Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 4 (2025). С. 562–584
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584
EDN: MAUNPV

УДК 517.958
Научная статья

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСКОРЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева, М. В. Горюнова, А. А. Русское

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Аннотация. В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даём вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова—Максвелла—Эйнштейна и рассматриваем космологические модели типа Милна—МакКри и Фридмана. Это позволяет поставить Общую теорию относительности (ОТО) на строгую математическую основу: вывести замкнутую систему уравнений ОТО из принципа наименьшего действия и дать строгое определение космологических решений. На основе этого объясняется ускоренное расширение Вселенной без лямбды Эйнштейна, тёмной энергии и фантастических новых полей, как простой релятивистский эффект.

Ключевые слова: Общая теория относительности, уравнение Власова, уравнение Власова—Эйнштейна, уравнение Власова—Максвелла, уравнение Власова—Пуассона, ускоренное расширение Вселенной, константа Хаббла.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Данная работа выполнена при поддержке текущего институтского финансирования. Дополнительные гранты для проведения или руководства этим конкретным исследованием не привлекались. Выражаем благодарность студентам МФТИ А. А. Ребровой и А. О. Гладкову, студентам МГТУ им. Н. Э. Баумана В. М. Аушеву и Н. И. Измайловой за помощь в работе с системой Гурса [6] и студенту МФТИ А. А. Баю за помощь в работе с релятивистскими уравнениями [7, 57, 58].

Для цитирования: *В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева, М. В. Горюнова, А. А. Русское*. Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия// Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. **71**, № 4. С. 562–584, DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584.

1. Введение

Общая теория относительности (ОТО) является привлекательной и красивейшей физико-математической теорией [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65], но новейшее её развитие, связанное с ускоренным расширением Вселенной, поставило новые вопросы как перед физиками, так и перед математиками. Ставки оказались очень высоки: хорошо подтверждённый эксперимент с Нобелевской премией 2011 года показывал ускоренное расширение Вселенной, что противоречило закону всемирного тяготения. Чтобы хоть как-то объяснить это, были предприняты буквально героические усилия: лямбда-член, обеспечивающий слабое отталкивание на коротких расстояниях и основной вклад на далёких. Вводили тёмную энергию, новые поля и новые частицы. Этот вызов всей теоретической физике и математике потребовал пересмотра космологической части ОТО. Мы следуем схеме Милна—МакКри, выводя их результаты, обосновывая и обобщая их с помощью уравнения Власова—Пуассона и перенося на релятивистский случай.

Обзор построен следующим образом. В разделе 2 и 3 даём схему вывода уравнений типа Власова на примере релятивистской гравитации и электродинамики, выводя уравнения Власова—Максвелла—Эйнштейна из принципа наименьшего действия. В разделе 4 предлагается общематематическая конструкция: переход от кинетического описания к гидродинамическому и в смысле Гамильтона—Якоби. В разделе 5 эти идеи разделов 2, 3, 4 применяются к получению космологических решений в нерелятивистском случае, обобщая и проясняя схему Милна—МакКри. Наконец, в разделе 6 перенесение метода Милна—МакКри на релятивистский случай с примерами в разделах 7, 8, 9, 10 показывает принципиальную возможность объяснения ускоренного расширения Вселенной, являясь триумфом ОТО и её подтверждением.

2. Действие в Общей теории относительности и уравнения для полей

Пусть $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)$ — функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, массам и заряду $e\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объёме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Отметим, что в теории вероятностей для этой величины используется термин плотности распределения, а мы пользуемся терминологией, устоявшейся в кинетической теории и статистической физике. Рассмотрим действие:

$$S[g_{\mu\nu},A_\mu]=-c\int mf(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}dmdedt-$$
$$-\frac{1}{c}\int ef(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)A_\mu u^\mu d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}dmdedt+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4\mathbf{x}+k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4\mathbf{x},\quad(2.1)$$

где c — скорость света. Здесь u — это четырёхмерная скорость, нулевая компонента которой — это скорость света $u^0=c$, а три другие совпадают с трёхмерной, как это принято в теории относительности [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]: $u^i=v^i$ $(i=1,2,3)$ — трёхмерная скорость, $x^0=ct$ и x^i (латинские индексы $i=1,2,3$) — координаты, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)$ — метрика (греческие индексы $\mu,\nu=0,1,2,3$), $A_\mu(\mathbf{x},t)$ — 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x},t)=\dfrac{\partial A_\mu(\mathbf{x},t)}{\partial x^\nu}-\dfrac{\partial A_\nu(\mathbf{x},t)}{\partial x^\mu}$ — электромагнитные поля, R — полная кривизна, Λ — лямбда-член Эйнштейна (или просто лямбда) — знаменитая лямбда Эйнштейна[1], $k_1=-\dfrac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2=-\dfrac{1}{4\pi c}$ — константы [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65], g — определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ — постоянная тяготения. По повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование. В действии (2.1) интегрирование ведётся, как обычно, по всей области изменения параметров, т. е. по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in\mathbb{R}$, $m\geqslant 0$, зарядам $e\in\mathbb{R}$ и времени $t\in\mathbb{R}$. Варьирование ведётся обычным способом [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65].

Вид действия (2.1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова—Максвелла и Власова—Эйнштейна из действия (2.1) использовался в работах [3, 9, 10, 12, 59, 61]. При варьировании (2.1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$k_1\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g}=$$
$$=\int m\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu vdm+k_2\left(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}.\quad(2.2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в таком виде, видимо, в работах [3, 9, 12, 61]), второе —

[1]Её Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни, но сейчас это пока — основной способ объяснять ускоренное расширение Вселенной (хорошо проверенный эксперимент с Нобелевской премией 2011 года). Против введения, в частности, лямбды и такого объяснения и направлен этот обзор.

электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса (известно [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]). Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова—Эйнштейна [3, 9, 10, 12, 16, 23, 33, 34, 37, 38, 50, 53, 59, 61]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (2.1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d^3\mathbf{v} dm de. \tag{2.3}$$

Мы получили из действия (2.1) уравнения для полей (2.2), (2.3). Чтобы получить замкнутые уравнения, нужно выписать уравнение на функцию распределения, которая появилась в уравнениях (2.2), (2.3) из действия (2.1). Для этого нужно вывести уравнения движения частицы в заданных полях. Соответствующее действие хорошо известно [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]. Отметим, что это действие для частиц можно получить, подставив в первых двух слагаемых действия (2.1) функцию распределения в виде δ-функции:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \delta(\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}) \delta(m - m') \delta(e - e'). \tag{2.4}$$

Получаем, опуская штрихи, стандартное действие для частиц [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]:

$$S[\mathbf{x}(t)] = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x}(t), t) u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\mathbf{x}(t), t) u^\mu dt. \tag{2.5}$$

При такой подстановке подразумевается, что трёхмерная скорость входит в четырёхмерную $\mathbf{u}$, как и раньше, формулой $\mathbf{u} = (c, v^1, v^2, v^3)$, где c — скорость света. Кроме того, предполагается, что трёхмерная скорость есть производная координаты по времени $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$, поэтому в левой части (2.5) стоит только эта координата, по которой и нужно варьировать, как положено, по Лагранжу. Обычное варьирование приводит к уравнениям Эйлера—Лагранжа, а потом к уравнениям для функции распределения.

3. Уравнения движения частиц в заданных полях, уравнение Лиувилля и уравнение Власова—Максвелла—Эйнштейна

Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (2.5) относительно замены $t = \phi(\lambda)$. Здесь λ — произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [2,18,22,28,41,47,65], но представляется загадкой (и подарком) природы: самые фундаментальные взаимодействия — гравитационные и электромагнитные — обладают этим свойством, будучи описываемыми лагранжианами (2.5) первой степени по скоростям. Перепишем с помощью этой замены действие частиц (2.5):

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu u^\mu d\lambda \tag{3.1}$$

и, варьируя по $\mathbf{x}(\lambda)$, получаем уравнение Эйлера—Лагранжа:

$$cm \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{g_{\mu\nu} u^\nu}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c} A_\mu \right] = cm \sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi} \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} u^\sigma u^\nu + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) перепишем, обозначив через $I = g_{\eta\xi} \dfrac{\partial x^\eta}{\partial \lambda} \dfrac{\partial x^\xi}{\partial \lambda}$ интеграл движения:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\eta} \frac{dx^\eta}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{e}{mc^2} \sqrt{I} F^\mu_\nu \frac{dx^n u}{d\lambda}, \tag{3.3}$$

здесь $\Gamma^\mu_{\nu\eta}$ — символ Кристоффеля:

$$\Gamma^\mu_{\nu\eta} = \frac{1}{2} g^\mu m \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{m\nu}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^m} \right).$$

Уравнение (3.3) отличается от приведённых в руководствах [2,18,22,28,41,47,65] наличием $\sqrt{I}$ в правой части: в этих руководствах дифференцирование идёт по собственному времени $ds = d\lambda\sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет использована формула (3.3), которая обладает симметрией при замене $\mathbf{x} \longrightarrow \alpha\mathbf{x}$, $\lambda \longrightarrow \alpha\lambda$, что и позволяет понизить её порядок. Для этого перепишем уравнение (3.3) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx^\mu}{d\lambda} = w^\mu, \\ \dfrac{dw^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\nu\eta} w^\eta w^\nu + \dfrac{e\sqrt{I}}{mc^2} F^\mu_\nu w^\nu. \end{cases} \tag{3.4}$$

Избавляемся от λ, поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (3.4). Так как $x^0 = ct$ пропорционально времени, обозначим $\dfrac{w^\mu c}{w^0} = \dfrac{dx^\mu}{dt} = u^\mu$ — четырёхмерная скорость, где $u^0 = c$. При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения $\dfrac{dw^0}{dt}$ и написать уравнения по x^i, u^i $(i = 1, 2, 3)$. Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [28, 41] и Вайнберга [2, 65]. Там этот переход в уравнениях приведён для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s. Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части (3.3), который обеспечивает необходимую симметрию: вторую степень по скоростям в правой части второго уравнения (3.4). Это понижение переходом к собственному времени нам необходимо, так как наша цель — получить уравнение на функцию распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{dt} = v^i, \\ \dfrac{dv^i}{dt} = G^i, \end{cases} \tag{3.5}$$

где через G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma^i_{\eta\nu} u^\eta u^\nu + \frac{v^i}{c} \Gamma^0_{\eta\nu} u^\eta u^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2} \left[F^i_\eta u^\eta - \frac{v^i}{c} F^0_\eta u^\eta \right],$$

$J = g_{\nu\xi} u^\nu u^\xi$, $\mathbf{u} = (c, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ — трёхмерная скорость.

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ и системы (3.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial (G^i f)}{\partial v^i} = 0. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.6), (2.2) и (2.3) образуют систему уравнений Власова—Максвелла—Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистской электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова—Максвелла) и гравитации (уравнение Власова—Эйнштейна) и вывести их из принципа наименьшего действия.

4. Общий переход к гидродинамике

Общий переход рассмотрен в [9, 10, 59]. Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Перепишем её в виде $x = (q, p)$, $q \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^{n-m}$:

$$\frac{dq}{dt} = w(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = g(q, p)$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, q, p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (w_i f)}{\partial q_i} + \frac{\partial (g_j f)}{\partial p_j} = 0.$$

Выполним гидродинамическую подстановку

$$f(t, q, p) = \rho(q, t)\delta(p - Q(q, t)). \tag{4.1}$$

Получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial\rho(q,t)}{\partial t}\delta(p-Q(q,t))-\rho(q,t)\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i(q,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial(w_i(q,p)f)}{\partial q_i}=\frac{\partial(w_i(q,Q)\rho(q,t))}{\partial q_i}\delta(p-Q(q,t))-\rho(q,t)w_i(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_k}\frac{\partial Q_k(q,t)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial g_j(q,p)f}{\partial p_j}=\rho(q,t)g_j(q,Q(q,t))\frac{\partial\delta(p-Q(q,t))}{\partial p_j}.$$

При дифференцировании мы воспользовались правилами дифференцирования обобщённых функций [15]. Собирая множители при дельта-функции и её производных, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho w_i(q,Q))}{\partial q_i}=0,\\ \rho(q,t)\left(\dfrac{\partial Q_j(q,t)}{\partial t}+w_i(q,Q(q,t))\dfrac{\partial Q_j(q,t)}{\partial q_i}-g_j(q,Q(q,t))\right)=0.\end{cases}\tag{4.2}$$

Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [16], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [9, 10, 59]. Для гамильтоновых систем из неё получается уравнение Гамильтона—Якоби естественным способом: проходит подстановка для скоростей в виде градиента функции, которая оказывается действием [3, 12, 19, 20, 23, 48, 61].

А именно, уравнение Лиувилля в гамильтоновом случае имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial H}{\partial p},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},\frac{\partial f}{\partial p}\right)=0.$$

Гидродинамическая подстановка (4.1) даёт систему (4.2), где $w_i(q,p)=\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}$, $g_j(q,p)=-\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_j}$. Полагая $Q(t,\mathbf{x})=\nabla W(t,\mathbf{x})$, получаем уравнения неразрывности и Гамильтона—Якоби

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\nabla W)=0,\\ \dfrac{\partial W}{\partial t}+H(\nabla W,\mathbf{x})=0.\end{cases}$$

Уравнения (4.2) были названы В. В. Козловым в гамильтоновом случае уравнениями Лэмба [19, 20], из них и были получены уравнения Гамильтона—Якоби Маделунгом [48] в частном случае нерелятивистского гамильтониана и В. В. Козловым [19, 20] в общем случае гамильтоновых систем. Общая подстановка (4.1) с разными размерностями и отождествление системы (4.2) с уравнениями с одинаковой главной частью в терминах Куранта [39] — видимо, недавняя история [3, 12, 61]. Подстановка (4.1) и уравнения (4.2) имеют яркий геометрический смысл: это движение m-мерных поверхностей в n-мерном пространстве в силу исходной динамической системы в эйлеровых координатах. Так механика помогает геометрии, проясняется и общая теория УрЧП: полностью описан класс уравнений, где работает метод характеристик — это уравнения с одинаковой главной частью. Получен и простейший вывод уравнений Гамильтона—Якоби, который мы используем для прояснения и обоснования метода Милна—МакКри в разделе 5 в нерелятивистском случае, а в релятивистском случае в разделе 6. Это позволит обосновать ускоренное расширение Вселенной.

5. Уравнение Власова—Пуассона, космологические решения и нерелятивистская гидродинамика с лямбда-членом

Воспроизведём простейшее нерелятивистское космологическое решение Милна—МакКри с добавкой лямбда-члена в форме уравнения Власова—Пуассона. Нерелятивистский случай для тяготения соответствует действию [22, 47]

$$S[U]=\int\left[\frac{mv^2}{2}-mU\right]f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmdt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int\left((\nabla U)^2-2\lambda U\right)d\mathbf{x}dt.\tag{5.1}$$

Варьируя по U, получаем уравнения Пуассона с лямбда-членом:

$$\triangle U = 4\pi\gamma \int mf(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{v} dm - \lambda. \tag{5.2}$$

Мы видим, что для получения замкнутой системы уравнений нужно получить уравнение для функции распределения, появившейся в уравнении Пуассона (5.2). Действие для одной частицы получается из первого слагаемого в (5.1) при выборе $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(m - M)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t))\delta\Big(\mathbf{v} - \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}\Big)$. Эта формальная подстановка — правило для получения правильных лагранжианов из действия (5.1), работает для вывода любых систем типа Власова, и мы широко пользовались этим [3, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 57–63] и будем пользоваться в дальнейшем. Получаем стандартное действие:

$$S_1[\mathbf{y}] = \int \left[\frac{My'^2}{2} - MU(\mathbf{y}) \right] dt.$$

Варьируем, как обычно в механике, и получаем уравнение Ньютона:

$$\mathbf{y}'' - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = 0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \end{cases}$$

и тогда получаем уравнение на функцию распределения, дополняя уравнение (5.2):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \tag{5.3}$$

Система (5.2), (5.3) и есть система уравнений Власова—Пуассона для гравитации с лямбда-членом, который и призван описать ускоренное расширение.

Мы провели подробный вывод уравнения Власова—Пуассона в простейшем случае, который иллюстрирует правильность вывода уравнений типа Власова и в более сложных релятивистских и слаборелятивистских случаях. Этот способ вывода уравнений типа Власова отрабатывался в статьях [3, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 57–63] и является пока единственным способом получать в замкнутой форме уравнения электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. По сути он следует всем учебникам по теории поля (см., например, [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]), где вводятся два действия: для полей и для частиц. Наша небольшая добавка с уравнениями типа Власова [9, 10, 59] связала эти два действия подстановкой дельта-функции в одну сторону и переходом к интегрированию с помощью функции распределения в обратную.

Этот переход аналогичен связи лагранжевых и эйлеровых координат в кинетической теории. Это позволило заодно получать правые части в уравнениях для полей (тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна). Это поставило на математическую платформу ОТО, упрощая её и давая замкнутую систему уравнений из принципа наименьшего действия (2.1), (2.3). Это упростило и сделало математически строгой и всю гравитацию и электродинамику именно с помощью уравнения Власова.

Правильность такой схемы вывода уравнений типа Власова была сначала проверена на уравнениях Власова—Пуассона и уравнениях Власова—Максвелла, где ответ был известен, хотя правые части уравнений для полей не были выведены, и только после этого схема вывода была перенесена на уравнение Власова—Эйнштейна. Это важно, потому что как зарубежные так, и наши исследователи брали тензор энергии-импульса необоснованно, что приводило к заведомо неправильным уравнениям для полей. Более того, сравнение релятивистских действий с нерелятивистскими и слаборелятивистскими позволило твёрдо установить все коэффициенты действия (2.1), а потому и уравнения для полей.

Дальнейшая наша цель — получение космологических решений, и сейчас мы выведем уравнения Милна—МакКри [49] из уравнения Власова. Система (5.2), (5.3) имеет точное гидродинамическое следствие, т. к. допускается (согласно более общей теории раздела 4) гидродинамический вид функции распределения как точное следствие (5.2), (5.3). Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) =$

$\rho(t, \mathbf{x}, m)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0, \\ \dfrac{\partial w_k}{\partial t} + w_i \dfrac{\partial w_k}{\partial x_i} + \dfrac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \\ \triangle U = 4\pi\gamma \displaystyle\int m\rho dm - \lambda. \end{cases}$$

Это означает, что если $\rho(t, \mathbf{x}, m)$, $\mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m)$ и $U(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют этой системе уравнений, то $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \rho(t, \mathbf{x}, m)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$ и $U(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют системе уравнений Власова—Пуассона (5.2), (5.3).

Пусть $w_k(t, \mathbf{x}, m) = \dfrac{\partial W}{\partial x^k}$. Такая подстановка проходит, также согласно общей теории из раздела 3, и получается точное следствие Гамильтона—Якоби системы Власова—Пуассона (5.2), (5.3) с лямбда-членом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \nabla W) = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{(\nabla W)^2}{2} + U = 0, \\ \triangle U = 4\pi\gamma \displaystyle\int m\rho dm - \lambda. \end{cases} \tag{5.4}$$

Эта система уравнений обобщает систему Милна—МакКри [49], где она приведена сразу в изотропном случае с функциями, зависящими только от радиуса, но и с зависимостью плотности и константы Хаббла от массы. Мы вывели эту систему из системы Власова—Пуассона, которую мы получили из принципа наименьшего действия: таким образом, мы обосновали и обобщили систему Милна—МакКри [49], которая признанным образом даёт космологические решения в нерелятивистском случае. Этим мы подготовили почву для перехода к релятивизму ОТО.

Отметим, что если W есть функция только радиуса, то скорость даёт как раз обобщенный разлёт Хаббла: $w = \nabla W = W'(r)\dfrac{x}{r}$. Скорость разбегания $\dfrac{W'(r)}{r}$ называется постоянной Хаббла. Обратное тоже верно: любой разлёт по Хабблу, если скорость пропорциональна расстоянию, означает, что скорость есть градиент некоторой функции. Этим космологическое расширение связывается с гидродинамическим и даже следствием Гамильтона—Якоби уравнения Власова—Пуассона. В космологических решениях плотность не зависит от пространственной координаты. Тогда в первом уравнении неразрывности переменные разделяются, и из него получаем $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -3H(m, t)$, а также $\triangle W = 3H(m, t)$. Мы покажем ниже, что $H(m, t) = \dfrac{W'(r)}{r}$ совпадает с постоянной Хаббла. Из третьего уравнения имеем уравнение: $\triangle U = 4\pi\gamma \int m\rho(m, t)dm - \lambda$. Решая два последних уравнения в случае, когда U и W зависят только от радиуса, имеем

$$W(r, m, t) = \frac{H(m, t)}{2} r^2 + \frac{A(m, t)}{r} + B(m, t),$$
$$U(r, t) = \frac{4\pi\gamma \int m\rho(m, t)dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C(t)}{r} + D(t).$$

Мы видим, дифференцируя $W(r, m, t)$, что $H(m, t) = \dfrac{W'(r)}{r}$, т. е. что это действительно постоянная Хаббла. Здесь $A(m, t)$, $B(m, t)$, $C(t)$, $D(t)$ — произвольные функции. Получаем, подставляя эти выражения во второе уравнение системы (5.4):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial t} r^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{H^2}{2} r^2 - \frac{AH}{r} + \frac{A^2}{2r^4} + \frac{4\pi\gamma \int m\rho(m, t)dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C}{r} + D = 0$$

Приравнивая коэффициенты при степенях радиуса (как это делали Милн и МакКри [49]), получаем $A(m,t)=0$, $C(t)=0$, $\dfrac{\partial B}{\partial t}+D(t)=0$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho(m,t)}{\partial t}+3H(m,t)\rho(m,t)=0, \\ \dfrac{\partial H(m,t)}{\partial t}+H^2+\dfrac{4\pi\gamma}{3}\displaystyle\int m\rho(t,m)dm-\dfrac{\lambda}{3}=0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Так как скорость разбегания $\vec{w}=\nabla W=H\vec{r}$, имеем:

1) условие расширения Вселенной: $H\geqslant 0$;
2) условие ускоренного расширения: $\dfrac{\partial H(m,t)}{\partial t}\geqslant 0$, т. е. $H^2+\dfrac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho(m,t)dm-\dfrac{\lambda}{3}$.

Из второго условия видим определяющую роль лямбды для ускоренного расширения. Мы также видим: так как $\rho(m,t)$ обязано, вообще говоря, зависеть от массы, то и «постоянная» Хаббла $H(m,t)$, вообще говоря, зависит от массы.

Мы получили систему уравнений (5.5), которая в принципе объясняет как изменение постоянной Хаббла, так и её «напряжения» («*Constant Hubble Tension*» [36]) именно зависимостью от времени и от массы: уравнения (5.5) можно считать точным уравнением константы Хаббла с лямбда-членом в не релятивистском случае.

Если, однако, H не зависит от массы (что второе из уравнений (5.5) допускает, как это и предполагали Милн и МакКри в [49]), мы можем свести систему (5.5) к системе двух обыкновенных уравнений. Обозначим $K(t)=\dfrac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho(m,t)dm$ и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt}+3HK=0, \\ \dfrac{dH}{dt}+H^2+K-\dfrac{\lambda}{3}=0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Первое из уравнений (5.6) есть в точности уравнение (2.4) Милна—МакКри [49], а второе из уравнений (5.6) — это их уравнение (3.2) (с лямбда-членом), но полученное без всяких предположений из принципа наименьшего действия как его точное следствие. Система (5.6) решается точно (делением и исключением времени оно сводится к уравнению Бернулли), но нам достаточно и фазового портрета, который исследовался в [61, 63]. Условия ускоренного расширения — это узкая область под параболой $H\geqslant 0$, $K\geqslant 0$, $H^2+K-\dfrac{\lambda}{6}\leqslant 0$.

Система (5.5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в более общем случае, когда $H(m,t)$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов I_i. Пусть значение $H(m,t)$ на этом интервале равно $H(i,t)$, $i=1\dots r$. Обозначая $m(i,t)=\dfrac{4\pi\gamma}{3}\int\limits_{I_i} m\rho(m,t)dm$, получаем систему $2r$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dm(i,t)}{dt}+3H(i,t)m(i,t)=0, i=1\dots r, \\ \dfrac{dH(i,t)}{dt}+H(i,t)^2+\Sigma_{k=1\dots r}m(k,t)-\dfrac{\lambda}{3}=0. \end{cases}$$

В литературе широко обсуждается напряжение константы Хаббла («*Constant Hubble Tension*», см. [36]), оно выражает несоответствие постоянной Хаббла наблюдениям и вопросам, от чего она вообще может зависеть. Получение точного решения следствия действия (2.1) для постоянной Хаббла в принципе может убрать это несоответствие. Наша цель — аналог теории Милна—МакКри для динамики в релятивистском случае: этот метод приведёт к построению космологических решений и объяснит ускоренное расширение Вселенной без введения лямбды и тёмной энергии.

6. Общая теория космологических решений: вместо тёмной энергии и лямбда-члена ясная классическая математика и простая гамильтонова механика

Перенесём теорию Милна—МакКри из предыдущего раздела на случай общего гамильтониана $H(p,x)$. Выпишем уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial H}{\partial p},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},\frac{\partial f}{\partial p}\right)=0.$$

Сделаем гидродинамическую подстановку сразу в градиентной форме $f(t,\mathbf{x},p)=\rho(t,\mathbf{x})\delta(\mathbf{v}-\nabla W(t,\mathbf{x}))$. Отметим, что именно в такой форме её отметил В. П. Маслов (см. [23, с. 29]). Получаем при этом уравнения неразрывности и Гамильтона—Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\nabla W)=0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}+H(\nabla W,x)=0. \end{cases}$$

Если плотность не зависит от времени (общепринятое космологическое предположение), то переменные в уравнении неразрывности разделяются, и появляется постоянная Хаббла:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(t)}{\partial t}+3h(t)\rho(t)=0, \\ \triangle W=3h(t), \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}+H(\nabla W,x)=0. \end{cases}$$

Последние два уравнения — обобщенная система Гурса. Для них можно выписать условия совместности: $3\dfrac{\partial h(t)}{\partial t}+\triangle H(\nabla W,x)=0$.

Пусть гамильтониан $H(p,x)$ зависит от этих аргументов через изотропные переменные p^2 и (p,x): $H(p,x)=H((p,x),p^2)$ (это инвариантность относительно вращений). Тогда при подстановке Гамильтона—Якоби $p=\nabla W$, $W=W(r)$ гамильтониан приобретает вид $H(p,x)=H((p,x),p^2)=H(rW_r,W_r^2)$. Скорости имеют вид $v^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dfrac{\partial H}{\partial W_r}\dfrac{x^i}{r}$. Это хаббловское расширение. Вывод: это — весьма общий и при этом общематематический факт, который справедлив даже без «космологического» предположения об однородности пространства (когда плотность не зависит от пространственной переменной): тогда константа Хаббла тоже зависит от пространственной координаты и имеет явный вид $h(r,t)=\dfrac{\partial H}{\partial W_r}\dfrac{1}{r}$. Это обобщение может быть полезно, так как иногда наблюдают константу Хаббла, зависящую от радиуса.

1. Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}\right)=0.$$

2. В космологическом случае, когда плотность $\rho=\rho(m,t)$ не зависит от пространственной координаты, переменные разделяются, и появляется «постоянная» интегрирования $h(t)$, которая называется постоянной Хаббла и совпадает с появившейся выше:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+3\rho h=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}\right)=3h.$$

3. Уравнение $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{\partial H}{\partial W_r}\dfrac{x^i}{r}\right)=3h$ имеет общее решение $\dfrac{\partial H}{\partial W_r}=hr+\dfrac{A(t)}{r^2}$.

4. В космологических моделях «постоянную» $A(t)$ можно положить равной нулю, исключая особенность в нуле. При этом, подставляя это выражение для скоростей $v^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dfrac{\partial H}{\partial W_r}\dfrac{x^i}{r}$ из раздела 3, получаем $v^i=h(t)x^i$, что полностью соответствует общепризнанному представлению о «постоянной Хаббла» h: чем дальше галактика, тем быстрее она убегает. Мы видим, что такое

разбегание — общематематический факт из гамильтоновой динамики инвариантных гамильтонианов.

5. Решая уравнение разделов 5, 6 $\dfrac{\partial H}{\partial W_r} = hr$ относительно W_r, получаем $W_r = F(hr)$, где F — это функция, обратная к $\dfrac{\partial H}{\partial W_r}$ (теорема об обратной функции).

6. Получаем следующую систему уравнений (задача Гурса):

$$\begin{cases} W_r = F(hr), \\ -\dfrac{\partial W}{\partial t} = H(P,x) = H((p,x),p^2) = H(rW_r, W_r^2) = H(rF(hr), F(hr)^2). \end{cases}$$

7. Переписывая все уравнения вместе, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial r} = F(hr), \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + H(rF(hr), F(hr)^2) = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

8. Выпишем условие совместности последних двух уравнений (это обычный ход в системе Гурса). Это условие совместности имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}, \qquad -\frac{\partial}{\partial t} F(hr) = \frac{\partial}{\partial r} H(rF(hr), F(hr)^2).$$

Мы должны применить эти выкладки в случае ОТО для изотропной метрики

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e(r,t) & a(r,t)x & a(r,t)y & a(r,t)z \\ a(r,t)x & b(r,t)+d(r,t)x^2 & d(r,t)xy & d(r,t)xz \\ a(r,t)y & d(r,t)xy & b(r,t)+d(r,t)y^2 & d(r,t)yz \\ a(r,t)z & d(r,t)xz & d(r,t)yz & b(r,t)+d(r,t)z^2 \end{pmatrix}.$$

Нам потребуется и обратная матрица: частицы в импульсах описываются метрикой с верхними индексами, а поля — нижними:

$$g_{\alpha\beta} = K \cdot \begin{pmatrix} b + d(x^2+y^2+z^2) & -ax & -ay & -az \\ -ax & g_{11} & \dfrac{a^2xy - edxy}{b} & \dfrac{a^2xz - edxz}{b} \\ -ay & \dfrac{a^2xy - edxy}{b} & g_{22} & \dfrac{a^2yz - edyz}{b} \\ -az & \dfrac{a^2xz - edxz}{b} & \dfrac{a^2yz - edyz}{b} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{be - (a^2 - ed)(x^2+y^2+z^2)}, \\ g_{11} &= \frac{1}{b}(-a^2y^2 - a^2z^2 + eb + edy^2 + edz^2), \\ g_{22} &= \frac{1}{b}(-a^2x^2 - a^2z^2 + eb + edx^2 + edz^2), \\ g_{33} &= \frac{1}{b}(-a^2x^2 - a^2y^2 + eb + edx^2 + edy^2). \end{aligned}$$

Как известно в ОТО, гамильтониан вычисляется по массовому соотношению $g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = (mc)^2$ по формуле $-H(x,p) = cp_0$. Поэтому решим квадратное уравнение относительно p_0:

$$g^{00}p_0^2 + 2g^{i0}p_ip_0 + g^{ij}p_ip_j = (mc)^2.$$

Физический смысл имеет корень, взятый с минусом [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]:

$$p_0 = \frac{1}{e}\left(-2a(p_1x + p_2y + p_3z) - \sqrt{(a^2 - ed)(p_1x + p_2y + p_3z)^2 + e((mc)^2) - bp^2}\right).$$

Здесь использовано обозначение $p^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2$. Сделаем подстановку $p = \nabla W(r,t)$, $W_t = \dfrac{\partial W}{\partial t} = -H(x,p) = cp_0$ и выпишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$W_t = -H = \frac{c}{e}\left(-arW_r - \sqrt{W_r^2(a^2r^2 - eb - dr^2e) + e(mc)^2}\right).$$

Получаем следующую систему уравнений для этого известного [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65] гамильтониана ОТО — частный случай системы (6.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + 3h\rho = 0, \\ \dfrac{\mu \frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{e(mc)^2 + \mu\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = K, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{c}{e}\dfrac{\partial W}{\partial r}ar + \dfrac{c}{e}\sqrt{e(mc)^2 + \mu\left(\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)^2} = 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $\mu(r,t) = r^2(a^2 - de) - be$, $K(m,r,t) = \left(\dfrac{e}{c}h - a\right)r$ — безразмерный радиус-вектор r.

Эту систему уравнений следует дополнить уравнениями Эйнштейна для полей в изотропном случае, т. е. на метрические коэффициенты a, b, d, e. Но выведем следствия уравнений (6.2). Решаем среднее уравнение системы (6.2) относительно W_r, получаем

$$W_r = \frac{Kemc}{\sqrt{e(\mu^2 - K^2\mu)}}.$$

Подставляя это выражение в нижнее уравнение (Гамильтона—Якоби), получаем

$$W_t = -\frac{mc^2(arK + \mu)}{\sqrt{e(\mu^2 - K^2\mu)}}.$$

Тогда, приравнивая вторые частные производные (условие совместности): $\dfrac{\partial^2 W}{\partial r\partial t} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial t\partial r}$. Перепишем выражения в удобном виде: $_t = \dfrac{mcT}{Z}$, $W_r = \dfrac{mcQ}{Z}$, где $Z = e(\mu^2 - K^2\mu)$, $T = -c(arK + \mu)$, $Q = eK$, $K = \left(\dfrac{e}{c}h - a\right)r$, $\mu(r,t) = r^2(a^2 - de) - be$. Упростим T:

$$T = e(cd - ah)r^2 + ebc. \tag{6.3}$$

Здесь все компоненты метрики суть функции (r,t) радиус-вектора и времени, а постоянная Хаббла есть, вообще говоря, функция (m,t) времени и массы. Получаем уравнение

$$2ZQ_t - QZ_t = 2ZT_r - TZ_r. \tag{6.4}$$

Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которое дают космологические решения.

Все три функции этого уравнения суть полиномы по r, если коэффициенты метрики — сами полиномы по r. Тогда можно приравнять коэффициенты при степенях r, что и будет обобщением метода Милна—МакКри.

7. Пример. Коэффициенты метрики — функции только времени

Рассмотрим случай, когда коэффициенты метрики есть функции только от времени: $Z = z_4r^4 + z_2r^2 + z_0$, $T = t_2r^2 + t_0$, $Q = q_1r$. Получаем три уравнения при пятой, третьей и первой степенях:

$$\begin{aligned} &2z_4q_{1t} - z_{4t}q_1 = 0, \\ &2z_2q_{1t} - z_{2t}q_1 = 2z_2t_2 - 4z_4t_0, \\ &2z_0q_{1t} - z_{0t}q_1 = 4z_0t_2 - 2z_2t_0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Первое уравнение интегрируется:

$$\frac{q_1}{\sqrt{z_4}} = const = I(m), \tag{7.2}$$

где $I(m)$ — безразмерный интеграл, причём $q_1 = \frac{e^2}{c}h - ae$, $z_4 = e(a^2 - de)^2 - e(a^2 - de)\left(\frac{e}{c}h - a\right)^2$. Остальные коэффициенты в (7.1): $z_2 = -2be^2(a^2 - de) + be^2\left(\frac{e}{c}h - a\right)^2$, $z_0 = e(be)^2$, $t_2 = -c(a^2 - de) - ca\left(\frac{e}{c}h - a\right) = cde - ca^2 - aeh + ca^2 = e(cd - ah)$, $t_0 = cbe$.

Особый интерес представляет последнее из уравнений (7.1), т. к. оно содержит уравнение на постоянную Хаббла, имеющее вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 = \lambda(a, b, d, e, h).$$

Отклонение от свободного движения (метрики Минковского и модели Фридмана) $\lambda(a, b, d, e, h)$ должно дать ускоренное расширение в терминах метрики, если оно положительно. Для следующего примера метрики, обобщающей модель Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера (ФЛРУ), $\lambda(a, b, d, e, h) = \frac{hb_t}{b}$.

Итак, мы построили общую теорию движения материи в космологических решениях в изотропной метрике. Для окончания нужны ещё движения полей в заданной метрике по уравнениям Эйнштейна.

Рассмотрение частных случаев представляет значительный интерес: мы свели задачу к исследованию знака $\lambda(a, b, d, e, h)$. Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которые дают космологические решения. Если коэффициенты метрики — полиномы по r, то все коэффициенты уравнения (3.3) тоже полиномы, и можно приравнять коэффициенты при степенях r, что и будет обобщением метода Милна—МакКри.

В работе [4,56] рассмотрен случай, когда метрика есть функция только от времени. Здесь ограничимся случаем, когда $b(t)$ и $d(t)$ — произвольные функции времени, но $a = 0$, $e = 1$. Отсылаем за подробностями в общем случае к работе [4, 56].

8. Пример. Обобщённая модель Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера (ФЛРУ)

Найдём обратную матрицу, обозначая её соответствующие компоненты большими буквами, получим $E = 1$, $A = 0$, $D = -\frac{d}{b(b + dr^2)}$, $B = \frac{1}{b}$. Это обобщает случай ФЛРУ [2,18,22,28,41,47,65].

Мы видим, что если уравнения для полей описываются метрическим тензором с нижними индексами, которые входят в действие (2.1) (здесь это соответствует коэффициентам с большими буквами), то необходимые уравнения для материи — с метрикой с верхними индексами. Получим для движения материи уравнения (7.1) (см. [4, 56]):

$$\begin{aligned} &2d^2h_t - h(d^2)_t - d_t\left(\frac{h}{c}\right)^2 h = 0, \\ &4bdh_t - 2(bd)_t h - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bdh^2 = 0, \\ &bh_t - b_t h + bh^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

9. Пример. Диагонализация ФЛРУ

Приводя систему к диагональному виду относительно производных, получаем простую систему, эквивалентную системе (8.1) (см. [8]):

$$\begin{aligned} &d_t = 2\frac{d^2c^2}{h}, \\ &h_t = -(2dc^2 + h^2), \\ &b_t = -(2dc^2)\frac{b}{h}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Из первого и третьего уравнения следует, что $bd_t - db_t = 0$, $\frac{d}{b} = -k$ — интеграл кривизны ($b = -a^2$ в обычных обозначениях для модели Фридмана). Мы автоматически оказались в случае постоянной кривизны k-модели Фридмана. При ускоренном расширении вселенной из второго уравнения следует $d \prec 0$. Так как $b \prec 0$, имеем следствие $k \prec 0$. Это пространство Лобачевского.

Итак, мы получили, что знак кривизны определяется из эксперимента и точного следствия уравнений, получающихся из принципа наименьшего действия. Мы не только получили простое объяснение ускоренного расширения Вселенной на основе системы (3.5) без введения лямбды Эйнштейна, полей, темной энергии, но и впервые получили возможность надежно говорить о знаке кривизны на основе хорошо проверенного эксперимента об ускоренном расширении Вселенной.

Удобно переписать систему (9.1), используя соотношение $\dfrac{d}{b} = -k$ и обозначая $b = -a^2$, где a — параметр Фридмана:

$$
\begin{aligned}
&h_t + h^2 = -2a^2kc^2,\\
&a_t = -kc^2\frac{a^3}{h}.
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

В таком виде явно входит кривизна $k = -\dfrac{d}{b}$ — откуда из первого уравнения хорошо видно, что кривизна должна быть отрицательна для ускоренного расширения Вселенной. Можно искать частное решение системы (9.1) в виде $d = Ah^2$, откуда находим из условия совпадения двух первых уравнений (9.1) $A = -\dfrac{1}{c^2}$. Это решение является сепаратрисой двух режимов: под этой параболой решения стартуют из начала координат, над ней решения начинаются вблизи вертикальной оси на плюс бесконечности и около. Уравнение на константу Хаббла принимает особенно простой вид $h_t = h^2$. Уход на бесконечность за конечное время. Тот же ответ получается и из уравнения (9.2), где подстановка уже должна выглядеть по-другому: $a = Ah$.

Где живёт наша Вселенная? Представляет значительный интерес изучить этот вопрос, а также последовательно обобщать эти уравнения, добавляя оставшиеся коэффициенты и обобщая модель Фридмана, сравнивая его и эти обобщения с экспериментальными данными. Первые прикидки показывают хорошие результаты, устраняя проблему «*Constant Hubble Tension*» [36].

Подчеркнём, что (9.2) — это точное следствие уравнений Эйнштейна для космологического движения релятивистских частиц в заданных полях, поэтому (9.2) является триумфальным обоснованием ОТО и объяснением ускоренного расширения Вселенной одновременно. Уместно процитировать В. Л. Гинзбурга (его известный обзор 1999 года [17, 43]): «*Эйнштейн счёл введение лямбда-члена "неудовлетворительным с теоретической точки зрения" и отбросил его. Паули, в примечании к своей известной книге, изданной по-английски в 1958 г., "целиком присоединился к точке зрения Эйнштейна". Л. Д. Ландау даже слышать не хотел о лямбда-члене, но добиться от него причины такой позиции мне не удалось*».

Интуиция не подвела великих физиков, как видно из этой статьи. Дело в том, что (9.2) является одновременно продвижением и 21-й проблемы Гинзбурга (экспериментальное подтверждение ОТО: эксперимент здесь — как раз ускоренное расширение), и 23-й проблемы (космологическая проблема, лямбда-член). Можно сказать, глядя на первое из уравнений (9.2), что в качестве лямбда-члена выступает метрика, умноженная на кривизну и квадрат скорости света, а отрицательная кривизна обеспечивает отталкивание, как бы растягивая, расталкивая частицы: геодезические в пространствах отрицательной кривизны, как известно, разбегаются. Можно назвать (9.2)) геометрическим объяснением отталкивания и ускоренного расширения.

Сразу возникают новые вопросы: как сопрячь ньютоново притяжение с геометрическим отталкиванием? Ясно, что здесь нужно расширять систему уравнений, включая уравнения для полей по аналогии с нерелятивистским решением Милна—МакКри.

Ещё один интересный и актуальный вопрос: какова наша Вселенная с глобальной точки зрения? Ибо известны многочисленные пространства отрицательной кривизны (в частности, геодезические на пространствах отрицательной кривизны называются системами Д. В. Аносова и обладают свойствами разбегания и перемешивания). Это позволило объяснить результаты по ускоренному расширению Вселенной [52, 54], за которые и была присуждена нобелевская премия в 2011 году. Результаты позволили завершить попытки вывода уравнений гравитации и электродинамики из принципа наименьшего действия [2,16,18,22,28,37,38,41,47,65]. В работах [4,8,56] были получены уравнения, позволившие уверенно говорить о возможности объяснения ускоренного расширения без лямбды, тёмной энергии, дополнительных полей на основе классической ОТО.

10. Пример. Диагонализация ФЛРУ с не равными нулю другими коэффициентами

Система принимает вид:

$$\begin{aligned} d_t &= -2\frac{d^2c^2}{he} + \frac{4a^2c^2d}{he^2} - \frac{a^4c^2}{he^3} + \frac{2aa_t}{e} - \frac{a^2e_t}{e^2}, \\ h_t + h^2 &= -2dc^2 + 2a^2\frac{c^2}{e^2} - \frac{he_t}{2e}, \\ b_t &= -\frac{2dc^2b}{eh} + \frac{2ba^2c^2}{he^2} + \frac{2bac}{e}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Отметим, что если $a = 0$, то кривизна по-прежнему — интеграл. Нужно дополнить эту систему уравнениями Эйнштейна (2.2), но для импульсов: тогда мы сможем использовать и там форму Гамильтона—Якоби, приведшую к (8.1), (9.1), (9.2), (10.1). Мы получаем выражение для импульсов:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc\frac{g_{\mu\alpha}u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}. \tag{10.2}$$

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем $p^\beta = -mc\dfrac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}u^\eta u^\xi}}$. Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим β-ю компоненту на нулевую $\dfrac{p^\beta}{p^0} = \dfrac{u^\beta}{c}$. В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p_0: $p_0 = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4aC})/(2a)$, где $a = g^{00}$, $b = 2p_ig^{0i}$, $C = p_ip_jg^{ij} - (mc)^2$. При этом для согласования с нерелятивистской динамикой берётся знак минус. Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений для исключения скоростей с учетом $u^0 = c\ p^\beta/p^0 = u^\beta/c$ в формулу (10.2) при $\mu = 0$ (ср. [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]).

Уравнение для полей останется тем же самым (2.2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m)d\mathbf{v}dm = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m)d\mathbf{p}dm$. Каждая из двух этих величин — это число частиц в элементе объёма, что является инвариантом при замене переменных. Уравнение Эйнштейна (2.2) упрощается и переписывается:

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = c\int m\frac{f(t,\mathbf{x},\mathbf{p},m)}{2\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}u^\mu u^\nu d\mathbf{p}dm. \tag{10.3}$$

Выражение в импульсах:

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)\frac{p^\mu p^\nu}{\sqrt{(p^0)^2}}d\mathbf{p}dm. \tag{10.4}$$

Выражение в нижних индексах, имея в виду связь с функцией Гамильтона—Якоби:

$$k_1\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int f(t,\mathbf{x},\mathbf{p},m)\frac{p_\mu p_\nu}{\sqrt{(p^0)^2}}d\mathbf{p}dm. \tag{10.5}$$

Получается следующий план действий. Написать систему уравнений Власова—Эйнштейна в импульсах, рассмотреть её изотропную форму и постараться решить эту систему. Сделаем гидродинамическую подстановку $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m) = \rho(m, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, m))$. Получаем из (10.5)

$$k_1\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int \rho(m,t)\frac{P_\mu P_\nu}{\sqrt{(P^0)^2}}dm. \tag{10.6}$$

Теперь полагаем $P_\mu = \dfrac{\partial W}{\partial x^\mu}$, $W = W(t,r)$. Получаем

$$k_1\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int \frac{\partial W}{\partial x^\mu}\frac{\partial W}{\partial x^\nu}\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(P^0)^2}}dm. \tag{10.7}$$

Здесь $\dfrac{\partial W}{\partial x^i} = W_r\dfrac{x^i}{r}$, $i = 1,2,3$. Из (10.7) следует, что нужно аккуратно посчитать P^0 с учётом (6.3) и вообще учесть (6.3), переходя от изотропного случая (10.7) к космологическому изотропному случаю уравнений Эйнштейна:

$$P^0 = P_\mu g^{\mu 0} = \frac{\partial W}{\partial x\mu}g^{\mu 0} = \frac{\partial W}{\partial x^0}e + \frac{\partial W}{\partial x^k}ax^k = mcT\frac{e}{c\sqrt{Z}} + \frac{\partial W}{\partial r}ax^k\frac{x_k}{r} = mcT\frac{e}{c\sqrt{Z}} + mcQ\frac{ar}{\sqrt{Z}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{Z}}(meT + mcQar) = \frac{1}{\sqrt{Z}}(-mec(aK+\mu) + mceKar) = -\frac{1}{\sqrt{Z}}mec\mu,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{Z}}meT, \qquad \frac{\partial W}{\partial x^k} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{x_k}{r} = mceK\frac{1}{\sqrt{Z}}\frac{x_k}{r}. \tag{10.8}$$

Мы получаем вместо (10.7) в изотропном случае следующий вариант уравнений Эйнштейна в космологическом изотропном случае:

$$k_1\left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int \frac{\partial W}{\partial x^0}\frac{\partial W}{\partial x^0}\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(P^0)^2}}dm = \frac{c}{2}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}(meT)^2\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(mec\mu)^2}}dm =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}\left(c(aK+\mu)\right)^2 e\frac{m\rho(m,t)}{\sqrt{(\mu)^2}}dm = \frac{c^2 e}{2\sqrt{(\mu)^2}}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}\left(aK+\mu\right)^2 m\rho(m,t)dm =$$
$$= \frac{c^2}{2\sqrt{(e(cd-ah)r^2+ebc)^2}}\int \left(e(cd-ah)r^2+ebc\right)^2 e\frac{m\rho(m,t)}{\sqrt{Z}}dm =$$
$$= \frac{c^2}{2\sqrt{(e(cd-ah)r^2+ebc)^2}}\int \left(e(cd-ah)r^2+ebc\right)^2 e\frac{m\rho(m,t)}{\sqrt{\mu^2 e - \mu K^2 e}}dm,$$

$$k_1\left(R_{0k} - \frac{1}{2}g_{0k}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int \frac{\partial W}{\partial x^0}\frac{\partial W}{\partial x^k}\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(P^0)^2}}dm =$$
$$= \frac{c}{2}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}(meT)\left(mceK\frac{x_k}{r}\right)\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(mec\mu)^2}}dm = \frac{c^2 ex_k}{2r\sqrt{(\mu)^2}}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}(aK+\mu)Km\rho(m,t)dm,$$

$$k_1\left(R_{mk} - \frac{1}{2}g_{mk}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \frac{c}{2}\int \frac{\partial W}{\partial x^m}\frac{\partial W}{\partial x^k}\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(P^0)^2}}dm =$$
$$= \frac{c}{2}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}\left(mceK\frac{x_m}{r}\right)\left(mceK\frac{x_k}{r}\right)\frac{\rho(m,t)}{\sqrt{(mec\mu)^2}}dm = \frac{c^2 ex_k}{2r\sqrt{(\mu)^2}}\int \frac{1}{\sqrt{Z}}K^2 m\rho(m,t)dm. \tag{10.9}$$

У нас уже есть выражения (6.3) для W_r и W_t через метрику. Осталось написать левую часть.

Мы получили выражение для правой части уравнений Эйнштейна, из которых видно, что удобно всё делать в сферических координатах. При этом независимых уравнений оказывается как раз два, причём справа стоят полиномы четвёртой степени по r. Поэтому способ решения этих уравнений — разложение по r в квадрате должно оборваться и дать замкнутую систему уравнений. Такой же метод применим и к уравнениям (6.4) для частиц. Такова программа дальнейших исследований.

11. Заключение

Уравнения (8.1), (9.1), (9.2) убедительно показывают, что ускоренное расширение — это простой релятивистский эффект, так как они являются точными космологическими следствиями классического лагранжиана Эйнштейна ОТО для движения частиц в заданных полях.

Кроме того, ускоренное расширение даёт однозначно, что наша Вселенная — это пространство Лобачевского. Это завершает усилия многих поколений учёных [2,17,18,22,28–30,32,40–43,47,65] и ставит новые задачи.

Возникают вопросы и теоретические по уточнению модели Фридмана, и вопросы сравнения с экспериментом [2–18, 22, 23, 28–34, 36–43, 47, 49–54, 56–65]. В частности, в этих работах напряженно обсуждаются вопросы о несоответствии константы Хаббла экспериментам («*Constant Hubble Tension*»), которые предлагаемыми результатами выводятся на новый уровень.

Но мы решили и ещё несколько задач «по дороге». ОТО поставлено на твердую математическую основу: уравнения ОТО в форме уравнений Власова—Эйнштейна выведены из принципа наименьшего действия и имеют замкнутую форму. Строго определены космологические решения метода Милна—МакКри и получены общематематические гидродинамические следствия и следствия Гамильтона—Якоби уравнений как Лиувилля, так и типа Власова.

Предъявленное обоснование ускоренного расширения Вселенной требует дальнейших как теоретических и чисто математических исследований, связанных с изотропной версией уравнений Эйнштейна, так и тщательного сравнения с экспериментами, обещая стать самым точным подтверждением классической Общей теории относительности.

Мы по сути сделали только первые шаги: в рамках модели Фридмана способ Милна—МакКри дал замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, но как это согласуется с уравнениями для полей? Требуется в идеале получить решения полной системы уравнений Власова—Эйнштейна в изотропном случае, как это удалось Милну и МакКри в ньютоновом случае (уравнение Власова—Пуассона для тяготения). Но даже если бы концы с концами сошлись в случае метрики, зависящей от времени (полной или даже с $a = 0$), это было бы хорошим продвижением.

Предложенное приложение уравнения Власова к гравитации и космологии с объяснением ускоренного расширения Вселенной и выводом уравнения Власова—Максвелла—Эйнштейна и Власова—Пуассона из принципа наименьшего действия показывает его повышенную фундаментальность. Но уравнение Власова является также основой теории плазмы, где имеются уже как признанные успехи типа затухания Ландау, расчётов плазменных приборов типа диода Ленгмюра и плазменных двигателей, так и приложения к исследованиям токамаков [1,21,24–27,35,44–46,55].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляева Ю. О.* Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двукомпонентной плазмы// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 19–31.
2. *Вайнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Платон, 2000.
3. *Веденяпин В. В.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона—Якоби и космологических решениях// Докл. РАН. Сер. Мат. Инф. Проц. упр. — 2022. — *504*. — С. 51–55. — DOI: 10.31857/S2686954322330013.
4. *Веденяпин В. В.* Математическая теория расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2024. — *64*, № 11. — С. 2110–2127. — DOI: 10.31857/S0044466924110076.
5. *Веденяпин В. В.* Математика ускоренного расширения Вселенной и пространство Лобачевского// Докл. РАН. Сер. Мат. Инф. Проц. упр. — 2025. — *522*. — С. 11–18. — DOI: 10.31857/S2686954325020038.
6. *Веденяпин В. В., Аушев В. М., Гладков А. О., Измайлова Ю. А., Реброва А. А.* Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна—МакКри// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2024. — № 3. — DOI: 10.20948/prepr-2024-3.
7. *Веденяпин В. В., Бай А. А., Петров А. Г.* О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна—МакКри и о точках Лагранжа// Докл. РАН. Сер. Мат. Инф. Проц. упр. — 2023. — *514*, № 1. — С. 69–73. — DOI: 10.31857/S2686954323600532.
8. *Веденяпин В. В., Батищева Я. Г., Сафронов Ю. А., Богданов Д. И.* Расширение Вселенной в случае обобщённой метрики Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2025. — *14*.
9. *Веденяпин В. В., Воронина М. Ю., Руссков А. А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия// Докл. РАН. — 2020. — *495*. — С. 9–139. — DOI: 10.31857/S268674002006019X.

10. *Веденяпин В. В., Негматов М. А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона—Якоби// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 5. — С. 521–526. — DOI: 10.7868/S086956521311008X.
11. *Веденяпин В. В., Негматов М. А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *47*. — С. 5–17.
12. *Веденяпин В. В., Парёнкина В. И., Свирщевский С. Р.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2022. — *62*, № 6. — С. 1016–1029. — DOI: 10.31857/S0044466922060163.
13. *Веденяпин В. В., Фимин Н. Н.* Метод Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 2. — С. 136–139. — DOI: 10.7868/S0869565215080083.
14. *Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М.* Уравнения типа Власова—Максвелла—Эйнштейна и их следствия. Приложения к астрофизическим задачам// Теор. мат. физ. — 2024. — *218*, № 2. — С. 258–279. — DOI: 10.4213/tmf10551.
15. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики: Учебник для вузов. — М.: Физматлит, 2004.
16. *Власов А. А.* Статистические функции распределения. — М.: Наука, 1966.
17. *Гинзбург В. Л.* Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)?// Усп. физ. наук. — 1999. — *169*. — С. 419–441. — DOI: 10.3367/UFNr.0169.199904d.0419.
18. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
19. *Козлов В. В.* Гидродинамика гамильтоновых систем// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1983. — № 6. — С. 10–22.
20. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998.
21. *Козлов В. В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова// Усп. мат. наук. — 2008. — *63*, № 4. — С. 93–130. — DOI: 10.4213/rm9216.
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1988.
23. *Маслов В. П.* Комплексные марковские цепи и интеграл Фейнмана. — М.: Наука, 1976.
24. *Сидоров Н. А., Синицын А. В.* Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений стационарной системы Власова—Максвелла// Мат. заметки. — 1997. — *62*, № 2. — С. 268–292.
25. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле// Усп. мат. наук. — 2014. — *69*, № 2. — С. 107–148. — DOI: 10.4213/rm9579.
26. *Степин С. А., Тарасов А. Г.* Дисперсионное соотношение в кинетической модели бесстолкновительной плазмы// Теор. мат. физ. — 2022. — *210*, № 3. — С. 442–454. — DOI: 10.4213/tmf10175.
27. *Сулейманова С. Ш., Юшканов А. А.* Электрическое поле вблизи поверхности плазмы с произвольной степенью вырождения как отклик на внешнее переменное электрическое поле// Теор. мат. физ. — 2020. — *204*, № 1. — С. 76–94. — DOI: 10.4213/tmf9827.
28. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ЛКИ, 2007
29. *Фридман А. А.* О кривизне пространства// Журн. Русск. физ.-хим. о-ва. — 1924. — *56*, № 1. — С. 59.
30. *Фридман А. А.* О кривизне пространства// Усп. физ. наук. — 1963. — *80*, № 3. — С. 439–446.
31. *Чернин А. Д.* Тёмная энергия и всемирное антитяготение// Усп. физ. наук. — 2008. — *178*, № 3. — С. 267–300. — DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803c.0267.
32. *Эйнштейн А.* Замечание к работе А. Фридмана «О кривизне пространства»// Усп. физ. наук. — 1963. — *80*, № 3. — С. 453-453. — DOI: 10.3367/UFNr.0080.196307g.0453.
33. *Andersson L., Korzyński M.* Variational principle for the Einstein–Vlasov equations// ArXiv. — 2019. — 1910.12152.
34. *Andréasson H.* The Einstein–Vlasov System/Kinetic Theory// Living Rev. Rel. — 2002. — *5*. — 7. — DOI: 10.12942/lrr-2002-7.
35. *Belyaeva Yu. O., Gebhard B., Skubachevskii A. L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations// Kinet. Relat. Mod. — 2021. — *14*, № 2. — C. 257–282. — DOI: 10.3934/krm.2021004.
36. *Capozziello S., Gurzadyan V. G.* Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy// Eur. Phys. J. Plus. — 2023. — *138*. — 184. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-03763-2.
37. *Cercigniani C., Kremer G. M.* The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. — Berlin: Birkhäuser, 2002.

38. *Choquet-Bruhat Y.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. — New York: Oxford Univ. Press, 2015.
39. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. — New York–London: Interscience Publ., 1962.
40. *Einstein A.* Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman «Über die Krümmung des Raumes»// Z. Physik. — 1922. — *11*. — С. 326-326. — DOI: 10.1007/BF01328424.
41. *Fock V. A.* The theory of space, time and gravitation. — Oxford: Pergamon Press, 1964.
42. *Friedmann A. A.* Über die Krümmung des Raumes// Z. Physik. — 1922. — *11*. — С. 377–386.
43. *Ginzburg V. L.* What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)?// Phys. Usp. — 1999. — *42*. — С. 353–373. — DOI: 10.1070/PU1999v042n04ABEH000562.
44. *Kessler T., Rjasanow S.* Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging// Алгебра и анализ. — 2020. — *32*, № 4. — С. 200–216.
45. *Kessler T., Rjasanow S.* Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging// St. Petersburg Math. J. — 2021. — *32*, № 4. — С. 753–765. — DOI: 10.1090/spmj/1668.
46. *Kozlov V. V.* The generalized Vlasov kinetic equation// Russ. Math. Surv. — 2008. — *63*, № 4. — С. 691–726. — DOI: 10.1070/RM2008v063n04ABEH004549.
47. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* The classical theory of fields. — Oxford: Pergamon Press, 1983.
48. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form)// Z. Physik. — 1926. — *40*. — С. 322–326.
49. *McCrea W. H., Milne E. A.* Newtonian universes and the curvature of space// Quart. J. Math. — 1934. — *os-5*, № 1. — С. 73–80. — DOI: 10.1093/qmath/os-5.1.73.
50. *Okabe T., Morrison P. J., Friedrichsen J. E. III, Shepley L. C.* Hamiltonian dynamics of spatially-homogeneous Vlasov–Einstein systems// Phys. Rev. D. — 2011. — *84*. — 024011. — DOI: 10.1103/PhysRevD.84.024011.
51. *Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P.* BBGKY-hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean aproximation// Phys. A. Stat. Mech. Appl. — 1988. — *151*, № 2. — С. 318–340. — DOI: 10.1016/0378-4371(88)90019-2.
52. *Perlmutter S. и др.* Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae// Astrophys. J. — 1999. — *517*. — С. 565–586. — DOI: 10.1086/307221.
53. *Rein G.* Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas — a review// Class. Quantum Grav. — 2023. — *40*, № 19. — 193001. — DOI: 10.1088/1361-6382/acf436.
54. *Riess A. G. и др.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant// Astron. J. — 1998. — *116*. — 1009. — DOI: 10.1086/300499.
55. *Skubachevskii A. L.* Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field// Russ. Math. Surv. — 2014. — *69*, № 2. — С. 291–330. — DOI: 10.1070/RM2014v069n02ABEH004889.
56. *Vedenyapin V. V.* Mathematical theory of the expanding universe based on the principle of least action// Comput. Math. Math. Phys. — 2024. — *64*, №. 11. — С. 2624–2642. — DOI: 10.1134/S0965542524701471.
57. *Vedenyapin V. V., Bay A. A.* Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne–McCrea solution for Lorentzian metric// Eur. Phys. J. Plus. — 2024. — *139*. — 111. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-04885-x.
58. *Vedenyapin V. V., Bay A. A., Parenkina V. I., Petrov A. G.* Minimal action principle for gravity and electrodynamics, Einstein lambda, and Lagrange points// Markov Proc. Relat. Fields. — 2023. — *29*. — С. 515–532. — DOI: 10.61102/1024-2953-mprf.2023.29.4.005.
59. *Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V.* The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models// Eur. Phys. J. Plus. — 2020. — *135*, № 5. — 400. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00412-w.
60. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* Properties of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their application to the problems of general relativity// Gravit. Cosmol. — 2020. — *26*, № 2. — С. 173–183. — DOI: 10.1134/S0202289320020115.
61. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system// Eur. Phys. J. Plus. — 2021. — *136*. — 670. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01659-7.
62. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein–Vlasov equations// Eur. Phys. J. Plus. — 2022. — *137*, № 9. — 1022. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-03257-7.
63. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* Hydrodynamic consequences of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their cosmological applications// Gravit. Cosmol. — 2023. — *29*, № 1. — С. 1–9. — DOI: 10.1134/S0202289323010115.

64. *Vedenyapin V. V., Negmatov M. A.* On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2014. — *202*, № 5. — С. 769–782. — DOI: 10.1007/s10958-014-2075-9.
65. *Weinberg S.* Gravitation and cosmology. — New York: Wiley, 1972.

В. В. Веденяпин
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: vicveden@yahoo.com, РИНЦ SPIN-код: 5002-2872, РИНЦ AuthorID: 137846, ResearcherID: H-2128-2016, Scopus: 6603544194

Я. Г. Батищева
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: jbat@kiam.ru, РИНЦ SPIN-код: 2666-6763, РИНЦ AuthorID: 112950

М. В. Горюнова
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: margoryunova2112@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 1235-9978, РИНЦ AuthorID: 655159

А. А. Руссков
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: russkov@inbox.ru, РИНЦ SPIN-код: 1069-6323, РИНЦ AuthorID: 177619, ORCID: 0000-0002-2950-2165

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584
EDN: MAUNPV

UDC 517.958
Research article

A mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action

V. V. Vedenyapin, Ya. G. Batishcheva, M. V. Goryunova, and A. A. Russkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. In classical works, the equations for gravitational and electromagnetism fields are proposed without deriving the right-hand sides. Here, we derive the right-hand sides and analyze the energy–momentum tensor within the framework of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and consider cosmological models such as Milne–McCrea and Friedmann. This allows us to place General Relativity (GR) on a rigorous mathematical foundation: to derive a closed system of GR equations from the principle of least action and provide a rigorous definition of cosmological solutions. This explains the accelerated expansion of the Universe without Einstein's lambda, dark energy, or fantastic new fields, but as a simple relativistic effect.

Keywords: general theory of relativity, Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation, accelerated expansion of the Universe, Hubble constant.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by ongoing institutional funding. No additional grants to carry out or direct this particular research were obtained. We would like to thank MIPT students A. A. Rebrova and A. O. Gladkov, Bauman Moscow State Technical University students V. M. Aushev and N. I. Izmailova for their help in working with the Goursat system [6], and MIPT student A. A. Bay for their help in working with relativistic equations [7, 57, 58].

For citation: V. V. Vedenyapin, Ya. G. Batishcheva, M. V. Goryunova, A. A. Russkov, "A mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 562–584, DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584.

REFERENCES

1. Yu. O. Belyaeva, "Statsionarnye resheniya uravneniy Vlasova dlya vysokotemperaturnoy dvukomponentnoy plazmy" [Stationary solutions of Vlasov equations for high-temperature three-component plasma], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 19–31 (in Russian).
2. S. Veinberg, *Gravitatsiya i Kosmologiya* [Gravitation and cosmology], Platon, Moscow, 2000 (Russian translation).
3. V. V. Vedenyapin, "O vyvode uravneniy elektrodinamiki i gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya, metode Gamil'tona—Yakobi i kosmologicheskikh resheniyakh" [On derivation of equations of electrodynamics and gravitation from the principle of least action, the Hamilton–Jacobi method, and cosmological solutions], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math. Inf. Control Proc.], 2022, **504**, 51–55, DOI: 10.31857/S2686954322330013 (in Russian).
4. V. V. Vedenyapin, "Matematicheskaya teoriya rasshireniya Vselennoy na osnove printsipa naimen'shego deystviya" [Mathematical theory of the expanding Universe based on the principle of least action], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2024, **64**, No. 11, 2110–2127, DOI: 10.31857/S0044466924110076 (in Russian).
5. V. V. Vedenyapin, "Matematika uskorennogo rasshireniya Vselennoy i prostranstvo Lobachevskogo" [Mathematics of accelerated expansion of the Universe and Lobachevsky space], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math. Inf. Control Proc.], 2025, **522**, 11–18, DOI: 10.31857/S2686954325020038 (in Russian).
6. V. V. Vedenyapin, V. M. Aushev, A. O. Gladkov, Yu. A. Izmaylova, and A. A. Rebrova, "Matematicheskaya teoriya uskorennogo rasshireniya Vselennoy na osnove printsipa naimen'shego deystviya i modeli Fridmana i Milna—Makkri" [Mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action and the Friedman and Milne–McCrea model], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2024, No. 3, DOI: 10.20948/prepr-2024-3 (in Russian).
7. V. V. Vedenyapin, A. A. Bay, and A. G. Petrov, "O vyvode uravneniy gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya, relyativistskikh resheniyakh Milna—Makkri i o tochkakh Lagranzha" [On derivation of equations of gravitation from the principle of least action, relativistic Milne–McCrea solutions and Lagrange points], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math. Inf. Control Proc.], 2023, **514**, No. 1, 69–73, DOI: 10.31857/S2686954323600532 (in Russian).
8. V. V. Vedenyapin, Ya. G. Batishcheva, Yu. A. Safronov, and D. I. Bogdanov, "Rasshirenie Vselennoy v sluchae obobshchennoy metriki Fridmana—Lemetra—Robertsona—Uokera" [Expansion of the Universe in the case of the generalized Friedmann–Lemaitre–Robertson–Walker metric], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2025, **14** (in Russian).
9. V. V. Vedenyapin, M. Yu. Voronina, and A. A. Russkov, "O vyvode uravneniy elektrodinamiki i gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya" [Derivation of the equations of electrodynamics and gravitation from the principle of least action], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **495**, 9–139, DOI: 10.31857/S268674002006019X (in Russian).
10. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, "O topologii statsionarnykh resheniy gidrodinamicheskikh i vikhrevykh sledstviy uravneniya Vlasova i metod Gamil'tona—Yakobi" [On the topology of stationary solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **449**, No. 5, 521–526, DOI: 10.7868/S086956521311008X (in Russian).
11. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, "O vyvode i klassifikatsii uravneniy tipa Vlasova i magnitnoy gidrodinamiki. Tozhdestvo Lagranzha, forma Godunova i kriticheskaya massa" [On the derivation and classification of Vlasov-type equations and magnetohydrodynamics. Lagrange's identity, Godunov's form, and critical mass], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **47**, 5–17 (in Russian).
12. V. V. Vedenyapin, V. I. Parenkina, and S. R. Svirshchevskii, "O vyvode uravneniy elektrodinamiki i gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya" [Derivation of the equations of electrodynamics and gravity from the principle of least action], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2022, **62**, No. 6, 1016–1029, DOI: 10.31857/S0044466922060163 (in Russian).

13. V. V. Vedenyapin and N. N. Fimin, "Metod Gamil'tona—Yakobi v negamil'tonovoy situatsii i gidrodinamicheskaya podstanovka" [The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **461**, No. 2, 136–139, DOI: 10.7868/S0869565215080083 (in Russian).
14. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, "Uravneniya tipa Vlasova—Maksvella—Eynshteyna i ikh sledstviya. Prilozheniya k astrofizicheskim zadacham" [Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and their consequences. Applications to astrophysical problems], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2024, **218**, No. 2, 258–279, DOI: 10.4213/tmf10551 (in Russian).
15. V. S. Vladimirov and V. V. Zharinov, *Uravneniya Matematicheskoy Fiziki: Uchebnik dlya Vuzov* [Equations of Mathematical Physics: Textbook for Universities], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
16. A. A. Vlasov, *Statisticheskie Funktsii Raspredeleniya* [Statistical Distribution Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
17. V. L. Ginzburg, "Kakie problemy fiziki i astrofiziki predstavlyayutsya seychas osobenno vazhnymi i interesnymi (tridtsat' let spustya, prichem uzhe na poroge KhKhI veka)?" [What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)?], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1999, **169**, 419–441, DOI: 10.3367/UFNr.0169.199904d.0419 (in Russian).
18. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya Geometriya. Metody i Prilozheniya* [Contemporary Geometry: Methods and Applications], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
19. V. V. Kozlov, "Gidrodinamika Gamil'tonovykh Sistem" [Hydrodynamics of Hamiltonian systems], *Vestn. Mosk. Un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech., 1983, No. 6, 10–22 (in Russian).
20. V. V. Kozlov, *Obshchaya Teoriya Vikhrey* [General Theory of Vortices], Izd-vo Udmurtskogo un-ta, Izhevsk, 1998 (in Russian).
21. V. V. Kozlov, "Obobshchennoe kineticheskoe uravnenie Vlasova" [The generalized Vlasov kinetic equation], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 4, 93–130, DOI: 10.4213/rm9216 (in Russian).
22. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoriya Polya* [Field Theory], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
23. V. P. Maslov, *Kompleksnye Markovskie Tsepi i Integral Feynmana* [Complex Markov Chains and the Feynman Integral], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
24. N. A. Sidorov and A. V. Sinitsyn, "Issledovanie tochek bifurkatsii i netrivial'nykh vetvey resheniy statsionarnoy sistemy Vlasova—Maksvella" [Study of bifurcation points and nontrivial branches of solutions of the stationary Vlasov–Maxwell system], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1997, **62**, No. 2, 268–292 (in Russian).
25. A. L. Skubachevskii, "Uravneniya Vlasova—Puassona dlya dvukomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole" [Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 2, 107–148, DOI: 10.4213/rm9579 (in Russian).
26. S. A. Stepin and A. G. Tarasov, "Dispersionnoe sootnoshenie v kineticheskoy modeli besstolknovitel'noy plazmy" [Dispersion relation in the kinetic model of collisionless plasma], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2022, **210**, No. 3, 442–454, DOI: 10.4213/tmf10175 (in Russian).
27. S. Sh. Suleymanova and A. A. Yushkanov, "Elektricheskoe pole vblizi poverkhnosti plazmy s proizvol'noy stepen'yu vyrozhdeniya kak otklik na vneshnee peremennoe elektricheskoe pole" [Electric field near the surface of a plasma with an arbitrary degree of degeneracy as a response to an external alternating electric field], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2020, **204**, No. 1, 76–94, DOI: 10.4213/tmf9827 (in Russian).
28. V. A. Fok, *Teoriya Prostranstva, Vremeni i Tyagoteniya* [Theory of Space, Time and Gravity], LKI, Moscow, 2007 (in Russian)
29. A. A. Friedmann, "O krivizne prostranstva" [On the curvature of space], *Zhurn. Russk. Fiz.-Khim. O-va* [J. Russ. Phys.-Chem. Soc.], 1924, **56**, No. 1, 59 (in Russian).
30. A. A. Friedmann, "O krivizne prostranstva" [On the curvature of space], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1963, **80**, No. 3, 439–446 (in Russian).
31. A. D. Chernin, "Temnaya energiya i vsemirnoe antityagotenie" [Dark energy and universal antigravitation], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2008, **178**, No. 3, 267–300, DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803c.0267 (in Russian).
32. A. Einstein, "Zamechanie k rabote A. Fridmana «O krivizne prostranstva»" [Note on A. Friedmann's work «On the curvature of space»], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1963, **80**, No. 3, 453-453, DOI: 10.3367/UFNr.0080.196307g.0453 (in Russian).
33. L. Andersson and M. Korzyński, "Variational principle for the Einstein–Vlasov equations," *ArXiv*, 2019.— 1910.12152.
34. H. Andréasson, "The Einstein–Vlasov System/Kinetic Theory," *Living Rev. Rel.*, 2002, **5**, 7, DOI: 10.12942/lrr-2002-7.

35. Yu. O. Belyaeva, B. Gebhard, and A. L. Skubachevskii, “A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations,” *Kinet. Relat. Mod.*, 2021, **14**, No. 2, 257–282, DOI: 10.3934/krm.2021004.
36. S. Capozziello and V. G. Gurzadyan, “Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2023, **138**, 184, DOI: 10.1140/epjp/s13360-023-03763-2.
37. C. Cercigniani and G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*, Birkhäuser, Berlin, 2002.
38. Y. Choquet-Bruhat, *Introduction to general relativity, black holes and cosmology*, Oxford Univ. Press, New York, 2015.
39. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Interscience Publ., New York–London, 1962.
40. A. Einstein, “Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman «Über die Krümmung des Raumes»,” *Z. Physik*, 1922, **11**, 326-326, DOI: 10.1007/BF01328424.
41. V. A. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
42. A. A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes,” *Z. Physik*, 1922, **11**, 377–386.
43. V. L. Ginzburg, “What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)?,” *Phys. Usp.*, 1999, **42**, 353–373, DOI: 10.1070/PU1999v042n04ABEH000562.
44. T. Kessler and S. Rjasanow, “Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging,” *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2020, **32**, No. 4, 200–216.
45. T. Kessler and S. Rjasanow, “Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging,” *St. Petersburg Math. J.*, 2021, **32**, No. 4, 753–765, DOI: 10.1090/spmj/1668.
46. V. V. Kozlov, “The generalized Vlasov kinetic equation,” *Russ. Math. Surv.*, 2008, **63**, No. 4, 691–726, DOI: 10.1070/RM2008v063n04ABEH004549.
47. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Pergamon Press, Oxford, 1983.
48. E. Madelung, “Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form),” *Z. Physik*, 1926, **40**, 322–326.
49. W. H. McCrea and E. A. Milne, “Newtonian universes and the curvature of space,” *Quart. J. Math.*, 1934, **os-5**, No. 1, 73–80, DOI: 10.1093/qmath/os-5.1.73.
50. T. Okabe, P. J. Morrison, J. E. Friedrichsen III, and L. C. Shepley, “Hamiltonian dynamics of spatially-homogeneous Vlasov–Einstein systems,” *Phys. Rev. D*, 2011, **84**, 024011, DOI: 10.1103/PhysRevD.84.024011.
51. Yu. N. Orlov and I. P. Pavlotsky, “BBGKY-hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean aproximation,” *Phys. A. Stat. Mech. Appl.*, 1988, **151**, No. 2, 318–340, DOI: 10.1016/0378-4371(88)90019-2.
52. S. Perlmutter et al., “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae,” *Astrophys. J.*, 1999, **517**, 565–586, DOI: 10.1086/307221.
53. G. Rein, “Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas — a review,” *Class. Quantum Grav.*, 2023, **40**, No. 19, 193001, DOI: 10.1088/1361-6382/acf436.
54. A. G. Riess et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, 1998, **116**, 1009, DOI: 10.1086/300499.
55. A. L. Skubachevskii, “Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field,” *Russ. Math. Surv.*, 2014, **69**, No. 2, 291–330, DOI: 10.1070/RM2014v069n02ABEH004889.
56. V. V. Vedenyapin, “Mathematical theory of the expanding universe based on the principle of least action,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2024, **64**, No. 11, 2624–2642, DOI: 10.1134/S0965542524701471.
57. V. V. Vedenyapin and A. A. Bay, “Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne–McCrea solution for Lorentzian metric,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2024, **139**, 111, DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-04885-x.
58. V. V. Vedenyapin, A. A. Bay, V. I. Parenkina, and A. G. Petrov, “Minimal action principle for gravity and electrodynamics, Einstein lambda, and Lagrange points,” *Markov Proc. Relat. Fields*, 2023, **29**, 515–532, DOI: 10.61102/1024-2953-mprf.2023.29.4.005.
59. V. Vedenyapin, N. Fimin, and V. Chechetkin, “The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2020, **135**, No. 5, 400, DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00412-w.
60. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, “Properties of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their application to the problems of general relativity,” *Gravit. Cosmol.*, 2020, **26**, No. 2, 173–183, DOI: 10.1134/S0202289320020115.

61. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, "The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system," *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, 670, DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01659-7.
62. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, "Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein–Vlasov equations," *Eur. Phys. J. Plus*, 2022, **137**, No. 9, 1022, DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-03257-7.
63. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, "Hydrodynamic consequences of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their cosmological applications," *Gravit. Cosmol.*, 2023, **29**, No. 1, 1–9, DOI: 10.1134/S0202289323010115.
64. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, "On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2014, **202**, No. 5, 769–782, DOI: 10.1007/s10958-014-2075-9.
65. S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, Wiley, New York, 1972.

V. V. Vedenyapin
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: vicveden@yahoo.com, eLIBRARY SPIN-code: 5002-2872, eLIBRARY AuthorID: 137846, ResearcherID: H-2128-2016, Scopus: 6603544194

Ya. G. Batishcheva
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: jbat@kiam.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2666-6763, eLIBRARY AuthorID: 112950

M. V. Goryunova
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: margoryunova2112@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 1235-9978, engРИНЦ AuthorID: 655159

A. A. Russkov
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: russkov@inbox.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1069-6323, eLIBRARY AuthorID: 177619, ORCID: 0000-0002-2950-2165