

УДК 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701

EDN: WZTJPS

ОБ ИЗУЧЕНИИ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ ВИЧ/СПИДА

А. И. Шашкин¹, М. В. Половинкина², И. П. Половинкин^{1,3}

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

³Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»),
Белгород, Россия

Аннотация. Целью работы является исследование достаточных условий асимптотической устойчивости стационарного решения начально-краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих рост и распространение эпидемии ВИЧ/СПИДа. Вышеупомянутая модель учитывает не только факторы, учитываемые классическими моделями, но и включает миграционные процессы.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, начально-краевая задача, стационарное решение, математическое моделирование, модель распространения эпидемии ВИЧ/СПИДа, миграционные процессы.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. И. Шашкин, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин. Об изучении модели распространения эпидемии ВИЧ/СПИДа // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 691–701. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701>

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu k - c\beta \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m + I} \right) SI - c\beta b JS - \mu S + \vartheta_1 \Delta S, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c\beta \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m + I} \right) SI + c\beta b JS - (\mu + k_1)I + \delta J + \vartheta_2 \Delta I, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = k_1 I - (\mu + k_2 + \delta)J + \vartheta_3 \Delta J, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\mu_1 S + \eta_1 \frac{\partial S}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} &= B_1, \\ \left(\mu_2 I + \eta_2 \frac{\partial I}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} &= B_2, \end{aligned}$$

$$\left(\mu_3 J + \eta_3 \frac{\partial J}{\partial \vec{\nu}} \right) \Big|_{\partial \Omega} = B_3, \quad t \geq 0; \quad (1.4)$$

$$S|_{t=0} = S_0, \quad I|_{t=0} = I_0, \quad J|_{t=0} = J_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.5)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\vec{\nu}$ — единичный внешний вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω , в краевом условии (1.4) предполагается $\mu_\kappa^2 + \eta_\kappa^2 > 0$, $\mu_\kappa \eta_\kappa \geq 0$, $\kappa = 1, 2, 3$.

Мы пользуемся моделью (1.1)–(1.3) в работе [33], в которую мы добавили условие территориального распространения (диффузии). В связи с этим мы используем обозначения, термины и описания, представленные в [33]. Модель (1.1)–(1.3) является результатом нескольких этапов модификации классической модели распространения эпидемии Кермака–Маккендрика [23] (см. [16, 33, 36, 38]).

Функции и параметры, включенные в систему (1.1)–(1.5), имеют следующий смысл:

$S = S(x_1, x_2, t)$ — количество восприимчивых лиц в данной популяции;

$I = I(x_1, x_2, t)$ — количество бессимптомных носителей инфекции;

$J = J(x_1, x_2, t)$ — численность симптоматической группы;

k — общая численность населения;

μ — уровень смертности населения;

c — частота контактов;

β — вероятность передачи заболевания при контакте с инфекционным заболеванием в бессимптомной стадии;

b — вероятность передачи заболевания при контакте с инфекционным заболеванием в симптоматической стадии;

k_1 — скорость перехода от бессимптомной стадии к симптоматической;

k_2 — скорость перехода от симптоматического состояния к СПИДу;

δ — скорость лечения от симптоматической стадии до бессимптомной;

d — уровень смертности от СПИДа;

$m > 0$ — константа полунасыщенности, отражающая влияние освещения в средствах массовой информации на контактную передачу;

β_1 — частота контактов до оповещения СМИ с $\beta_1 \geq \beta_2 > 0$.

Член $\beta_2 I/(m + I)$ оценивает эффект снижения частоты контактов при информировании инфицированных лиц через средства массовой информации. Функция $I/(m + I)$ учитывает насыщенность заболевания или психологические эффекты [17, 33]. Автор работы [33] говорит, что основная причина, по которой мы включаем влияние СМИ на этапе I , заключается в том, что оно распространяется на инфицированных лиц без симптомов. Следовательно, СМИ должны предупреждать этих людей о возможности заражения и повышать их осведомленность.

Вирус иммунодефицита человека (ВИЧ) — это инфекционное хроническое заболевание, передающееся контактным путем, медленно прогрессирующее и характеризующееся поражением иммунной системы с развитием синдрома приобретенного иммунодефицита (СПИД). Число инфицированных людей в большинстве стран растет с каждым годом. Оценки распространенности ВИЧ во всем мире были даны Всемирной организацией здравоохранения (ВОЗ) и Программой Организации Объединенных Наций по ВИЧ/СПИДу (UNAIDS) с конца 1980-х годов [39, 40]. Первые больные СПИДом были зарегистрированы в 1981 году, и с тех пор это стало одной из самых разрушительных болезней, с которыми когда-либо сталкивалось человечество. По данным UNAIDS, число людей, умерших от заболеваний, связанных со СПИДом, равно 36 миллионам.

Хотя факторы, ответственные за распространение ВИЧ, признаны, нехватка медицинских услуг и нежелание населения принимать профилактические меры очень затрудняют борьбу с этим заболеванием. Еще одна серьезная проблема заключается в том, что во многих странах люди даже не подозревают, что у них ВИЧ [28].

Уже долгое время математическое моделирование применяется для изучения распространения многих серьезных заболеваний: ВИЧ/СПИД, туберкулез, малярия и многие другие заболевания. Математические модели могут дать глубокое понимание реакции пациентов на возбудителей инфекционных заболеваний, а также могут предвидеть динамику распространенности инфекции среди населения. Таким образом, изучение динамических характеристик, представленных этими

моделями, может сыграть существенную роль в понимании инфекционных заболеваний. В связи с этим было сформулировано и исследовано множество математических моделей для понимания длительного динамического поведения ВИЧ, а также для прогнозирования заболеваемости ВИЧ/СПИДом [13–16, 21, 22, 24–27, 29, 30, 34, 35, 37].

Нашим вкладом в рассматриваемую модификацию модели является добавление «диффузионных» членов, полученных действием оператора $\vartheta_\kappa \Delta$ к функциям S, I, J , $\kappa = 1, 2, 3$, чтобы принять во внимание миграционные процессы, которые, как мы считаем, подчиняются закону Фурье.

Аналогичные модификации моделей приведены в работах, посвященных математическим моделям, описывающим не только рост, но и распространение различных видов популяций. В частности, проблемы устойчивости экосистем рассматриваются в книге [11]. Модель роста и распространения опухолевых клеток описана в статье [1].

В этой статье мы исследуем диффузионную модель, а именно достаточные условия, при которых устойчивость по Ляпунову ее стационарного решения влечет за собой его асимптотическую устойчивость («устойчивость относительно малых отклонений» — на языке теории систем). В книге [11] показано, что добавление диффузионных членов может изменить стабильность стационарного решения как в лучшую, так и в худшую сторону.

Пусть H — диаметр области Ω . Далее положим

$$A_{11} = -c\beta \left(\beta_1 - \frac{\beta_2}{m+I} \right) I - c\beta bJ - \mu - \frac{\vartheta_1}{H^2}, \quad (1.6)$$

$$A_{22} = c\beta\beta_1 S - \frac{c\beta\beta_2 mS}{(m+I)^2} - \mu - k_1 - \frac{\vartheta_2}{H^2}, \quad (1.7)$$

$$A_{33} = -\mu - k_2 - \delta - \frac{\vartheta_3}{H^2}, \quad (1.8)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2} \left(-c\beta\beta_1 S + \frac{c\beta\beta_2 mS}{(m+I)^2} + c\beta\beta_1 I - \frac{c\beta\beta_2 I}{m+I} + c\beta bJ \right), \quad (1.9)$$

$$A_{23} = A_{32} = \frac{1}{2}(c\beta bS + \delta + k_1), \quad (1.10)$$

$$A_{13} = A_{31} = -\frac{1}{2}c\beta bS. \quad (1.11)$$

Предложение. Пусть $w(x) = (w_1(x_1, x_2), w_2(x_1, x_2), w_3(x_1, x_2))$ — регулярное стационарное решение системы уравнений (1.1)–(1.3), удовлетворяющее краевым условиям (1.4). Если при $S = w_1, I = w_2, J = w_3$ квадратичная форма

$$Q(w_1, w_2, w_3; z_1, z_2, z_3) = \sum_{\kappa=1}^3 \sum_{\iota=1}^3 A_{\kappa\iota} z_\kappa z_\iota \quad (1.12)$$

отрицательно определена, то стационарное решение w асимптотически устойчиво при малых отклонениях (т. е. из устойчивости по Ляпунову вытекает асимптотическая устойчивость).

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Методы исследования, использованные для доказательства основного результата в настоящей работе, были использованы ранее в работах [6, 8–10, 18, 20, 31]. В [32] методика исследования скорректирована в связи с тем, что уравнение содержит оператор Бесселя (см. [2, 3, 5, 12] в связи с этим).

Рассмотрим начально-краевую задачу (см. также [8, 9])

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial\Omega} = B_s(x), \quad (2.2)$$

$$u_s(x, 0) = u_s^0(x), \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где Ω — область, ограниченная кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $\nu = \vec{\nu}$ — единичный внешний вектор нормали к $\partial\Omega$, $u = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$, $\vartheta_s \geq 0$, $B_s(x) \in C(\partial\Omega)$, $u_s^0(x) \in C(\bar{\Omega})$, $s =$

$1, \dots, m$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, заданный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Безусловно, мы должны требовать выполнения условий согласования исходных и граничных данных. Однако в рамках настоящей статьи мы отходим от этого вопроса. Будем считать, что все условия существования классических (регулярных) решений рассматриваемой задачи выполнены, и, кроме того, все исходные функции обладают необходимыми свойствами, позволяющими нам выполнять все операции, которые мы выполняем ниже.

Если

$$\vartheta_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

мы получаем модель с сосредоточенными параметрами без диффузионных членов. В этом случае переменные $x_1, \dots, x_n$ включены в уравнения (2.1) как параметры и производные по этим переменным в уравнениях (2.1) не содержатся. Если

$$\sum_{s=1}^m \vartheta_s^2 > 0, \quad (2.5)$$

то мы получаем систему с распределенными параметрами.

Пусть $w = (w_1(x), \dots, w_m(x))$ — стационарное решение задачи (2.1)–(2.3), т. е. решение задачи

$$\vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$\left(\mu_s w_s + \eta_s \frac{\partial w_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial\Omega} = B_s(x), \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Пусть функции $F_s(u)$, $s = 1, \dots, m$, дифференцируемы в точке w . Тогда при достаточно малых отклонениях $z_s = z_s(x_1, \dots, x_n, t) = u_s - w_s$, $s = 1, \dots, m$, мы имеем

$$F_s(u) = F_s(w + z) = F_s(w) + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_k, \quad (2.8)$$

где

$$b_{sk} = \frac{\partial F_s(w)}{\partial z_k}, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \epsilon_{sk}(z) = 0, \quad s, k = 1, \dots, m.$$

Подставляя представление $u_s = w_s + z_s$ в уравнение (2.1) и учитывая (2.8), мы получаем:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta w_s + F_s(w) + \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_k, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.9)$$

Учитывая, что w является стационарным решением, мы получаем из (2.9):

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \vartheta_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_k, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.10)$$

Умножим каждое s -е уравнение системы (2.1) на z_s и проинтегрируем полученное равенство по области Ω . Принимая во внимание (2.8), мы получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = \vartheta_s \int_{\Omega} z_s \Delta z_s dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} z_s z_k dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \epsilon_{sk}(z) z_s z_k dx, \quad s = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Мы можем отбросить третье слагаемое в правой части равенства (2.11), поскольку оно не влияет на знак результирующей суммы, когда отклонения z невелики. Далее применим формулу Грина (см. [19]) к первому члену в правой части (2.11). В результате мы получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx + \vartheta_s \int_{\partial\Omega} z_s \frac{\partial z_s}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} z_s z_k dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

где $d\Gamma$ является элементом границы $\partial\Omega$, т. е. второй член в правой части (2.12) является криволинейным интегралом первого рода по $\partial\Omega$ (когда $n = 2$), или поверхностным интегралом первого

рода по $\partial\Omega$ (когда $n \geq 3$), или суммой значений на концах интервала Ω (когда $n = 1$). Когда $\mu_s = 0$ или $\eta_s = 0$, подынтегральное выражение в интеграле по $\partial\Omega$ равно нулю из-за граничного условия (2.2). Из того же граничного условия, когда $\mu_s \eta_s > 0$, мы получаем:

$$\left. \frac{\partial z_s}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = - \frac{\mu_s}{\eta_s} z_s \Big|_{\partial\Omega}.$$

Следовательно, равенство (2.12) может быть переписано как

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = -\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \sigma_s z_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m b_{sk} z_s z_k dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (2.13)$$

где

$$\sigma_s = \frac{\mu_s}{\eta_s},$$

когда $\mu_s \eta_s > 0$, или $\sigma_s = 0$, когда $\mu_s \eta_s = 0$. Суммируя (2.13) по s , мы получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx = \sum_{s=1}^m \left(-\vartheta_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \sigma_s z_s^2 d\Gamma \right) + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_s z_k dx, \quad (2.14)$$

где

$$\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2.$$

Знак левой части (2.14) рассматривается как показатель устойчивости тривиального решения. Следовательно, важно найти соотношение членов в правой части, приводящее к отрицательности этого выражения. В круглых скобках с правой стороны как первый член, так и второй член не больше нуля. Далее нам нужно принять во внимание знак последнего члена в правой части. Если квадратичная форма

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx \quad (2.15)$$

отрицательно определена, то левая часть (2.14) будет отрицательна, и стационарное решение будет асимптотически устойчивым.

В случае модели с сосредоточенными параметрами (система обыкновенных дифференциальных уравнений), т. е. при выполнении условий (2.4), отрицательность квадратичной формы (2.15) также является необходимым условием для того, чтобы тривиальное решение было устойчивым.

Рассмотрим диффузионную модель с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения. Для этой цели мы используем неравенство Стеклова—Пуанкаре—Фридрихса (см. [4, 7])

$$\int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx \geq \frac{1}{H^2} \int_{\Omega} z_s^2 dx,$$

где H — диаметр области Ω . Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx \leq - \sum_{s=1}^m \frac{\vartheta_s}{H^2} \int_{\Omega} z_s^2 dx - \sum_{s=1}^m \vartheta_s \int_{\partial\Omega} \frac{\mu_s}{\eta_s} z_s^2 d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx. \quad (2.16)$$

Окончательно мы можем сказать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m A_{sk} z_k z_s, \quad (2.17)$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks} \vartheta_s / H^2. \quad (2.18)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Теперь, чтобы доказать основной результат, мы положим $m = 3$, $n = 2$ в системе (2.1):

$$u_1 = S(x_1, x_2, t), \quad u_2 = I(x_1, x_2, t), \quad u_3 = J(x_1, x_2, t), \quad (3.1)$$

$$F_1 = F_1(S, I, J) = \mu\rho - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) SI - c\beta bJS - \mu S, \quad (3.2)$$

$$F_2 = F_2(S, I, J) = \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) SI + c\beta bJS - (\mu + k_1)I, \quad (3.3)$$

$$F_3 = F_3(S, I, J) = k_1 I - (\mu + k_2 + \delta)J. \quad (3.4)$$

Частные производные функций F_s имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial S} &= \left(\frac{\beta_2 I}{m+I} - \beta_1\right) I - c\beta bJ - \mu, \\ \frac{\partial F_1}{\partial I} &= c\beta \left(\frac{\beta_2 I}{m+I} - \beta_1\right) S - \frac{c\beta\beta_2 SI}{(m+I)^2}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial J} &= -c\beta bS; \\ \frac{\partial F_2}{\partial S} &= \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) I + c\beta bJ, \\ \frac{\partial F_2}{\partial I} &= c\beta\beta_1 S - \frac{c\beta\beta_2 Sm}{(m+I)^2} - \mu - k_1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial J} &= c\beta bS + \delta; \\ \frac{\partial F_3}{\partial S} &= 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial I} = k_1, \quad \frac{\partial F_3}{\partial J} = -(\mu + k_2 + \delta). \end{aligned}$$

Подставляя частные производные в (2.18), мы получаем представления (1.6)–(1.11) для коэффициентов A_{sk} , что завершает доказательство.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Заметим, что если диаметр домена достаточно мал и $w_\kappa = \text{const} \geq 0$, тогда квадратичная форма (1.12) определена отрицательно, поэтому постоянное стационарное решение, очевидно, устойчиво в небольшой области. Следует также отметить, что любое стационарное (постоянное) решение системы (1.1)–(1.3) без учета миграций (т. е. когда $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$, и мы имеем дело с системой ОДУ) является стационарным решением этой системы (УЧП) с учетом миграций, (т. е. когда $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$), конечно, при соответствующих граничных условиях. В то же время может оказаться, что это постоянное решение не является асимптотически устойчивым в модели без учета миграции, но асимптотически устойчиво в небольшой области, если учитывать процессы миграции. Это можно продемонстрировать на простом примере. Постоянная точка (стационарное состояние) $(k, 0, 0)$ является решением системы (1.1)–(1.3) для любого набора коэффициентов диффузии. В случае $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$ это решение асимптотически устойчиво при

$$\mu < k_1 - \frac{(k_1 + \delta)^2}{4(k_2 + \mu)}$$

и только при этом условии. Если $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 > 0$, то решение $(k, 0, 0)$ с достаточно малым значением H будет асимптотически устойчивым без этого требования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жукова И. В., Колтак Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Проц. упр. — 2014. — № 3. — С. 5–18.
2. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.

4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. *Ляхов Л. Н.* *В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами.* — Липецк: ЛСПУ, 2007.
6. *Мешков В. З., Половинкин И. П., Семенов М. Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга// *Обозр. прикл. и пром. мат.* — 2002. — 9, № 1. — С. 226–227.
7. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
8. *Половинкина М. В., Половинкин И. П.* Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами// *Прикл. мат. физ.* — 2020. — 52, № 4. — С. 255–261. — DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261.
9. *Половинкина М. В., Половинкин И. П.* Об устойчивости стационарных состояний в диффузионных моделях// *Тавр. вестн. информ. и мат.* — 2021. — 2. — С. 88–101.
10. *Половинкина М. В., Половинкин И. П., Рабеев С. А.* К вопросу об устойчивости стационарного решения в миграционных моделях// В сб.: «Современная математика и ее приложения». — Грозный: Алеф, 2021. — С. 56–62.
11. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
12. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
13. *Anderson R. M., Medly G. F., May R. M., Johnson A. M.* A preliminary study of the transmission dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the causative agent of AIDS, IMA// *J. Math. Appl. Med. Biol.* — 1986. — 3. — С. 229–263.
14. *Bachar M., Dorfmayr A.* HIV treatment models with time delay// *C. R. Biol.* — 2004. — 327. — С. 983–994.
15. *Blower S.* Calculating the consequences: HAART and risky sex// *AIDS.* — 2001. — 15. — С. 1309–1310.
16. *Cai L., Li X., Ghoshc M., Guod B.* Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment// *J. Comput. Appl. Math.* — 2009. — 229, № 1. — С. 313–323. — DOI: 10.1016/j.cam.2008.10.067.
17. *Capasso V., Serio G.* A generalization of the Kermack—McKendrick deterministic epidemic model// *Math. Biosci.* — 1978. — 42. — С. 43–62. — DOI: 10.1016/0025-5564(78)90006-8.
18. *Debbouche A., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P., Valentim C. A. Jr, David S. A.* On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes// *Eur. Phys. J. Plus.* — 2021. — 136, № 1. — С. 1–18. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-01070-8.
19. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1983.
20. *Gogoleva T. N., Shchepina I. N., Polovinkina M. V., Rabeeakh S. A.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — 1203. — 012041.
21. *Hethcote H. W., Van Ark J. W.* Modelling HIV transmission and AIDS in the United States. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1992.
22. *Hsieh Y. H., Chen C. H.* Modelling the social dynamics of a sex industry: Its implications for spread of HIV/AIDS// *Bull. Math. Biol.* — 2004. — 66. — С. 143–166.
23. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics// *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.* — 1927. — 115, № 772. — С. 700–721.
24. *Leenheer P. D., Smith H. L.* Virus dynamics: A global analysis// *SIAM J. Appl. Math.* — 2003. — 63. — С. 1313–1327.
25. *Mastahun M., Abdurahman X.* Optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with infective immigration and behavioral change// *Appl. Math.* — 2017. — 8, № 1. — С. 87–109.
26. *McCluskey C.* A model of HIV/AIDS with staged progression and amelioration// *Math. Biosci.* — 2003. — 181. — С. 1–16.
27. *Nikolaos I. S., Dietz K., Schenzle D.* Analysis of a model for the pathogenesis of AIDS// *Math. Biosci.* — 1997. — 145. — С. 27–46.
28. *Okosun K. O., Makinde O. D., Takaidza I.* Impact of optimal control on the treatment of HIV/AIDS and screening of unaware infectives// *Appl. Math. Model.* — 2013. — 37. — С. 3802–3820.
29. *Perelson A. S., Nelson P. W.* Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo// *SIAM Rev.* — 1999. — 41, № 1. — С. 3–44.
30. *Pinto C. M. A., Carvalho A. R. M.* The impact of pre-exposure prophylaxis (PrEP) and screening on the dynamics of HIV// *J. Comput. Appl. Math.* — 2018. — 339. — С. 231–244.
31. *Polovinkina M. V.* On the effect of transition from a model with concentrated parameters to a model with distributed parameters// *J. Phys. Conf. Ser.* — 2021. — 1902. — 012041. — DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012041.

32. *Polovinkina M. V., Debbouche A., Polovinkin I. P., David S. A.* Stability of stationary solutions for the glioma growth equations with radial or axial symmetries// *Math. Methods Appl. Sci.* — 2021. — 44, № 15. — С. 12021–12034. — DOI: 10.1002/mma.7194.
33. *Salman S. M.* Memory and media coverage effect on an HIV/AIDS epidemic model with treatment// *J. Comput. Appl. Math.* — 2021. — 385. — 113203. — DOI: 10.1016/j.cam.2020.113203.
34. *Samanta S., Chaattopadhyay J.* Effect of awareness program in disease outbreak — a slow-fast dynamics// *Appl. Math. Comput.* — 2014. — 237. — С. 98–109.
35. *Samanta S., Rana S., Sharma A., Misra A. K., Chaattopadhyay J.* Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: a mathematical model// *Appl. Math. Comput.* — 2013. — 219, № 12. — С. 6965–6977.
36. *Tchuenche J. M., Dube N., Bhunu C. P., Smith R. J., Bauch C. T.* The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza// *BMC Public Health.* — 2011. — 11, № 1. — S5. — DOI: 10.1186/1471-2458-11-S1-S5.
37. *Wang K., Wang W., Liu X.* Viral infection model with periodic lytic immune response// *Chaos Solitons Fractals.* — 2006. — 28, № 1. — С. 90–99.
38. *Zhao H., Zhao M.* Global Hopf bifurcation analysis of an susceptible-infective-removed epidemic model incorporating media coverage with time delay// *J. Bio. Dyn.* — 2017. — 11, № 1. — С. 8–24. — DOI: 10.1080/17513758.2016.1229050.
39. AIDS Epidemic Update 2009// UNAIDS [электронный ресурс]. — Режим доступа: https://unaids.org/en/resources/documents/2009/20091124_jc1700_epi_update_2009_en.pdf (дата обращения: 12.12.2024).
40. Uganda: epidemiological fact sheets on HIV/AIDS and sexually transmitted infections// UNAIDS [электронный ресурс]. — Режим доступа: https://data.unaids.org/publications/fact-sheets01/uganda_en.pdf (дата обращения: 12.12.2024).

Шашкин Александр Иванович

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Половинкин Игорь Петрович

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия

E-mail: polovinkin@yandex.ru

UDC 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701

EDN: WZTJPS

On studying the spread model of the HIV/AIDS epidemic

A. I. Shashkin¹, M. V. Polovinkina², and I. P. Polovinkin^{1,3}

¹*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

²*Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia*

³*Belgorod State National Research University (BelGU), Belgorod, Russia*

Abstract. The aim of this work is to study sufficient conditions for the asymptotic stability of the stationary solution of the initial-boundary value problem for a system of nonlinear partial differential equations describing the growth and spread of the HIV/AIDS epidemic. The above-mentioned model takes into account not only the factors taken into account by classical models, but also includes migration processes.

Keywords: system of nonlinear partial differential equations, initial-boundary value problem, stationary solution, mathematical modeling, spread model of the HIV/AIDS epidemic, migration processes.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. I. Shashkin, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, “On studying the spread model of the HIV/AIDS epidemic,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 691–701. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-691-701>

REFERENCES

1. I. V. Zhukova and E. P. Kolpak, “Matematicheskie modeli zlokachestvennoy opukholi” [Mathematical models of malignant tumour], *Vestn. S.-Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. mat. Inform. Prots. upr.* [Bull. S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Appl. Math. Inf. Control], 2014, No. 3, 5–18 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, “Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy” [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 2, 211–426 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
4. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
5. L. N. Lyakhov, *B-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nykh uravneniyam s B-potentsial'nyimi yadrami* [B-hypersingular integrals and their applications to the description of Kipriyanov functional classes and to integral equations with B-potential kernels], LSPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
6. V. Z. Meshkov, I. P. Polovinkin, and M. E. Semenov, “Ob ustoychivosti statsionarnogo resheniya uravneniya Khotellinga” [On the stability of the stationary solution of the Hotelling equation], *Obozr. prikl. i prom. mat.* [Surv. Appl. Industr. Math.], 2002, **9**, No. 1, 226–227 (in Russian).
7. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).



8. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Ob izmenenii kharaktera ustoychivosti trivial’nogo resheniya pri perekhode ot modeli s sosredotochennymi parametrami k modeli s raspredelennymi parametrami” [About change in the stability character of the trivial solution at the transition from a model with concentrated parameters to a model with distributed parameters], *Prikl. mat. fiz.* [Appl. Math. Phys.], 2020, **52**, No. 4, 255–261, DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-4-255-261 (in Russian).
9. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Ob ustoychivosti statsionarnykh sostoyaniy v diffuzionnykh modelyakh” [On the stability of stationary states in diffusion models], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavr. vestn. inform. i mat.], 2021, **2**, 88–101 (in Russian).
10. M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, and S. A. Rabeeakh, “K voprosu ob ustoychivosti statsionarnogo resheniya v migratsionnykh modelyakh” [On the issue of stability of stationary solution in migration models], In: *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya* [Contemporary Mathematics and Its Applications], Alef, Groznyy, 2021, pp. 56–62 (in Russian).
11. Yu. M. Svirezhev and D. O. Logofet, *Ustoychivost’ biologicheskikh soobshchestv* [Stability of Biological Communities], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
12. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial’nykh uravneniy s operatorami Besselya* [Method of Transmutation Operators for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2019 (in Russian).
13. R. M. Anderson, G. F. Medly, R. M. May, and A. M. Johnson, “A preliminary study of the transmission dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the causative agent of AIDS, IMA,” *J. Math. Appl. Med. Biol.*, 1986, **3**, 229–263.
14. M. Bachar and A. Dorfinayr, “HIV treatment models with time delay,” *C. R. Biol.*, 2004, **327**, 983–994.
15. S. Blower, “Calculating the consequences: HAART and risky sex,” *AIDS*, 2001, **15**, 1309–1310.
16. L. Cai, X. Li, M. Ghoshc, and B. Guod, “Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, **229**, No. 1, 313–323, DOI: 10.1016/j.cam.2008.10.067.
17. V. Capasso and G. Serio, “A generalization of the Kermack–McKendrick deterministic epidemic model,” *Math. Biosci.*, 1978, **42**, 43–62, DOI: 10.1016/0025-5564(78)90006-8.
18. A. Debbouche, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, C. A. Valentim Jr, and S. A. David, “On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, No. 1, 1–18, DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-01070-8.
19. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1983.
20. T. N. Gogoleva, I. N. Shchepina, M. V. Polovinkina, and S. A. Rabeeakh, “On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, **1203**, 012041.
21. H. W. Hethcote and J. W. Van Ark, *Modelling HIV transmission and AIDS in the United States*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1992.
22. Y. H. Hsieh and C. H. Chen, “Modelling the social dynamics of a sex industry: Its implications for spread of HIV/AIDS,” *Bull. Math. Biol.*, 2004, **66**, 143–166.
23. W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1927, **115**, No. 772, 700–721.
24. P. D. Leenheer and H. L. Smith, “Virus dynamics: A global analysis,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2003, **63**, 1313–1327.
25. M. Mastahun and X. Abdurahman, “Optimal control of an HIV/AIDS epidemic model with infective immigration and behavioral change,” *Appl. Math.*, 2017, **8**, No. 1, 87–109.
26. C. McCluskey, “A model of HIV/AIDS with staged progression and amelioration,” *Math. Biosci.*, 2003, **181**, 1–16.
27. I. S. Nikolaos, K. Dietz, and D. Schenzle, “Analysis of a model for the pathogenesis of AIDS,” *Math. Biosci.*, 1997, **145**, 27–46.
28. K. O. Okosun, O. D. Makinde, and I. Takaidza, “Impact of optimal control on the treatment of HIV/AIDS and screening of unaware infectives,” *Appl. Math. Model.*, 2013, **37**, 3802–3820.
29. A. S. Perelson and P. W. Nelson, “Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo,” *SIAM Rev.*, 1999, **41**, No. 1, 3–44.
30. C. M. A. Pinto and A. R. M. Carvalho, “The impact of pre-exposure prophylaxis (PrEP) and screening on the dynamics of HIV,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, **339**, 231–244.
31. M. V. Polovinkina, “On the effect of transition from a model with concentrated parameters to a model with distributed parameters,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, **1902**, 012041, DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012041.
32. M. V. Polovinkina, A. Debbouche, I. P. Polovinkin, and S. A. David, “Stability of stationary solutions for the glioma growth equations with radial or axial symmetries,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, **44**, No. 15, 12021–12034, DOI: 10.1002/mma.7194.

33. S. M. Salman, “Memory and media coverage effect on an HIV/AIDS epidemic model with treatment,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2021, **385**, 113203, DOI: 10.1016/j.cam.2020.113203.
34. S. Samanta and J. Chaattopadhyay, “Effect of awareness program in disease outbreak — a slow-fast dynamics,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **237**, 98–109.
35. S. Samanta, S. Rana, A. Sharma, A. K. Misra, and J. Chaattopadhyay, “Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: a mathematical model,” *Appl. Math. Comput.*, 2013, **219**, No. 12, 6965–6977.
36. J. M. Tchuente, N. Dube, C. Bhunu P, R. J. Smith, and C. T. Bauch, “The impact of media coverage on the transmission dynamics of human influenza,” *BMC Public Health*, 2011, **11**, No. 1, S5, DOI: 10.1186/1471-2458-11-S1-S5.
37. K. Wang, W. Wang, and X. Liu, “Viral infection model with periodic lytic immune response,” *Chaos Solitons Fractals*, 2006, **28**, No. 1, 90–99.
38. H. Zhao and M. Zhao, “Global Hopf bifurcation analysis of an susceptible-infective-removed epidemic model incorporating media coverage with time delay,” *J. Bio. Dyn.*, 2017, **11**, No. 1, 8–24, DOI: 10.1080/17513758.2016.1229050.
39. “AIDS Epidemic Update 2009,” *UNAIDS*. Available online: https://unaids.org/en/resources/documents/2009/20091124_jc1700_epi_update_2009_en.pdf (accessed on December 12, 2024).
40. “Uganda: epidemiological fact sheets on HIV/AIDS and sexually transmitted infections,” *UNAIDS*. Available online: https://data.unaids.org/publications/fact-sheets01/uganda_en.pdf (accessed on December 12, 2024).

Aleksander I. Shashkin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: shashkin@amm.vsu.ru

Marina V. Polovinkina

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Igor P. Polovinkin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Belgorod State National Research University (BelGU), Belgorod, Russia

E-mail: polovinkin@yandex.ru