

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. АШЫРАЛЫЕВ

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию начальной задачи для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases}$$

в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым положительно определённым оператором A . Представлена разностная схема второго порядка точности для численного решения дифференциальной задачи. Установлена теорема об оценках устойчивости решений этой разностной схемы. На практике доказаны оценки устойчивости решений четырех задач для гиперболических разностных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, неограниченное запаздывание, численное решение, разностная схема, второй порядок точности, устойчивость решений.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» и издана в рамках целевой программы BR24993094 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. Авторы также выражают благодарность рецензентам за полезные советы по улучшению статьи.

Для цитирования: А. Ашыралыев. Разностная схема второго порядка для гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 547–561, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561).

Посвящается памяти академика С. П. Новикова

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях современной науки и техники естественным образом возникают системы, содержащие запаздывающие члены. Такие системы часто описывают динамические процессы, управляемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием, как обыкновенными, так и в частных производных. Эти запаздывания обычно возникают в сложных системах, включающих логические и вычислительные компоненты, в которых для обработки информации требуется конечный временной интервал. Линейная теория дифференциальных уравнений с запаздыванием привлекла значительное внимание учёных и была всесторонне изучена многими исследователями (см., например, [4, 7, 12, 17, 20, 21, 23–25, 28, 29, 38, 39] и приведённые там ссылки).

С другой стороны, гиперболические уравнения в частных производных, не включающие запаздывания по времени, часто встречаются в широком спектре научных и инженерных приложений. К ним относятся, например, электромагнитная теория, электродинамика, термодинамика, гидродинамика, теория упругости, механика жидкости, распространение волн и материаловедение. При применении численных методов для решения таких уравнений вопрос устойчивости становится критически важным. Особенно эффективная модель для исследования устойчивости предполагает использование безусловно абсолютно устойчивых разностных схем, связанных с неограниченными операторами. Со временем операторный метод получил широкое развитие как ценный аналитический инструмент для исследования решений как локальных, так и нелокальных задач, связанных с гиперболическими дифференциальными уравнениями в гильбертовых и банаховых пространствах (см., например, [2, 11, 26, 27, 30, 36]).

Значительный объём литературы посвящён разработке разностных схем для гиперболических уравнений в частных производных (см., например, [5, 6, 31–33] и приведённые там ссылки). Во многих из этих работ устойчивость демонстрируется при условии, что временной и пространственный шаги сетки, обозначаемые τ и h соответственно, взаимосвязаны. В более абстрактном смысле это означает, что должно выполняться условие $\tau \|A_h\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

Однако существует значительный интерес к исследованию абсолютно устойчивых разностных схем, достигающих высокого порядка точности для гиперболических уравнений в частных производных, особенно тех, устойчивость которых сохраняется независимо от каких-либо ограничений на размеры сетки τ и h . Примечательно, что впервые такие неравенства безусловной устойчивости для схем первого порядка точности, решающих гиперболические дифференциальные уравнения, были установлены в [9]. Позднее, в [16], были предложены разностные схемы как первого, так и второго порядка, построенные с использованием целых степеней пространственных операторов, в качестве приближений к абстрактной начальной задаче для гиперболических уравнений в гильбертовых пространствах. С использованием операторного подхода были успешно получены оценки устойчивости решений, генерируемых этими схемами.

В обзорной статье [14] представлены последние результаты по локальным и нелокальным корректным задачам для дифференциальных и разностных уравнений второго порядка. Представлены результаты по устойчивости дифференциальных задач для уравнений второго порядка и разностных схем для приближённого решения задач второго порядка.

Однако теория устойчивости задач для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием изучена недостаточно. Лишь немногие исследователи интересуются подобными задачами. Ограниченные решения нелинейных одномерных гиперболических уравнений с ограниченным запаздыванием исследовались в более ранних работах [22, 34, 35, 37]. В работе [10] были установлены существование и единственность ограниченного решения нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. В общем случае решения гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием не являются ограниченными [3].

В статье [19] мы изучили начальную задачу для гиперболического дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

в гильбертовом пространстве H с самосопряженным положительно определённым оператором A , $A \geq \delta I$, $\delta > 0$. Здесь $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая абстрактная функция, определённая на интервале $[-\omega, 0]$ со значениями в H , а $f(t)$ — непрерывная абстрактная функция, определённая на интервале $[0, \infty)$ со значениями в H .

Функция $v(t)$ называется *решением* задачи (1.1), если выполняются следующие условия:

- i. $v(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $[0, \infty)$;
- ii. элемент $v(t)$ принадлежит $D(A^2)$ при всех $t \in [0, \infty)$, а функция $A^2 v(t)$ непрерывна на интервале $[0, \infty)$;
- iii. $v(t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям (1.1).

Установлена основная теорема об оценках устойчивости решения задачи (1.1). В качестве приложения получены оценки устойчивости решения четырёх задач для гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием.

В статье [18] мы ввели разностную схему первого порядка точности

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\tau^2} + A^2 u^{k+1} = a \left[\frac{u^{k-N} - u^{k-1-N}}{\tau} + Au^{k-N} \right] + f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, & 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \\ (I + \tau^2 A^2) \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau}, & k = nN, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u^k = \varphi_k, \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad t_k = k\tau, & -N \leq k \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

для приближённого решения задачи (1.1). Установлена теорема об оценках устойчивости решений данной разностной схемы. На практике доказаны оценки устойчивости решения четырёх задач для гиперболических дифференциальных и разностных уравнений с запаздыванием. Приведены численные результаты и пояснительные иллюстрации, подтверждающие обоснованность теоретических результатов.

Мы заинтересованы в исследовании разностных схем высокого порядка точности, равномерно устойчивых относительно шага по времени для приближённых решений этой начальной задачи. Нам не удалось получить результаты такого типа для решения хорошо известной разностной схемы второго порядка точности, генерируемой оператором A^2 :

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\tau^2} + A^2 u^k = a \left[\frac{u^{k-N} - u^{k-1-N}}{\tau} + Au^{k-N} \right] + f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, & 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \\ (I + \tau^2 A^2) \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{2u^k - 3u^{k-1} + u^{k-2}}{\tau}, & k = nN, \quad n = 1, 2, \dots, \\ u^k = \varphi(t_k), \quad t_k = k\tau, & -N \leq k \leq 0. \end{cases}$$

В настоящей работе построена разностная схема второго порядка точности для численного решения абстрактной задачи (1.1). Установлена теорема об устойчивости этой разностной схемы. В приложениях получены доказательства устойчивости разностных схем для четырёх линейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Для приближённого решения (1.1) рассмотрим разностную схему второго порядка точности

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\tau^2} + A^2 u^k + \frac{\tau^2}{4} A^4 u^{k+1} = a \left[\frac{u^{k+1-N} - u^{k-1-N}}{2\tau} + Au^{k-N} \right] + f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, & 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \\ (I + \tau^2 A^2) \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{3u^k - 4u^{k-1} + u^{k-2}}{\tau} + \\ + \frac{\tau}{2} \left(-A^2 u^k + f_k + a \left(\frac{3u^{k-N} - 4u^{k-1-N} + u^{k-2-N}}{2\tau} \right) + Au^{k-N} \right), & k = nN, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u^k = \varphi_k, \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad t_k = k\tau, & -N \leq k \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. Пусть $\varphi_k \in D(A^2)$, $-N \leq k \leq 0$ и $f_k \in D(A)$, $k \geq 1$. Тогда для решения разностной задачи (2.1) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u^k\|_H + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \\ & \leq (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_k\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A^{-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq k \leq nN} \|Au^k\|_H + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \\
& \leq (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|A\varphi_k\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_j\|_H \tau, \\
& \max_{1 \leq k \leq nN} \|A^2 u^k\|_H + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \\
& \leq (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|A^2 \varphi_k\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_j\|_H \tau + \\
& + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|Af_j\|_H \tau, 3 \|f_{(i-1)N+1}\|_H + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau \right\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить следующие оценки при $n = 1, 2, \dots$:

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u^k\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A^{-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.2)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A^{-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.3)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|Au^k\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|f_j\|_H \tau, \quad (2.4)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|f_j\|_H \tau, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq k \leq N} \|A^2 u^k\|_H & \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A^2 \varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\
& + \min \left\{ 2 \|f_1\|_H + 2 \sum_{j=2}^{N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=1}^{N-1} \|Af_j\|_H \tau \right\}, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H & \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A^2 \varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\
& + \min \left\{ \|f_1\|_H + \sum_{j=2}^{N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=1}^{N-1} \|Af_j\|_H \tau \right\}, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \|u^k\|_H & \leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|u^k\|_H + \\
& + b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|u^k\|_H +$$

$$+ b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \|Au^k\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|Au^k\|_H + \\ &+ b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|f_j\|_H \tau, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|Au^k\|_H + \\ &+ b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|f_j\|_H \tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \|A^2 u^k\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|A^2 u^k\|_H + b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\ &+ \min \left\{ 2 \|f_{nN+1}\|_H + 2 \sum_{j=nN+2}^{(n+1)N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A f_j\|_H \tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|A^2 u^k\|_H + b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\ &+ \min \left\{ \|f_{nN+1}\|_H + \sum_{j=nN+2}^{(n+1)N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A f_j\|_H \tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Мы основываем доказательство этих оценок на методах, разработанных в [19], а также на формулах

$$\begin{aligned} u^{nN+1} &= (I + \tau^2 A^2)^{-1} \left(I + \frac{1}{2} \tau^2 A^2 \right) u^{nN} + \tau (I + \tau^2 A^2)^{-1} \left(\frac{3u^{nN} - 4u^{nN-1} + u^{nN-2}}{2\tau} \right) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left(f_{nN} + a \left(\frac{3u^{(n-1)N} - 4u^{(n-1)N-1} + u^{(n-1)N-2}}{2\tau} \right) + Au^{(n-1)N} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^k &= \frac{1}{2} \left(R^{k-nN-1} \left(I - \frac{i\tau A}{2} \right) + \tilde{R}^{k-nN-1} \left(I + \frac{i\tau A}{2} \right) \right) u^{nN} + \\ &+ (2iA)^{-1} \left(\tilde{R}^{-1} R^{k-nN-1} - R^{-1} \tilde{R}^{k-nN-1} \right) \frac{u^{nN+1} - u^{nN}}{\tau} + \\ &+ \sum_{j=nN+1}^{k-1} (2iA)^{-1} \left(R^{k-j} - \tilde{R}^{k-j} \right) \left\{ \left(a \left[\frac{u^{j-N+1} - u^{j-1-N}}{2\tau} + Au^{j-N} \right] + f_j \right) \right\} \tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

для всех $nN + 2 \leq k \leq (n+1)N$, $n = 0, 1, \dots$, где

$$u^k = \varphi_k, \quad -N \leq k \leq 0,$$

для решения разностной задачи (2.1) и оценок

$$\begin{aligned} \|R\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \|\tau A R\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|\tilde{R}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|\tau A \tilde{R}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \\ \|\tilde{R} R^{-1}\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \|R \tilde{R}^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \\ \|(I \pm i\tau A)^{-1}\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \|\tau A (I \pm i\tau A)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь R и $\tilde{R}$ — операторные функции, определяемые формулами

$$Ru = \left(I - i\tau A - \frac{\tau^2}{2} A^2 \right)^{-1} u, \quad \tilde{R}u = \left(I + i\tau A - \frac{\tau^2}{2} A^2 \right)^{-1} u.$$

Теорема 2.1 доказана. $\square$

Общность данного подхода позволяет рассматривать широкий класс локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием по времени. В частности, он позволяет установить теоремы об устойчивости для ряда задач с неограниченным запаздыванием.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Сначала рассмотрим начальную задачу для гиперболического дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием и нелокальными условиями относительно пространственной переменной x :

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) + \sigma \cdot \right)^2 u(t, x) = \\ = a \left(u_t(t - \omega, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(t - \omega, x)}{\partial x} \right) + \sigma \cdot u(t - \omega, x) \right) + f(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in (0, l), \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [0, l], \\ u(t, 0) = u(t, l), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, l), & 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\sigma > 0$ и $a(x)$, $\varphi(t, x)$ и $f(t, x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям совместности, гарантирующим гладкое решение задачи (3.1). Будем предполагать, что $a(x) \geq a > 0$ и $a(l) = a(0)$.

Дискретизация задачи (3.1) осуществляется в два этапа. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.1), сопоставляем оператор A_h^x , определяемый по формуле

$$A_h^x \varphi_h(x) = \{-(a(x) \varphi_x)_{x,r} + \sigma \varphi_r(x)\}_1^{K-1}$$

и действующий в пространстве сеточных функций $\varphi_h(x) = \{\varphi_r\}_0^K$, удовлетворяющих условиям $\varphi_0 = \varphi_K$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_K - \varphi_{K-1}$. Известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определённый оператор в $L_{2h} = L_2([0, l]_h)$. С помощью A_h^x приходим к начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_h(t, x)}{dt^2} + (A_h^x)^2 u_h(t, x) = a \left(\frac{du_h(t - \omega, x)}{dt} + A_h^x u_h(t - \omega, x) \right) + f_h(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in [0, l]_h, \\ u_h(t, x) = \varphi_h(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

На втором этапе мы заменяем задачу (3.2) разностной схемой второго порядка (2.1)

$$\begin{cases} \frac{u_h^{k+1}(x) - 2u_h^k(x) + u_h^{k-1}(x)}{\tau^2} + (A_h^x)^2 u_h^k(x) + \frac{\tau^2}{4} (A_h^x)^4 u_h^{k+1}(x) = \\ = a \left(\frac{u_h^{k+1-N}(x) - u_h^{k-N-1}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) + f_{k,h}(x), \quad f_{k,h}(x) = f_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \quad x \in [0, l]_h; \\ \left((I + \tau^2 (A_h^x)^2) \frac{u_h^{k+1}(x) - u_h^k(x)}{\tau} = \frac{3u_h^k(x) - 4u_h^{k-1}(x) + u_h^{k-2}(x)}{2\tau} + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{2} \left[-(A_h^x)^2 u_h^k(x) + f_{k,h}(x) + a \left(\frac{3u_h^{k-N}(x) - 4u_h^{k-1-N}(x) + u_h^{k-2-N}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) \right] \right), \\ k = nN, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ u_h^k(x) = \varphi_h^k(x), \quad \varphi_h^k(x) = \varphi_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ -N \leq k \leq 0, \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.3)$$

Теорема 2.1 даёт следующий результат об устойчивости.

Теорема 3.1. Для решения разностной задачи (3.3) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{L_{2h}} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^2} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^2} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^4} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^4} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{W_{2h}^2} \tau, 3 \|f_{(i-1)N+1,h}\|_{L_{2h}} + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_{j,h} - f_{j-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \tau \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее $\widetilde{M}$ не зависит от h и τ .

Во-вторых, мы рассматриваем начально-краевую задачу для гиперболического функционально-дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием и инволюцией

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - (a(x)u_x(t, x))_x + \sigma u(t, x) - \beta(a(-x)u_x(t, -x))_x = \\ = b(x)u_t(t - \omega, x) + c(x)u_x(t - \omega, x) + f(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in (-l, l), \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [-l, l], \\ u(t, -l) = u(t, l) = 0, & 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\delta > 0$ и $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\varphi(t, x)$ и $f(t, x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям совместности, что гарантирует существование гладкого решения $u(t, x)$ для задачи (3.4). Будем считать, что $a \geq a(x) = a(-x) \geq \sigma > 0$ и $\sigma - a|\beta| \geq 0$.

Дискретизация задачи (3.4) осуществляется в два этапа. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.4), сопоставляем разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x \varphi_h(x) = \{-(a(x)\varphi_{\bar{x}}(x))_{x,r} - \beta(a(-x)\varphi_{\bar{x}}(-x))_{x,r} + \delta \varphi_r(x)\}_{-K+1}^{K-1} \quad (3.5)$$

в пространстве сеточных функций $\varphi_h(x) = \{\varphi_r\}_{-K}^K$, удовлетворяющих условиям $\varphi_{-K} = \varphi_K = 0$. Известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определённый оператор в $L_{2h} = L_2([-l, l]_h)$ (см. [1]). С помощью A_h^x приходим к начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_h(t, x)}{dt^2} + A_h^x u_h(t, x) = b_h(x) \frac{du_h(t - \omega, x)}{dt} + c_h(x) u_{x,h}(t, x) + f_h(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in [-l, l]_h, \\ u_h(t, x) = \varphi_h(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [-l, l]_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

На втором этапе мы заменяем задачу (3.6) разностной схемой второго порядка точности (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_h^{k+1}(x) - 2u_h^k(x) + u_h^{k-1}(x)}{\tau^2} + (A_h^x)^2 u_h^k(x) + \frac{\tau^2}{4} (A_h^x)^4 u_h^{k+1}(x) = \\ = a \left(\frac{u_h^{k+1-N}(x) - u_h^{k-N-1}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) + f_{k,h}(x), \quad f_{k,h}(x) = f_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \quad x \in [-l, l]_h; \\ \left(I + \tau^2 (A_h^x)^2 \right) \frac{u_h^{k+1}(x) - u_h^k(x)}{\tau} = \frac{3u_h^k(x) - 4u_h^{k-1}(x) + u_h^{k-2}(x)}{2\tau} + \\ + \frac{\tau}{2} \left[-(A_h^x)^2 u_h^k(x) + f_{k,h}(x) + a \left(\frac{3u_h^{k-N}(x) - 4u_h^{k-1-N}(x) + u_h^{k-2-N}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) \right], \\ k = nN, \quad n = 0, 1, \dots; \\ u_h^k(x) = \varphi_h^k(x), \quad \varphi_h^k(x) = \varphi_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad -N \leq k \leq 0, \quad x \in [-l, l]_h. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Теорема 2.1 даёт следующий результат об устойчивости.

Теорема 3.2. Для решения разностной задачи (3.7) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} &\leq \\ &\leq \widetilde{M} \left((2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{L_{2h}} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^1} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} &\leq \\ &\leq \widetilde{M} \left((2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^1} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^2} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^1} &\leq \\ &\leq \widetilde{M} \left((2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^2} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{W_{2h}^1} \tau, \quad 3 \|f_{(i-1)N+1,h}\|_{L_{2h}} + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_{j,h} - f_{j-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \tau \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В-третьих, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная открытая область с гладкой границей S , $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. В $[0, \infty) \times \Omega$ рассматривается начально-краевая задача для многомерного гиперболического

дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t, x) + \left(\sum_{r=1}^m \left(-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_r} \right) + \sigma \cdot \right) \right)^2 u(t, x) = \\ = a \left[-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u(t - \omega, x)}{\partial x_r} \right) + \sigma u(t - \omega, x) + u_t(t - \omega, x) \right] = f(t, x), \\ 0 < t < \infty, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \\ u(t, x) = \varphi(t, x), \quad -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad x \in S, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

где $\sigma > 0$, а $a_r(x)$, $\varphi(t, x)$ и $f(t, x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям совместности, гарантирующим, что задача (3.11) имеет гладкое решение $u(t, x)$. Будем полагать, что $a_r(x) \geq a_0 > 0$.

Дискретизация задачи (3.11) проводится в два этапа. На первом этапе, здесь и далее, мы определяем сеточное пространство

$$\bar{\Omega}_h = \{x = x_r = (h_1 j_1, \dots, h_m j_m), \quad j = (j_1, \dots, j_m), \quad 0 \leq j_r \leq N_r, \quad N_r h_r = 1, \quad r = 1, \dots, m\}, \\ \Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega, \quad S_h = \bar{\Omega}_h \cap S.$$

Введем банаховы пространства $L_{2h} = L_2(\bar{\Omega}_h)$, $W_{2h}^1 = W_2^1(\bar{\Omega}_h)$ и $W_{2h}^2 = W_2^2(\bar{\Omega}_h)$ сеточных функций $\varphi_h(x) = \{\varphi(h_1 r_1, \dots, h_m r_m)\}$, определённых на $\bar{\Omega}_h$, снабжённые нормами

$$\|\varphi_h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} |\varphi_h(x)|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi_h\|_{W_{2h}^1} = \|\varphi_h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_{r=1}^m |\varphi_{h, x_r, j_r}|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2}$$

и

$$\|\varphi_h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi_h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_{r=1}^m \left| (\varphi_h)_{x_r \bar{x}_r, j_r} \right|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2},$$

соответственно. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.11), сопоставляем разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x u_h(x) = - \sum_{r=1}^m (a_r(x) u_{\bar{x}_r, h})_{x_r, j_r} \quad (3.12)$$

в пространстве сеточных функций $u_h(x)$, удовлетворяющих условиям $u_h(x) = 0$ ($\forall x \in S_h$). Известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определённый оператор в L_{2h} . С помощью A_h^x приходим к начальной задаче

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u_h(t, x)}{dt^2} + (A_h^x)^2 u_h(t, x) = a \left(\frac{du_h(t - \omega, x)}{dt} + A_h^x u_h(t - \omega, x) \right) + f_h(t, x), \\ 0 < t < \infty, \quad x \in \Omega_h, \\ u_h(t, x) = \varphi_h(t, x), \quad -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

На втором этапе мы заменяем задачу (3.13) разностной схемой второго порядка точности (2.1)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_h^{k+1}(x) - 2u_h^k(x) + u_h^{k-1}(x)}{\tau^2} + (A_h^x)^2 u_h^k(x) + \frac{\tau^2}{4} (A_h^x)^4 u_h^{k+1}(x) = \\ & = a \left(\frac{u_h^{k+1-N}(x) - u_h^{k-N-1}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) + f_{k,h}(x), \quad f_{k,h}(x) = f_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ & \hspace{25em} 1 \leq k < \infty, N \quad \tau = \omega, \quad x \in \Omega_h, \\ & \left(I + \tau^2 (A_h^x)^2 \right) \frac{u_h^{k+1}(x) - u_h^k(x)}{\tau} = \frac{3u_h^k(x) - 4u_h^{k-1}(x) + u_h^{k-2}(x)}{2\tau} + \\ & + \frac{\tau}{2} \left(- (A_h^x)^2 u_h^k(x) + f_{k,h}(x) + a \left(\frac{3u_h^{k-N}(x) - 4u_h^{k-1-N}(x) + u_h^{k-2-N}(x)}{2\tau} \right) + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right), \\ & \hspace{25em} k = nN, \quad n = 0, 1, \dots, \\ & u_h^k(x) = \varphi_h^k(x), \quad \varphi_h^k(x) = \varphi_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \hspace{15em} -N \leq k \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}_h. \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

Теорема 2.1 даёт следующий результат об устойчивости.

Теорема 3.3. Для решения разностной задачи (3.14) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{L_{2h}} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \\ & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^2} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^2} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \\ & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^4} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^4} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{W_{2h}^2} \tau, 3 \|f_{(i-1)N+1,h}\|_{L_{2h}} + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_{j,h} - f_{j-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \tau \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.3 основано на абстрактной теореме 2.1 и свойствах симметрии разностного оператора A_h^x , определяемого формулой (3.12), а также на теореме о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической задачи в L_{2h} (см. [8]).

В-четвертых, рассмотрим начально-краевую задачу

$$\left\{ \begin{aligned} & u_{tt}(t, x) + \left(\sum_{r=1}^m \left(-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_r} \right) + \sigma \cdot \right) \right)^2 u(t, x) = \\ & = a \left[-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u(t - \omega, x)}{\partial x_r} \right) + \sigma u(t - \omega, x) + u_t(t - \omega, x) \right] + f(t, x), \\ & \hspace{25em} 0 < t < \infty, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \\ & u(t, x) = \varphi(t, x), \hspace{15em} -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ & \frac{\partial}{\partial \vec{p}} u(t, x) = 0, \hspace{15em} x \in S, \quad 0 \leq t < \infty \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

для многомерных дифференциальных уравнений гиперболического типа с запаздыванием.

Дискретизация задачи (3.15) осуществляется в два этапа. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.15), сопоставляем разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x u_h(x) = - \sum_{r=1}^m (a_r(x) u_{h, \bar{x}_r})_{x_r, j_r} + \sigma u_h(x) \quad (3.16)$$

в пространстве сеточных функций $u_h(x)$, удовлетворяющих условиям $D_h u_h(x) = 0$ для всех $x \in S_h$. Здесь D_h — аппроксимация оператора $\frac{\partial}{\partial \vec{p}}$. С помощью A_h^x приходим к начальной задаче (3.13). На втором шаге, заменяя задачу (3.13) разностной схемой второго порядка точности (2.1), получаем разностную схему (3.14). Следовательно, из теоремы 3.3 следует оценка устойчивости решения этой разностной задачи. Доказательство этой оценки основано на абстрактной теореме 2.1 и свойствах симметрии оператора симметрии A_h^x , определяемого формулой (3.12), а также на теореме о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической задачи в L_{2h} (см. [8]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В настоящей работе установлена основная теорема об устойчивости разностной схемы второго порядка точности для численного решения абстрактной задачи для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием. В приложениях получена устойчивость разностных схем для четырёх линейных гиперболических дифференциальных уравнений с запаздыванием.

2. Интерес представляет исследование устойчивости высокоточных разностных схем, построенных на основе целочисленной степени пространственного оператора равномерно по размеру шага по времени для приближённых решений этой начальной задачи для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием, в котором устойчивость установлена без каких-либо предположений относительно шагов сетки τ и h .

3. Требуется исследовать равномерные двухшаговые разностные схемы и асимптотические формулы для решения задачи о возмущении начальных значений

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ u(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases}$$

для линейного гиперболического уравнения с запаздыванием в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым положительно определённым оператором A и с параметром $\varepsilon \in (0, \infty)$, умножающим член старшего порядка [13].

4. Требуется исследовать абсолютно устойчивые разностные схемы высокого порядка точности для численного решения начальной задачи

$$\begin{cases} v_{tt}(t)dt + A^2 v(t)dt = a (dv(t-\omega) + Av(t-\omega)dt) + f(t)dw_t, \\ w_t = \sqrt{t}\xi, \\ v(t) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \xi \in N(0, 1), & t > 0, \\ -\omega \leq t \leq 0 \end{matrix} \quad (3.17)$$

для линейного стохастического гиперболического уравнения с запаздыванием по времени в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым положительно определённым оператором A . Здесь w_t — стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве (Q, F, P) (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашыралыев А. Об устойчивости гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием // Докл. РАН. — 2025. — 524. — С. 51–55. — DOI: [10.7868/S3034504925040085](https://doi.org/10.7868/S3034504925040085).
2. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — 28. — С. 87–202.
3. Власов В. В. Research of operator models arising in hereditary mechanics and thermophysics // Тезисы межд. конф. «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ». — Долгопрудный: МФТИ, 2019.

4. Власов В. В., Раутман Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных операторов. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. Пискарев С. И. Об устойчивости разностных схем в задачах Коши с почти периодическими решениями// Дифф. уравн. — 1984. — 20, № 4. — С. 689–695.
6. Пискарев С. И. Принципы методов дискретизации, III// Докл. Акуст. ин-та. РАН. — 1986. — 3410. — С. 1–87.
7. Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
8. Соболевский П. Е. Разностные методы решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: ВГУ, 1975.
9. Соболевский П. Е., Чеботарева Л. М. Приближенное решение методом прямых задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1977. — 5. — С. 103–116.
10. Ashyralyev A., Agirseven D. Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with time delay// Electron. J. Differ. Equ. — 2018. — 2018, № 21. — С. 1–15.
11. Ashyralyev A., Akat M. An approximation of stochastic hyperbolic equations: case with Wiener process// Math. Methods Appl. Sci. — 2013. — 36, № 9. — С. 1095–1106. — DOI: [10.1002/mma.2666](https://doi.org/10.1002/mma.2666).
12. Ashyralyev A., Akca H. Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations// Nonlinear Anal. — 2001. — 44. — С. 443–452. — DOI: [10.1016/S0362-546X\(99\)00270-9](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00270-9).
13. Ashyralyev A., Fattorini H. O. On uniform difference schemes for second order singular perturbation problems in Banach spaces// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — 23, № 1. — С. 29–54. — DOI: [10.1137/052300](https://doi.org/10.1137/052300).
14. Ashyralyev A., Pastor J., Piskarev S., Yurtsever H. A. Second order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness// Abstr. Appl. Anal. — 2015. — 2015. — 948321. — DOI: [10.1155/2015/948321](https://doi.org/10.1155/2015/948321).
15. Ashyralyev A., Sarsanbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 10. — С. 1295–1305. — DOI: [10.1080/01630563.2017.1316997](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997).
16. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. A note on the difference schemes for hyperbolic equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — 6, № 2. — С. 63–70. — DOI: [10.1155/S1085337501000501](https://doi.org/10.1155/S1085337501000501).
17. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
18. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations// Discrete Dyn. Nat. Soc. — 2005. — 2005, № 2. — С. 183–213. — DOI: [10.1155/DDNS.2005.183](https://doi.org/10.1155/DDNS.2005.183).
19. Ashyralyev A., Vlasov V. V., Ashyralyyev C. On the stability of hyperbolic difference equations with unbounded delay term// Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). — 2023. — 29, № 2. — С. 27–38. — DOI: [10.1007/s40590-023-00498-z](https://doi.org/10.1007/s40590-023-00498-z).
20. Bellman R., Cooke K. Differential-difference equations. — New York: Academic Press, 1963.
21. Cahlon B., Schmidt D. Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients// J. Comput. Appl. Math. — 2004. — 170. — С. 79–102. — DOI: [10.1016/j.cam.2003.12.043](https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.043).
22. Chi H., Poorkarimi H., Wiener J., Shah S. M. On the exponential growth of solutions to non-linear hyperbolic equations// Int. J. Math. Sci. — 1989. — 12. — С. 539–546. — DOI: [10.1155/S0161171289000670](https://doi.org/10.1155/S0161171289000670).
23. Driver R. D. Ordinary and delay differential equations. — Berlin: Springer, 1977.
24. Driver R. D. Exponential decay in some linear delay differential equations// Am. Math. Monthly. — 1978. — 85, № 9. — С. 757–760. — DOI: [10.1080/00029890.1978.11994695](https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994695).
25. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. — New York: Academic Press, 1973.
26. Fattorini H. O. Second order linear differential equations in Banach spaces. — Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland, 1985.
27. Goldstein J. A. Semigroups of linear operators and applications. — New York: Oxford University Press, 1985.
28. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Introduction to functional differential equations. — Berlin: Springer, 1993.
29. Kolmanovski V., Myshkis A. Applied theory of functional differential equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.
30. Krein S. G. Linear differential equations in Banach space. — Providence: Am. Math. Soc., 1971.
31. Mohanty R. K. An operator splitting method for an unconditionally stable difference scheme for a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions// Appl. Math. Comput. — 2004. — 152, № 3. — С. 799–806. — DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00595-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00595-2).

32. *Mohanty R. K.* An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients// Appl. Math. Comput. — 2005. — 165, № 1. — C. 229–236. — DOI: [10.1016/j.amc.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.07.002).
33. *Mohanty R. K.* An operator splitting technique for an unconditionally stable difference method for a linear three space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients// Appl. Math. Comput. — 2005. — 162, № 2. — C. 549–557. — DOI: [10.1016/j.amc.2003.12.135](https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.135).
34. *Poorkarimi H., Wiener J.* Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with delay// В сб.: «Proc. VII Int. Conf. Nonlinear Analysis and Applications». — New York–Basel: Marcel Dekker, 1987. — C. 471–478.
35. *Shah S. M., Poorkarimi H., Wiener J.* Bounded solutions of retarded nonlinear hyperbolic equations// Bull. Allahabad Math. Soc. — 1986. — 1. — C. 1–14.
36. *Vasil'ev V. V., Krein S. G., Piskarev S.* Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations// J. Soviet Math. — 1991. — 54, № 4. — C. 1042–1129.
37. *Wiener J.* Generalized solutions of functional differential equations. — Singapore: World Scientific, 1993.
38. *Yeniçerioglu A. F.* The behavior of solutions of second order delay differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2007. — 332, № 2. — C. 1278–1290. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.10.069](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.069).
39. *Yeniçerioglu A. F., Yalcinbas S.* On the stability of the second-order delay differential equations with variable coefficients// Appl. Math. Comput. — 2004. — 152, № 3. — C. 667–673. — DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00584-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00584-8).

Аллаберен Ашыралыев

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

E-mail: allaberen.ashyralyev@bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com, ResearcherID: [K-4377-2017](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624),

Scopus: [6602401828](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624), ORCID: [0000-0002-4153-6624](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561)

EDN: [MADFXS](https://edn.ru/MADFXS)

UDC 517.929 + 519.633

Research article

Second-order difference scheme for hyperbolic equations with unbounded delay

A. Ashyralyev

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

RUDN University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Abstract. The present paper is devoted to the study the initial value problem for the hyperbolic equation with unbounded time delay term

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases}$$

in a Hilbert space H with a self-adjoint positive definite operator A . The second order of accuracy difference scheme for the numerical solution of the differential problem is presented. The main theorem on stability estimates for the solutions of this difference scheme is established. In practice, the stability estimates for solutions of four problems for hyperbolic difference equations with time delay are proved.

Keywords: hyperbolic equation, unbounded time delay, numerical solution, difference scheme, second order of accuracy, stability of solutions.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The publication has been prepared with the support of the RUDN University Program “5–100” and published under target program BR24993094 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. The authors also express their gratitude to the reviewers for their useful advice on improving the article.

For citation: A. Ashyralyev, “Second-order difference scheme for hyperbolic equations with unbounded delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 547–561, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561).

REFERENCES

1. A. Ashyralyev, “Ob ustoychivosti giperbolicheskikh uravneniy s neogranichennym zapazdyvaniem” [On the stability of hyperbolic equations with unbounded delay], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2025, **524**, 51–55, DOI: [10.7868/S3034504925040085](https://doi.org/10.7868/S3034504925040085) (in Russian).
2. V. V. Vasil’ev, S. G. Kreyn, and S. I. Piskarev, “Polugruppy operatorov, kosinus operator-funktsii i lineynye differentsial’nye uravneniya” [Operator semigroups, cosine operator functions and linear differential equations], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 87–202 (in Russian).
3. V. V. Vlasov, “Research of operator models arising in hereditary mechanics and thermophysics,” *Proc Int. Conf. Math. Phys., Dynam. Syst., Infinitesimal Anal*, MFTI, Dolgoprudnyy, 2019.
4. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy Analiz Funktsional’no-Differentsial’nykh Operatorov* [Spectral analysis of functional differential operators], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
5. S. I. Piskarev, “Ob ustoychivosti raznostnykh skhem v zadachakh Koshi s pochtii periodicheskimi resheniyami” [On the stability of difference schemes for Cauchy problems with almost periodic solutions], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1984, **20**, No. 4, 689–695 (in Russian).
6. S. I. Piskarev, “Printsipy metodov diskretizatsii, III” [Principles of discretization methods, III], *Dokl. Akust. In-ta. RAN* [Rep. Acoust. Inst. RAS], 1986, **3410**, 1–87 (in Russian).
7. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
8. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye Metody Resheniya Differentsial’nykh Uravneniy* [Difference methods for solving differential equations], VGU, Voronezh, 1975 (in Russian).
9. P. E. Sobolevskii and L. M. Chebotareva, “Priblizhennoe reshenie metodom pryamykh zadachi Koshi dlya abstraktnogo giperbolicheskogo uravneniya” [Approximate solution by the method of lines of the Cauchy problem for an abstract hyperbolic equation], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1977, **5**, 103–116 (in Russian).
10. A. Ashyralyev and D. Agirseven, “Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with time delay,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2018, **2018**, No. 21, 1–15.
11. A. Ashyralyev and M. Akat, “An approximation of stochastic hyperbolic equations: case with Wiener process,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2013, **36**, No. 9, 1095–1106, DOI: [10.1002/mma.2666](https://doi.org/10.1002/mma.2666).
12. A. Ashyralyev and H. Akca, “Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations,” *Nonlinear Anal.*, 2001, **44**, 443–452, DOI: [10.1016/S0362-546X\(99\)00270-9](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00270-9).
13. A. Ashyralyev and H. O. Fattorini, “On uniform difference schemes for second order singular perturbation problems in Banach spaces,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, **23**, No. 1, 29–54, DOI: [10.1137/052300](https://doi.org/10.1137/052300).
14. A. Ashyralyev, J. Pastor, S. Piskarev, and H. A. Yurtsever, “Second order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2015, **2015**, 948321, DOI: [10.1155/2015/948321](https://doi.org/10.1155/2015/948321).
15. A. Ashyralyev and A. Sarsanbi, “Well-posedness of a parabolic equation with involution,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 10, 1295–1305, DOI: [10.1080/01630563.2017.1316997](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997).
16. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, “A note on the difference schemes for hyperbolic equations,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 2, 63–70, DOI: [10.1155/S1085337501000501](https://doi.org/10.1155/S1085337501000501).
17. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New difference schemes for partial differential equations*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2004.

18. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, “Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations,” *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2005, **2005**, No. 2, 183–213, DOI: [10.1155/DDNS.2005.183](https://doi.org/10.1155/DDNS.2005.183).
19. A. Ashyralyev, V. V. Vlasov, and C. Ashyralyev, “On the stability of hyperbolic difference equations with unbounded delay term,” *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 2023, **29**, No. 2, 27–38, DOI: [10.1007/s40590-023-00498-z](https://doi.org/10.1007/s40590-023-00498-z).
20. R. Bellman and K. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1963.
21. B. Cahlon and D. Schmidt, “Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2004, **170**, 79–102, DOI: [10.1016/j.cam.2003.12.043](https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.043).
22. H. Chi, H. Poorkarimi, J. Wiener, and S. M. Shah, “On the exponential growth of solutions to non-linear hyperbolic equations,” *Int. J. Math. Sci.*, 1989, **12**, 539–546, DOI: [10.1155/S0161171289000670](https://doi.org/10.1155/S0161171289000670).
23. R. D. Driver, *Ordinary and delay differential equations*, Springer, Berlin, 1977.
24. R. D. Driver, “Exponential decay in some linear delay differential equations,” *Am. Math. Monthly*, 1978, **85**, No. 9, 757–760, DOI: [10.1080/00029890.1978.11994695](https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994695).
25. L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, Academic Press, New York, 1973.
26. H. O. Fattorini, *Second order linear differential equations in Banach spaces*, North-Holland, Amsterdam—New York—Oxford, 1985.
27. J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, New York, 1985.
28. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer, Berlin, 1993.
29. V. Kolmanovski and A. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
30. S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, Am. Math. Soc., Providence, 1971.
31. R. K. Mohanty, “An operator splitting method for an unconditionally stable difference scheme for a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions,” *Appl. Math. Comput.*, 2004, **152**, No. 3, 799–806, DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00595-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00595-2).
32. R. K. Mohanty, “An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients,” *Appl. Math. Comput.*, 2005, **165**, No. 1, 229–236, DOI: [10.1016/j.amc.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.07.002).
33. R. K. Mohanty, “An operator splitting technique for an unconditionally stable difference method for a linear three space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients,” *Appl. Math. Comput.*, 2005, **162**, No. 2, 549–557, DOI: [10.1016/j.amc.2003.12.135](https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.135).
34. H. Poorkarimi and J. Wiener, “Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with delay,” In: *Proc. VII Int. Conf. Nonlinear Analysis and Applications*, Marcel Dekker, New York–Basel, 1987, pp. 471–478.
35. S. M. Shah, H. Poorkarimi, and J. Wiener, “Bounded solutions of retarded nonlinear hyperbolic equations,” *Bull. Allahabad Math. Soc.*, 1986, **1**, 1–14.
36. V. V. Vasil'ev, S. G. Krein, and S. Piskarev, “Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations,” *J. Soviet Math.*, 1991, **54**, No. 4, 1042–1129.
37. J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, World Scientific, Singapore, 1993.
38. A. F. Yenci̇erioğlu, “The behavior of solutions of second order delay differential equations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **332**, No. 2, 1278–1290, DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.10.069](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.069).
39. A. F. Yenci̇erioğlu and S. Yalcinbas, “On the stability of the second-order delay differential equations with variable coefficients,” *Appl. Math. Comput.*, 2004, **152**, No. 3, 667–673, DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00584-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00584-8).

Allaberen Ashyralyev

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

RUDN University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: allaberen.ashyralyev@bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com, ResearcherID: [K-4377-2017](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624),

Scopus: [6602401828](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624), ORCID: [0000-0002-4153-6624](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624)