства X_0, X_1 — рефлексивны, вложение $X_0 \rightarrow F$ — компактно. Пусть $T > 0$ — фиксированное число и α_0, α_1 — два конечных числа, таких что $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$. Предположим, что $\mathcal{Y} = \{v : v \in L_{\alpha_0}(0, T; X_0); v' \in L_{\alpha_1}(0, T; X_1)\}$ — пространство с нормой $\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{L_{\alpha_0}(0, T; X_0)} + \|v'\|_{L_{\alpha_1}(0, T; X_1)}$. Тогда вложение пространства $\mathcal{Y}$ в пространство $L_{\alpha_0}(0, T; X_0)$ компактно.

В силу последней теоремы имеет место компактное вложение: $Y \rightarrow L_4(0, T; L_4(\Omega))$. Таким образом, действие отображения K можно представить следующим образом:

$$W_2 \subset Y \rightarrow L_4(0, T; L_4(\Omega)) \xrightarrow{K} L_2(0, T; V^{-1}) \subset L_2(0, T; V^{-2}).$$

Здесь первое и последнее вложения непрерывны, второе вложение вполне непрерывно, и отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно в силу пункта 2 леммы 3.2. Таким образом, отображение $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ вполне непрерывно.

Оценим теперь $\|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-2})}$. Имеем:

$$\begin{aligned} |\langle K(v), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |(\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i| |v_j| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i\|_{L_4(\Omega)} \|v_j\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq C \|v\|_{L_4(\Omega)} \|v\|_{V^0} \|\varphi\|_{V^2}, \end{aligned}$$

откуда для любой функции $v \in W_2$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка:

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-2}} \leq C \|v(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v(t)\|_{V^0}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0, T]$, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|K(v)(t)\|_{V^{-2}}^2 dt &\leq C^2 \int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 \|v(t)\|_{V^0}^2 dt \leq \\ &\leq C^2 \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 dt \leq C \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}^2, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое неравенство (3.4). $\square$

Лемма 3.3. Для оператора B_δ имеют место следующие свойства:

1. Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ функция $B_\delta(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-2})$, оператор $B_\delta : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывен, и имеет место оценка

$$\|B_\delta(v)(t)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C, \quad (3.7)$$

где C — константа, не зависящая от функции v и δ .

2. Для любой функции $v \in W_2$ функция $B_\delta(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-2})$, и оператор $B_\delta : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ вполне непрерывен.

Доказательство.

1. Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ при любом $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle B_\delta(v)(t), \varphi \rangle| &= \left| \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|)} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| \leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}_{ij}(v)(t)|}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|)} |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)| dx \leq \\ &\leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}(v)(t)|}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|)} |\mathcal{E}(\varphi)| dx \leq \tau^* C \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\frac{|b|}{\max(\delta, |b|)} \leq 1$. Следовательно, при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\|B_\delta(v)(t)\|_{V^{-2}} \leq \tau^* C.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , мы и получим, что $B(v) \in L_2(0, T; V^{-2})$ и имеет место требуемая оценка (3.7). Докажем непрерывность оператора $B_\delta : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$.

Пусть последовательность v_n сходится к некоторой функции v_0 в $L_2(0, T; V^1)$. Тогда при почти всех $t \in (0, T)$ для произвольного $\varphi \in V^2$ получим:

$$\begin{aligned} &|\langle B_\delta(v_n)(t) - B_\delta(v_0)(t), \varphi \rangle| = \\ &= \left| \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_n)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx - \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| \leq \\ &\leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_n)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \right) \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| + \\ &+ \tau^* \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \right) \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| \leq \\ &\leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}_{ij}(v_n)(t) - \mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)|}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)| dx + \\ &+ \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)| \left| \frac{1}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} - \frac{1}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \right| |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)| dx \leq \\ &\leq \frac{\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\mathcal{E}(v_n - v_0)(t)| |\mathcal{E}(\varphi)| dx + \frac{\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} | |\mathcal{E}(v_0)(t)| - |\mathcal{E}(v_n)(t)| | |\mathcal{E}(\varphi)| dx \leq \\ &\leq \frac{2\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\mathcal{E}(v_n - v_0)(t)| |\mathcal{E}(\varphi)| dx \leq \frac{2\tau^* C}{\delta} \|v_n(t) - v_0(t)\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности φ получаем, что

$$\|B_\delta(v_n)(t) - B_\delta(v_0)(t)\|_{V^{-2}} \leq \frac{2\tau^* C}{\delta} \|v_n(t) - v_0(t)\|_{V^1}.$$

Возведя в квадрат и проинтегрировав, получим:

$$\|B_\delta(v_n) - B_\delta(v_0)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq \frac{2\tau^* C}{\delta} \|v_n - v_0\|_{L_2(0, T; V^1)}.$$

То есть $B_\delta(v_n) \rightarrow B_\delta(v_0)$ в $L_2(0, T; V^{-2})$.

2. Аналогично доказательству пункта 3 леммы 3.2 имеем компактное вложение $W_2 \subset Y \subset L_2(0, T; V^1)$. Тогда действие оператора $B_\delta : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ можно представить в виде следующей композиции: $W_2 \subset Y \subset L_2(0, T; V^1) \xrightarrow{B_\delta} L_2(0, T; V^{-2})$. Здесь первое вложение непрерывно,

второе вложение компактно, а отображение B_δ в силу первого пункта теоремы непрерывно. Таким образом, отображение $B_\delta : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывно как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного отображения. $\square$

Введем также операторы L и N с помощью равенств

$$\begin{aligned} L : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, & L(u) &= (v' + \delta A^3 + \mu Av, v|_{t=0}), \\ N : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, & N(v) &= (B_\delta(v) - K(v), 0). \end{aligned}$$

Лемма 3.4. *Операторы L и N имеют следующие свойства:*

1. оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^1$ непрерывно обратим;
2. оператор $N : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^1$ компактен.

Доказательство.

1. Непрерывная обратимость оператора следует из приведенной ниже теоремы о разрешимости абстрактной параболической задачи.

Теорема 3.3. *Для любой правой части $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и начального условия $v_0 \in V^1$ задача*

$$\begin{cases} v' + \delta A^3 v + \mu Av = f, \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение v в пространстве

$$W_3 = \{v : v \in L_2(0, T; V^4), v' \in L_2(0, T; V^{-2})\},$$

непрерывно зависящее от f и v_0 . Для решения также имеет место оценка

$$\delta \|v\|_{L_2(0, T; V^4)} \leq \sqrt{2\delta + 1} (\|v_0\|_{V^1} + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}). \quad (3.8)$$

Доказательство этой теоремы проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики (см. [9]). Сначала рассматриваемая задача аппроксимируется (в уравнение добавляется член $\varepsilon A^3 v'$) и доказывается существование решения приближенного уравнения в пространстве $\{v : v \in C([0, T]; V^4), v' \in L_2(0, T; V^4)\}$. Затем на основе априорных оценок решений, не зависящих от ε , показывается, что из последовательности решений можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся слабо к решению исходной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Единственность решения получается на основе неравенства Гронуола—Беллмана.

Полное изложение доказательства здесь не приводится в силу своего объема.

2. Компактность оператора $N : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^1$ непосредственно вытекает из компактности его первой компоненты (каждое слагаемое компактно). $\square$

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Помимо вспомогательной задачи 3.1, рассмотрим семейство операторных уравнений

$$v' + \delta A^3 v + \mu Av + \lambda B_\delta(v) - \lambda K(v) = \lambda f, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad (4.1)$$

решение которых удовлетворяет начальному условию $v(0) = \lambda v_0$. Заметим, что при $\lambda = 1$ задача (4.1) совпадает с (3.1). Тогда задача (4.1) с начальным условием $v(0) = \lambda v_0$ может быть переписана в виде

$$v = \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v)), \quad \text{где } \lambda \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Для решения $v \in W_2$ семейства (4.2) имеют место следующие оценки:*

$$\|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2, \quad (4.3)$$

$$\mu \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2, \quad (4.4)$$

$$\|v\|_{L_r(0, T; W_2^{1+q}(\Omega))} \leq C, \quad (4.5)$$

$$\delta \|v\|_{L_2(0, T; V^4)} \leq C, \quad (4.6)$$

$$\|v'\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C. \quad (4.7)$$

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (4.2). Тогда в силу приведенных выше рассуждений v является решением (4.1) и удовлетворяет начальному условию $v(0) = \lambda v_0$.

Применим обе части (4.1) к функции $v \in W_2$. Имеем

$$\langle v' + \delta A^3 v + \mu A v - \lambda K(v) + \lambda B_\delta(v), v \rangle = \langle \lambda f, v \rangle.$$

Вспоминая определения операторов, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \langle v', v \rangle + \delta \int_{\Omega} A^2 v A v \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx - \lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx + \\ + \lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)|)} \, dx = \lambda \langle f, v \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} \langle v', v \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2; \quad \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx = \mu \|v\|_{V^1}^2; \\ \delta \int_{\Omega} A^2 v A v \, dx &= -\delta \int_{\Omega} \Delta(Av) Av \, dx = \delta \int_{\Omega} \nabla(Av) : \nabla(Av) \, dx = \delta \|v\|_{V^3}^2; \\ - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx &= -\frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial(v_j v_j)}{\partial x_i} \, dx = \\ &= \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial(\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_i} v_j v_j \, dx = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \operatorname{div} u v_j v_j \, dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2 + \delta \|v\|_{V^3}^2 + \mu \|v\|_{V^1}^2 + \lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}^2(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \, dx = \lambda \langle f, v \rangle.$$

Воспользуемся в правой части неравенствами Юнга и Коши:

$$\lambda \langle f, v \rangle = \lambda \|f\|_{V^{-1}} \|v\|_{V^1} \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^{-1}}^2}{2\mu} + \frac{\lambda\mu}{2} \|v\|_{V^1}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\mu}{2} \|v\|_{V^1}^2.$$

Заметим, что

$$\lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}^2(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \, dx \geq 0.$$

Тогда получаем оценку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2 + \delta \|v\|_{V^3}^2 + \frac{\mu}{2} \|v\|_{V^1}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от 0 до $t \in [0, T]$, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v(t)\|_{V^0}^2 - \frac{1}{2} \|v(0)\|_{V^0}^2 + \delta \int_0^t \|v(s)\|_{V^3}^2 \, ds + \frac{\mu}{2} \int_0^t \|v(s)\|_{V^1}^2 \, ds \leq \\ \leq \frac{1}{2\mu} \int_0^t \|f(s)\|_{V^{-1}}^2 \, ds \leq \frac{1}{2\mu} \int_0^T \|f(s)\|_{V^{-1}}^2 \, ds = \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L^2(0,T;V^{-1})}^2, \end{aligned}$$

которую можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{V^0}^2 + \delta \int_0^t \|v(s)\|_{V^3}^2 ds + \frac{\mu}{2} \int_0^t \|v(s)\|_{V^1}^2 ds \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2.$$

Так как каждое слагаемое в левой части последнего неравенства неотрицательно, то получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{V^0}^2 &\leq \frac{1}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2 \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2 \leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2; \\ \mu \int_0^t \|v(s)\|_{V^1}^2 ds &\leq \frac{1}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2 \leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Правые части этих неравенств не зависят от t , поэтому можно перейти к $\max$ по $t \in [0, T]$ в левой части:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^0}^2 &\leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2; \\ \mu \int_0^T \|v(s)\|_{V^1}^2 ds &\leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следуют требуемые неравенства (4.3) и (4.4).

Теперь применим к уравнению (4.1) пробную функцию Av . Получим:

$$\begin{aligned} \langle v', Av \rangle + \delta \int_{\Omega} A^2 v A^2 v dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla Av dx - \lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} dx + \\ + \lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)|)} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx = \lambda \langle f, Av \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем и оценим слагаемые в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} \langle v', Av \rangle &= \langle A^{1/2} v', A^{1/2} v \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2; \quad \delta \int_{\Omega} A^2 v A^2 v dx = \delta \|v\|_{V^4}^2; \\ \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla Av dx &= \mu \int_{\Omega} \nabla v \nabla v dx = \mu \|v\|_{V^2}^2; \\ \lambda \langle f, Av \rangle &= \lambda \|f\|_{V^0} \|Av\|_{V^0} \leq \|f\|_{V^0} \|v\|_{V^2} \leq \frac{\mu}{2} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{\|f\|_{V^0}^2}{2\mu}; \\ - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_i} v_j \Delta v_j dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Delta v_j dx = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) v_j \Delta v_j dx - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx = \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) dx = \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx = - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу непрерывности вложения $W_1^1(\Omega) \subset L_{3/2}(\Omega)$ получаем:

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} dx = \lambda \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx \leq \\ & \leq \sum_{i,j,k=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \right|^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right|^3 dx \right)^{1/3} \leq \|\nabla v\|_{L_3(\Omega)}^3 = \\ & = \|\nabla v\|_{L_{3/2}(\Omega)}^{3/2} \leq C \|\nabla |\nabla v|^2\|_{L_1(\Omega)}^{3/2} \leq C \|\nabla^2 v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \cdot \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \leq \frac{3\mu}{4} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V^1}^6. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим следующее слагаемое:

$$\begin{aligned} -\lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx &= -\lambda \tau^* \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \mathcal{E}_{ij}(v) dx = \\ &= \lambda \tau^* \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) dx. \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию $\frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}}$ как сложную функцию от $\mathcal{E}(v)$ (суперпозицию функции $f(x) = \frac{x}{\max\{\delta, x\}}$ и функции $g(v) = \mathcal{E}(v)$), получим:

$$\lambda \tau^* \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx = \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай $\delta \geq |\mathcal{E}(v)|$:

$$\begin{aligned} \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx &= \frac{\lambda \tau^*}{\delta} \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx = \\ &= \frac{\lambda \tau^*}{\delta} \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \delta_{pq}^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{pq}(v) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) dx = \frac{\lambda \tau^*}{\delta} \|\nabla \mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Второй случай $\delta \leq |\mathcal{E}(v)|$:

$$\begin{aligned} \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx &= \\ &= \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx = \\ &= \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{E}(v)|} \left(\delta_{pq}^{ij} - \frac{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{pq}}{|\mathcal{E}(v)|^2} \right) \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx \geq 0. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$\lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx \geq 0.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2 + \mu \|v\|_{V^2}^2 + \delta \|v\|_{V^4}^2 &\leq \frac{3\mu}{4} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V^1}^6 + \frac{\mu}{8} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{2\|f\|_{V^0}^2}{\mu}; \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2 + \frac{\mu}{8} \|v\|_{V^2}^2 &\leq \frac{2}{\mu} \|f\|_{V^0}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V^1}^6. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Разделим это неравенство на $(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2$. Получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} \|v\|_{V_1}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} + \frac{\mu}{8} \frac{\|v\|_{V_2}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{2}{\mu} \frac{\|f\|_{V_0}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} + \frac{C^4}{4\mu^3} \frac{\|v\|_{V_1}^6}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2}.$$

Так как $\frac{\|f\|_{V_0}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \|f\|_{V_0}^2$ и $\frac{\|v\|_{V_1}^6}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{\|v\|_{V_1}^2 \|v\|_{V_1}^4}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \|v\|_{V_1}^2$, то полученное неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V_1}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} + \frac{\mu}{8} \frac{\|v(t)\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{2}{\mu} \|f\|_{V_0}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V_1}^2.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до T :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V_1}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt + \frac{\mu}{8} \int_0^T \frac{\|v(t)\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt &\leq \frac{2}{\mu} \int_0^T \|f(t)\|_{V_0}^2 dt + \frac{C^4}{4\mu^3} \int_0^T \|v(t)\|_{V_1}^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{C^4}{4\mu^2} \left(\frac{1}{\mu^2} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{\mu} \|v(t)\|_{V_0}^2 \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|v(T)\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V_1}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 + \|v(T)\|_{V_1}^2)^2} - \frac{1}{(1 + \|v(0)\|_{V_1}^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|v(0)\|_{V_1}^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|v(T)\|_{V_1}^2)^2}. \end{aligned}$$

Получим неравенство

$$\int_0^T \frac{\|v(t)\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt \leq C, \quad (4.9)$$

где $C = \frac{8}{\mu} \left(\frac{2}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{C^4}{4\mu^2} \left(\frac{1}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V_0}^2 \right) + 1 \right)$.

Теперь выберем r, p, q так, чтобы: $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $r = \frac{2}{1+2q}$, а $p = \frac{2}{r(1-q)}$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. По интерполяционному неравенству и неравенству Гельдера получаем:

$$\int_0^T \|v\|_{W_2^{1+q}}^r dx \leq \int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{qr} \|v\|_{W_2^2}^{r(1-q)} dx \leq \left(\int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{rp(1-q)} dx \right)^{1/p} \left(\int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{qr'r} dx \right)^{1/p'}.$$

Рассмотрев коэффициенты так, что $rp(1-q) = 2$ и $rqp' = \frac{2}{3}$, получим:

$$\int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{\frac{2}{3}} dx \leq C \left(\int_0^T \frac{\|v\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(s)\|_{V_1}^2)^2} ds \right)^{1/3} \left(\int_0^T (1 + \|v\|_{V_2}^2) ds \right)^{2/3}.$$

Первый множитель ограничен вследствие (4.9), второй из-за (4.8). Отсюда получаем оценку:

$$\|v\|_{L_r(0,T;W_2^{1+q})} \leq C.$$

Для получения оценок (4.6) и (4.7) заметим, что если v является решением операторного уравнения (3.1), то имеет место равенство:

$$v' + \delta A^3 v + \mu A v = -\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f.$$

Следовательно:

$$\|v' + \delta A^3 v + \mu A v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} = \|-\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-2})}. \quad (4.10)$$

В силу неравенства (3.8), левую часть можно оценить следующим образом:

$$\delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} \leq \sqrt{2\delta+1} (\|v_0\|_{V^1} + \|v' + \delta A^3 v + \mu A\|_{L_2(0,T;V^2)}),$$

откуда

$$\|v' + \delta A^3 v + \mu A\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \geq \frac{\delta}{\sqrt{2\delta+1}} \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} - \|v_0\|_{V^1}.$$

Правую часть (4.10) в силу неравенств (3.3), (3.7) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \| -\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f \|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq \lambda \|B_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \lambda \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \\ & + \lambda \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq \|B_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq C + C\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \\ & + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C\|f\|_{L_2(0,T;V^0)} \leq C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\sqrt{2\delta+1}} \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} \leq C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(C \frac{\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^1}.$$

Умножая последнее неравенство на $\sqrt{2\delta+1}$, получим

$$\begin{aligned} \delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} & \leq \sqrt{2\delta+1} \left(C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(C \frac{\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^1} \right) \leq \\ & \leq \sqrt{3} \left(C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(C \frac{\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^1} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta \leq 1$. Обозначив последнюю часть неравенства через C , мы получаем требуемое неравенство (4.6).

Аналогично $v' = -\delta A^3 v - \mu A v - \lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f$. Отсюда

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} & = \| -\delta A^3 v - \mu A v - \lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f \|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq \delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} + \\ & + \mu C \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ & \leq C + \mu C \sqrt{\frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2} + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right). \end{aligned}$$

Обозначив правую часть последнего неравенства через C , мы получим требуемую оценку на (4.7). Отметим, что константа C в этой оценке не зависит от δ . $\square$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теперь мы готовы сформулировать теорему о существовании решений операторного уравнения (3.1). Для ее доказательства будет использоваться теория топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

Теорема 5.1. *Для операторного уравнения (3.1) существует хотя бы одно решение $v \in W_2$.*

Доказательство. По теореме 4.1 все решения семейства операторных уравнений (4.2) удовлетворяют априорным оценкам (4.6) и (4.7). Из оценок (4.6) и (4.7) следует, что $\|v\|_{W_2} \leq C$, где $C > 0$ — некоторая постоянная. Тогда все решения операторного уравнения лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C + 1$.

По лемме 3.4 оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1$ непрерывно обратим, тогда ни одно решение семейства уравнений (4.2) не принадлежит границе того же шара B_R .

В силу лемм 3.2, 3.3, 3.4 и доказанных свойств операторов $K(v)$, B_δ , $N(v)$, оператор $I - \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v)) : L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1 \rightarrow W_2$ является вполне непрерывным.

Таким образом, вполне непрерывное векторное поле $v - \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v))$ не вырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена степень Лере—Шаудера

$$\deg_{LS}(I - \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v)), B_R, 0).$$

По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получаем, что

$$\deg_{LS}(I - L^{-1}((f, v_0) - N(v)), B_R, 0) = \deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1.$$

Так как эта степень отлична от нуля, то существует хотя бы одно решение $v \in W_2$ операторного уравнения (3.1). Таким образом, из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача 3.1 имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$. $\square$

6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

В этом разделе мы перейдем в аппроксимационной задаче 3.1 к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Тем самым будет доказана теорема 2.1.

В силу теоремы 5.1 для каждого $\delta > 0$ существует решение аппроксимационной задачи 3.1. То есть существует $v \in W_2$, которая для любого $\varphi \in V^2$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\begin{aligned} \langle v'_\delta, \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v_\delta)_i (v_\delta)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v_\delta : \nabla \varphi dx + \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}} dx + \\ + \delta \int_{\Omega} A^2 v_\delta A \varphi dx = \int_{\Omega} f_\delta \varphi dx \end{aligned}$$

и начальному условию $v_\delta(0) = v_0$.

В силу априорных оценок (4.3)–(4.7) имеют место следующие сходимости:

$$\begin{aligned} v_\delta \rightarrow v \text{ слабо в } L_2(0, T; V^1); \quad v_\delta \rightarrow v \text{ сильно в } L_2(0, T; L_4(\Omega)); \\ v_\delta \rightarrow v \text{ сильно в } L_r(0, T; V^1); \quad v'_\delta \rightarrow v' \text{ слабо в } L_2(0, T; V^{-2}); \\ \delta v_\delta \rightarrow u \text{ слабо в } L_2(0, T; V^4). \end{aligned}$$

Из указанных сходимостей и в силу непрерывности оператора $\Delta_{\alpha}^{-1} : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^3)$ получим, что:

$$\begin{aligned} \langle v'_\delta, \varphi \rangle &\rightarrow \langle v, \varphi \rangle \text{ при } \delta \rightarrow 0; \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v_\delta)_i (v_\delta)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx &\rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \text{ при } \delta \rightarrow 0; \\ \mu \int_{\Omega} \nabla v_\delta : \nabla \varphi dx &\rightarrow \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \text{ при } \delta \rightarrow 0; \\ \delta \int_{\Omega} A^2 v_\delta A \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} A^2 w A \varphi dx \text{ при } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Однако в смысле распределений $\delta A^2 v$ сходится к нулю. Отсюда, в силу единственности предела, $w = 0$.

Далее, так как $\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}}$ ограничено сверху константой, не зависящей от δ , то это выражение сходится к некоторой функции w слабо, например, в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$ для любого $1 < p < \infty$.

Покажем теперь, что на самом деле

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v_\delta : \nabla \varphi dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}} dx \rightarrow \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx$$

при $\delta \rightarrow 0$ для функции $\sigma \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющей при почти всех $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ реологическому соотношению (1.4).

Для этого введем последовательность функций

$$\sigma^\delta = 2\mu\mathcal{E}(v_\delta) + \frac{\tau^*\mathcal{E}(v_\delta)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}}$$

и покажем, что она сходится в некотором смысле к функции $\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \frac{\tau^*}{|\mathcal{E}(v)|}\mathcal{E}(v)$.

В силу поточечной сходимости имеем, что при $\mathcal{E}(v_\delta) \neq 0$ последовательность $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$.

Рассмотрим множество $A = \{[0, T] \times \Omega\} \cap \{|\mathcal{E}(v)| = 0\} \cap \{|\sigma| > \tau^*\}$ и предположим, что $\text{mes } A = m > 0$. Определим $Q_T = [0, T] \times \Omega$:

$$\chi_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{|\sigma|} 1_A \in L_\infty(Q_T), \quad I^\delta = \int_{Q_T} \sigma_{ij}^\delta \chi_{ij} dx dt, \quad I = \int_{Q_T} \sigma_{ij} \chi_{ij} dx dt.$$

Обозначим $v_0 = I - m\tau^*$ и заметим, что $v_0 > 0$. Так как $I^\delta \rightarrow I$ (в силу слабой сходимости $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$), то существует такое δ_0 , что для любого $\delta < \delta_0$ выполнено $I^\delta > \frac{v_0}{2} + m\tau^*$. Обозначим $\delta_1 = \min\left\{\delta_0, \frac{v_0}{24\mu|Q|}\right\}$. Разделим A на три подобласти:

$$A_1 = Q \cap \{|\mathcal{E}(v_\delta)| \leq \delta\}, \quad A_2 = Q \cap \{\delta < |\mathcal{E}(v_\delta)| \leq \delta_1\}, \quad A_3 = Q \cap \{|\mathcal{E}(v_\delta)| > \delta_1\}.$$

Разобьем интеграл I_δ на три части $I_\delta = \sum_{k=1}^3 \int \sigma : \chi dx = \sum_{k=1}^3 I_k$ и рассмотрим их по отдельности:

$$I_1 = \int_{A_1} \left(2\mu + \frac{\tau^*}{\delta}\right) \mathcal{E}(v_\delta) : \chi dx dt, \quad |I_1| \leq 2\mu\delta_1 \text{mes } Q + \tau^* \text{mes } A_1 \cap A,$$

$$I_2 = \int_{A_2} \left(2\mu + \frac{\tau^*}{|\mathcal{E}(v)|}\right) \mathcal{E}(v_\delta) : \chi dx dt, \quad |I_2| \leq 2\mu\delta_1 \text{mes } Q + \tau^* \text{mes } A_2 \cap A,$$

$$I_3 = \int_{A_3} \sigma^\delta : \chi dx dt, \quad |I_3| \leq C(1 + \|v_\delta\|_{V^1})I(\delta_1, \delta),$$

где $I(\delta_1, \delta) = (\text{mes}(A \cap A_3))^{1/2}$.

Заметим, что $I_\delta > \frac{v_0}{2} + m\tau^*$ и $|I_\delta| \leq \sum_k |I_k|$, получим

$$\frac{v_0}{2} + m\tau^* < |I_\delta| \leq 4\mu\delta_1 \text{mes } Q + CI(\delta_1, \delta) + m\tau^* \leq CI(\delta_1, \delta) + m\tau^* + \frac{v_0}{6}.$$

Получили противоречие с тем, что $I(\delta_1, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, что следует из того, что $|\mathcal{E}(v_\delta)| \rightarrow 0$ почти всюду на A , следовательно, $|\mathcal{E}(v_\delta)| \rightarrow 0$ по мере. Итак, $|\sigma| \leq \tau^*$ при $|\mathcal{E}(v)| = 0$.

Положим $B = Q_T \cap \{\mathcal{E}(v) \neq 0\}$. В силу выбора σ^δ имеем, что $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$ почти всюду на B . Для любого измеримого множества $Q' \subset Q_T$ и $\chi_{ij} \in L_\infty(Q_T)$ такого, что $\chi_{ij}|_{Q_T \setminus B} = 0$, имеем

$$\left| \int_{Q'} \sigma^\delta : \chi dx dt \right| \leq \|\chi\|_{L_\infty(Q_T)} (\text{mes}(Q'))^{1/2} (1 + \|v_\delta\|_{L_2(0, T; V^1)}).$$

Следовательно, по теореме Витали

$$\int_B \sigma^\delta : \chi dx dt \rightarrow \int_B \sigma : \chi dx dt.$$

С другой стороны, $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$ слабо в $L_2(Q_T)$. Отсюда и следует выполнение реологического соотношения при $|\mathcal{E}(v)| \neq 0$.

Таким образом, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в каждом из интегралов, получим, что пара (v, σ) удовлетворяет при почти всех $t \in (0, T)$ для любого $\varphi \in V^2$ равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

и реологическому соотношению

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0. \end{cases}$$

Это и завершает доказательство теоремы 2.1.

7. СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ПРИ $\alpha \rightarrow 0$

В данном разделе рассмотрим вопрос сходимости решений альфа-модели Бингама. Поскольку при $\alpha = 0$ рассматриваемая модель должна совпадать с исходной моделью Бингама, естественно ожидать и сходимости решений альфа-модели к решениям исходной модели при $\alpha \rightarrow 0$. Прежде чем непосредственно перейти к исследованию данного вопроса, мы введем необходимые понятия. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, соответствующую исходной модели Бингама:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \sigma = f, \quad (7.1)$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (7.3)$$

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Сформулируем определение слабого решения для начально-краевой задачи (7.1)–(7.3).

Определение 7.1. Пара функций $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$ называется *слабым решением* начально-краевой задачи (7.1)–(7.3) для альфа-модели Бингама, если для всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

а также реологическому соотношению (7.2) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Таким образом, в силу теоремы 2.1 при каждом фиксированном α задача (1.3)–(1.7) имеет слабое решение. Основная цель данного раздела — изучить сходимость слабых решений задачи (1.3)–(1.7) к слабым решениям задачи (7.1)–(7.3) при $\alpha \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим последовательность чисел α_m таких, что $\alpha_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, и еще одно семейство вспомогательных задач, зависящих от параметра α_m :

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i^m \frac{\partial v^m}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \sigma^m = f, \quad (7.4)$$

$$\sigma^m = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v^m) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v^m)}{|\mathcal{E}(v^m)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v^m)| \neq 0, \\ |\sigma^m| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v^m)| = 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

$$u^m = (I - \alpha_m^2 \Delta)^{-1} v^m, \quad (7.6)$$

$$\operatorname{div} v^m = 0, \quad v^m|_{\partial\Omega} = 0, \quad v^m|_{t=0} = v_0. \quad (7.7)$$

По доказанной теореме 2.1 при каждом α_m существует слабое решение (v^m, σ^m) вспомогательной задачи (7.4)–(7.7). Тогда для всех $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место равенство

$$\langle (v^m)', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sigma^m : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (7.8)$$

В предельном переходе (пункт 6) при доказательстве теоремы 2.1 получаем, что полученное решение v задачи (1.3)–(1.7) удовлетворяет оценкам (4.3), (4.4), (4.7), из которых следует, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} v^m &\rightarrow v^* \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V^1), & v^m &\rightarrow v^* \quad \text{слабо в } L_{\infty}(0, T; V^0), \\ (v^m)' &\rightarrow (v^*)' \quad \text{слабо в } L_{4/3}(0, T; V^{-1}). \end{aligned}$$

Используя эти сходимости, перейдем к пределу в равенстве (7.8). Рассмотрим отдельно слагаемое с оператором K .

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m), \varphi \rangle - \langle K(v^*), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left((u_i^m - v_i^m) v_j^m + (v_i^m - v_i^*) v_j^m + (v_j^m - v_j^*) v_i^* \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (u_i^m - v_i^m + \alpha_m^2 \Delta u_i^m) v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_i^m - v_i^*) v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| + \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_j^m - v_j^*) v_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right|. \end{aligned}$$

Отдельно оценим каждое слагаемое. Используя неравенство Гельдера, а также непрерывность вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$, для всех $\varphi \in V^2$ получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \alpha_m^2 \Delta u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| &\leq \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |\alpha_m \Delta u_i^m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq C \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{V^1} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{V^1} \leq \\ &\leq C \alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогичным образом. Таким образом,

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m), \varphi \rangle - \langle K(v^*), \varphi \rangle| &\leq C (\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} + \\ &+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1}) \leq C (\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \\ &+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1}) \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|K(v^m) - K(v^*)\|_{V^{-2}} &\leq C (\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \\ &+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1}). \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t в пределах от 0 до T . Применив неравенство Гельдера, заключаем, что

$$\int_0^T \|K(v^m) - K(v^*)\|_{V^{-2}} dt \leq \alpha_m C \int_0^T \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} dt + C \int_0^T \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^2} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + C \int_0^T \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1} dt \leq \alpha_m C \left(\int_0^T \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v^m\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} + \\
& + C \|v^m - v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|v^m\|_{L_2(0,T;V^1)} + C \|v^m - v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}. \quad (7.9)
\end{aligned}$$

Так как $v^m \rightarrow v^*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$ и $(v^m)' \rightarrow (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$, то в силу теоремы Обена—Симона [26] $v^m \rightarrow v^*$ сильно в $L_2(0, T; L_4(\Omega))$. Таким образом, получаем, что два слагаемых в неравенстве (7.9) стремятся к нулю. Напомним, что

$$\|v\|_{V^1}^2 = \|u - \alpha^2 \Delta u\|_{V^1}^2 = \|u\|_{V^1}^2 + 2\|\alpha \nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha^4 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Поэтому

$$\int_0^T \|\alpha \Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|v\|_{V^1}^2 dt \leq \frac{C}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1). \quad (7.10)$$

Таким образом, в силу неравенств (7.9) и (7.10), а также указанных сходимостей, получим

$$\int_0^T \|K(v^m) - K(v^*)\|_{V^{-2}} dt \leq \alpha_m \frac{C}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1) \rightarrow 0$$

при $\alpha_m \rightarrow 0$. Следовательно, $K(v^m) \rightarrow K(v^*)$ сильно в $L_1(0, T; V^{-2})$, а значит, и в пространстве $\mathcal{D}'(0, T; V^{-2})$.

Для установления сходимостей в остальных слагаемых равенства (7.8) мы полностью повторим рассуждения, которые были проведены при доказательстве предельного перехода в предыдущем разделе. Все эти слагаемые сходятся в пространстве $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$, а значит, и в пространстве $\mathcal{D}'(0, T; V^{-2})$.

Таким образом, переходя в равенстве (7.8) к пределу при $m \rightarrow \infty$ получим, что предельные функции v^* и σ^* удовлетворяют равенству

$$\langle (v^*)', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma^* : \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Следовательно, пара (v^*, σ^*) согласно определению 7.1 является слабым решением начально-краевой задачи (7.1)–(7.3) для пробной функции $\varphi \in V^2$. Однако, заметим, что функция v^* в силу полученных сходимостей удовлетворяет оценкам (4.3), (4.4), (4.7). Следовательно, каждое слагаемое последнего равенства выполнено и для произвольной пробной функции $\varphi \in V^1$. Таким образом, доказана сходимость слабых решений альфа-модели (7.4)–(7.7) к слабым решениям начально-краевой задачи (7.1)–(7.3). Теорема 2.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Усп. мат. наук. — 1964. — 19, № 3. — С. 53–161.
2. Гольдштейн Р. В., Гордцов В. А. Механика сплошных сред. Ч. 1. — М.: Наука, Физматлит, 2000.
3. Звягин А. В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере // Изв. ВУЗов. Сер. Мат. — 2016. — № 10. — С. 70–75.
4. Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье—Стокса // Докл. РАН. — 2019. — 486, № 5. — С. 527–530. — DOI: [10.31857/S0869-56524865527-530](https://doi.org/10.31857/S0869-56524865527-530).
5. Звягин А. В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 3. — С. 189–190. — DOI: [10.4213/rm9880](https://doi.org/10.4213/rm9880).
6. Звягин А. В. Альфа-модель Навье—Стокса с вязкостью, зависящей от температуры // Докл. РАН. — 2020. — 491, № 1. — С. 53–56. — DOI: [10.31857/S2686954320020265](https://doi.org/10.31857/S2686954320020265).
7. Звягин А. В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Изв. РАН. Сер. Мат. — 2021. — 85, № 1. — С. 66–97. — DOI: [10.4213/im9020](https://doi.org/10.4213/im9020).
8. Звягин А. В., Звягин В. Г., Поляков Д. М. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

9. Звягин В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — 46. — С. 92–119.
10. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — 477. — С. 54–86.
11. Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: Кранд, 2012.
12. Серегин Г. А. О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1991. — 188. — С. 128–142.
13. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1987.
14. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — 15. — С. 119–147.
15. Chen S., Foias C., Holm D. D., Olson E., Titi E. S., Wynne S. Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow// Phys. Rev. Lett. — 1998. — 81, № 24. — С. 5338–5341. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.5338](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5338).
16. Doraiswamy D. The origin of rheology: a short historical excursion// Rheol. Bull. — 2002. — 71, № 1. — С. 7–17.
17. Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion// Phys. Rev. Lett. — 1998. — 80, № 19. — С. 4173–4177. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.4173](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.4173).
18. Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories// Adv. Math. — 1998. — 137, № 1. — С. 1–81. — DOI: [10.1006/aima.1998.1721](https://doi.org/10.1006/aima.1998.1721).
19. Kim J. U. On the initial-boundary value problem for a Bingham fluid in a three dimensional domain// Trans. Am. Math. Soc. — 1987. — 304, № 2. — С. 751–770. — DOI: [10.2307/2000740](https://doi.org/10.2307/2000740).
20. Lemarie-Rieusset P. G. The Navier–Stokes problem in the 21st century. — Boca Raton: CRC Press, 2016.
21. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace// Acta Math. — 1934. — 63, № 1. — С. 193–248. — DOI: [10.1007/BF02547354](https://doi.org/10.1007/BF02547354).
22. Lions J. L., Magenes E. Problemes aux limites non homogenes et applications. — Paris: Dunod, 1968.
23. Polyakov D. M., Zvyagin A. Dissipative solvability of Jeffreys–Oldroyd α -model// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2021. — 57, № 2. — С. 465–488. — DOI: [10.12775/TMNA.2020.044](https://doi.org/10.12775/TMNA.2020.044).
24. Schwedoff Th. Recherches experimentales sur la cohesion des liquides// J. Phys. Theor. Appl. — 1890. — 9, № 1. — С. 34–46. — DOI: [10.1051/jphysap:01890009003401](https://doi.org/10.1051/jphysap:01890009003401).
25. Shamlou P. Fine solid suspension and rheology// Chem. Eng. (London). — 1984. — 403. — С. 31–34.
26. Simon J. Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1987. — 146. — С. 65–96.
27. Shelukhin V. V. Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids// J. Math. Fluid Mech. — 2002. — 4, № 2. — С. 109–127. — DOI: [10.1007/s00021-002-8538-7](https://doi.org/10.1007/s00021-002-8538-7).
28. Souza Mendes P. R., Dutra E. S. S. Viscosity function for yield-stress liquids// Appl. Rheol. — 2004. — 14, № 6. — С. 296–302. — DOI: [10.1515/arh-2004-0016](https://doi.org/10.1515/arh-2004-0016).

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: zvyagin.a@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 1346-5864, РИНЦ AuthorID: [641070](https://elibrary.ru/author_index.action?id=641070), ResearcherID: [M-7279-2016](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827), Scopus: [55656343100](https://orcid.org/55656343100), ORCID: [0000-0002-3858-0827](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827)

Н. В. Толстой

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: nikolaitolstoi@vk.com

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625)
 EDN: MBVBCB

UDC 517.957
Research article

A study of the solvability of the Bingham alpha model

A. V. Zvyagin and N. V. Tolstoy

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. This article studies the solvability of the initial-boundary value problem for the alpha model of a Bingham-type viscoplastic fluid with periodic conditions on the spatial variables. Using an approximation-topological approach, we prove the existence of weak solutions to the alpha model under study and establish the convergence of the alpha model solutions to the solutions of the original model as the alpha parameter tends to zero.

Keywords: Bingham alpha model, viscoplastic fluid, initial-boundary value problem, approximation-topological approach, existence of weak solutions, convergence of solutions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This study was supported by the grant from the Russian Science Foundation (No. 25-11-00056).

For citation: A. V. Zvyagin, N. V. Tolstoy, “A study of the solvability of the Bingham alpha model,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 604–625, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625).

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, “Ellipticheskie granichnye zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida” [Elliptic boundary-value problems with a parameter and parabolic problems of general type], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. R. V. Goldstein and V. A. Gorodtsov, *Mekhanika Sploshnykh Sred. Ch. 1* [Continuum Mechanics. Pt. 1], Nauka, Moscow, 2000 (in Russian).
3. A. V. Zvyagin, “Razreshimost’ zadachi termovyazkoupругosti dlya al’fa-modeli Lere” [Solvability of the thermoviscoelasticity problem for the Leray alpha model], *Izv. VUZov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2016, No. 10, 70–75 (in Russian).
4. A. V. Zvyagin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya al’fa-modeli Lere i al’fa-modeli Nav’e—Stoksa” [Optimal feedback control for alpha Leray model and for alpha Navier–Stokes model], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **486**, No. 5, 527–530, DOI: [10.31857/S0869-56524865527-530](https://doi.org/10.31857/S0869-56524865527-530) (in Russian).
5. A. V. Zvyagin, “O slaboy razreshimosti i skhodimosti resheniy drobnoy al’fa-modeli Foygta dvizheniya vyazkoupругoy sredy” [Weak solvability and convergence of solutions for the fractional Voigt-alpha model of a viscoelastic medium], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2019, **74**, No. 3, 189–190, DOI: [10.4213/rm9880](https://doi.org/10.4213/rm9880) (in Russian).
6. A. V. Zvyagin, “Al’fa-model’ Nav’e—Stoksa s vyazkost’yu, zavisyashchey ot temperatury” [Navier–Stokes-alpha model with temperature-dependent viscosity], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **491**, No. 1, 53–56, DOI: [10.31857/S2686954320020265](https://doi.org/10.31857/S2686954320020265) (in Russian).
7. A. V. Zvyagin, “Issledovanie slaboy razreshimosti drobnoy al’fa-modeli Foygta” [Investigation of the weak solubility of the fractional Voigt alpha-model], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2021, **85**, No. 1, 66–97, DOI: [10.4213/im9020](https://doi.org/10.4213/im9020) (in Russian).



8. A. V. Zvyagin, V. G. Zvyagin, and D. M. Polyakov, “Razreshimost’ al’fa-modeley gidrodinamiki” [Solvability of alpha models of hydrodynamics], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2016, No. 2, 72–93 (in Russian).
9. V. G. Zvyagin, “Approksimatsionno-topologicheskiiy podkhod k issledovaniyu matematicheskikh zadach gidrodinamiki” [Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics], *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **46**, 92–119 (in Russian).
10. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, and M. V. Turbin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya modeli Bingama s periodicheskimi usloviyami po prostranstvennym peremennym” [Optimal feedback control for the Bingham model with periodic conditions on spatial variables], *Zap. Nauch. Sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 54–86 (in Russian).
11. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie Voprosy Gidrodinamiki Vyazkouprugikh Sred* [Mathematical Issues of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], Krasand, Moscow, 2012 (in Russian).
12. G. A. Seregin, “O dinamicheskoy sisteme, porozhdennoy dvumernymi uravneniyami dvizheniya sredy Bingama” [On a dynamic system generated by two-dimensional equations of motion of the Bingham medium], *Zap. Nauch. Sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1991, **188**, 128–142 (in Russian).
13. R. Temam, *Uravneniya Nav’e—Stoksa. Teoriya i Chislennyy Analiz* [Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
14. S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 119–147.
15. S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, and S. Wynne, “Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow,” *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, No. 24, 5338–5341, DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.5338](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5338).
16. D. Doraiswamy, “The origin of rheology: a short historical excursion,” *Rheol. Bull.*, 2002, **71**, No. 1, 7–17.
17. D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, “The Euler–Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion,” *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**, No. 19, 4173–4177, DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.4173](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.4173).
18. D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, “The Euler–Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories,” *Adv. Math.*, 1998, **137**, No. 1, 1–81, DOI: [10.1006/aima.1998.1721](https://doi.org/10.1006/aima.1998.1721).
19. J. U. Kim, “On the initial-boundary value problem for a Bingham fluid in a three dimensional domain,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1987, **304**, No. 2, 751–770, DOI: [10.2307/2000740](https://doi.org/10.2307/2000740).
20. P. G. Lemarie-Rieusset, *The Navier–Stokes problem in the 21st century*, CRC Press, Boca Raton, 2016.
21. J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace,” *Acta Math.*, 1934, **63**, No. 1, 193–248, DOI: [10.1007/BF02547354](https://doi.org/10.1007/BF02547354).
22. J. L. Lions and E. Magenes, *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
23. D. M. Polyakov and A. Zvyagin, “Dissipative solvability of Jeffreys–Oldroyd α -model,” *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2021, **57**, No. 2, 465–488, DOI: [10.12775/TMNA.2020.044](https://doi.org/10.12775/TMNA.2020.044).
24. Th. Schwedoff, “Recherches experimentales sur la cohesion des liquides,” *J. Phys. Theor. Appl.*, 1890, **9**, No. 1, 34–46, DOI: [10.1051/jphysap:01890009003401](https://doi.org/10.1051/jphysap:01890009003401).
25. P. Shamlou, “Fine solid suspension and rheology,” *Chem. Eng. (London)*, 1984, **403**, 31–34.
26. J. Simon, “Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$,” *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1987, **146**, 65–96.
27. V. V. Shelukhin, “Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids,” *J. Math. Fluid Mech.*, 2002, **4**, No. 2, 109–127, DOI: [10.1007/s00021-002-8538-7](https://doi.org/10.1007/s00021-002-8538-7).
28. P. R. Souza Mendes and E. S. S. Dutra, “Viscosity function for yield–stress liquids,” *Appl. Rheol.*, 2004, **14**, No. 6, 296–302, DOI: [10.1515/arh-2004-0016](https://doi.org/10.1515/arh-2004-0016).

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: zvyagin.a@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1346-5864, eLIBRARY AuthorID: [641070](https://elibrary.ru/641070),

ResearcherID: [M-7279-2016](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827), Scopus: [55656343100](https://orcid.org/55656343100), ORCID: [0000-0002-3858-0827](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827)

N. V. Tolstoy

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: nikolaitolstoi@vk.com