

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690

EDN: WWORZS

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В. Е. Федоров, А. Д. Годова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. Исследованы вопросы корректности линейных обратных задач для уравнений в банаховых пространствах с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля и ограниченным оператором при искомой функции. Найден критерий корректности для задачи с постоянным неизвестным параметром, в случае скалярного ядра свертки в интегро-дифференциальном операторе этот критерий сформулирован в виде условий необращения в нуль характеристической функции обратной задачи на спектре ограниченного оператора. Для линейной обратной задачи с переменным неизвестным параметром получены достаточные условия корректности. Абстрактные результаты использованы при исследовании модельной обратной задачи для уравнения в частных производных.

Ключевые слова: обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, оператор типа Римана—Лиувилля, корректность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана грантом РНФ и Правительства Челябинской области (проект 24-21-20015).

Для цитирования: В. Е. Федоров, А. Д. Годова. Линейные обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с ограниченным оператором // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 679–690. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690>

ВВЕДЕНИЕ

Дробное интегро-дифференциальное исчисление играет заметную роль в современном анализе в силу своей содержательности для теоретических исследований и важности для задач математического моделирования [2, 4, 5, 15]. В последние десятилетия появились работы, в которых рассматриваются не классические дробные производные, а близкие к ним по форме интегро-дифференциальные операторы [16, 21–23], представляющие собой композицию оператора свертки и оператора дифференцирования целочисленного порядка (сначала свертка, а потом дифференцирование — операторы типа Римана—Лиувилля, в обратном порядке — операторы типа Герасимова). Часто при этом такие интегро-дифференциальные операторы также называют дробными дифференциальными операторами, несмотря на отсутствие у них многих свойств дробных производных [8, 9].

В связи с этим естественным шагом представляется переход к исследованию уравнений с интегро-дифференциальными операторами с абстрактным ядром оператора свертки, поскольку полученные для них результаты будут включать в себя в качестве частных случаев результаты для конкретных интегро-дифференциальных операторов, упомянутых выше. Авторами данной работы ранее исследованы вопросы разрешимости задачи Коши для линейного неоднородного уравнения с абстрактным интегро-дифференциальным оператором типа Герасимова и с ограниченным оператором при искомой функции [10], задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля в случаях ограниченного [10] и секториального [6] операторов при искомой функции. В данной работе исследуется корректность линейных обратных задач для уравнений с абстрактным интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля в случаях ограниченного оператора при искомой функции. Наиболее близкими к таким исследованиям можно считать работы, посвященные линейным обратным задачам для уравнений с различными дробными производными [7, 11–14, 17–20].

В первом разделе настоящей работы приведены и доказаны некоторые предварительные сведения о задаче типа Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Во втором разделе исследована линейная обратная задача с постоянным неизвестным параметром в уравнении. Третий раздел посвящен исследованию корректности линейной обратной задачи с переменным неизвестным параметром в рассматриваемом интегро-дифференциальном уравнении в банаховом пространстве. Наконец, в последнем разделе абстрактные результаты проиллюстрированы на примере одной обратной задачи для уравнения в частных производных.

1. ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A , $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — его спектр, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s)ds$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля

$$(D^{m,K} z)(t) := D^m(J^K z)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)z(s)ds,$$

где D^m — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.1. При $K(t) = \frac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)}I$ интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля является производной Римана—Лиувилля D^α порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

При $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C((0, T]; \mathcal{Z})$ рассмотрим задачу типа Коши

$$(D^{k,K} z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.1)$$

для уравнения

$$(D^{m,K} z)(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T]. \quad (1.2)$$

Решением задачи (1.1), (1.2) называется такая функция $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z}) \cap C((0, T]; \mathcal{Z})$, что $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1.1) и равенство (1.2).

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$ обозначим преобразование Лапласа через $\hat{h}$. Сформулируем следующее условие.

($\hat{K}$) Пусть при некотором $R_0 > 0$ существует однозначная аналитическая функция $\hat{K} : \Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \pi, |\mu| \geq R_0\} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — преобразование Лапласа для $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

При этом для любого $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует обратный оператор $\hat{K}(\lambda)^{-1}$ и выполняется условие

$$\exists \chi \in (-1, 0) \quad \exists c > 0 \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\hat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geq c|\lambda|^\chi.$$

Замечание 1.2. Из того факта, что $\chi > -1$ в условии $(\hat{K})$, следует наличие особенности в нуле типа $t^{-\chi-1}$ у функции $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$; случай $\chi \geq 0$ невозможен, так как при этом особенность в нуле была бы неинтегрируемой. Интегро-дифференциальные операторы, называемые производной Капуто—Фабрицио [9], Атанганы—Балеану [8], содержат непрерывное в нуле ядро свертки K (экспонента и функция Миттаг-Леффлера, соответственно), не удовлетворяющее условию $(\hat{K})$, и уравнения с такими операторами в рассматриваемый в данной работе класс не входят.

Теорема 1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\hat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1.1), (1.2), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds, \quad (1.3)$$

где

$$Z_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{m-1-k} (\lambda^m \hat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$\gamma = \gamma_R \cup \gamma_{R,+} \cup \gamma_{R,-}$ — положительно ориентированный контур, состоящий из $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\gamma_{R,\pm} := \{re^{\pm i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $R > R_0$ достаточно большое.

Доказательство. Основная часть доказательства может быть найдена в [10]. Здесь докажем лишь единственность решения.

Пусть существует решение y задачи $(D^{0,K}y)(0) = z_0 \in \mathcal{Z}$, $(D^{k,K}y)(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения $(D^{m,K}y)(t) = Ay(t)$. По определению решения $J^K y \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, поэтому $J^K y = J^m Ay + z_0$ или $z_0 = K * y - g_m * Ay$, где

$$g_\beta(t) := \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad (f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

В частности, решением такой задачи является функция $Z_0(t)z_0$, следовательно, $z_0 = (K * Z_0 - g_m * AZ_0)z_0$ или $K * Z_0 - g_m * AZ_0 = I$ — тождественный оператор. Имеем

$$1 * y = 1 * (K * Z_0 - g_m * AZ_0)y = (K * Z_0 - g_m * AZ_0) * y = Z_0 * (K - g_m A) * y = Z_0 * z_0 = 1 * Z_0 z_0.$$

Дифференцированием получаем равенство $y(t) = Z_0(t)z_0$, $t \geq 0$.

Пусть теперь y — произвольное решение задачи $(D^{k,K}y)(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения $(D^{m,K}y)(t) = Ay(t)$, тогда $y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} Z_k(t)z_k$ является решением задачи $(D^{0,K}y)(0) = z_0$,

$$(D^{k,K}y)(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad \text{для этого уравнения. По доказанному } y(t) - \sum_{k=1}^{m-1} Z_k(t)z_k =$$

$Z_0(t)z_0$, что означает единственность решения задачи $(D^{k,K}y)(0) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для однородного уравнения $(D^{m,K}y)(t) = Ay(t)$. Отсюда следует единственность решения задачи (1.1) для неоднородного уравнения (1.2). $\square$

Замечание 1.3. В [10] при доказательстве теоремы 1.1 предполагалась непрерывность на $\mathbb{R}_+$ оператор-функции K , однако нетрудно заметить, что доказательство справедливо и для $K \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Замечание 1.4. В работе [10] при доказательстве теоремы 1.1 были показано, что существует такое $C > 0$, что при всех $t > 0$ $\|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\chi+k}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

При $\beta \in \mathbb{R}$ определим пространство $C_\beta((0, T]; \mathcal{Z}) := \{z \in C((0, T]; \mathcal{Z}) : t^\beta z(t) \text{ ограничена на } (0, T]\}$ с нормой $\|z\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})} := \sup_{t \in (0, T]} \|t^\beta z(t)\|_{\mathcal{Z}}$. Понятно, что при $\beta < 1$

$$C_\beta((0, T]; \mathcal{Z}) \subset C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z}).$$

Лемма 1.1. $C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})$ — банахово пространство.

Доказательство. Пусть последовательность $\{z_n\}$ фундаментальна в $C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})$, тогда для любого $\varepsilon \in (0, T)$ последовательность $\{t^\beta z_n(t)\}$ фундаментальна в $C([\varepsilon, T]; \mathcal{Z})$, а значит, имеет предел $x \in C([\varepsilon, T]; \mathcal{Z})$. Поэтому $x \in C((0, T]; \mathcal{Z})$, при этом функция x ограничена на $(0, T]$ как предел в суп-норме последовательности ограниченных функций. Следовательно, $z(t) := t^{-\beta}x(t) \in C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{Z})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in (0, T]} \|t^\beta z_n(t) - x(t)\|_{\mathcal{Z}} = 0.$$

□

Следствие 1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\hat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда для решения z задачи (1.1), (1.2) выполняется включение $z \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, при этом

$$\|z\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|f\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \right),$$

где C не зависит от $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, f$.

Доказательство. В силу замечания 1.4 для любого $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_1 \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} s^\chi \|s^{-\chi} f(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_2 t^\chi \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_1 t^{2\chi+m} \|f\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \leq C t^\chi \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|f\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое. □

2. ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПОСТОЯННЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим задачу

$$(D^{m,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u + g(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.1)$$

$$(D^{k,K}z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.2)$$

$$\int_0^T t^{-\chi} z(t) d\mu(t) = z_T \in \mathcal{Z}, \quad (2.3)$$

где $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $B \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $\mu \in BV([0, T]; \mathbb{C})$, т. е. μ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, T]$. Множитель $t^{-\chi}$ используется в условии переопределения (2.3) для сходимости соответствующего интеграла Римана—Стилтьеса с учетом следствия 1.1. Неизвестными в задаче являются функция z и параметр $u \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — банахово пространство. Такая задача является обратной задачей или задачей идентификации.

Решением задачи (2.1)–(2.3) называется такая пара (z, u) , что $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z}) \cap C((0, T]; \mathcal{Z})$, $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (2.2), (2.3) и равенство (2.1) при соответствующем $u \in \mathcal{U}$.

Задачу (2.1)–(2.3) будем называть *корректной*, если для любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_T \in \mathcal{Z}$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$ она имеет единственное решение (z, u) и при этом

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \right), \quad (2.4)$$

где константа C не зависит от $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_T, g$.

Замечание 2.1. Понятно, что из неравенства (2.4) и следствия 1.1 вытекает, что

$$\begin{aligned} \|z\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} + \|u\|_{\mathcal{U}} &\leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g + Bu\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} \right) + \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} + \|B\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))} \|u\|_{\mathcal{U}} \right) + \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})} \right). \end{aligned}$$

Обозначим оператор

$$\Theta := \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)B(s)dsd\mu(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}).$$

Здесь сходимость интегралов понимается по операторной норме.

Теорема 2.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})$, $B \in C_{-\chi}((0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z}))$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $\mu \in BV([0,T];\mathbb{C})$. Тогда задача (2.1)–(2.3) корректна в том и только в том случае, когда оператор Θ непрерывно обратим. В случае корректности решение имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \Theta^{-1} \left(z_T - \int_0^T t^{-\chi} \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k d\mu(t) - \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)dsd\mu(t) \right), \\ z(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)(B(s)u + g(s))ds. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставим решение (1.3) задачи (2.1), (2.2) в соотношение (2.3) и получим равенство

$$\int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)B(s)dsd\mu(t)u = z_T - \int_0^T t^{-\chi} \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k d\mu(t) - \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)dsd\mu(t),$$

из которого следует, что корректность задачи эквивалентна непрерывной обратимости оператора $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Z})$. Отсюда же следует вид решения, а из него в силу замечания 1.4 — неравенство (2.4). В частности,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)dsd\mu(t) \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq C_1 V_0^T[\mu] \sup_{t \in [0,T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} s^{\chi} \|s^{-\chi} g(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_2 V_0^T[\mu] T^{\chi+m} \|g\|_{C_{-\chi}((0,T];\mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

где $V_0^T[\mu]$ — вариация функции μ на отрезке $[0, T]$. □

Для $b \in C((0, T]; \mathbb{C}) \cap L_1(0, T; \mathbb{C})$ определим функцию

$$\theta(\nu) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{\kappa}(\lambda) - \nu)^{-1} e^{\lambda(t-s)} d\lambda b(s) ds d\mu(t), \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2.2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, при этом $K(t) = \kappa(t)I$ для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$, где $\kappa \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C})$; $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $\mathcal{U} = \mathcal{Z}$, $B = b \in C_{-\chi}((0, T]; \mathbb{C})$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$, $\mu \in BV([0, T]; \mathbb{C})$. Тогда задача (2.1)–(2.3) корректна в том и

только в том случае, когда $\theta(\nu) \neq 0$ для всех $\nu \in \sigma(A)$. В случае корректности решение имеет вид

$$u = \theta(A)^{-1} \left(z_T - \int_0^T t^{-\chi} \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k d\mu(t) - \int_0^T t^{-\chi} \int_0^t Z_{m-1}(t-s) g(s) ds d\mu(t) \right),$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s) (b(s)u + g(s)) ds.$$

Доказательство. Обозначим $B_\rho := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\}$. Без ограничения общности можно считать, что в условии $(\widehat{K})$ $R_0 \geq (4c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{\frac{1}{\chi+m}}$, тогда $B_{2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}} \subset B_{cR_0^{\chi+m}/2}$. В силу условия $(\widehat{K})$ при $\lambda \in \gamma$, где γ — контур из теоремы 1.1, и $\nu \in B_{cR_0^{\chi+m}/2}$ имеем

$$|\lambda^{-m} \widehat{\kappa}(\lambda)^{-1} \nu| \leq c^{-1} |\lambda|^{-\chi-m} |\nu| < c^{-1} R_0^{-\chi-m} |\nu| < 1/2.$$

Поэтому функция $(\lambda^m \widehat{\kappa}(\lambda) - \nu)^{-1}$, а значит, и функция $\theta(\nu)$, аналитична в круге $B_{2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}}$, содержащем спектр $\sigma(A)$ оператора A . В таком случае определена функция от оператора $\theta(A)$ и по теореме о спектральном отображении для ограниченных операторов [1, теорема 11, с. 609] имеем $\sigma(\theta(A)) = \theta(\sigma(A))$. Поэтому непрерывная обратимость оператора $\theta(A)$, т. е. соотношение $0 \notin \sigma(\theta(A))$ в точности означает, что $\theta(\nu) \neq 0$ для всех $\nu \in \sigma(A)$.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, нетрудно показать, что задача (2.1)–(2.3) корректна в том и только в том случае, когда непрерывно обратим оператор $\theta(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. $\square$

3. ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПЕРЕМЕННЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим еще одну линейную обратную задачу

$$(D^{m,K}z)(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in (0, T], \quad (3.1)$$

$$(D^{k,K}z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.2)$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t). \quad (3.3)$$

Здесь $\mathcal{Z}, \mathcal{U}$ — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$, $\Psi \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$. Неизвестными в задаче являются функции $z \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$ и $u \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$.

Задача (3.1)–(3.3) может иметь, например, смысл поиска функции состояния системы z и такой функции управления u , чтобы z удовлетворяла дополнительному условию (3.3). Такие задачи иногда называют задачами *прогноза–управления* [3].

Решением задачи (3.1)–(3.3) называется такая пара (z, u) , что $z \in L_1(0, T; \mathcal{Z}) \cap C((0, T]; \mathcal{Z})$, $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (3.2), (3.3) и равенство (3.1) при соответствующем $u \in L_1(0, T; \mathcal{U}) \cap C((0, T]; \mathcal{U})$.

Определим множество $\widehat{\Delta}_T := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, T], s \in [0, t]\}$.

Лемма 3.1. Пусть $\beta \in [0, 1]$, $h \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$, $M \in C(\widehat{\Delta}_T; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$. Тогда уравнение

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) u(s) ds + h(t)$$

имеет единственное решение $u \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$, при этом $\|u\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{U})} \leq C(M) \|h\|_{C_\beta((0, T]; \mathcal{U})}$, где константа $C = C(M)$ не зависит от h .

Доказательство. Рассмотрим оператор $F : C_\beta((0, T]; \mathcal{U}) \rightarrow C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$, действующий как

$$(Fu)(t) := \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) u(s) ds + h(t).$$

Заметим, что при всех $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \left\| t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) u(s) ds \right\|_{\mathcal{U}} &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^{-\beta} \|s^\beta u(s)\|_{\mathcal{U}} ds \leq \\ &\leq C_1 \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \|u\|_{C_\beta((0,T];\mathcal{U})} T^{1-\beta}, \end{aligned}$$

поэтому, действительно, $Fu \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$ для любого $u \in C_\beta((0, T]; \mathcal{U})$.

Пусть $T_1 \leq T$, для $u, v \in C_\beta((0, T_1]; \mathcal{U})$ имеем

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{C_\beta((0,T_1];\mathcal{U})} &= \sup_{t \in (0,T_1]} t^\beta \left\| \int_0^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) (u(s) - v(s)) ds \right\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_1}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \sup_{t \in (0,T_1]} t^\beta \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^{-\beta} s^\beta \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{U}} ds \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_1}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} B(1-\beta, 1-\beta) T_1^{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_1];\mathcal{U})} = \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_1];\mathcal{U})}, \end{aligned}$$

если взять

$$T_1 = \left(2 \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_1}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} B(1-\beta, 1-\beta) \right)^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

Здесь $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера. По теореме о сжимающем отображении существует единственная неподвижная точка u_0 отображения F в полном метрическом пространстве $C_\beta((0, T_1]; \mathcal{U})$.

Заметим, что существует такое $c > 1$, что $c^\beta(c-1)^{1-\beta} = (1-\beta)B(1-\beta, 1-\beta) > 0$. Действительно, функция $f(c) := c^\beta(c-1)^{1-\beta}$ непрерывна по c при $c > 1$, при этом $f(1) = 0$, $\lim_{c \rightarrow +\infty} f(c) = +\infty$.

Если $T_1 < T$, возьмем $T_2 = cT_1 \in (T_1, T]$ при таком $c > 1$ и рассмотрим оператор F в полном метрическом пространстве $C_{\beta, T_1}((0, T_2]; \mathcal{U}) := \{u \in C_\beta((0, T_2]; \mathcal{U}) : u(t) = u_0(t), t \in [0, T_1]\}$ с метрикой $d(u, v) = \|u - v\|_{C_\beta((0, T_2]; \mathcal{U})}$, тогда

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{C_{\beta, T_1}((0,T_2];\mathcal{U})} &= \sup_{t \in [T_1, T_2]} t^\beta \left\| \int_{T_1}^t (t-s)^{-\beta} M(t, s) (u(s) - v(s)) ds \right\|_{\mathcal{U}} \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \sup_{t \in [T_1, T_2]} t^\beta \int_{T_1}^t (t-s)^{-\beta} s^{-\beta} s^\beta \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{U}} ds \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \sup_{t \in [T_1, T_2]} t^\beta T_1^{-\beta} \frac{(t-T_1)^{1-\beta}}{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} \leq \\ &\leq \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\beta \frac{(T_2 - T_1)^{1-\beta}}{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} = \\ &= \sup_{(t,s) \in \widehat{\Delta}_{T_2}} \|M(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \frac{c^\beta(c-1)^{1-\beta}}{1-\beta} T_1^{1-\beta} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} = \frac{1}{2} \|u(s) - v(s)\|_{C_\beta((0,T_2];\mathcal{U})} \end{aligned}$$

в силу выбора T_1 и c . Поэтому существует единственная неподвижная точка u_0 отображения F в $C_\beta((0, T_2]; \mathcal{U})$.

Если $T_2 < T$, возьмем $T_3 = c^2 T_1$ и повторим рассуждения. Поскольку $c > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n T_1 = \infty$, и за конечное число шагов мы исчерпаем отрезок $[0, T]$. $\square$

Теорема 3.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, K удовлетворяет условию $(\hat{K})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $g \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$, $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z}))$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$, при почти всех $t \in (0, T)$ $\Phi K(t) = L(t)\Phi$ для некоторого $L \in L_1(0, T; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$, при всех $t \in [0, T]$ существует обратный оператор $(\Phi B(t))^{-1}$, при этом $(\Phi B(t))^{-1} \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$, $\Psi, D^{m,L}\Psi \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$, $D^{k,L}\Psi(0) = \Phi z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда задача (3.1)–(3.3) имеет единственное решение $(z, u) \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z}) \times C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$, при этом

$$\|z\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|u\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \right),$$

где C не зависит от z_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, g , Ψ .

Доказательство. Подействуем оператором Φ на обе части уравнения (3.1) и получим

$$\begin{aligned} \Phi(D^{m,K}z)(t) &= (D^{m,L}\Phi z)(t) = (D^{m,L}\Psi)(t) = \Phi B(t)u(t) + \Phi g(t) + \\ &+ \Phi A \left(\sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)B(s)u(s)ds + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)ds \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{\chi} M(t,s)u(s)ds + h(t), \quad (3.4)$$

где $M(t,s) := -(t-s)^{-\chi}(\Phi B(t))^{-1}\Phi A Z_{m-1}(t-s)B(s)$,

$$h(t) := (\Phi B(t))^{-1} \left[(D^{m,L}\Psi)(t) - \Phi A \left(\sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)g(s)ds \right) - \Phi g(t) \right].$$

В силу замечания 1.4 имеем $\|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\chi+k}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, в частности, $\|Z_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ct^{\chi}$, поэтому $Z_0 \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ и $h \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})$. Отсюда же следует, что $M \in C(\hat{\Delta}; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. По лемме 3.1 получаем существование единственного решения $u \in C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})$ уравнения (3.4), а значит, и обратной задачи (3.1)–(3.3), и выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} &\leq C\|h\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} \leq C_1\|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} + C_2\|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \\ &+ C_3 \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_4 \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi+m-1} s^{\chi} \|s^{-\chi}g(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq C_5 \left(\|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} \right) + C_5 T^{\chi+m} \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|z\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \|Z_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + C_6 \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi} s^{\chi} \|s^{-\chi}u(s)\|_{\mathcal{U}} ds + \\ &+ C_7 \sup_{t \in (0, T]} t^{-\chi} \int_0^t (t-s)^{\chi} s^{\chi} \|s^{-\chi}g(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq C_8 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|u\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \right) \leq \\ &\leq C_9 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{Z})} + \|D^{m,L}\Psi\|_{C_{-\chi}((0, T]; \mathcal{U})} \right). \end{aligned}$$

□

Замечание 3.1. Ясно, что утверждение теоремы 3.1 означает корректность задачи (3.1)–(3.3).

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

При $\beta \in (0, 1)$ возьмем $K_\beta(t) := t^{\beta-1}E_{1,\beta}(t)$ и определим оператор свертки и интегро-дифференциальный оператор

$$J^\beta h(t) := \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{1,\beta}(t-s) h(s) ds, \quad \beta > 0, \quad D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t), \quad m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N},$$

где используется функция Миттаг-Леффлера

$$E_{1,\beta}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\beta)}.$$

Имеем $K(t) = K_{m-\alpha}(t)I = t^{m-\alpha-1}E_{1,m-\alpha}(t)I$, $\widehat{K}_{m-\alpha}(\lambda) = (\lambda-1)^{-1}\lambda^{1-m+\alpha}$, поэтому выполняется условие $(\widehat{K})$ с константами $R_0 \geq 1$, $\chi = \alpha - m \in (-1, 0)$.

Пусть заданы многочлены

$$P(x) = \sum_{j=0}^n p_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^n q_j x^j$$

с коэффициентами $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $p_n \neq 0$, ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\xi_0 \in \Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^k J_t^{m-\alpha} v(\xi, 0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.1)$$

$$\Delta^l v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.2)$$

$$P(\Delta) D_t^m J_t^{m-\alpha} v(\xi, t) = Q(\Delta) v(\xi, t) + b(\xi, t) w(t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (4.3)$$

$$v(\xi_0, t) = \psi(t), \quad t \in (0, T]. \quad (4.4)$$

Здесь нижний индекс t означает действие интегрального или дифференциального оператора по переменной t , $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$, Δ — оператор Лапласа по переменным $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, $b : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : (0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ — заданные функции. Определению подлежат z и w .

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора Лапласа с условием Дирихле на границе $\partial\Omega$. Если $P(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то задача (4.1)–(4.4) редуцируется к задаче (3.1)–(3.3), если взять $\mathcal{Z} = \{y \in H^{2n}(\Omega) : \Delta^l y(\xi) = 0, l = 0, 1, \dots, n-1\}$, $A := P(\Delta)^{-1}Q(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, так как степень многочлена P не меньше степени многочлена Q , $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, $B(t) = P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$ — оператор умножения на функцию $P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$, $u(t) = w(t) \in \mathbb{C}$ при $t \in (0, T]$, $z_k = v_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\Phi y = y(\xi_0)$, $\Psi(t) = \psi(t)$.

Если выполнено непрерывное вложение $\mathcal{Z} \subset C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, обозначим оператор следа $J_{\xi_0} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $J_{\xi_0} y := y(\xi_0)$ для $y \in \mathcal{Z}$.

Теорема 4.1. Пусть $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $d < 4n$, $P(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $p_n \neq 0$, $b \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $\xi_0 \in \Omega$, $J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$, $v_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\psi, D^{m,K}\psi \in C_{m-\alpha}([0, T]; \mathbb{C})$, $D^{k,K}\psi(0) = v_k(\xi_0)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (4.1)–(4.4).

Доказательство. Тот факт, что K удовлетворяет условию $(\widehat{K})$ с константами $R_0 \geq 1$, $\chi = \alpha - m \in (-1, 0)$, отмечен выше, то же касается включения $A := P(\Delta)^{-1}Q(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Имеем также $B(t) = P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}; \mathcal{Z})$, поскольку $b(\cdot, t) \in L_2(\Omega)$ при $t \in [0, T]$, $P(\Delta)^{-1}[L_2(\Omega)] \subset \mathcal{Z}$. Для любого $y \in \mathcal{Z}$ $\Phi y = y(\xi_0)$, $|y(\xi_0)| \leq C\|y\|_{\mathcal{Z}}$ в силу теоремы вложения Соболева, выполнение которой следует из неравенства $d < 4n$. Для любого $y \in \mathcal{Z}$ $\Phi K(t)y = t^{m-\alpha-1}E_{1,m-\alpha}(t)y(\xi_0) = K_{m-\alpha}(t)\Phi y$, поэтому надо взять $L(t) = K(t) = K_{m-\alpha}(t)I$. При любом $u \in \mathbb{C}$ $\Phi B(t)u = J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$, $(\Phi B(t))^{-1}$ — оператор умножения на $1/J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t)$, непрерывный на $[0, T]$ в силу условий $b \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$, так как при $t_0, t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) - J_{\xi_0} P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t_0)| &\leq C_1 \|P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t) - P(\Delta)^{-1}b(\cdot, t_0)\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq C_2 \|b(\cdot, t) - b(\cdot, t_0)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Поэтому выполняются все условия теоремы 3.1, которая и влечет требуемое утверждение. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Иностр. лит., 1962.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
3. Прилепко А. И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз—управление и прогноз—наблюдение эволюционных уравнений. I // Дифф. уравн. — 2005. — 41, № 11. — С. 1560–1571.
4. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
6. Федоров В. Е., Годова А. Д. Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 1. — С. 166–184.
7. Ashurov R. R., Kadirkulov B. J., Turmetov B. Kh. On the inverse problem of the Bitsadze—Samarskii type for a fractional parabolic equation // Пробл. анализа. — 2023. — 12, № 3. — С. 20–40.
8. Atangana A., Baleanu D. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model // Thermal Sci. — 2016. — 20. — С. 763–769.
9. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel // Progr. Fract. Differ. Appl. — 2015. — 1, № 2. — С. 1–13.
10. Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T. Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — № 2. — С. 93–107.
11. Fedorov V. E., Ivanova N. D. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — 20, № 3. — С. 706–721.
12. Fedorov V. E., Kostić M. Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov—Caputo derivative // Differ. Equ. — 2020. — 56, № 12. — С. 1613–1627.
13. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann—Liouville derivative in the sectorial case // Math. Methods Appl. Sci. — 2021. — 44, № 15. — С. 11961–11969.
14. Glushak A. V. On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order // Math. Notes. — 2010. — 87, № 5–6. — С. 654–662.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam—Boston—Heidelberg: Elsevier Science Publ., 2006.
16. Kostić M. Abstract Volterra integro-differential equations. — Boca Raton: CRC Press, 2015.
17. Kostin A. B., Piskarev S. I. Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2021. — 29, № 2. — С. 267–281.
18. Orlovsky D. G. Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann—Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. СВУ. Сер. Мат. и физ. — 2015. — 8, № 1. — С. 55–63.
19. Orlovsky D. G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1205, № 1. — 012042.
20. Orlovsky D., Piskarev S. Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2022. — 30, № 2. — С. 221–237.
21. Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. — 1971. — 19. — С. 7–15.
22. Da Prato G., Iannelli M. Linear integro-differential equations in Banach spaces // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1980. — 62. — С. 207–219.
23. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. — Basel: Springer, 1993.

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

E-mail: kar@csu.ru

А. Д. Годова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690

EDN: WWORZS

Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator

V. E. Fedorov and A. D. Godova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. In this paper, we study the questions of well-posedness of linear inverse problems for equations in Banach spaces with an integro-differential operator of the Riemann–Liouville type and a bounded operator at the unknown function. A criterion of well-posedness is found for a problem with a constant unknown parameter; in the case of a scalar convolution kernel in an integro-differential operator, this criterion is formulated as conditions for the characteristic function of the inverse problem not to vanish on the spectrum of a bounded operator. Sufficient well-posedness conditions are obtained for a linear inverse problem with a variable unknown parameter. Abstract results are used in studying a model inverse problem for a partial differential equation.

Keywords: inverse problem, integro-differential equation, Riemann–Liouville type operator, well-posedness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Government of the Chelyabinsk Region (project 24-21-20015).

For citation: V. E. Fedorov, A. D. Godova, “Linear inverse problems for integro-differential equations in Banach spaces with a bounded operator,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 679–690. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-679-690>

REFERENCES

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).
2. A. M. Nakhushev, *Drobnoe ischislenie i ego primeneniye* [Fractional Calculus and Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
3. A. I. Prilepko, “Metod polugrupp resheniya obratnykh, nelokal’nykh i neklassicheskikh zadach. Prognoz-upravlenie i prognos-nablyudenie evolyutsionnykh uravneniy. I” [Semigroup method for solving inverse, nonlocal and nonclassical problems. Forecast–control and forecast–observation of evolutionary equations. I], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 11, 1560–1571 (in Russian).
4. A. V. Pskhu, *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).
5. V. E. Fedorov and A. D. Godova, “Integro-differentsial’nye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh i analiticheskie razreshayushchie semeystva operatorov” [Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 166–184 (in Russian).
6. R. R. Ashurov, B. J. Kadirkulov, and B. Kh. Turmetov, “On the inverse problem of the Bitsadze–Samarskii type for a fractional parabolic equation,” *Probl. Analiza* [Probl. Anal.], 2023, **12**, No. 3, 20–40.
7. A. Atangana and D. Baleanu, “New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model,” *Thermal Sci.*, 2016, **20**, 763–769.



8. M. Caputo and M. Fabrizio, “A new definition of fractional derivative without singular kernel,” *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2015, **1**, No. 2, 1–13.
9. V. E. Fedorov, A. D. Godova, and B. T. Kien, “Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, No. 2, 93–107.
10. V. E. Fedorov and N. D. Ivanova, “Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, **20**, No. 3, 706–721.
11. V. E. Fedorov and M. Kostić, “Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative,” *Differ. Equ.*, 2020, **56**, No. 12, 1613–1627.
12. V. E. Fedorov, A. V. Nagumanova, and A. S. Avilovich, “A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, **44**, No. 15, 11961–11969.
13. A. V. Glushak, “On an inverse problem for an abstract differential equation of fractional order,” *Math. Notes*, 2010, **87**, No. 5–6, 654–662.
14. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Science Publ., Amsterdam–Boston–Heidelberg, 2006.
15. M. Kostić, *Abstract Volterra integro-differential equations*, CRC Press, Boca Raton, 2015.
16. A. B. Kostin and S. I. Piskarev, “Inverse source problem for the abstract fractional differential equation,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2021, **29**, No. 2, 267–281.
17. D. G. Orlovsky, “Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.* [J. Siberian Fed. Univ. Ser. Math. Phys.], 2015, **8**, No. 1, 55–63.
18. D. G. Orlovsky, “Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, **1205**, No. 1, 012042.
19. D. Orlovsky and S. Piskarev, “Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2022, **30**, No. 2, 221–237.
20. T. R. Prabhakar, “A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel,” *Yokohama Math. J.*, 1971, **19**, 7–15.
21. G. Da Prato and M. Iannelli, “Linear integro-differential equations in Banach spaces,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1980, **62**, 207–219.
22. J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Springer, Basel, 1993.
23. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Sci. Publ., Philadelphia, 1993.

V. E. Fedorov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: kar@csu.ru

A. D. Godova
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru