Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 164–179

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-164-179 УДК 515.168.5+517.986.32

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СЖАТИЯМИ И K-ГРУППАХ СООТВЕТСТВУЮЩИХ C^*-АЛГЕБР

© 2018 г. **А. Ю. САВИН**

Аннотация. В работе рассматривается проблема вычисления группы стабильных гомотопических классов псевдодифференциальных эллиптических граничных задач. Указанная проблема исследуется в терминах топологических K-групп некоторых пространств в следующих ситуациях: для краевых задач на многообразии с краем, для задач сопряжения с условиями на замкнутом подмногообразии коразмерности один, а также для нелокальных задач со сжатиями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для решения проблемы индекса в эллиптической теории естественным и важным является получение гомотопической классификации эллиптических операторов, т. е. вычисление группы стабильных гомотопических классов эллиптических операторов на многообразии (см. [3, 22]). Гомотопическая классификация на гладком замкнутом многообразии установлена в работе [22]. В этой ситуации группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов оказывается изоморфной топологической K-группе с компактными носителями $K^0(T^*M)$ кокасательного расслоения многообразия, на котором операторы определены. Позже гомотопическая классификация была установлена для многих других важных классов эллиптических операторов. Так, в [13] показано, что гомотопическая классификация эллиптических классических краевых задач на многообразии с краем получается в терминах группы $K^0(T^*(M \setminus \partial M))$, отвечающей внутренности $M \setminus \partial M$ многообразия с краем (ср. [26]). Получена также гомотопическая классификация эллиптических операторов в алгебре Буте де Монвеля на многообразии с краем (см. [29, 30]). Гомотопическая классификация также известна для многих классов многообразий с особенностями [5, 6, 36] и ряда нелокальных задач [14, 15]. Рассматривались приложения классификации: к вычислению препятствий типа Атьи—Ботта, к существованию эллиптических задач на многообразиях с особенностями, к описанию двойственности Пуанкаре на многообразиях с особенностями и др. (см. [7, 8, 28, 31, 32]).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить гомотопическую классификацию трех классов эллиптических задач: краевых задач, задач сопряжения и нелокальных задач со сжатиями для общих псевдодифференциальных операторов, т. е. операторов, вообще говоря, не удовлетворяющих условию трансмиссии. Отметим, что теория таких краевых задач и задач сопряжения для общих псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем исследована в работах [2, 4, 18]. В данной работе мы используем описание соответствующей C^*-алгебры таких операторов, данное в работе [35]. Более точно, в параграфе 2 мы показываем, что для многообразия M с краем ∂M имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M) \simeq K^0(T^*(M \setminus \partial M)) \oplus K^0(\partial M), \tag{1.1}$$

©Российский университет дружбы народов, 2018

где $\mathrm{Ell}(M)$ — абелева группа стабильных гомотопических классов эллиптических краевых задач с граничными и кограничными операторами на многообразии M с краем, а K^0 — четные топологические K-группы с компактными носителями. Первое слагаемое в (1.1) такое же, как и в классификации классических краевых задач [13]. Нетривиальное второе слагаемое $K^0(\partial M)$ является новым и отвечает специальным краевым задачам индекса нуль (см. задачи, определяемые в [26, предложение 20.3.1]), по модулю которых в [13, 20, 26] рассматривались стабильные гомотопии. Далее, для замкнутого многообразия M, в котором выбрано замкнутое подмногообразие X коразмерности один, мы показываем в параграфе 3, что имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M, X) \simeq K^0(T^*M) \oplus K^0(X),$$

где $\mathrm{Ell}(M, X)$ — абелева группа стабильных гомотопических классов эллиптических задач сопряжения с граничными и кограничными операторами, отвечающими подмногообразию X.

Наконец, в параграфе 4 исследуется гомотопическая классификация нелокальных эллиптических задач со сжатиями. Такие задачи ассоциированы с полугруппой $\mathbb{Z}_+$, порожденной степенями сжатия $g : M \to M$ многообразия M с краем внутрь себя. Исследованию таких задач посвящены работы [9–11]. C^*-алгебра таких задач и соответствующее символьное исчисление были построены в работах [16, 17]. В настоящей работе мы устанавливаем гомотопическую классификацию внутренних символов таких задач. При получении этой гомотопической классификации возникает задача о вычислении K-теории скрещенных произведений C^*-алгебры на эндоморфизм этой алгебры (по поводу таких скрещенных произведений см., например, [1, 27] и цитированную в этих работах литературу). Дается явная форма для указанной K-группы в топологических терминах. Для эллиптических задач со сжатиями устанавливается точная последовательность, связывающая группу стабильных гомотопических классов таких задач с некоторыми топологическими K-группами.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (проекты 15-01-08392 и 16-01-00373), грантом Немецкого научно-исследовательского общества, а также Министерством образования и науки РФ, соглашение N 02.a03.21.0008.

2. Граничные задачи

В этом параграфе мы получим классификацию эллиптических граничных задач для общих псевдодифференциальных операторов на гладком компактном многообразии с краем с точностью до стабильных гомотопий.

2.1. Псевдодифференциальные задачи на многообразии с краем. Напомним основные сведения об алгебре краевых задач для псевдодифференциальных операторов (вообще говоря, без свойства трансмиссии) на многообразии с краем из работы [35]. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем $X = \partial M$. Предположим, что выбрана воротниковая окрестность края, т. е. окрестность U края X и диффеоморфизм

$$U \simeq X \times [0, 1), \tag{2.1}$$

при котором край X переходит в подмногообразие $X \times \{0\}$. Далее в качестве локальных координат в окрестности края будем выбирать (y, t), где y — координаты на X, а $t \in [0, 1)$.

Через $\Psi(M) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ обозначим C^*-алгебру псевдодифференциальных граничных задач нулевого порядка на M (см. [35]), действующих в прямой сумме пространств L^2 на многообразии и его границе. Здесь и ниже через $\mathcal{B}(H)$ обозначается алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Алгебру Калкина обозначим через $\Sigma = \Psi(M)/\mathcal{K}$. Здесь и ниже через $\mathcal{K}$ мы обозначаем идеал компактных операторов. Напомним необходимые нам сведения об алгебре Σ, которые установлены в цитированной работе. Имеется символьное отображение

$$\sigma = (\sigma_{int}, \sigma_b) : \Sigma \longrightarrow C(S^*M) \oplus C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C})), \tag{2.2}$$

которое является гомоморфизмом C^*-алгебр. Его компоненты называются *внутренним и граничным* символом соответственно. Здесь $C(S^*M)$ — алгебра непрерывных функций на косферическом расслоении $S^*M = (T^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+$ многообразия M, а $C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}))$ — алгебра непрерывных функций на S^*X со значениями в алгебре ограниченных операторов, действующих в прямой сумме $L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}$. При этом C^*-алгебра граничных символов, которую обозначим через $\Sigma_b=\operatorname{Im}\sigma_b\subset C(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}))$, имеет следующую дополнительную символьную структуру: на ней определены отображения внутреннего символа $\sigma'_{int}:\Sigma_b\longrightarrow C(S^*M|_X)$ (здесь $S^*M|_X$ — сужение косферического расслоения на границу многообразия) и меллиновского символа $\sigma_M:\Sigma_b\longrightarrow C(X\times\overline{\mathbb{R}})$, где $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ — компактификация вещественной прямой (эта компактификация гомеоморфна отрезку). В локальных координатах (y,t) в окрестности края граничный символ получается из оператора замораживанием его коэффициентов в точке края и применением преобразования Фурье $y\to\eta$ по переменным вдоль края. При этом получается оператор в пространстве с координатами η,t, который представляет собой семейство с параметрами η операторов, действующих в прямой сумме $L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}$. Это семейство и есть граничный символ.

Далее, меллиновский символ $\sigma_M(a)$ граничного символа $a\in\Sigma_b$ определяется следующим образом: граничный символ a является семейством операторов на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$; при этом нуль $0\in\overline{\mathbb{R}}_+$ рассматривается как коническая точка и меллиновский символ есть просто конормальный символ рассматриваемого оператора в этой точке (см., например, [33]). Другими словами, у оператора a замораживаются коэффициенты в нуле и делается преобразование Меллина $t\to p$. При этом граничный символ переходит в оператор умножения на функцию от переменной p, которая и есть по определению меллиновский символ оператора.

Кроме скалярных операторов можно также рассматривать и соответствующие матричные операторы. Заметим, однако, что гомотопическую классификацию более естественно проводить в терминах более широкого класса операторов, который является аналогом операторов, действующих в сечениях расслоений (см. [22] в классическом случае операторов на гладком замкнутом многообразии). А именно, мы будем рассматривать класс операторов вида

$$\mathcal{D}:\operatorname{Im}P_1\longrightarrow\operatorname{Im}P_2,\qquad \operatorname{Im}P_{1,2}\subset L^2(M,\mathbb{C}^N)\oplus L^2(X,\mathbb{C}^N),\tag{2.3}$$

действующих между образами матричных проекторов $P_{1,2}\in\operatorname{Mat}_N(C(M)\oplus C(X))$ (т. е. выполнены соотношения $(P_1)^2=P_1,(P_2)^2=P_2$) с компонентами из алгебры $C(M)\oplus C(X)$, причем $\mathcal{D}\in\operatorname{Mat}_N(\Psi(M))$ — матричный оператор с компонентами из $\Psi(M)$. Проекторы P_1,P_2 и оператор $\mathcal{D}$ удовлетворяют соотношению $P_2\mathcal{D}P_1=\mathcal{D}P_1$, которое означает, что оператор $\mathcal{D}$ переводит образ проектора P_1 в образ проектора P_2. Для операторов вида (2.3) естественно вводится понятие символа, определение эллиптичности, устанавливается теорема фредгольмовости (см. абстрактную конструкцию в [12, 36]). Заметим, что имеют место соотношения

$$\operatorname{Im}P_{1,2}=L^2(M,E_{1,2})\oplus L^2(X,G_{1,2}),\tag{2.4}$$

где $E_{1,2}\subset M\times\mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на M, а $G_{1,2}\subset X\times\mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на X. Поэтому оператор (2.3) будем также представлять как матричный оператор вида

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} D_M & C\\ B & D_X\end{pmatrix}:\begin{matrix}L^2(M,E_1)\\ \oplus\\ L^2(X,G_1)\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}L^2(M,E_2)\\ \oplus\\ L^2(X,G_2)\end{matrix}\tag{2.5}$$

который будем называть *морфизмом*. Здесь D_M,D_X — псевдодифференциальные операторы на M и X соответственно, B,C — граничный и кограничный операторы.

2.2. Гомотопическая классификация. Через $\operatorname{Ell}(M)$ обозначим абелеву группу стабильных гомотопических классов эллиптических операторов вида (2.3). Напомним (подробнее см. [36]), что два оператора такого типа называются *стабильно гомотопными*, если существует непрерывная гомотопия эллиптических операторов $(\mathcal{D}_t,P_{1,t},P_{2,t})$, соединяющая прямые суммы этих операторов с некоторыми тривиальными операторами. При этом тривиальным оператором называется оператор вида (2.3), в котором оператор $\mathcal{D}$ имеет компоненты в подалгебре $C(M)\oplus C(X)\subset\Psi(M)$. Стандартным образом проверяется, что стабильная гомотопность является отношением эквивалентности на множестве эллиптических операторов вида (2.3). Тогда множество эллиптических операторов $(\mathcal{D},P_1,P_2)$, рассматриваемых по модулю стабильных гомотопий, обозначается через $\operatorname{Ell}(M)$. Это множество является абелевой группой по отношению к прямой сумме операторов. При этом класс эквивалентности операторов $(\mathcal{D},P_1,P_2)$, где $\mathcal{D}$ — матричный оператор над алгеброй $C(M)\oplus C(X)$, определяет нулевой элемент группы.

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы получить стабильную гомотопическую классификацию, т. е. вычислить группу $\mathrm{Ell}(M)$ в терминах топологических инвариантов многообразия.

Теорема 2.1 (о гомотопической классификации)**.** *Имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow K^0(T^*M^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow 0, \tag{2.6}$$

которая расщепляется. Здесь

- $M^\circ = M \setminus X$ — *внутренность многообразия*; $K^0(T^*M^\circ)$ *и* $K^0(X)$ — *четные топологические* K-*группы пространств* T^*M° *и* X *соответственно* (*отметим, что всюду в этой работе мы используем топологическую* K-*теорию с компактными носителями*);
- *при отображении* $K^0(T^*M^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M)$ *элементы группы* $K^0(T^*M^\circ)$ *реализуются в терминах эллиптических символов на* T^*M, *которые в окрестности границы не зависят от копеременных, и таким символам сопоставляются соответствующие эллиптические операторы на* M, *т. е. элементы группы* $\mathrm{Ell}(M)$;
- *при отображении* $\mathrm{Ell}(M) \longrightarrow K^0(X)$ *классу эллиптического морфизма* (2.5) *сопоставляется элемент* $[G_1] - [G_2]$.

Доказательство теоремы 2.1.

1. Сначала выразим группу $\mathrm{Ell}(M)$ в терминах K-группы некоторой C^*-алгебры, ассоциированной с алгеброй символов. А именно, в силу результатов работы [36] имеем изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M) \simeq K_0\Big(\mathrm{Con}(C(M) \oplus C(X) \to \Sigma)\Big), \tag{2.7}$$

где для гомоморфизма $f : A \to B$ некоторых C^*-алгебр A и B через

$$\mathrm{Con}(A \to B) = \big\{(a, b(t)) \in A \oplus C([0,1), B) \bigm| f(a) = b(0)\big\}$$

обозначен его конус. При этом отображение $C(M) \oplus C(X) \to \Sigma$ является мономорфизмом, который паре функций на f, g сопоставляет диагональный символ $\mathrm{diag}(f, g)$.

Далее C^*-алгебру $\mathrm{Con}(C(M) \oplus C(X) \to \Sigma)$ будем обозначать для краткости через $\mathcal{A}$.

2. Через $\Sigma_0 \subset \Sigma$ обозначим идеал, состоящий из символов с нулевым внутренним символом. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \Sigma_0 & \longrightarrow & \Sigma & \xrightarrow{\sigma_{int}} & C(S^*M) & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(M) \oplus C(X) & \longrightarrow & C(M) & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{2.8}$$

и соответствующую короткую точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Con}(C(M) \to C(S^*M)) \to 0 \tag{2.9}$$

конусов вертикальных отображений в (2.8). Последняя короткая точная последовательность дает периодическую точную последовательность K-групп

$$\begin{aligned} \ldots \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Con}(C(M) \to C(S^*M))) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_1\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \to \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Теперь проанализируем компоненты последовательности (2.10). Имеем $\mathrm{Con}(C(M) \to C(S^*M)) \simeq C_0(T^*M)$. Теперь вычислим группу $K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big)$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & C(S^*X, \mathcal{K}) & \longrightarrow & \Sigma_0 & \xrightarrow{\sigma_M} & C_0(X \times \mathbb{R}) & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & C(X) & \xrightarrow{id} & C(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0, \end{array} \tag{2.11}$$

где $C(S^*X, \mathcal{K}) \subset \Sigma_0$ — идеал граничных символов с нулевыми меллиновским и внутренним символом. Так как $K_0\Big(\mathrm{Con}(C(X) \to C(S^*X, \mathcal{K}))\Big) \simeq K^0(T^*X)$, то точная последовательность в K-теории, отвечающая короткой точной последовательности конусов вертикальных отображений в (2.11), имеет вид

$$\ldots \to K^0(T^*X) \longrightarrow K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \longrightarrow K^1(X \times \mathbb{R}) = K^0(X) \longrightarrow K^1(T^*X) \to \ldots \tag{2.12}$$

Построим расщепление этой последовательности, т. е. отображение

$$K^0(X) \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big). \tag{2.13}$$

Расщепление определяется следующим образом. Пусть $[E] \in K^0(X)$ — элемент, определяемый векторным расслоением E, которое реализовано как образ $E = \operatorname{Im} Q$ матричного $N \times N$ проектора Q над $C(X)$. Рассмотрим обратимый меллиновский символ $(p-i)^{-1}(p\,\mathrm{Id} + i(2Q - \mathrm{Id}))$. По этому меллиновскому символу строится обратимый граничный символ

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} + \varphi(t)\mathcal{M}^{-1}_{p\to t}\big[(p-i)^{-1}(p\,\mathrm{Id} + i(2Q-\mathrm{Id})) - \mathrm{Id}\big]\mathcal{M}_{t\to p}\varphi(t) \\ j \end{pmatrix} : L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \oplus E_x \tag{2.14}$$

из алгебры Σ_0 с добавленной единицей, где:

- функция $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ тождественно равна единице при малых t;
- $\mathcal{M}_{t\to p}$ — преобразование Меллина;
- $j : L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \longrightarrow E_x$ — отображение ранга $\dim E_x$, которое осуществляет изоморфизм линейных пространств $\ker\big(\mathrm{Id} + \varphi(t)\mathcal{M}^{-1}_{p\to t}\big[(p-i)^{-1}(p\,\mathrm{Id} + i(2Q-\mathrm{Id})) - \mathrm{Id}\big]\mathcal{M}_{t\to p}\varphi(t)\big)$ и $\operatorname{Im} Q(x) = E_x$.

Обратимость граничного символа (2.14) следует из построения. Тогда расщепление (2.13) сопоставляет элементу $[E]$ класс эллиптического морфизма с внутренним символом, равным Id и граничным символом (2.14).

Из расщепления последовательности (2.12) мы получаем изоморфизм

$$K_*\Big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\Big) \simeq K^*(T^*X) \oplus K^*(X). \tag{2.15}$$

4. С учетом изоморфизма (2.15) мы можем переписать последовательность (2.10) в виде

$$\ldots \to K^1(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \longrightarrow \ldots \tag{2.16}$$

Здесь граничные отображения ∂ являются композициями $K^*(T^*M) \longrightarrow K^{*+1}(T^*X) \longrightarrow K^{*+1}(T^*X) \oplus K^{*+1}(X)$ сужения на границу $T^*M|_X \simeq T^*X \times \mathbb{R}$ и вложения $K^{*+1}(T^*X) \longrightarrow K^{*+1}(T^*X) \oplus K^{*+1}(X)$ в качестве первого слагаемого.

5. С другой стороны, рассмотрим точную последовательность

$$\to K^1(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \to K^0(T^*M^\circ) \oplus K^0(X) \to K^0(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \to, \tag{2.17}$$

которая представляет собой прямую сумму точной последовательности пары $T^*M|_X \subset T^*M$ и последовательности $0 \to K^*(X) \stackrel{id}{\to} K^*(X) \to 0$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} K^1(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^0(T^*X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K^0(T^*M^\circ) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K^0(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^1(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^0(T^*X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^0(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \end{array} \tag{2.18}$$

Вертикальные отображения в этой диаграмме (кроме среднего) являются тождественными. Поэтому, применяя 5-лемму, из диаграммы получаем, что среднее отображение тоже является изоморфизмом: $K_0(\mathcal{A}) \simeq K^0(T^*M^\circ) \oplus K^0(X)$. Отсюда в силу изоморфизма (2.7) получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.1 доказана. □

3. Задачи сопряжения

В этом разделе мы получим гомотопическую классификацию эллиптических задач на многообразиях без края с условиями сопряжения на подмногообразиях коразмерности один.

3.1. Псевдодифференциальные задачи сопряжения. Напомним основные сведения об алгебре задач сопряжения для псевдодифференциальных операторов без свойства трансмиссии из работы [35].

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, а $X \subset M$ — гладкое подмногообразие коразмерности один с тривиальным нормальным расслоением. Далее, пусть выбрана трубчатая окрестность подмногообразия X, т. е. окрестность U подмногообразия X и диффеоморфизм

$$U \simeq X \times (-1, 1), \tag{3.1}$$

при котором X переходит в подмногообразие $X \times \{0\}$. Далее в качестве локальных координат в окрестности U будем выбирать (y, t), где y — координаты на X, а $t \in (-1, 1)$.

В дальнейшем подмногообразие X играет роль разреза, вдоль которого разрезается многообразие M. А именно, через $\overline{M}$ обозначим гладкое многообразие с краем — компактификацию дополнения $M \setminus X$ до многообразия с краем, диффеоморфным дизъюнктному объединению $X \sqcup X$. Непрерывные функции на этой компактификации суть функции на M, непрерывные на $M \setminus X$ и имеющие разрыв первого рода на X.

Через $\Psi(M, X) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ обозначим C^*-алгебру псевдодифференциальных задач сопряжения нулевого порядка на M из работы [35], действующих в прямой сумме пространств L^2 на M и X. Алгебру Калкина обозначим через $\Sigma = \Psi(M, X)/\mathcal{K}$. Свойства указанных алгебр аналогичны описанным выше свойствам алгебр краевых задач, поэтому ниже мы укажем только отличия символьных отображений в этих двух ситуациях, которые проистекают из того факта, что в случае задач сопряжения объемлющее многообразие в окрестности подмногообразия X диффеоморфно произведению $X \times (-1, 1)$, а для краевых задач — произведению $X \times [0, 1)$. В случае задач сопряжения символьное отображение является гомоморфизмом алгебр

$$\sigma = (\sigma_{int}, \sigma_b) : \Sigma \longrightarrow C(S^*\overline{M}) \oplus C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C})). \tag{3.2}$$

При этом C^*-алгебра граничных символов $\Sigma_b = \operatorname{Im} \sigma_b$ имеет следующую дополнительную символьную структуру: на ней определены отображения внутреннего символа $\sigma'_{int} : \Sigma_b \longrightarrow C(S^*M|_X) \oplus C(S^*M|_X)$ (здесь два слагаемых отвечают значениям внутреннего символа с двух сторон разреза X) и меллиновского символа

$$\sigma_M : \Sigma_b \longrightarrow C(X \times \overline{\mathbb{R}}, \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})). \tag{3.3}$$

Отметим, что меллиновский символ $\sigma_M(a)$ граничного символа $a \in \Sigma_b$ определяется следующим образом: граничный символ a является семейством операторов на прямой $\mathbb{R}$; при этом нуль $0 \in \mathbb{R}$ рассматривается как коническая точка, и меллиновский символ есть просто конормальный символ рассматриваемого оператора в этой точке. Конормальный символ принимает значения в операторах, действующих на функциях на базе конуса. В нашем случае база конуса состоит из двух точек, т. е. символ принимает значения в 2×2-матрицах.

3.2. Гомотопическая классификация. Мы рассматриваем морфизмы вида

$$\mathcal{D} : \operatorname{Im} P_1 \longrightarrow \operatorname{Im} P_2, \qquad \operatorname{Im} P_{1,2} \subset L^2(M, \mathbb{C}^N) \oplus L^2(X, \mathbb{C}^N), \tag{3.4}$$

действующие между образами матричных проекторов $P_{1,2} \in \operatorname{Mat}_N(C(\overline{M}) \oplus C(X))$ с компонентами из алгебры $C(\overline{M}) \oplus C(X)$, причем $\mathcal{D} \in \operatorname{Mat}_N(\Psi(M, X))$ — матричный оператор с компонентами из $\Psi(M, X)$. Заметим, что имеют место соотношения $\operatorname{Im} P_{1,2} = L^2(\overline{M}, E_{1,2}) \oplus L^2(X, G_{1,2})$, где $E_{1,2} \subset \overline{M} \times \mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на $\overline{M}$, а $G_{1,2} \subset X \times \mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на X. Поэтому оператор (3.4) будем также представлять как матричный оператор вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_M & C \\ B & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(\overline{M}, E_1) \\ \oplus \\ L^2(X, G_1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} L^2(\overline{M}, E_2) \\ \oplus \\ L^2(X, G_2) \end{matrix} \tag{3.5}$$

В этой ситуации рассматривается гомотопическая классификация, отвечающая паре алгебр $C(\overline{M}) \oplus C(X) \subset \Sigma$. Соответствующую группу стабильных гомотопических классов эллиптических морфизмов (3.5) обозначим через $\mathrm{Ell}(M, X)$. Следующая теорема описывает эту группу.

Теорема 3.1. *Имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow K^0(T^*M) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M, X) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow 0, \tag{3.6}$$

которая расщепляется. Здесь:

- *отображение* $K^0(T^*M) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M, X)$ *сопоставляет классу эллиптического псевдодифференциального оператора на* M *тот же самый оператор, рассматриваемый как задача сопряжения*;
- *при отображении* $\mathrm{Ell}(M, X) \longrightarrow K^0(X)$ *классу эллиптического морфизма* (3.5) *сопоставляется элемент* $[G_1] - [G_2]$.

Доказательство. Доказательство в целом аналогично доказательству теоремы 2.1. Поэтому мы сократим повторяющиеся части, обращая внимание на новые моменты.

1. Сначала группа $\mathrm{Ell}(M, X)$ выражается

$$\mathrm{Ell}(M, X) \simeq K_0\Big(\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \oplus C(X) \to \Sigma)\Big) \tag{3.7}$$

в терминах K-группы C^*-алгебры $\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \oplus C(X) \to \Sigma)$, которую будем обозначать для краткости через $\mathcal{A}$.

2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \Sigma_0 & \longrightarrow & \Sigma & \xrightarrow{\sigma_{int}} & C(S^*\overline{M}) & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) \oplus C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) & \longrightarrow 0
\end{array} \tag{3.8}$$

Конусы вертикальных отображений этой диаграммы образуют короткую точную последовательность, которой отвечает точная периодическая последовательность в K-теории

$$\begin{aligned} \ldots \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \to C(S^*\overline{M}))) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_1\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \to \ldots \end{aligned} \tag{3.9}$$

Также как и ранее, получаем изоморфизм (ср. (2.15)) $K_*(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)) \simeq K^*(T^*X) \oplus K^*(X)$ и изоморфизм $K_*(\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \to C(S^*\overline{M}))) \simeq K^*(T^*\overline{M})$. Следовательно, последовательность (3.9) принимает вид:

$$\to K^1(T^*\overline{M}) \longrightarrow K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(T^*\overline{M}) \longrightarrow K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \to \tag{3.10}$$

С другой стороны, возьмем прямую сумму точной последовательности пары $X \subset M$ в K-гомологиях (далее мы используем реализацию K-гомологий в терминах обобщенных эллиптических операторов в смысле Атьи, см., например, [25])

$$\ldots \to K_1(M \setminus X) \to K_0(X) \to K_0(M) \to K_0(M \setminus X) \to K_1(X) \to K_1(M) \to \ldots \tag{3.11}$$

и точной последовательности

$$0 \to K^*(X) \to K^*(X) \to 0 \tag{3.12}$$

и определим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^1(T^*\overline{M}) & \longrightarrow & K^0(T^*X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^0(T^*\overline{M}) & \xrightarrow{\partial} & K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_1(M \setminus X) & \longrightarrow & K_0(X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(M) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(M \setminus X) & \longrightarrow & K_1(X) \oplus K^1(X)
\end{array} \tag{3.13}$$

Верхняя строка этой диаграммы — последовательность (3.10), а нижняя — прямая сумма последовательностей (3.11), (3.12). Вертикальные отображения этой диаграммы $K^*(T^*\overline{M}) \longrightarrow K_*(M \setminus X)$, $K^*(T^*X) \longrightarrow K_*(X)$, $K_*(\mathcal{A}) \longrightarrow K_*(M)$ сопоставляют классам эллиптических символов соответствующие эллиптические операторы, рассматриваемые как абстрактные эллиптические операторы в смысле Атьи [19].

Диаграмма (3.13) является коммутативной в силу согласованности граничных отображений в K-теории и K-гомологиях (ср. [5]). При этом, в силу двойственности Пуанкаре на многообразиях $\overline{M}$ и X (см., например, [23]) все вертикальные отображения, кроме среднего, являются изоморфизмами. Поэтому в силу 5-леммы и среднее отображение является изоморфизмом.

Теорема доказана.

□

4. Задачи со сжатиями

В этом параграфе рассматривается проблема гомотопической классификации нелокальных задач, ассоциированных со сжатиями (см. [9–11, 16, 17]). Ниже мы опираемся на результаты работ [16, 17], в которых, в частности, были построены C^*-алгебры соответствующих задач и установлена теорема конечности.

4.1. Сжатия многообразий и отвечающая им геометрия. Пусть M — компактное многообразие с краем $X = \partial M$, а $g : M \to M$ — гладкое отображение, которое является диффеоморфизмом на свой образ $g(M)$, который лежит строго внутри многообразия: $g(M) \cap X = \varnothing$. Такое отображение будем называть *сжатием* многообразия M.

Пример 4.1. Пусть M — это замкнутый шар с центром в начале координат, а отображение $g : M \to M$ — умножение на скаляр $x \mapsto qx$, где $|q| < 1$. Это отображение является сжатием. Более общим образом, можно рассматривать сжатия $x \mapsto Ax$, отвечающие невырожденной вещественной матрице A. Такое отображение будет сжатием, если модули собственных значений матрицы A строго меньше единицы.

При рассмотрении сжатий важную роль играют следующие два подмножества в M:

- *Притягивающее множество* $M_\infty = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} g^n(M)$. Это множество является замкнутым. Оно примечательно тем, что является инвариантным относительно g и, следовательно, сужение отображения g на него определяет гомеоморфизм $g : M_\infty \to M_\infty$.
- *Фундаментальная область* $U = M \setminus g(M)$ для сжатия g в окрестности края многообразия. Очевидно, это множество является открытой окрестностью края. Отметим, что окрестность U, вообще говоря, не гомеоморфна произведению $X \times [0, 1)$.

В дальнейшем также используется специальное компактное топологическое пространство (не многообразие!), обозначаемое через $\overline{M}$, которое получается из M следующим образом:

1) сначала M разрезается вдоль каждого подмногообразия $g^n(X)$, $n \geqslant 1$, и получаются пространства $g^n(U)$, $n \geqslant 0$ и множество M_∞;
2) затем пространства $g^n(U)$ замыкаются до многообразий $g^n(\overline{U})$ с краем $g^n(X) \cup g^{n+1}(X)$;
3) наконец, дизъюнктное объединение этих многообразий с краем подклеивается к M_∞ и мы получаем пространство
$$\overline{M} = M_\infty \cup \bigcup_{n \geqslant 0} g^n(\overline{U}). \tag{4.1}$$

Топология на этом пространстве определяется так: множество $V \subset \overline{M}$ открыто, если выполнены два условия: а) $V \cap g^n(\overline{U})$ открыто в $g^n(\overline{U})$ при всех $n \geqslant 0$ и б) для любой точки $x \in V \cap M_\infty$ существует окрестность $W \subset M$ точки x, что $\pi^{-1}(W) \subset V$. Здесь $\pi : \overline{M} \to M$ — естественная проекция.

Пример 4.2. Рассмотрим сжатие единичного шара: $x \to qx$, где $|q| < 1$. Тогда пространство $\overline{M}$ гомеоморфно объединению $\overline{M} \simeq \{0\} \cup \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \{x \mid 2^{-n} \leqslant |x| \leqslant 2^{-n+2}\}$ нуля и непересекающихся концентрических шаровых слоев, которые стягиваются к нулю.

4.2. C^*-алгебры, ассоциированные со сжатиями. Со сжатием многообразия мы ассоциируем некоторую некоммутативную C^*-алгебру. Приводимая ниже конструкция этой алгебры является аналогом скрещенного произведения алгебры функций на многообразии и группы $\mathbb{Z}$, действующей на многообразии степенями фиксированного диффеоморфизма. Отличие рассматриваемой ситуации состоит в том, что у нас имеется только полугруппа $\{g^n\}$, $n \geqslant 0$ отображений многообразия внутрь себя.

На M фиксируем форму объема, которую будем обозначать через vol. Определим *оператор сжатия* $T_0 : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$,

$$T_0(u)(x) = \begin{cases} J^{1/2}(x)u(g^{-1}(x)), & \text{если } x \in g(M), \\ 0, & \text{если } x \in M \setminus g(M), \end{cases} \qquad \text{где} \qquad J = \frac{(g^{-1})^* \operatorname{vol}}{\operatorname{vol}}. \tag{4.2}$$

Положительный гладкий коэффициент J выбран таким образом, что оператор T_0 сохраняет норму в $L^2(M)$. Сопряженный оператор $T_0^* : L^2(M) \to L^2(M)$ называется *оператором растяжения* и имеет вид $T_0^*(u)(x) = J^{1/2}u(g(x))$, где $J = \dfrac{g^* \operatorname{vol}}{\operatorname{vol}}$.

Указанные операторы являются частичными изометриями и удовлетворяют соотношениям $T_0^*T_0 = id$, $T_0T_0^* = \chi$, где χ — характеристическая функция множества $U \subset M$. Для дальнейшего удобно оператор T_0^* обозначать через T_0^{-1}. Названия этих операторов отвечают тому, что оператор сжатия сжимает носители функций, на которые он действует, а оператор растяжения — растягивает.

Рассмотрим C^*-алгебру операторов, действующих в пространстве $L^2(M)$, которая порождена операторами T_0, T_0^{-1} и операторами умножения на функции $f \in C(\overline{M})$. Эту C^*-алгебру обозначим через $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$.

Пример 4.3. Рассмотрим множество $M = \{-2^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ и отображение сжатия $g(x) = x/2$. В этом случае имеем $\overline{M} = M$, $M_\infty = \{0\}$. При этом в данном примере имеется изоморфизм C^*-алгебр

$$C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \simeq \mathcal{T}, \tag{4.3}$$

где $\mathcal{T}$ — алгебра операторов Теплица (см., например, [24]). В самом деле, отображение $-2^{-n} \mapsto n$ является биекцией между $M\setminus\{0\}$ и $\mathbb{Z}_+$. В терминах этой биекции алгебра $C(M) = C(\overline{M})$ изоморфна алгебре функций на $\mathbb{Z}_+$, имеющих предел на бесконечности, а алгебра $C(M) \rtimes \mathbb{Z}_+$ получается, если к этой алгебре добавить операторы сдвига последовательности налево и направо. Ясно, что получаемая C^*-алгебра изоморфна алгебре Теплица $\mathcal{T}$.

4.3. K-группы алгебр, ассоциированных со сжатиями. Цель данного пункта состоит в том, чтобы вычислить K-группы алгебр $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$ в топологических терминах (более точно, в терминах топологических K-групп некоторых пространств). Приводимая ниже формула (см. предложение 4.1) является обобщением известной формулы (см., например, [24, 34]) для K-групп скрещенных произведений, отвечающих действию группы $\mathbb{Z}$, в терминах тора отображения.

По паре (M, g), где $g : M \to M$ — сжатие, определим топологическое пространство $\overline{M}_g = \Big[\overline{M} \times [0,1]/\{(m,0) \sim (g(m),1)\}\Big] \setminus \{(m,1) \mid m \in \overline{U}\}$, которое получается из произведения $\overline{M} \times [0,1]$ отождествлением точек $(m,0)$ и $(g(m),1)$ при всех $m \in M$ и удалением точек вида $\{(m,1) \mid m \in \overline{U}\}$.

Отметим, что если $g : M \to M$ диффеоморфизм (а не сжатие), то мы имеем $\overline{U} = \varnothing$ и $\overline{M} = M = M_\infty$ и пространство $\overline{M}_g$ есть просто тор диффеоморфизма g.

Пример 4.4. Построим в явном виде пространство $\overline{M}_g$, отвечающее сжатию из примера 4.3. Как множество это пространство является объединением $\overline{M}_g = (0,\infty) \cup \mathbb{S}^1$ открытой полупрямой и окружности, при этом топология на объединении задана так, что полупрямая $(0,\infty)$ накручивается на окружность. В явном виде это пространство можно вложить в $\mathbb{R}^3$ следующим образом: окружность определяется уравнениями $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, а кривая, которая наматывается на эту окружность, определяется в параметрическом виде $x = \cos(2\pi t)$, $y = \sin(2\pi t)$, $z = (t+1)^{-1}$, $t \in (0,\infty)$.

Теперь определим отображение

$$K^*(\overline{M}_g) \longrightarrow K_{*+1}(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+) \tag{4.4}$$

из топологической K-группы пространства $\overline{M}_g$ в K-группу рассматриваемой C^*-алгебры. Определим отображение (4.4) в случае четной топологической K-группы, т. е. при $* = 0$ (нечетный случай получается при помощи взятия надстройки).

Утверждается, что произвольный элемент $a \in K^0(\overline{M}_g)$ можно получить следующей конструкцией:

- выбирается векторное расслоение $E \in \mathrm{Vect}(\overline{M})$ и его тривиализация над областью $\overline{U} \subset \overline{M}$; также фиксируется изоморфизм векторных расслоений над $g(\overline{M})$
$$U : g^{-1*}E \xrightarrow{\simeq} E, \quad \text{т. е. } U(x) : E_{g^{-1}(x)} \to E_x \text{ при всех } x \in g(\overline{M}); \tag{4.5}$$
- рассматривается сжатие $g : E \to E$, которое накрывает сжатие пространства $\overline{M}$ и определяется формулой
$$e \in E_x \longmapsto U(g(x))e \in E_{gx}. \tag{4.6}$$
Пространство $\overline{E}_g$, определяемое сжатием (4.6), будет искомым векторным расслоением над $\overline{M}_g$ тривиальным вне компакта.

Теперь, чтобы определить отображение (4.4), реализуем расслоение E как образ матричного проектора
$$E = \mathrm{Im}\, P \subset \overline{M} \times \mathbb{C}^N, \qquad P \in \mathrm{Mat}_N(C(\overline{M})) \tag{4.7}$$
При этом предполагается, что в окрестности U проектор тривиален: $P|_U \equiv 1_k \oplus 0_{N-k}$, где $k = \mathrm{rk}\, E$. Здесь 1_k — единичная матрица $k \times k$, а 0_{N-k} — соответствующая нулевая матрица. Рассмотрим элемент
$$UT_0P + (1_N - P) \in \mathrm{Mat}_N(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+). \tag{4.8}$$
Этот элемент не является обратимым. А именно, соответствующий элементу (4.8) оператор в $L^2(M, \mathbb{C}^N)$ имеет тривиальное ядро, а коядро состоит из подпространства
$$L^2(U, \mathbb{C}^k) \subset L^2(M, \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{N-k}). \tag{4.9}$$
Теперь отображение (4.4) определяется формулой $a \in K^0(\overline{M}_g) \mapsto [A] \in K_1(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+)$, где
$$A = \begin{pmatrix} UT_0P + (1_N - P) & C \\ 0 & T_0^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{N+k}(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+). \tag{4.10}$$
Здесь оператор $C : L^2(M, \mathbb{C}^k) \subset L^2(M, \mathbb{C}^N)$ является композицией вложения
$$\begin{array}{ccc} L^2(M, \mathbb{C}^k) & \longrightarrow & L^2(M, \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{N-k}) \\ u(x) & \longmapsto & (u(x), 0) \end{array}$$
и проекции на подпространство (4.9). Прямая проверка показывает, что элемент A является обратимым, а обратный элемент равен
$$A = \begin{pmatrix} PT_0^{-1}U^{-1}P + (1_N - P) & 0 \\ C^* & T_0 \end{pmatrix}.$$
Далее, проверка показывает, что отображение (4.10) корректно определено (т. е. не зависит от выбора проектора P и изоморфизма U для данного элемента a) и определяет гомоморфизм групп.

Предложение 4.1. *Отображение* (4.4) *является изоморфизмом групп.*

Доказательство. Доказательство этого предложения аналогично доказательству в случае скрещенных произведений с действиями группы $\mathbb{Z}$ (см., напр., [34]). Рассмотрим диаграмму:
$$\begin{array}{ccccccccc} K^1((M_\infty)_g) & \to & K^0(\overline{U} \times (0,\infty)) & \to & K^0(\overline{M}_g) & \to & K^0((M_\infty)_g) & \to & K^1(\overline{U} \times (0,\infty)) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow \\ K_0(C(M_\infty) \rtimes \mathbb{Z}) & \to & K_1(C(\overline{U}, \mathcal{K})) & \to & K_1(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+) & \to & K_1(C(M_\infty) \rtimes \mathbb{Z}) & \to & K_0(C(\overline{U}, \mathcal{K})) \end{array} \tag{4.11}$$
Верхняя строка этой диаграммы представляет собой точную последовательность в топологической K-теории для пары $(M_\infty)_g \subset \overline{M}_g$ (здесь $(M_\infty)_g$ — тор гомеоморфизма $g : M_\infty \to M_\infty$). Для дополнения имеем $\overline{M}_g \setminus (M_\infty)_g \simeq \overline{U} \times (0, \infty)$. Нижняя строка диаграммы (4.11) — точная последовательность в K-теории для точной последовательности C^*-алгебр $0 \longrightarrow C(\overline{U}, \mathcal{K}) \longrightarrow C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \longrightarrow C(M_\infty) \rtimes \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Вертикальные отображения диаграммы (4.11) являются изоморфизмами все, кроме среднего. Диаграмма является коммутативной. Поэтому в силу 5-леммы получаем, что и среднее отображение является изоморфизмом. Предложение 4.1 доказано. □

Пример 4.5. Хорошо известны K-группы алгебры Теплица $\mathcal{T}$:

$$K_0(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{T}) = 0, \tag{4.12}$$

при этом образующая группы K_0 дается классом единицы $1 \in \mathcal{T}$. С другой стороны, вычислим эти K-группы, пользуясь предложением 4.1 и изоморфизмом C^*-алгебр (4.3)). Пространство $\overline{M}_g$ было явно построено выше. Несложное вычисление с помощью точной последовательностью пары $M_\infty \subset \overline{M}_g$ показывает, что для этого пространства топологические K-группы равны

$$K^0(\overline{M}_g) = 0, \qquad K^1(\overline{M}_g) = \mathbb{Z} \tag{4.13}$$

(последняя группа имеет образующую — класс эквивалентности обратимой функции $e^{2\pi it}$). Из соотношений (4.12) и (4.13) следует, что предложение 4.1 дает в этом случае как раз выражения (4.12).

4.4. C^*-алгебра задач со сжатиями. Напомним определение псевдодифференциальных задач со сжатиями, см. [16, 17].

Сначала определим C^*-алгебру псевдодифференциальных задач на M с граничными условиями на крае X и условиями сопряжения на (бесконечном) объединении подмногообразий $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} g^j(X)$. Фиксируем число $N \geqslant 1$. Через $\Psi_N(M) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ обозначим C^*-алгебру граничных задач на многообразии M с краевыми условиями на подмногообразии X и условиями сопряжения на конечном объединении $\bigcup\limits_{j=1}^{N} g^j(X)$ образов края под действием сжатия g. Отметим, что здесь мы для краткости не рассматриваем граничные и кограничные операторы на подмногообразиях $g^j(X) \subset M$ при $j \geqslant 1$.

По построению указанные алгебры образуют возрастающую последовательность $\Psi_1(M) \subset \Psi_2(M) \subset \Psi_3(M) \subset \ldots$ в $\mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$. Замыкание объединения $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Psi_j(M)$ по операторной норме будем обозначать через $\Psi(\overline{M})$.

Теперь определим C^*-алгебру операторов из $\mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$, которая порождена алгеброй $\Psi(\overline{M})$ и операторами растяжения и сжатия T_0, T_0^{-1}. Эту алгебру обозначим через $\Psi(M, g)$. Можно показать, что эта алгебра является замыканием по норме линейного пространства операторов вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j \geqslant 0} D_j T_0^j + \sum\limits_{j<0} T_0^j D_j & \sum\limits_{j\geqslant 0} C_j T_0^j \\ \sum\limits_{j \leqslant 0} T_0^j B_j & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(M) \\ \oplus \\ L^2(X) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} L^2(M) \\ \oplus \\ L^2(X) \end{matrix} \tag{4.14}$$

где D_X — псевдодифференциальный оператор на X, коэффициенты D_j, B_j, C_j отличны от нуля только для конечного числа показателей j и имеют вид: $D_j \in \Psi(\overline{M})$; граничные и кограничные операторы действуют в пространствах $B_j : L^2(M) \longrightarrow L^2(g^{|j|}(X))$, $C_j : L^2(g^{|j|}(X)) \longrightarrow L^2(M)$ и ассоциированы с подмногообразием $g^{|j|}(X) \subset M$.

В цитированных работах показано, что имеется отображение внутреннего символа $\sigma_{int} : \Psi(M, g) \longrightarrow C(\overline{S^*M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$. Здесь C^*-алгебра $C(\overline{S^*M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$ определяется, как в предыдущем пункте в терминах кодифференциала $\partial g : S^*M \to S^*M$, который является сжатием косферического расслоения S^*M. Теперь внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ вида (4.14) есть оператор

$$\sigma_{int}(\mathcal{D}) = \sum_{j \geqslant 0} \sigma_{int}(D_j) \tilde{T}_0^j + \sum_{j<0} \tilde{T}_0^j \sigma_{int}(D_j) : L^2(S^*M) \longrightarrow L^2(S^*M),$$

где через $\tilde{T}_0$ обозначена частичная изометрия пространства $L^2(S^*M)$, отвечающая сжатию ∂g (ср. с оператором T_0 в (4.2)). Алгебру символов обозначим через $\Sigma_g = \Psi(M, g)/\mathcal{K}$. Кроме этого, имеет место точная последовательность C^*-алгебр

$$0 \longrightarrow \Sigma_{g,0} \longrightarrow \Sigma_g \xrightarrow{\sigma_{int}} C(\overline{S^*M}) \rtimes \mathbb{Z}_+, \tag{4.15}$$

где через $\Sigma_{g,0}$ обозначен идеал символов с нулевым внутренним символом.

4.5. Проблема гомотопической классификации. Рассмотрим задачу о нахождении гомотопической классификации задач со сжатиями, отвечающую паре C^*-алгебр

$$C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) \subset \Sigma_g. \tag{4.16}$$

Другими словами, рассматриваются эллиптические операторы, получающиеся сужением матричных операторов над алгеброй $\Psi(M,g)$ на образы матричных проекторов над подалгеброй $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X)$. Из структуры элементов алгебры $\Psi(M,g)$ (см. (4.14)) следует, что соответствующие эллиптические операторы являются операторами вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j\geqslant 0} D_j T_0^j + \sum\limits_{j<0} T_0^j D_j & \sum\limits_{j\geqslant 0} C_j T_0^j \\ \sum\limits_{j\leqslant 0} T_0^j B_j & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} P_1 L^2(M,\mathbb{C}^N) \\ \oplus \\ L^2(X,G_1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} P_2 L^2(M,\mathbb{C}^N) \\ \oplus \\ L^2(X,G_2) \end{matrix} \tag{4.17}$$

где $\mathcal{D}$ — матричный оператор над алгеброй $\Psi(M,g)$, P_1, P_2 — некоторые $N\times N$-проекторы с компонентами из алгебры $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$ (эта алгебра — первое слагаемое в (4.16)), через $P_{1,2}L^2(M,\mathbb{C}^N)$ обозначены образы этих проекторов, а G_1, G_2 — векторные расслоения над X (сечения этих расслоений определяются как образы матричных проекторов с компонентами из алгебры $C(X)$ — второго слагаемого в (4.16)).

Группу стабильных гомотопических классов эллиптических задач вида (4.17) обозначим через $\mathrm{Ell}(M,g)$.

Рассмотрим сжатие кокасательного расслоения

$$T^*M \longrightarrow T^*M, \qquad (x,\xi) \longmapsto \frac{\partial g(x,\xi)}{|\partial g(x,\xi)|}. \tag{4.18}$$

По отношению к этому сжатию определим пространства $\overline{T^*M}$ и $\overline{T^*M}_g$.

Теорема 4.1. *Группа стабильных гомотопических классов эллиптических внутренних символов задач вида* (4.17) *изоморфна группе* $K^1(\overline{T^*M}_g)$ *и имеет место точная последовательность*

$$K^0(\overline{T^*M}_g) \stackrel{\mathrm{ind}\oplus 0}{\longrightarrow} K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M,g) \stackrel{\sigma_{int}}{\longrightarrow} K^1(\overline{T^*M}_g) \stackrel{\mathrm{ind}}{\longrightarrow} K^1(T^*X). \tag{4.19}$$

Здесь:

- *отображение* σ_{int} *сопоставляет классу эллиптической задачи класс ее внутреннего символа*;
- *отображение* $\mathrm{ind} : K^1(\overline{T^*M}_g) \to K^1(T^*X)$ *определяется так*: *эллиптическому внутреннему символу* $\sigma_{int}(\mathcal{D})$ *сопоставляется индекс* $\mathrm{ind}\,\sigma_\partial(\mathcal{D}) \in K^0(S^*X)/K^0(X)$ *соответствующего граничного символа и используется изоморфизм* $K^0(S^*X)/K^0(X) \simeq K^1(T^*X)$ (*см.* [21]); *отображение* ind *для четных K-групп определяется при помощи надстройки*;
- *отображение* $K^0(T^*X) \to \mathrm{Ell}(M,g)$ *индуцировано сопоставлением эллиптическому оператору* D_X *на* X *оператора вида* (4.17), *в котором присутствует только правый нижний угол, а остальные операторы нулевые*; *наконец, отображение* $K^0(X) \to \mathrm{Ell}(M,g)$ *определяется так же, как отображение* (2.13) *выше.*

Доказательство.

1. Сначала группа $\mathrm{Ell}(M,g)$ выражается в силу результатов работы [36]

$$\mathrm{Ell}(M,g) \simeq K_0\Big(\mathrm{Con}\big(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) \to \Sigma_g\big)\Big) \tag{4.20}$$

в терминах K-группы C^*-алгебры $\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) \to \Sigma_g)$. Эту алгебру будем обозначать для краткости через $\mathcal{A}$.

2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \Sigma_{g,0} & \longrightarrow & \Sigma_g & \stackrel{\sigma_{int}}{\longrightarrow} & C(S^*\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{4.21}$$

Здесь верхняя строка — это точная последовательность (4.15), а отображения в нижней строке имеют вид $f \mapsto (0,f)$, $(f_1,f_2) \mapsto f_1$. При этом вертикальные отображения диаграммы (4.21) являются вложениями подалгебр. Диаграмма является коммутативной по построению. Следовательно, определена короткая точная последовательность конусов вертикальных отображений этой диаграммы. Рассмотрим соответствующую точную периодическую последовательность в K-теории

$$\ldots \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X)\to\Sigma_{g,0})\big) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Con}(C(\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+ \to C(S^*\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+)) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_1\big(\mathrm{Con}(C(X)\to\Sigma_{g,0})\big) \to \ldots \quad (4.22)$$

Вычислим в топологических терминах группы

$$K_*\big(\mathrm{Con}(C(X)\to\Sigma_{g,0})\big) \quad \text{и} \quad K_*(\mathrm{Con}(C(\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+ \to C(S^*\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+)) \quad (4.23)$$

в этой последовательности. Для первой из этих групп имеет место изоморфизм

$$K_*(\mathrm{Con}(C(X)\to\Sigma_{g,0})) \simeq K^*(T^*X)\oplus K^*(X)$$

(ср. с аналогичным изоморфизмом (2.15) в случае псевдодифференциальных краевых задач). Конструкция этого изоморфизма следует аналогичной конструкции изоморфизма (2.15) и не содержит принципиально новых моментов. Поэтому мы ее детально здесь не повторяем.

Исследуем вторую группу в (4.23). Во-первых, имеем изоморфизмы C^*-алгебр

$$\mathrm{Con}\big(C(\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+ \to C(S^*\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+\big) \simeq \big[\mathrm{Con}(C(\overline{M})\to C(S^*\overline{M}))\big]\rtimes\mathbb{Z}_+ \simeq C_0(\overline{T^*M})\rtimes\mathbb{Z}_+.$$

Здесь первый изоморфизм очевиден, а второй индуцирован гомеоморфизмом пространства $\overline{T^*M}$ и конуса проекции $\overline{S^*M}\to\overline{M}$, при этом на пространстве T^*M рассматривается сжатие (4.18). Во-вторых, K-группа C^*-алгебры $C_0(\overline{T^*M})\rtimes\mathbb{Z}_+$ вычисляется в топологических терминах с помощью предложения 4.1. Применение этого предложения дает изоморфизм групп $K_*(C_0(\overline{T^*M})\rtimes\mathbb{Z}_+)\simeq K^{*+1}(\overline{T^*M}_g)$.

Итак, последовательность (4.22) принимает вид

$$\to K^1(\overline{T^*M}_g) \longrightarrow K^0(T^*X)\oplus K^0(X) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(\overline{T^*M}_g) \longrightarrow K^1(T^*X)\oplus K^1(X) \to \quad (4.24)$$

Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А.Б., Бахтин В.И., Лебедев А.В.* Скрещенное произведение С-алгебры на эндоморфизм, алгебры коэффициентов и трансфер-операторы// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 9. — С. 3–34.
2. *Вишик М.И., Эскин Г.И.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения// Усп. мат. наук. — 1965. — *22*, № 1. — С. 15–76.
3. *Гельфанд И.М.* Об эллиптических уравнениях// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 3. — С. 121–132.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полуоси с ядрами зависящими от разности аргументов// Усп. мат. наук. — 1958. — *13*, № 2. — С. 3–72.
5. *Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* О гомотопической классификации эллиптических операторов на стратифицированных многообразиях// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2007. — *71*, № 6. — С. 91–118.
6. *Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* О гомотопической классификации эллиптических операторов на многообразиях с углами// Докл. РАН. — 2007. — *413*, № 1. — С. 16–19.
7. *Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*, № 1. — С. 131–164.
8. *Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Индекс Атьи—Ботта на стратифицированных многообразиях// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 100–108.
9. *Россовский Л.Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2001. — *62*. — С. 199–228.
10. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
11. *Россовский Л.Е., Скубачевский А.Л.* Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 1999. — *66*. — С. 114–192.
12. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* Эллиптические операторы в четных подпространствах// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 8. — С. 125–160.
13. *Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.* О проблеме гомотопической классификации эллиптических краевых задач// Докл. РАН. — 2001. — *377*, № 2. — С. 165–169.

14. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Дефекты индекса в теории нелокальных краевых задач и η-инвариант// Мат. сб. — 2004. — *195*, № 9. — С. 85–126.
15. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем// Уфимск. мат. журн. — 2016. — *8*, № 3. — С. 126–134.
16. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем. C-теория// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 10. — С. 1383–1392.
17. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические дифференциальные задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 5. — С. 665–676.
18. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
19. *Atiyah M. F.* Global theory of elliptic operators// В сб. «Proc. of the Int. Symposium on Functional Analysis». — Tokyo: University of Tokyo Press, 1969. — С. 21–30.
20. *Atiyah M. F., Bott R.* The index problem for manifolds with boundary// В сб. «Differential Analysis: Papers presented at the international colloquium». — London: Oxford University Press, 1964. — С. 175–186.
21. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *79*. — С. 71–99.
22. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators. I// Ann. of Math. — 1968. — *87*. — С. 484–530.
23. *Baum P., Douglas R. G.* K-homology and index theory// В сб. «Operator Algebras and Applications». — Am. Math. Soc., 1982. — С. 117–173.
24. *Blackadar B.* K-Theory for Operator Algebras. — Cambridge University Press, 1998.
25. *Higson N., Roe J.* Analytic K-homology. — Oxford: Oxford University Press, 2000.
26. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1985.
27. *Kwaśniewski B. K., Lebedev A. V.* Crossed products by endomorphisms and reduction of relations in relative Cuntz—Pimsner algebras// J. Funct. Anal. — 2013. — *264*, № 8. — С. 1806–1847.
28. *Lescure J.-M.* Elliptic symbols, elliptic operators and Poincaré duality on conical pseudomanifolds// J. K-Theory. — 2009. — *4*, № 2. — С. 263–297.
29. *Melo S. T., Nest R., Schrohe E.* C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra// J. Reine Angew. Math. — 2003. — *561*. — С. 145–175.
30. *Melo S. T., Schick Th., Schrohe E.* A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems// J. Reine Angew. Math. — 2006. — *599*. — С. 217–233.
31. *Melrose R., Rochon F.* Index in K-theory for families of fibred cusp operators// K-Theory. — 2006. — *37*, № 1-2. — С. 25–104.
32. *Monthubert B., Nistor V.* A topological index theorem for manifolds with corners// Compos. Math. — 2012. — *148*, № 2. — С. 640–668.
33. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic Theory on Singular Manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
34. *Pimsner M., Voiculescu D.* Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C-algebras// J. Oper. Theory. — 1980. — *4*. — С. 93–118.
35. *Rempel S., Schulze B.-W.* Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property// Math. Nachr. — 1982. — *105*. — С. 45–149.
36. *Savin A.* Elliptic operators on manifolds with singularities and K-homology// K-theory. — 2005. — *34*, № 1. — С. 71–98.

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6;
Leibniz Unversity of Hannover,
1 Welfengarten, 30159 Hannover, Germany
E-mail: antonsavin@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-164-179 UDC 515.168.5+517.986.32

On Homotopic Classification of Elliptic Problems with Contractions and K-Groups of Corresponding C^*-Algebras

© 2018 **A. Yu. Savin**

Abstract. We consider calculation of a group of stable homotopic classes for pseudodifferential elliptic boundary problems. We study this problem in terms of topological K-groups of some spaces in the following cases: for boundary-value problems on manifolds with boundaries, for conjugation problems with conditions on a closed submanifold of codimension one, and for nonlocal problems with contractions.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, and A. V. Lebedev, "Skreshchennoe proizvedenie C-algebry na endomorfizm, algebry koeffitsientov i transfer-operatory" [Smash product of a C-algegra by endomorphism, algebras of coefficients, and transfer-operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2011, **202**, No. 9, 3–34 (in Russian).
2. M. I. Vishik and G. I. Eskin, "Ellipticheskie uravneniya v svertkakh v ogranichennoy oblasti i ikh prilozheniya" [Convolution elliptic equations in a bounded domain and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1965, **22**, No. 1, 15–76 (in Russian).
3. I. M. Gel'fand, "Ob ellipticheskikh uravneniyakh" [On elliptic equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 3, 121–132 (in Russian).
4. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, "Sistemy integral'nykh uravneniy na poluosi s yadrami zavisyashchimi ot raznosti argumentov" [Systems of integral equations on semiaxis with kernels depending on difference of arguments], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1958, **13**, No. 2, 3–72 (in Russian).
5. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "O gomotopicheskoy klassifikatsii ellipticheskikh operatorov na stratifitsirovannykh mnogoobraziyakh" [On homotopic classification of elliptic operators on stratified manifolds], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2007, **71**, No. 6, 91–118 (in Russian).
6. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "O gomotopicheskoy klassifikatsii ellipticheskikh operatorov na mnogoobraziyakh s uglami" [On homotopic classification of elliptic operators on manifolds with corners], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **413**, No. 1, 16–19 (in Russian).
7. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "Nekommutativnaya geometriya i klassifikatsiya ellipticheskikh operatorov" [Noncommutative geometry and classification of elliptic operators], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, No. 1, 131–164 (in Russian).
8. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "Indeks At'i—Botta na stratifitsirovannykh mnogoobraziyakh" [Atiyah–Bott index on stratified manifolds], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 100–108 (in Russian).
9. L. E. Rossovskiy, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s rastyazheniem i szhatiem argumentov" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2001, **62**, 199–228 (in Russian).
10. L. E. Rossovskiy, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
11. L. E. Rossovskiy and A. L. Skubachevskiy, "Razreshimost' i regulyarnost' resheniy nekotorykh klassov ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Solvability and regularity of solutions of some classes of elliptic functional differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 1999, **66**, 114–192 (in Russian).
12. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie operatory v chetnykh podprostranstvakh" [Elliptic operators in even subspaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **190**, No. 8, 125–160 (in Russian).

©Peoples' Friendship University of Russia, 2018

13. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “O probleme gomotopicheskoy klassifikatsii ellipticheskikh kraevykh zadach” [On the problem of homotopic classification of elliptic boundary-value problems], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **377**, No. 2, 165–169 (in Russian).
14. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Defekty indeksa v teorii nelokal'nykh kraevykh zadach i η-invariant” [Defects of index in the theory of nonlocal boundary-value problems and the η-invariant], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2004, **195**, No. 9, 85–126 (in Russian).
15. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Gomotopicheskaya klassifikatsiya ellipticheskikh zadach, assotsiirovannykh s deystviyami diskretnykh grupp na mnogoobraziyakh s kraem” [Homotopic classification of elliptic problems associated with actions of discrete groups on manifolds with boundaries], *Ufimsk. mat. zhurn.* [Ufa Math. J.], 2016, **8**, No. 3, 126–134 (in Russian).
16. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Ellipticheskie zadachi s rastyazheniyami-szhatiyami na mnogoobraziyakh s kraem. C-teoriya” [Elliptic problems with dilatations and contractions on manifolds with boundaries. C-Theory], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 10, 1383–1392 (in Russian).
17. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Ellipticheskie differentsial'nye zadachi s rastyazheniyami-szhatiyami na mnogoobraziyakh s kraem” [Elliptic differential problems with dilatations and contractions on manifolds with boundaries], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 5, 665–676 (in Russian).
18. G. I. Eskin, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh uravneniy* [Boundary-Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
19. M. F. Atiyah, “Global theory of elliptic operators,” In: *Proc. of the Int. Symposium on Functional Analysis*, University of Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 21–30.
20. M. F. Atiyah and R. Bott, “The index problem for manifolds with boundary,” In: *Differential Analysis: Papers presented at the international colloquium*, University Press, London, 1964, pp. 175–186.
21. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, “Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **79**, 71–99.
22. M. F. Atiyah and I. M. Singer, “The index of elliptic operators. I,” *Ann. of Math.*, 1968, **87**, 484–530.
23. P. Baum and R. G. Douglas, “K-homology and index theory,” In: *Operator Algebras and Applications*, Am. Math. Soc., 1982, pp. 117–173.
24. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, Cambridge University Press, 1998.
25. N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
26. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1985.
27. B. K. Kwaśniewski and A. V. Lebedev, “Crossed products by endomorphisms and reduction of relations in relative Cuntz—Pimsner algebras,” *J. Funct. Anal.*, 2013, **264**, No. 8, 1806–1847.
28. J.-M. Lescure, “Elliptic symbols, elliptic operators and Poincaré duality on conical pseudomanifolds,” *J. K-Theory.*, 2009, **4**, No. 2, 263–297.
29. S. T. Melo, R. Nest, and E. Schrohe, “C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra,” *J. Reine Angew. Math.*, 2003, **561**, 145–175.
30. S. T. Melo, Th. Schick, and E. Schrohe, “A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems,” *J. Reine Angew. Math.*, 2006, **599**, 217–233.
31. R. Melrose and F. Rochon, “Index in K-theory for families of fibred cusp operators,” *K-Theory.*, 2006, **37**, No. 1-2, 25–104.
32. B. Monthubert and V. Nistor, “A topological index theorem for manifolds with corners,” *Compos. Math.*, 2012, **148**, No. 2, 640–668.
33. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
34. M. Pimsner and D. Voiculescu, “Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C-algebras,” *J. Oper. Theory.*, 1980, **4**, 93–118.
35. S. Rempel and B.-W. Schulze, “Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property,” *Math. Nachr.*, 1982, **105**, 45–149.
36. A. Savin, “Elliptic operators on manifolds with singularities and K-homology,” *K-theory.*, 2005, **34**, No. 1, 71–98.

A. Yu. Savin
RUDN University, Moscow, Russia;
Leibniz Unversity of Hannover, Hannover, Germany
E-mail: antonsavin@mail.ru